

Werk

Titel: Kinematische Kettengebüsche und -sterne

Autor: Werner, Michael

Jahr: 1984

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?301416052_0018|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

KINEMATISCHE KETTENGEBÜSCHE UND -STERNE

Michael Werner

Mit der Theorie der Kettengeometrien $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ gelang es in [1] die drei klassischen Geometrien von MÖBIUS, LAGUERRE und MIN-KOWSKI durch ein einheitliches Konzept zu beschreiben und in Verallgemeinerung jeder kommutativen Algebra $\mathcal{L}$ mit Einselement über einem Körper $\mathcal{A}$ eine Geometrie zuzuordnen. In den historischen Geometrien wurden Kettenmannigfaltigkeiten bereits betrachtet, so liegt bei der klassischen Möbius-Geometrie $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ umfangreiches Material über Kreismannigfaltigkeiten vor.

Als einen ersten Beitrag zu einer allgemeinen Theorie der Kettenmannigfaltigkeiten versteht sich die nachfolgende Untersuchung von Kettengebüschen und -sternen über kinematischen Algebren [3] endlicher Dimension n bei $\text{char } \mathcal{A} \neq 2$, wobei die Begriffsbildungen durch Analogien zu Geradenmannigfaltigkeiten in der Liniengeometrie motiviert sind (cf. [4] 34.). Aufbauend auf [5] läßt sich ein Kettenraum einführen, in dem die Kettenpunkte des projektiven Raumes $P^{3n-3}(\mathcal{A})$ sind. In Spezialfällen kann man statt dieses Kettenraumes das zu ihm projektiv-äquivalente Polarmodell der Kettengeometrie heranziehen, das sich mittels der Trägerquadratik aus dem Modell in [2] konstruieren läßt.

0. Kettengeometrische Grundbegriffe

$\mathcal{L}$ ist eine kommutative Algebra mit Einselement über einem Körper $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ ihre Einheitsgruppe. $P(\mathcal{L}) = \{\mathcal{R}(u, v) : \langle u, v \rangle = \mathcal{L}\}$ ist die projektive Gerade über $\mathcal{L}$ ($\langle \dots \rangle$ Idealbildung) mit $\mathcal{R}(u, v) = \{(ru, rv) : r \in \mathcal{R}\}$. $P(\mathcal{A})$ und der affine Raum $\mathcal{L}$ lassen sich kanonisch in $P(\mathcal{L})$ einbetten. Die regulären $(2, 2)$ -Matrizen über $\mathcal{L}$ induzieren Punktabbildungen, die die projektive Gruppe $\Gamma(\mathcal{L})$ von $P(\mathcal{L})$ bilden. Für $\mathcal{L} \neq \mathcal{A}$ ist $P(\mathcal{L})$ die Punkt-

und $\{\gamma(P(\mathcal{K})): \gamma \in \Gamma(\mathcal{L})\}$ die Kettenmenge der Kettengeometrie $\Sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. Zwei Punkte $\mathcal{K}(u, v), \mathcal{K}(u', v')$ sind genau dann parallel, wenn $uv' - u'v \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{K}$ gilt. Zwei Ketten a, b berühren sich genau dann im Punkt X , wenn es ein $\gamma \in \Gamma(\mathcal{L})$ mit $\gamma(X) = \mathcal{K}(1, 0)$ und $\gamma(a) \cap \mathcal{L} \cap \gamma(b) \cap \mathcal{L}$ gibt. Die Theorie der Kettengeometrien findet sich in [1]. Es sei hier stets $n = \dim_{\mathcal{K}} \mathcal{L}$ endlich und $\text{char } \mathcal{K} \neq 2$.

$\Sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ heißt genau dann kinematisch, wenn $\mathcal{L}$ es ist: $x^2 \in \mathcal{K} + \mathcal{K}x \quad \forall x \in \mathcal{L}$ [3]. Es gibt dann einen involutorischen Automorphismus - der Algebra, $N(x) = \bar{x}$ ist eine quadratische Form. Die kinematischen Kettengeometrien zerfallen in die (von selbst zweidimensionalen) Minkowski-Geometrien ($\mathcal{L}$ isomorph zu den Doppelzahlen über $\mathcal{K}$, komponentenweise Addition und Multiplikation), in die zweidimensionalen Möbius-Geometrien ($\mathcal{L}$ = quadratische Körpererweiterungen von $\mathcal{K}$) und in die kinematischen Laguerre-Geometrien ($\mathcal{L}$ lokal mit $\mathcal{L} = \mathcal{K} + \mathcal{J}, \mathcal{J}^2 = 0, \mathcal{J}$ maximales Ideal). Über jedem Körper $\mathcal{K}$ gibt es (bis auf geometrische Isomorphie) genau eine Minkowski-Geometrie. Die Anzahl der kinematischen Möbius-Geometrien entspricht der Anzahl der Isomorphieklassen quadratischer Körpererweiterungen. Zu jedem Körper und zu jeder Dimension n gibt es genau eine kinematische Laguerre-Geometrie.

1. Polarmodell

Im Hotje-Modell [2]

$$h: \begin{cases} P(\mathcal{L}) \longleftrightarrow Q \setminus R \\ \mathcal{K}(u, v) \rightarrow \mathcal{K}^X(u\bar{v}, N(u), N(v)) \end{cases}$$

$$Q: N(x) = x_{n+1}x_{n+2}$$

$$R = \{\mathcal{K}^X(x, 0, 0): x \in \mathcal{L} \setminus (\mathcal{K} \cup \{0\}) \wedge x\bar{x}' + \bar{x}x' = 0 \quad \forall x' \in \mathcal{L}\}$$

einer n -dimensionalen kinematischen Kettengeometrie $\Sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ im $(n+1)$ -dimensionalen projektiven Raum

$P^{n+1}(\mathcal{K}) = (\mathcal{L} \times \mathcal{K} \times \mathcal{K} \setminus \{(0, 0, 0)\}) / \mathcal{K}^X$ über $\mathcal{K}$ ist das h -Bild jeder Kette ein ebener Schnitt der Quadrik Q .

Zwei verschiedene Punkte sind genau dann parallel, wenn ihre h-Bilder auf einer Erzeugenden von Q liegen. Ein ebener Schnitt von Q ist genau dann h-Bild einer Kette, wenn er mindestens drei Punkte, aber keine Erzeugende enthält.

Die Quadrik Q des Hotje-Modells ist genau im Möbius- und Minkowski-Fall regulär. Das Hotje-Modell induziert dann das Polarmodell der entsprechenden Kettengeometrie: Das Modell eines Punktes der Kettengeometrie bleibt unverändert; der einer Kette entsprechenden Schnittebene von Q wird ihr Pol bezüglich Q zugeordnet. Die Inzidenz realisiert sich im Polarmodell durch die Konjugiertheit.

2. Kettenraum

Laut [5] läßt sich jede Kette einer kinematischen Kettengeometrie $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ als Menge aller Punkte $\mathcal{K}(u, v)$ mit

$$(u, v)M \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = 0$$

darstellen, wobei M eine schiefhermitesche (2,2)-Matrix über $\mathcal{L}$ ist. Genau dann beschreibt eine solche Matrix M eine Kette, wenn es ein $w \in \mathcal{K}$ mit $\det M = w\bar{w}$ gibt; genau dann bestimmen M und M' die gleiche Kette, wenn es ein $k \in \mathcal{K}^*$ mit $M' = kM$ gibt.

Jede (2,2)-Matrix über einer n-dimensionalen Algebra $\mathcal{L}$ über einem Körper $\mathcal{A}$ kann man als Vektor in einem 4n-dimensionalen Vektorraum über $\mathcal{A}$ auffassen. Demnach läßt sich jeder Kette einer n-dimensionalen kinematischen Kettengeometrie $\Sigma(\mathcal{A}, \mathcal{L})$ ein Punkt des projektiven Raumes $P^{4n-1}(\mathcal{A})$ zuordnen. Die Eigenschaft $M + \bar{M}^T = 0$ hat eine Dimensionsreduzierung zur Folge. Gemäß [3] gilt $\mathcal{L} = \mathcal{A} + J$ mit $J = \{x \in \mathcal{L} : \bar{x} = -x\}$. Zerlegt man $x \in \mathcal{L}$ in der Form (x_1, x_2) mit $x_1 \in \mathcal{A}$ und $x_2 \in J$, so hat M die Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} (0, \alpha) & (\beta, \gamma) \\ (-\beta, \gamma) & (0, \delta) \end{pmatrix}$$

mit $\alpha, \gamma, \delta \in J$ und $\beta \in \mathcal{A}$. Damit liegt der Kettenraum (= Gesamtheit der den Ketten zugeordneten Punkte) im $P^{2n-3}(\mathcal{A})$.

Man überzeugt sich, daß im Möbius- und Minkowski-Fall die Koeffizienten der Ebenengleichung, die einer durch M bestimmten Kette via h zugewiesen werden, linear von den Koordinaten der Matrizenelemente abhängen. Damit ist das Polarmodell projektiv-äquivalent zum Kettenraum.

Im Minkowski- und Laguerre-Fall ist die Existenz eines $w \in \mathcal{K}$ mit $\det M = \overline{w}w$ gleichbedeutend mit $\det M \neq 0$. Der Kettenraum ist hier das Komplement der durch $\det M = 0$ induzierten Quadrik im $P^{3n-3}(\mathcal{K})$, bei der es sich im Minkowski-Fall bezogen auf das Polarmodell um die reguläre Quadrik des Hopfe-Modells und im Laguerre-Fall um ein zusammenfallendes Hyperebenenpaar handelt. Im Laguerre-Fall ist der Kettenraum also ein ganzer affiner Raum. Man liest ab, daß es im Minkowski- bzw. Laguerre-Fall $|\mathcal{K}|^3 - |\mathcal{K}|$ bzw. $|\mathcal{K}|^{3n-3}$ Ketten gibt. Im Möbius-Fall gibt es übrigens $|\mathcal{K}|^3 + |\mathcal{K}|$ Ketten; hieraus folgt, daß sich bei endlichem $\mathcal{K}$ auch im Möbius-Fall bezüglich des Polarmodells der Kettenraum als Komplement von Q ergibt.

Die Spur eines Objektes des $P^{3n-3}(\mathcal{K})$ im Kettenraum wird als entsprechendes Objekt des Kettenraumes bezeichnet (z.B. Ebene, Kegel).

Ist G eine Matrix einer Abbildung γ aus $\Gamma(\mathcal{K})$, so wird das γ -Bild einer durch M beschriebenen Kette durch $G^{-1T} \overline{MG}^{-1}$ beschrieben, γ induziert eine projektive Bijektion des Kettenraumes.

3. Kettensterne

Die Gesamtheit aller Ketten durch einen festen Punkt X bildet den Kettenstern mit Trägerpunkt X .

Im Möbius- und Minkowski-Fall ziehen wir das Polarmodell heran. Da sich die Inzidenz im Polarmodell durch die Konjugiertheit realisiert, liegen die Modelle aller Ketten, die mit dem Punkt X inzidieren, in der Tangentialebene von Q in $h(X)$. Mit Ausnahme von $h(X)$ im Möbius-Fall und den beiden Erzeugenden durch $h(X)$ im Minkowski-Fall entsprechen den Punkten der Tangentialebene

auch Ketten.

Die Inzidenz einer Kette mit $\mathcal{K}(1,0)$ ist mit $\alpha = 0$ äquivalent; durch diese Gleichung wird eine $(2n-2)$ -Ebene im $P^{3n-3}(\mathcal{K})$ festgelegt.

Satz 1. Ein Kettenstern mit Trägerpunkt X realisiert sich im Kettenraum als $(2n-2)$ -Ebene. Im Laguerre-Fall handelt es sich im $P^{3n-3}(\mathcal{K})$ um eine ganze affine $(2n-2)$ -Ebene. Im Möbius- bzw. Minkowski-Fall handelt es sich im Polarmodell um die im Berührungspunkt $h(X)$ punktierte bzw. im Erzeugendenpaar durch ihn geschnittene Tangentialebene an Q in $h(X)$.

Wir betrachten jetzt eine Sternuntermannigfaltigkeit. Ein Berührbündel mit Trägerkette a und Trägerpunkt $X \in a$ besteht aus allen Ketten, die a in X berühren. Bei festgehaltenem Berührungspunkt ist die Berührrelation eine Äquivalenzrelation; dies führt dazu, daß die Berührbündel eine Partition des Kettensterns bilden.

Betrachten wir zunächst den Möbius- bzw. Minkowski-Fall. Zwei Ketten berühren sich genau dann, wenn sich ihre Modellkegelschnitte berühren. Das ist genau dann der Fall, wenn sich die Schnittebenen in einer Tangente von Q schneiden. Das Ebenenbündel durch die Tangente enthält außer der Tangentialebene im Berührungspunkt nur Ebenen, die Q in Kettenmodellen schneiden. Das Polarsystem führt das Ebenenbündel durch die Tangente an $h(a)$ in $h(X)$ in die Verbindungsgerade von $h(X)$ mit dem Pol der Trägerebene von $h(a)$ über. Im Laguerre-Fall ist Berührung von $P(\mathcal{K})$ in $\mathcal{K}(1,0)$ mit $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ äquivalent.

Satz 2. Ein Berührbündel realisiert sich als $(n-1)$ -Ebene des Kettenraumes. Im $P^{3n-3}(\mathcal{K})$ liegt ein ganzer affiner Raum der Dimension $n-1$ vor. Im Möbius- und Minkowski-Fall realisiert sich im Polarmodell ein Berührbündel (a, X) als in $h(X)$ punktierte Tangente an Q in $h(X)$ durch den Modellpunkt von a .

Bei $\Sigma(R, C)$ ist ein Berührbündel ein parabolisches Kreisbündel. Der Schnitt von zwei Kettensternen ist bei nicht parallelen Trägerpunkten X, Y die Gesamtheit aller Ketten durch X, Y ; diese Kettenmannigfaltigkeit realisiert sich bei $n = 2$ als Gerade im

Kettenraum, bei $\Sigma(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt ein elliptisches Kreisbüschel vor.

4. Kettengebüsche bei $n = 2$

Alle Ketten, die eine feste Kette a in genau einem Punkt schneiden oder mit ihr zusammenfallen, bilden ein Kettengebüsch 1. Art. Bei $n = 2$ ist dies wegen der in diesem Fall gegebenen Schärfe der Berührrelation gleichbedeutend mit der folgenden Definition. Alle Ketten, die eine feste Kette a berühren, bilden ein Kettengebüsch 2. Art. Genau für $n > 2$ und $\mathcal{K} \neq \mathcal{K}^x$ ist bei gleicher Trägerkette a das Gebüsch 2. Art eine echte Untermannigfaltigkeit des Gebüsches 1. Art. Das Gebüsch 2. Art mit Trägerkette a ist die Vereinigung aller Berührbündel (a, X) , wobei der Punkt X die Kette a durchläuft.

Im Möbius- und Minkowski-Fall realisiert sich ein Kettengebüsch 1. bzw. 2. Art im Polarmodell als Spur des Tangentialkegels vom Modellpunkt der Kette a an Q im Kettenraum. Im $P^3(\mathcal{K})$ handelt es sich um den Tangentialkegel, der um seine Berührkurve $(= h(a))$ reduziert ist (affiner Kegel). Man beachte das Resultat über die Berührbündel aus dem vorangehenden Abschnitt, sie entsprechen den Kegelerzeugenden. Im Laguerre-Fall betrachten wir $a = P(\mathcal{K})$. Notwendig und hinreichend dafür, daß eine Kette $P(\mathcal{K})$ in genau einem Punkt $\neq \mathcal{K}(1,0)$ schneidet, ist die Existenz genau einer Lösung $k \in \mathcal{K}$ von $\alpha k^2 + 2\gamma k + \delta = 0$, wobei $\alpha \neq 0$ ist. Das ist mit $\gamma^2 - \alpha\delta = 0$, $\alpha \neq 0$ gleichbedeutend. Eine Kette berührt $P(\mathcal{K})$ genau dann in $\mathcal{K}(1,0)$, wenn $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ gilt. Insgesamt erhält man im $P^3(\mathcal{K})$ eine reguläre affine Quadrik.

Satz 3. Bei $n = 2$ realisiert sich jedes Kettengebüsch 1. bzw. 2. Art als affine Quadrik im Kettenraum. Im $P^3(\mathcal{K})$ selbst handelt es sich um eine ganze affine Quadrik, die im Möbius- und Minkowski-Fall singulär und im Laguerre-Fall regulär ist. Im Möbius- und Minkowski-Fall hat man im Polarmodell den um seine Berührkurve $(= h\text{-Bild der Trägerkette})$ reduzierten Tangentialkegel vom Modellpunkt der Trägerkette an Q .

Bemerkenswert ist das komplementäre Verhalten hinsichtlich Regula-

rität bzw. Singularität bei der Quadrik Q des Hotje-Modells und der Quadrik eines Gebüsches im Kettenraum.

Ein Kettengebüsch 3. Art wird von allen Ketten gebildet, die eine feste Kette a schneiden. Bei gleicher Trägerkette enthält das Gebüsch 3. Art die Gebüsch 1. und 2. Art als echte Untermannigfaltigkeiten. Das Gebüsch 3. Art ist die Vereinigung aller Sterne mit Trägerpunkt $X \in a$.

Bezogen auf das Polarmodell handelt es sich um die Spur jener Tangentialebenenschar im Kettenraum, die durch die Punkte von $h(a)$ bestimmt wird. Diese Ebenenschar bildet eine projektive Kurve zweiter Klasse im Dualraum des $P^3(\mathcal{K})$ und hüllt den Tangentialkegel vom Modellpunkt von a an Q ein.

Satz 4. Im Möbius- und Minkowski-Fall entspricht einem Kettengebüsch 3. Art ein dualer Kegelschnitt, im Kettenraum hüllt es das zugehörige Gebüsch 1. Art ein.

LITERATUR

- [1] BENZ, W.: Vorlesungen über Geometrie der Algebren, 1973.
- [2] HOTJE, H.: Einbettung gewisser Kettengeometrien in projektive Räume. J. Geom. 5 (1974), 85-94.
- [3] KARZEL, H.: Kinematische Algebren und ihre geometrischen Ableitungen. Abh. Math. Sem. Hamburg 41 (1974), 158-171.
- [4] PICKERT, G.: Analytische Geometrie, 1967.
- [5] WERNER, M.: Eine Gleichungsdarstellung kinematischer Ketten. J. Geom. 20 (1983), 44-46.

Manuskripteingang: 23. 9. 1983

VERFASSER: Michael Werner, Stierlenstr. 3, D-7000 Stuttgart 60

