Beiträge zur Algebra und Geometrie
18(1984), 101-113

ÜBER DIREKTE PRODUKTE VON k-REGULÄREN p-GRUPPEN

Wolfgang Bannuscher

In Verallgemeinerung des von P. HALL in [6] und [7] eingeführten Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen wurden in [2] und [3] sogenannte k-reguläre p-Gruppen untersucht.

Definition: Eine p-Gruppe $\mathcal{G}$ heißt k-regulär, falls für alle $X,Y \in \mathcal{G}$ gilt

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} \prod_i D_i^{p^k}$$

mit geeigneten $D_i \in \langle X,Y\rangle'$.

Für k=1 stimmt diese Definition mit der Definition der Regularität einer p-Gruppe im Sinne von P. HALL überein.
In [2] und [3] wurden alle wesentlichen klassischen Aussagen von P. HALL auf k-Regularität verallgemeinert. Es wurde erkannt, daß sich die k-Regularität von zwei p-Gruppen im allgemeinen nicht auf ihr direktes Produkt vererbt. In [3] (Satz 11,S.89) wurde auch in Verallgemeinerung eines Satzes von GRÜN [5] gezeigt:

Satz 1: Seien $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ k-reguläre p-Gruppen. Ist $\mho_k(\mathcal{G}_1')=\mathcal{E}$ oder $\mho_k(\mathcal{G}_2')=\mathcal{E}$, dann ist $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$ k-regulär.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine gewisse Art Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, insbesondere k-Regularität von 2-Gruppen zu untersuchen sowie ein k-Regularitätskriterium herzuleiten.

Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

A,B,... Gruppenelemente; $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ Gruppen bzw. Untergruppen; E Einheitselement; $\langle\mathfrak{M}\rangle$ die aus $\mathfrak{M}$ erzeugte Untergruppe, wobei $\mathfrak{M}$ Teilmenge einer Gruppe ist; $\mathcal{E}=\langle E\rangle$; $\mathcal{G}\times\mathcal{H}$ direktes Produkt der Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ ist Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{H} < \mathfrak{G}$: $\mathfrak{H} \leq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$; $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ $\mathfrak{H}$ ist Normalteiler der Gruppe $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{H} \triangleleft \mathfrak{G}$: $\mathfrak{H} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H} \neq \mathfrak{G}$; ord A Ordnung des Gruppenelementes A; $|\mathfrak{G}|$ Ordnung der Gruppe $\mathfrak{G}$; $A^B = B^{-1}AB$; $\mathfrak{M}^G = \{M^G \mid M \in \mathfrak{M}\}$; $[A,B] = A^{-1}B^{-1}AB$; $[\mathfrak{A},\mathfrak{B}] = \langle [A,B] \mid A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B} \rangle$; $\mathfrak{G}' = [\mathfrak{G},\mathfrak{G}]$; $Z_j(\mathfrak{G})$ j-tes Glied der absteigenden Zentralreihe der Gruppe $\mathfrak{G}$; $Z(\mathfrak{G})$ Zentrum der Gruppe $\mathfrak{G}$; $\Phi(\mathfrak{G})$ Frattinigruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$; $c(\mathfrak{G})$ Nilpotenzklasse der Gruppe $\mathfrak{G}$; (a,b) größter gemeinsamer Teiler der ganzen rationalen Zahlen a und b;

$\mho_k(\mathfrak{G}) = \langle X^{p^k} \mid X \in \mathfrak{G} \rangle$.

Bevor wir mit unseren Untersuchungen beginnen, betrachten wir eine Klasse von p-Gruppen, auf die wir uns durch Spezialisierung der Parameter in mehrfacher Weise in dieser und nachfolgenden Arbeiten beziehen werden.

<u>Beispiel 1:</u> Es sei k eine natürliche Zahl und $\mathfrak{A} = \langle A_1, \ldots, A_{p^k} \rangle$ eine abelsche p-Gruppe (Man beachte: $A_1, \ldots, A_{p^k}$ bilden nicht notwendig eine Basis von $\mathfrak{A}$.) mit den folgenden Eigenschaften:

(i) ord A_1 beliebig, ord $A_i \leq p^k$ für $i=2,\ldots,p$;

ord $A_j \leq p^{k-1}$ mit $p^l < j \leq p^{l+1}$ für $p < j \leq p^k$

(für $j > p^k$ sei $A_j = E$);

(ii) Es existiere ein Automorphismus α von $\mathfrak{A}$ derart, daß

$$A_i^\alpha = A_i A_{i+1}$$

für alle i mit $1 \leq i \leq p^k$ ist.

Dann gelten im semidirekten Produkt $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\langle X \rangle$ mit $A^X = A^\alpha$ für alle $A \in \mathfrak{A}$ und ord X = ord α folgende Aussagen:

(1) ord $X \mid p^k$, so daß $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe ist;

(2) $$(XA_1)^{p^k} = X^{p^k} A_1^{p^k} \prod_{j=1}^{k} A_{p^j}^{\binom{p^k}{p^j}}.$$

<u>Beweis</u>: (1) Wegen $\mathfrak{G}' \leq \mathfrak{A}$ haben wir $\mathfrak{G}'' = \mathfrak{E}$. Mit Lemma 2.1.1.(v) aus [1] erhält man dann

$$[A_1, X^{p^k}] = A_2^{\binom{p^k}{1}} \cdots A_p^{\binom{p^k}{p-1}} A_{p+1}^{\binom{p^k}{p}} \cdots A_{p^2}^{\binom{p^k}{p^2-1}} \cdots A_{p^k}^{\binom{p^k}{p^k-1}}$$

Nach Voraussetzung (i) verschwinden sämtliche Faktoren auf der rechten Seite dieser Gleichung, so daß $[A_1, X^{p^k}]=E$ gilt. Sei nun $1<j\leq p^k$ und bereits $[A_{j-1}, X^{p^k}]=E$ bewiesen. Wir haben dann

$$A_{j-1}^{X^{p^k+1}} = A_{j-1}^{X} = A_{j-1}A_j .$$

Also gilt $A_j = A_{j-1}^{-1} A_{j-1}^{X^{p^k+1}}$, woraus

$$A_j^{X^{p^k}} = (A_{j-1}^{X^{p^k}})^{-1}(A_{j-1}^{X^{p^k}})^{X^{p^k+1}}$$

folgt. Nach Induktionsannahme bedeutet das

$$A_j^{X^{p^k}} = A_{j-1}^{-1} A_{j-1}^{X^{p^k+1}} = A_{j-1}^{-1} A_{j-1}^{X} = A_{j-1}^{-1} A_{j-1} A_j = A_j,$$

mithin haben wir

$$[A_j, X^{p^k}]=E,$$

d.h. X^{p^k} zentralisiert $\mathfrak{A}$. Nach Definition von X folgt $X^{p^k}=E$.

(2) Die Behauptung ergibt sich aus [8](III.,10.9 b),S.330) und unserer Voraussetzung (i).

<u>Definition:</u> Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt n-abelsch, falls für alle $X,Y\in\mathfrak{G}$ stets $(XY)^n=X^nY^n$ gilt.

Ist $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe und p^k-abelsch, so ist $\mathfrak{G}$ offenbar k-regulär. Faktor-, Untergruppen und direkte Produkte von p^k-abelschen p-Gruppen sind offensichtlich p^k-abelsch. p^k-abelsche p-Gruppen wurden in [2](S.58) k-abelsch genannt, jedoch entspricht die obige Definition der allgemein üblichen Formulierung (s.[9]).

<u>Satz 2:</u> Eine p-Gruppe $\mathfrak{G}$ ist genau dann p^k-abelsch, wenn $\mathfrak{G}$ k-regulär und $\mho_k(\mathfrak{G}')=\mathfrak{E}$ ist.

<u>Beweis:</u> Ist $\mathfrak{G}$ k-regulär mit $\mho_k(\mathfrak{G}')=\mathfrak{E}$, so ergibt die Definition der k-Regularität einer p-Gruppe unmittelbar die p^k-Kommutativität von $\mathfrak{G}$.

Sei andererseits die p-Gruppe $\mathfrak{G}$ p^k-abelsch. Da die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ offensichtlich ist, haben wir nur noch $\mho_k(\mathfrak{G}')=\mathfrak{E}$

nachzuweisen. Angenommen es ist $\mho_k(\mathcal{G}')\neq \mathcal{E}$. Indem wir zu einer geeigneten Faktorgruppe von $\mathcal{G}$ übergehen, können wir annehmen, daß $|\mho_k(\mathcal{G}')|=p$ gilt. Daraus folgt offenbar $\mho_{k+1}(\mathcal{G}')=\mathcal{E}$.
Wir wenden Satz 5 a) (S.56) von [2] auf die k-reguläre p-Gruppe $\mathcal{G}$ für $\mathcal{M}=\mathcal{N}=\mathcal{G}$ und $r=s=k$ an:

$$[\mho_k(\mathcal{G}),\mho_k(\mathcal{G})] = \mho_{2k}(\mathcal{G}') \leq \mho_{k+1}(\mathcal{G}')=\mathcal{E}.$$

Damit ist $\mho_k(\mathcal{G})$ abelsch. Die p^k-Kommutativität von $\mathcal{G}$ liefert für beliebige $X,Y\in\mathcal{G}$ damit

$$[X,Y]^{p^k} = (X^{-1}Y^{-1}XY)^{p^k} = X^{-p^k}Y^{-p^k}X^{p^k}Y^{p^k} = E.$$

Also wird $\mathcal{G}'$ von Elementen erzeugt, die höchstens die Ordnung p^k haben. Damit gilt

$$\mathcal{G}'\leq\langle X\in\mathcal{G}\,|\,X^{p^k}=E\rangle ,$$

und das bedeutet wegen Satz 2 a)(S.55) aus [2] exp $\mathcal{G}' \leq p^k$, mithin $\mho_k(\mathcal{G}')=\mathcal{E}$ im Widerspruch zur Annahme.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit 2-Gruppen. Es ist bekannt (s.[8],III.,10.3 a),S.322), daß jede 1-reguläre 2-Gruppe abelsch und damit 2-abelsch ist. (Umgekehrt ist natürlich jede beliebige 2-abelsche Gruppe abelsch, denn sie besitzt nach Definition einen Endomorphismus, der jedes Element auf sein Quadrat abbildet.) Wir verallgemeinern diese Tatsache auf k-Regularität:

<u>Satz 3</u>: Eine k-reguläre 2-Gruppe ist 2^k-abelsch, d.h. die Klasse der 2^k-abelschen 2-Gruppen fällt mit der Klasse der k-regulären 2-Gruppen zusammen. Wegen Satz 1 überträgt sich bei 2-Gruppen die k-Regularität auf direkte Produkte.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathcal{G}$ eine k-reguläre 2-Gruppe. Wir beweisen durch Induktion nach $|\mathcal{G}|$, daß $\mho_k(\mathcal{G}')=\mathcal{E}$ gilt, woraus die 2^k-Kommutativität von $\mathcal{G}$ folgt. Angenommen es ist $\mho_k(\mathcal{G}')\neq\mathcal{E}$. Dann existiert ein Normalteiler $\mathcal{N}$ von $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{N}\leq \mho_k(\mathcal{G}')$ und $|\mho_k(\mathcal{G}')/\mathcal{N}|=2$. Somit ist $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ eine k-reguläre 2-Gruppe und

$$\mho_k((\mathcal{G}/\mathcal{N})')= \mho_k(\mathcal{G}'\mathcal{N}/\mathcal{N})= \mho_k(\mathcal{G}')\mathcal{N}/\mathcal{N} =\mho_k(\mathcal{G}')/\mathcal{N} \neq \mathcal{N}/\mathcal{N} .$$

Nach Induktionsannahme folgt daraus $\mathcal{N}=\mathcal{E}$, damit $|\mho_k(\mathcal{G}')| =2$ und wegen [2](Satz 5 a), S.56)

$$[\mathcal{V}_k(\mathcal{G}),\mathcal{V}_k(\mathcal{G})] = \mathcal{V}_{2k}(\mathcal{G}') \leq \mathcal{V}_{k+1}(\mathcal{G}') = \mathcal{E}.$$

Somit ist $\mathcal{V}_k(\mathcal{G})$ abelsch. Da $\mathcal{G}$ nicht 2^k-abelsch ist, existieren $X,Y\in\mathcal{G}$ mit

$$(XY)^{2^k} \neq X^{2^k}Y^{2^k}. \tag{1}$$

Nach unserer Induktionsannahme muß dann $\mathcal{G}=\langle X,Y\rangle$ gelten, und wir erhalten $\mathcal{G}'=\langle [X,Y]^T \mid T\in\mathcal{G}\rangle$.

Da $\mathcal{V}_k(\mathcal{G}')\neq\mathcal{E}$ ist, muß wegen [2](Satz 2 a), S.55) $[X,Y]^{2^k}\neq E$ sein; also gilt $\mathcal{V}_k(\mathcal{G}')=\langle [X,Y]^{2^k}\rangle$. Die k-Regularität von $\mathcal{G}$ liefert deshalb wegen (1)

$$(XY)^{2^k} = X^{2^k}Y^{2^k}[X,Y]^{2^k}.$$

Da $\langle XY,[Y,X]\rangle<\mathcal{G}$ ist, ergibt sich

$$(YX)^{2^k}=((XY)[Y,X])^{2^k}=(XY)^{2^k}[Y,X]^{2^k}=X^{2^k}Y^{2^k}[X,Y]^{2^k}[Y,X]^{2^k}$$
$$=X^{2^k}Y^{2^k}.$$

Weil auch $\langle XY,YX\rangle<\mathcal{G}$ gilt, folgt weiterhin

$$((XY)(YX))^{2^k}=(XY)^{2^k}(YX)^{2^k}=X^{2^k}Y^{2^k}[X,Y]^{2^k}X^{2^k}Y^{2^k}.$$

Aus der Kommutativität von $\mathcal{V}_k(\mathcal{G})$ erhalten wir also

$$((XY)(YX))^{2^k} = X^{2^{k+1}}Y^{2^{k+1}}[X,Y]^{2^k}. \tag{2}$$

Andererseits ist aber auch $\langle XY^2,X\rangle=\langle X,Y^2\rangle\leq\langle X,\Phi(\mathcal{G})\rangle<\mathcal{G}$ und damit

$$(XYYX)^{2^k}=((XY^2)X)^{2^k}=(XY^2)^{2^k}X^{2^k}=X^{2^k}Y^{2^{k+1}}X^{2^k}=X^{2^{k+1}}Y^{2^{k+1}}. \tag{3}$$

Der Vergleich von (2) und (3) liefert dann den gewünschten Widerspruch $[X,Y]^{2^k}=E$.

In einer regulären, d.h. abelschen 2-Gruppe ist natürlich $\mathcal{G}'=\mathcal{E}$. Wir werden uns anhand eines Beispiels davon überzeugen, daß für k>1 k-reguläre 2-Gruppen mit $\mathcal{V}_{k-1}(\mathcal{G}')\neq\mathcal{E}$ existieren.

<u>Beispiel 2:</u> Es sei $\mathcal{A}=\langle A_1\rangle\times\langle A_2\rangle$ eine abelsche Gruppe mit ord A_1 = ord A_2 = 2^k (k>1). Dann ist die Abbildung α mit $A_1^\alpha=A_1A_2$ und $A_2^\alpha=A_2A_1^2$ offenbar ein Automorphismus von $\mathcal{A}$. Wir betrachten nun das semidirekte Produkt $\mathcal{G}=\mathcal{A}\langle X\rangle$ mit

$A^X = A^\alpha$ für $A \in \mathfrak{A}$ und ord X = ord α und zeigen ord $X = 2^k$.

Mit der Setzung $A_3 := A_1^2,\ A_4 := A_2^2, \ldots, A_{2k-1} := A_1^{2^{k-1}},\ A_{2k} := A_2^{2^{k-1}}$, $A_{2k+1} = A_{2k+2} = \ldots = A_{2^k} := E$ erfüllt $\mathfrak{G}$ die Voraussetzung von Beispiel 1. Wir erhalten ord $X \mid 2^k$. Aus Lemma 2.1.1.(v) von [1] folgt

$$[A_1, X^{2^{k-1}}] = [A_1, X]^{\binom{2^{k-1}}{1}} [A_1, X, X]^{\binom{2^{k-1}}{2}} \cdots [A_1, \underbrace{X, \ldots, X}_{2^{k-1}}]^{\binom{2^{k-1}}{2^{k-1}}}$$

$$= A_2^{2^{k-1}} A_1^{2^{k-1}(2^{k-1}-1)} = A_1^{2^{k-1}} A_2^{2^{k-1}} \neq E.$$

Damit hat $\mathfrak{G}$ die Ordnung 2^{3k}.

Wir weisen jetzt die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ durch $\exp \mathfrak{G} = 2^k$ nach: Ein Element von $\mathfrak{G}$ hat die Gestalt $X^r A$ mit $A \in \mathfrak{A}$ und $r \in \mathbb{N}$. Durch [8](III.,10.9 b), S.330) erhalten wir

$$(X^r A)^{2^k} = X^{r2^k} A^{2^k} \prod_{i=2}^{2^k} [A, \underbrace{X^r, X^r, \ldots, X^r}_{i-1}]^{\binom{2^k}{i}}.$$

Offenbar verschwinden in diesem Produkt die Faktoren für $i=3$ und $i \geq 5$, so daß gilt

$$(X^r A)^{2^k} = [A, X^r]^{\binom{2^k}{2}} [A, X^r, X^r, X^r]^{\binom{2^k}{4}}. \quad \text{(Man beachte: } k \geq 2)$$

Sei $A = A_1^s A_2^t$. Man rechnet leicht nach, daß

$$[A, X^r]^{\binom{2^k}{2}} = A_2^{rs\binom{2^k}{2}} \text{ und } [A, X^r, X^r, X^r]^{\binom{2^k}{4}} = A_2^{2s\binom{2^k}{4} r^3}$$

gilt. Damit ist wegen $\binom{2^k}{4} = 2^{k-2} m$ mit einem gewissen ungeraden m

$$(X^r A)^{2^k} = A_2^{rs(2^{k-1}(2^{k-1}-1) + 2^{k-1} m r^3)}$$

$$= A_2^{2^{k-1} rs (2^{k-1} - 1 + m r^3)} = E.$$

Also ist $\mathfrak{G}$ eine k-reguläre 2-Gruppe mit

$$\mho_{k-1}(\mathfrak{G}') = \mho_{k-1}(\langle A_1^2 \rangle \times \langle A_2 \rangle) = \langle A_2^{2^{k-1}} \rangle \neq \mathfrak{E}.$$

Im folgenden stellen wir uns das Ziel, folgende Aussage zu beweisen, welche im Fall $k=1$ mit dem Satz von GROVES in [4] zusammenfällt.

<u>Satz 4:</u> Zu jeder Primzahl p und jeder natürlichen Zahl k existiert eine reguläre p-Gruppe $\mathfrak{H}(p,k)$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe und $\mathfrak{G}\times\mathfrak{H}(p,k)$ k-regulär, so gilt stets $\mho_k(\mathfrak{G}')=\mathfrak{E}$, d.h. $\mathfrak{G}$ ist p^k-abelsch.

Die Aussage von Satz 4 könnte man als eine Art "Umkehrung" von Satz 1 auffassen. Da Satz 4 für $p=2$ bereits aus Satz 3 folgt, können wir uns beim Beweis von Satz 4 auf $p\geq 3$ beschränken.

<u>Hilfssatz 5:</u> Für $p\geq 3$ und $k\in\mathbb{N}$ existiert eine p-Gruppe $\mathfrak{H}(p,k)$ mit

(1) $\mathfrak{H}(p,k) = \langle A,B\rangle$,

(2) $\mathfrak{H}(p,k)$ ist regulär aber nicht p^k-abelsch,

(3) jeder Kommutator in $\mathfrak{H}(p,k)$ mit einem Gewicht $w\geq 3$ hat höchstens die Ordnung p^k,

(4) $(AB)^{p^k} = A^{p^k}B^{p^k}$, aber $[A,B]^{p^k} \neq E$.

<u>Beweis:</u> Sei $\mathfrak{A} = \langle A_1\rangle\times\langle A_2\rangle\times\ldots\times\langle A_{p-1}\rangle$ eine abelsche Gruppe mit ord A_1 = ord $A_2 = p^{k+1}$ und ord $A_i = p^k$ für $3\leq i\leq p-1$. Wir betrachten den Automorphismus α von $\mathfrak{A}$ mit $A_i^{\alpha} = A_iA_{i+1}$ für $1\leq i<p-1$ und $A_{p-1}^{\alpha} = A_{p-1}A_2^{pt}$ mit einem noch zu bestimmenden $t\not\equiv 0,(p)$ sowie das semidirekte Produkt $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}\langle B\rangle$, d.h. $A^B=A^{\alpha}$ für alle $A\in\mathfrak{A}$ und ord B = ord α. Setzt man für $j\geq p$ $A_j:=[A_{j-1},B]$, so ergibt sich mit $A_{p^{k+1}}=E$, daß $\mathfrak{G}$ die Voraussetzungen von Beispiel 1 erfüllt, wenn dort k durch k+1 ersetzt wird. Wir erhalten ord $B \mid p^{k+1}$, und $\mathfrak{G}$ ist eine p-Gruppe.

Setzen wir $A:=A_1$, so gilt offensichtlich $\mathfrak{G}=\langle A,B\rangle$, also Eigenschaft (1). Weiterhin ist $\mathfrak{G}'=\langle A_2,A_3,\ldots,A_{p-1}\rangle$, mithin gilt $|\mathfrak{G}'/\mho_1(\mathfrak{G}')|=p^{p-2}$, und wir erhalten die Regularität von $\mathfrak{G}$ mit Hilfe von [7] (Theorem 2.3, S.477). Wegen $[A,B]=A_2$ ist $[A,B]^{p^k}=A_2^{p^k}\neq E$. Somit ist $\mathfrak{G}$ nicht p^k-abelsch (Satz 2). Also erfüllt $\mathfrak{G}$ die Eigenschaft (2). Weiterhin gilt

$$Z_2(\mathcal{G}) = \langle A_2\rangle \times \ldots \times \langle A_{p-1}\rangle ,$$

$$Z_3(\mathcal{G}) = \langle A_2^p\rangle \times \ldots \times \langle A_{p-1}\rangle \qquad \text{(also Eigenschaft (3))},$$

$$Z_p(\mathcal{G}) = \langle A_2^p\rangle \times \ldots \times \langle A_{p-1}^{\ p}\rangle ,$$

$$Z_{p+1}(\mathcal{G}) = \langle A_2^{p^2}\rangle \times \ldots \times \langle A_{p-1}^{\ p}\rangle$$

$$Z_{ip}(\mathcal{G}) \leqq \langle A_2^{p^{i+1}}\rangle \times \ldots \times \langle A_{p-1}^{\ p^i}\rangle \quad \text{für } i \geqq 2.$$

Wir erhalten

$$\mathcal{U}_{k-i}(Z_{p^i}(\mathcal{G})) \leqq \mathcal{U}_{k-i}(Z_{ip}(\mathcal{G})) = \mathcal{E} \quad \text{für } i \geqq 2, \tag{i}$$

$$\mathcal{U}_{k-1}(Z_{p+1}(\mathcal{G})) = \mathcal{E}, \tag{ii}$$

$$[\mathcal{U}_k(\mathcal{G}), \mathcal{U}_k(\mathcal{G})] = \mathcal{U}_{2k}(\mathcal{G}') \leqq \mathcal{U}_{k+1}(\mathcal{G}') = \mathcal{E} \,. \tag{iii}$$

Setzen wir $A' := A[A,B]$, so ergibt sich mit [8](III.,10.9 b), S.330)

$$(AB)^{p^k} = (BA')^{p^k} = B^{p^k} A^{\cdot p^k} \prod_{i=2}^{p^k} [A', B, B, \underbrace{\ldots}_{i-1}, B]^{\binom{p^k}{i}} \,.$$

Wegen der Eigenschaften (i),(ii) und (iii) folgt

$$(AB)^{p^k} = B^{p^k} A^{p^k} [A,B]^{\binom{p^k}{2}} [A, B, \underbrace{\ldots}_{p-1}, B]^{\binom{p^k}{p}}$$

$$= A^{p^k} B^{p^k} A_2^{\,p^k(1+\binom{p^k}{2})+pt\binom{p^k}{p}} = A^{p^k} B^{p^k} A_2^{\,p^k+pt\binom{p^k}{p}} \,.$$

Wir werden t jetzt so bestimmen, daß $A_2^{\,p^k+pt\binom{p^k}{p}} = E$ wird:

Es ist $\binom{p^k}{p} = rp^{k-1}$ mit $(r,p)=1$. Man wähle t so, daß $tr \equiv -1, (p)$ ist. Das ist wegen $(r,p)=1$ möglich. Mithin ergibt sich

$$p^k + tp\binom{p^k}{p} = p^k + tprp^{k-1} = p^k(1+tr) \equiv 0, (p^{k+1})$$

und damit

$$(AB)^{p^k} = A^{p^k} B^{p^k}.$$

Also erfüllt die Gruppe $\mathfrak{H}(p,k) = \mathfrak{G}$ mit dem oben gewählten t alle Forderungen des Hilfssatzes.

Die Behauptung von Satz 4 ergibt sich nun aus der folgenden Aussage:

Hilfssatz 6: Für jede Gruppe $\mathfrak{H}(p,k)$ mit den Eigenschaften (1) bis (4) aus Hilfssatz 5 gilt:
Ist $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe und $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}(p,k)$ k-regulär, so ist $\mho_k(\mathfrak{G}') = \mathfrak{E}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{G}$ ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung. Da das direkte Produkt einer Unter- bzw. Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{H}(p,k)$ als Untergruppe bzw. homomorphes Bild von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}(p,k)$ selbst wieder k-regulär ist, ist also jede echte Unter- bzw. Faktorgruppe von $\mathfrak{G}$ bereits p^k-abelsch, $\mathfrak{G}$ selbst jedoch nicht. Dann existieren Elemente G und H aus $\mathfrak{G}$ mit

$$(GH)^{p^k} \neq G^{p^k} H^{p^k}, \quad \mathfrak{G} = \langle G,H \rangle \quad \text{und} \quad [G,H]^{p^k} \neq E. \tag{i}$$

Sei $\mathfrak{M} \trianglelefteq \mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{M}| = p$. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}$ nach der Wahl von $\mathfrak{G}$ p^k-abelsch ist, folgt mit Satz 2

$$\mathfrak{M}/\mathfrak{M} = \mho_k((\mathfrak{G}/\mathfrak{M})') = \mho_k(\mathfrak{G}'\mathfrak{M}/\mathfrak{M}) = \mho_k(\mathfrak{G}')\mathfrak{M}/\mathfrak{M},$$

also $\mho_k(\mathfrak{G}') \leq \mathfrak{M}$. Damit ist $\mathfrak{E} \neq \langle [G,H]^{p^k} \rangle = \mathfrak{M}$.
Mit [2] (Satz 5 a), S.56) erhalten wir

$$\mho_k(Z_3(\mathfrak{G})) = [\mho_k(\mathfrak{G}'), \mathfrak{G}] = [\mathfrak{M}, \mathfrak{G}] = \mathfrak{E}.$$

Das heißt, in $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}(p,k)$ hat jeder Kommutator vom Gewicht $w \geq 3$ höchstens die Ordnung p^k. (ii)

Die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ liefert mithin wegen (i)

$$(GH)^{p^k} = G^{p^k} H^{p^k} [G,H]^{p^k r} \quad \text{mit } (r,p) = 1. \tag{iii}$$

Die Elemente von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}(p,k)$ seien mit (U,V) $(U \in \mathfrak{G},\ V \in \mathfrak{H}(p,k))$ bezeichnet. Wir betrachten $X = (G,A)$ und $Y = (H,B)$.
Da $\mathfrak{G} \times \mathfrak{H}(p,k)$ k-regulär ist, existiert wegen (ii) ein $s \in \mathbb{N}$ mit

$$(XY)^{p^k} = X^{p^k} Y^{p^k} [X,Y]^{p^k s}. \tag{iv}$$

Wir berechnen $(XY)^{p^k}$ mit Hilfe von (iii) und den Eigenschaften von $\mathfrak{H}(p,k)$ aus Hilfssatz 5.

$$\begin{aligned}(XY)^{p^k} &= ((G,A)(H,B))^{p^k} = (GH,AB)^{p^k}\\ &= ((GH)^{p^k},(AB)^{p^k}) = (G^{p^k}H^{p^k}[G,H]^{p^kr},A^{p^k}B^{p^k})\\ &= (G^{p^k},A^{p^k})(H^{p^k},B^{p^k})([G,H]^{p^kr},E)\\ &= X^{p^k}Y^{p^k}([G,H]^{p^kr},E).\end{aligned}$$

Mit (iv) ergibt sich

$$([G,H]^{p^kr},E) = [X,Y]^{p^ks} = ([G,H],[A,B])^{p^ks} = ([G,H]^{p^ks},[A,B]^{p^ks}).$$

Es muß also $[A,B]^{p^ks}=E$ gelten. Das erfordert jedoch wegen Hilfssatz 5 (4) $p|s$, und das heißt $[G,H]^{p^kr}=[G,H]^{p^ks}=E$, das liefert wegen (i) den gewünschten Widerspruch $p|r$ zu (iii).

Wir wollen zum Abschluß dieser Arbeit noch ein k-Regularitäts-kriterium beweisen:

<u>Satz 7:</u> Sei $\mathfrak{G}$ eine p-Gruppe. Existiert ein in $Z(\mathfrak{G})$ liegender Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$, so daß $\exp\mathfrak{N}=p^r$ ($r\geq 0$) und $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ k-regulär ist, dann ist $\mathfrak{G}$ (k+r)-regulär.

<u>Beweis:</u> Ist $r=0$, so ist $\mathfrak{N}=\mathfrak{E}$ und die Behauptung trivial.
Sei $r>0$ und Satz 7 bereits bis $r-1$ bewiesen.
Wir betrachten zunächst den Fall $p>2$.
Seien $A,B\in\mathfrak{G}$ beliebig und $\mathfrak{H}=\langle A,B\rangle$. Die k-Regularität von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ergibt dann mit Hilfe von [2](Satz 2 b), S.55)

$$(AB)^{p^k} = A^{p^k}B^{p^k}C^{p^k}N$$

mit gewissen $C\in\mathfrak{H}'$ und $N\in\mathfrak{N}$.
Wir wenden [2](Satz 5 a),S.56) auf $\mathfrak{H}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ an und erhalten

$$[\mho_k(\mathfrak{H}),\mho_k(\mathfrak{H})] \leqq \mho_{2k}(\mathfrak{H}')\mathfrak{N} \leqq \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')\mathfrak{N}, \qquad (i)$$

woraus $[\mho_k(\mathfrak{H}),\mho_k(\mathfrak{H}),\mho_k(\mathfrak{H})] = \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')$ folgt.
Sind $U,V\in\mho_k(\mathfrak{H})$ beliebig, so ergibt sich mit [8](III., 1.3 b), S.253)

$$(UV)^p \equiv U^pV^p[V,U]^{\binom{p}{2}} \mod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}'),$$

wegen (i) und $p>2$ folgt

$$(UV)^p \equiv U^pV^p \mod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')\mho_1(\mathfrak{N}). \qquad (ii)$$

Wir erhalten also mit (ii)

$$(AB)^{p^{k+1}} = (A^{p^k}B^{p^k}C^{p^k}N)^p = (A^{p^k}B^{p^k}C^{p^k})^pN^p$$
$$\equiv A^{p^{k+1}}B^{p^{k+1}}C^{p^{k+1}} \mod \mho_{k+1}(\mathfrak{H}')\mho_1(\mathfrak{N}).$$

Das bedeutet: Es existieren $D_1,\dots,D_r \in \mathfrak{H}'$ und $N_1 \in \mathfrak{N}$ mit

$$(AB)^{p^{k+1}} = A^{p^{k+1}}B^{p^{k+1}}C^{p^{k+1}}D_1^{p^{k+1}}\cdot\ldots D_r^{p^{k+1}}N_1^p.$$

Dabei gilt $C,D_1,\dots,D_r \in \langle A,B\rangle'$, $N_1^p \in \mho_1(\mathfrak{N})$. Da A,B beliebig aus $\mathfrak{G}$ gewählt waren, ist damit $\mathfrak{G}/\mho_1(\mathfrak{N})$ (k+1)-regulär.

Sei jetzt p=2. Die k-Regularität der 2-Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ impliziert nach Satz 2 und Satz 3 $\mho_k(\mathfrak{G}') \leqq \mathfrak{N}$. Satz 5 a) (S.56) aus [2] ergibt somit

$$[\mho_k(\mathfrak{G}),\mathfrak{G}] \leqq \mho_k([\mathfrak{G},\mathfrak{G}])\mathfrak{N} = \mathfrak{N},$$

so daß $[\mho_k(\mathfrak{G}),\mathfrak{G},\mathfrak{G}] = \mathfrak{E}$ folgt. Seien $A,B \in \mathfrak{G}$ beliebig Wir wenden [B](III.,1.2 b), S.253) an und erhalten

$$[A^{2^k},B^2] = [A^{2^k},B]^2[A^{2^k},B,B] = [A^{2^k},B]^2 \in \mho_1(\mathfrak{N}).$$

Daher haben wir $[\mho_k(\mathfrak{G}),\mho_k(\mathfrak{G})] \leqq \mho_1(\mathfrak{N})$. Die k-Regularität von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ erfordert

$$(AB)^{2^k} = A^{2^k}B^{2^k}N$$

mit einem gewissen $N \in \mathfrak{N}$. Nach dem oben gezeigten folgt daraus

$$(AB)^{2^{k+1}} = (A^{2^k}B^{2^k}N)^2 = (A^{2^k}B^{2^k})^2N^2$$
$$\equiv A^{2^{k+1}}B^{2^{k+1}} \mod \mho_1(\mathfrak{N}).$$

Somit ist die p-Gruppe $\mathfrak{G}/\mho_1(\mathfrak{N})$ für beliebige Primzahlen p (k+1)-regulär. Nun ist $\mho_1(\mathfrak{N})$ ein in $Z(\mathfrak{G})$ liegender Normalteiler von $\mathfrak{G}$ vom Exponenten p^{r-1}. Nach unserer Induktionsannahme ist $\mathfrak{G}$ dann (k+1+r-1)-regulär, also (k+r)-regulär.

Das folgende Beispiel verdeutlicht, daß sich die Aussage von Satz 7 hinsichtlich der Regularitätsstufe von $\mathfrak{G}$ im allgemeinen nicht verschärfen läßt.

<u>Beispiel 3:</u> Es sei $\mathfrak{A} = \langle A_1\rangle \times \langle A_2\rangle \times \ldots \times \langle A_{p-1}\rangle$ eine abelsche

Gruppe mit ord $A_1 = p^{2k}$ und ord $A_i = p^k$ für $1<i\le p-1$.

Wir betrachten den Automorphismus α von $\mathfrak{A}$ mit

$$A_i^{\alpha} = A_iA_{i+1} \quad (1\le i<p-1) \quad \text{und} \quad A_{p-1}^{\alpha} = A_{p-1}A_1^{p^k}$$

sowie das semidirekte Produkt $\mathfrak{G}=\mathfrak{A}\langle X\rangle$ der Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\langle X\rangle$, $A^X=A^{\alpha}$ für alle $A\in\mathfrak{A}$ und ord X = ord α.

Mit $A_p:=A_1^{p^k}$ und $A_j:=E$ für $j>p$ erhalten wir aus

Beispiel 1 $X^{p^k}=E$.

Offenbar gilt dann $\langle A_1^{p^k}\rangle = Z_p(\mathfrak{G})\le Z(\mathfrak{G})$. Da $\mathfrak{G}/Z_p(\mathfrak{G})$ die Klasse $p-1$ hat, ist $\mathfrak{G}/\langle A_1^{p^k}\rangle$ wegen [6](Corollary 4.13, S.73) 1-regulär. Wegen $\exp\langle A_1^{p^k}\rangle = p^k$ ist $\mathfrak{G}$ $(k+1)$-regulär nach Satz 7. Die k-Regularität von $\mathfrak{G}$ würde wegen

$$\mho_k(\mathfrak{G}') = \mho_k(\langle A_2\rangle\times\dots\times\langle A_1^{p^k}\rangle) = \mathfrak{E}$$

insbesondere $(XA_1)^{p^k} = X^{p^k}A_1^{p^k} = A_1^{p^k}$ erfordern. Es gilt jedoch nach Beispiel 1

$$(XA_1)^{p^k} = X^{p^k}A_1^{p^k}\prod_{i=1}^{k} A_{p^i}^{\binom{p^k}{p^i}} = A_1^{p^k}A_p^{\binom{p^k}{p}}$$

$$= A_1^{p^k+p^k\binom{p^k}{p}} = A_1^{p^k\left(1+\binom{p^k}{p}\right)} \ne A_1^{p^k}.$$

Mithin ist $\mathfrak{G}$ nicht k-regulär.

Wegen Satz 7 ist dann für $j\le k$ $\mathfrak{G}/\langle A_1^{p^{k+j}}\rangle$ $(k-j+1)$-regulär, aber nicht $(k-j)$-regulär.

Das Beispiel zeigt also: Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ k-regulär und $\mathfrak{N}\le Z(\mathfrak{G})$ mit $\exp\mathfrak{N} = p^r$, dann ist $\mathfrak{G}$ im allgemeinen nicht notwendig $(k+r-1)$-regulär.

Herrn Prof. Dr. habil. G. Pazderski möchte ich für die vielen wertvollen Hinweise danken.

LITERATUR

[1] ALPERIN,J.L.: On a special class of regular p-groups. Trans.Amer.Math.Soc. 106 (1963), 77-99.

[2] BANNUSCHER,W.: Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen I. Beiträge zur Algebra und Geometrie 11(1981), 51-63.

[3] BANNUSCHER,W.: Eine Verallgemeinerung des Regularitätsbegriffes bei p-Gruppen II. Beiträge zur Algebra und Geometrie 12 (1982), 77-91.

[4] GROVES,J.R.J.: On direct products of regular p-groups. Proc.Amer.Math.Soc. 37 (1973), 377-379.

[5] GRÜN,O.: Über das direkte Produkt regulärer p-Gruppen. Arch.Math. 5 (1954), 241-243.

[6] HALL,P.: A contribution to the theory of groups of prime power order. Proc.London Math.Soc. 36 (1933), 29-95.

[7] HALL,P.: On a theorem of Frobenius. Proc.London Math.Soc 40 (1936), 468-507.

[8] HUPPERT,B.: Endliche Gruppen I, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York 1967.

[9] MANN,A.: Regular p-groups, Israel J.Math. 14 (1973), 294-303.

Manuskripteingang: 4.8.1983

VERFASSER:

WOLFGANG BANNUSCHER, Sektion Mathematik der Wilhelm-Pieck-Universität Rostock