Werk

Titel: Le graphe d'un feuilletage admettant un système transverse d'équations differenti...

Autor: Wolak, Robert A.

Jahr: 1989

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0201|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 201, 177–182 (1989)

Mathematische Zeitschrift
© Springer-Verlag 1989

Le graphe d'un feuilletage admettant un système transverse d'équations différentielles

Robert A. Wolak
Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Wt. Reymonta 4, 30-059 Kraków, Poland

0. Rappel

Soit M une variété munie d'un feuilletage $\mathscr{F}$ de codimension q de classe C^∞. Un cocycle de définition du feuilletage $\mathscr{F}$ définit une variété transverse N. Le pseudogroupe correspondant à ce cocycle est noté H (cf. [2, 6]). Nous allons travailler avec des systèmes d'équations différentielles ordinaires, mais on peut obtenir les résultats pareils pour d'équations différentielles partielles (cf. Remarks [5]).

Nous rappelons les définitions les plus utiles (cf. [5]).

Un système **E** d'équations différentielles ordinaires (SEDO) d'order k sur une variété M est un sousfibré de k-jets $J^k(R, M)$.

Un chemin α: $[0, 1] \to M$, $\alpha(0)=x$, $\alpha(1)=y$, dans une feuille de $\mathscr{F}$ donne isomorphismes (d'holonomie):

$$T_\alpha: N(M, \mathscr{F})_x \to N(M, \mathscr{F})_y$$

des fibres du fibré normal au feuilletage $\mathscr{F}$ et aussi des fibrés suivants

$$N^r(T_\alpha): N^r(M, \mathscr{F})_x \to N^r(M, \mathscr{F})_y$$

où $N^r(M, \mathscr{F})$ est le fibré normal à $\mathscr{F}$ d'ordre r. De la même manière on note des application induites au niveau des fibrés $N^r(M, \mathscr{F})$, i.e. $N^r(f)$.

Sur $N^r(M, \mathscr{F})$ il y a un feuilletage $\mathscr{F}^r$ de la même dimension que $\mathscr{F}$ duquel feuilles se projectent sur les feuilles de $\mathscr{F}$. Elles sont des revêtement galoisiens des feuilles de $\mathscr{F}$. On peut représenter les applications $N^r(T_\alpha)$ comme suit:

soit $\xi \in N^r(M, \mathscr{F})_x$, alors $N^r(T_\alpha)(\xi) \in N^r(M, \mathscr{F})_y$ est le but du relèvement du chemin α à la feuille de $\mathscr{F}^r$ passant par ξ.

Soient Q un sousfibré de TM transverse à $T\mathscr{F}$ et Q^k le sousfibre de T^kM des k-jets de T^kM tangent à Q. Le sousfibré Q^k est isomorphe à $N^k(M, \mathscr{F})$.

Le fibré $J^k(R, M; \mathscr{F})$ des k-jets d'applications de R dans M transverses au feuilletage $\mathscr{F}$ admet un feuilletage $\mathscr{F}_k$. Il est isomorphe au fibré $J^k(R, Q)$ des k-jets des applications de R tangentes à Q.

Soient $\mathbf{E} \subset J^k(R, M)$ un SEDO et $0 \leqq r \leqq k$. Pour chaque r il y a un sousensemble $\mathbf{E}_0^r$ de $T^r(M)$:

$$\mathbf{E}_0^r = \{j_0^r f \tau_t : f \text{ une solution de } \mathbf{E} \text{ à } t, \tau_t \text{ la translation dans } R)\}$$

L'ensemble $\mathbf{E}_0^r$ est appelé *l'ensemble de conditions initiales d'ordre r de* **E**.

Le système **E** est SUD (à solutions uniquement déterminées) système *s* 'il y a r, $0 \leqq r \leqq q$, tel que l'ensemble $\mathbf{E}_0^r$ est un sousfibré de $T^k(M)$ et pour chaque paire $(t, \xi) \in R \times \mathbf{E}_0^r$ il y a une solution f de **E** au voisinage de t telle que $j_0^r f \tau_t = \xi$. En plus, nous demandons que les solutions dépendent différentiellement des conditions initiales.

Soit r le plus petit ayant cette propriété. Alors $\mathbf{E}_0^r$ s'appele *le fibré des conditions initiales du système* **E**.

Un SEDO **E** est dit *feuilleté* si il existe un sousfibré Q supplémentaire à $T\mathscr{F}$ tel que

$$J^k(R, Q) \cap \mathbf{E} = \mathbf{E}_Q$$

est un sousfibré feuilleté de $J^k(R, Q)$.

Un SEDO feuilleté **E** definit sur la variété transverse N un SEDO $\mathbf{E}_N$ de même ordre que **E**, dont les éléments du pseudogroupe d'holonomie H sont des automorphismes.

Soient $\mathbf{E}_N$ le SUD système sur la variété transverse N correspondant à **E**, $\mathbf{E}_0^r(N)$ son fibré des conditions initiales et $\mathbf{E}_0^r(Q)$ le sousfibré de Q^r correspondant à $\mathbf{E}_0^r(N)$. Le système feuilleté **E** est STUD (à *solutions transverses uniquement déterminées*) si les solutions de **E** aux conditions initiales de $\mathbf{E}_0^r(Q)$ sont uniques et dépendent différetiallement des conditions initiales.

Le système **E** (resp. $\mathbf{E}_N$) est dit transversalement complet (resp. complet) si les solutions aux conditions initiales de $\mathbf{E}_0^r(Q)$ (resp. $\mathbf{E}_0^r(N)$) sont définies globalement. On appelle les solutions aux conditions initiales de $\mathbf{E}_0^r(Q)$ *transverses*.

Si f: $[0, a] \to M$ est une solution de **E**, la courbe γ: $[0, 1] \to M$, $\gamma(t) = f(t \upsilon a)$, $t \in [0, 1]$, $\upsilon \in R$, s'appele une courbe de solution.

Le système **E** (resp. $\mathbf{E}_N$) est dit transversalement transitif (resp. transitif) si pour chaque vecteur X de Q (resp. TN) il existe une solution f de E (resp. $\mathbf{E}_N$) telle que $X \in \operatorname{im} df$.

1. Quelques préliminaires

Le graphe $\mathrm{GR}(\mathscr{F})$ du feuilletage $\mathscr{F}$ est l'espace des classes d'équivalence de triples (y, α, x), où x et y appartiennent à une feuille L de $\mathscr{F}$ et α est un chemin contenu dans L reliant x à y. Les deux triples (y, α, x) et (y', α', x') sont équivalents si $x = x'$, $y = y'$ et l'holonomie de $\alpha^{-1} * \alpha'$ est triviale. Un voisinage de $\langle y, \alpha, x \rangle$ est formé des éléments représentés par les triples (y', α', x') où α' est un chemin voisin de α (cf. [1]). Dans [3] on a montré que le graphe d'un feuilletage est

une variété, en général, non-separée de dimension $n+p$. En plus, si des éléments du pseudogroupe d'holonomie sont déterminés par leurs jets le graphe est separé.

Dans notre cas nous pouvons démontrer que les éléments du pseudogroupe d'holonomie H sont déterminés par leurs k-jets.

Lemme 1. *Soit* **E** *un système des équations différentielles d'ordre k, transitif et à solutions déterminées par la condition initiale sur une variété N. Si f et g sont deux automorphismes de* **E** *tels que leurs k-jets* $j^k_x f = j^k_x g$ *à un point x de N sont égaux, alors les applications f et g sont égales dans un voisinage du point x.*

Demonstration. Soit h une solution du système **E** à condition initiale ξ en x. Alors fh et gh sont deux solutions de **E** vérifiant $f(x)=g(x)$ aux conditions initiales $j^k_x f(\xi)$ et $j^k_x g(\xi)$, respectivement. Comme $j^k_x f = j^k_x g$, $j^k_x f(\xi)=j^k_x g(\xi)$ et $fh = gh$ au voisinage connexe de $h^{-1}(x)$. Puisque les solutions du système **E** recourrent un voisinage de x, les germes de f et g en x sont égaux. □

Alors nous avons la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit* **E** *un système feuilleté d'équations différentielles d'ordre k sur une variété feuilletée* $(M, \mathscr{F})$. *Si* **E** *est transversalement transitif et* STUD, *alors le graphe* $GR(\mathscr{F})$ *du feuilletage* $\mathscr{F}$ *est une variété séparée de dimension* $n+p$.

2. Le théorème principal

Les correspondances $p_1: \langle y, \alpha, x\rangle \mapsto x$, la projection de source, et $p_2: \langle y, \alpha, x\rangle \mapsto y$, la projection de but, définissent deux submersions $p_1: \mathrm{GR}(\mathscr{F}) \to M$ *et* $p_2: \mathrm{GR}(\mathscr{F}) \to M$. Dans les coordonnées locales on peut les décrire de la façon suivante:

Soient $\langle y, \alpha, x\rangle$ un point de $\mathrm{GR}(\mathscr{F})$ et (U, ϕ), (V, ψ) et $(U \times_\alpha V, \phi \times_\alpha \psi)$ des coordonnées locales à x, y, et $\langle y, \alpha, x\rangle$, respectivement.

$$U \times_\alpha V = \{\langle y', \alpha', x'\rangle \in \mathrm{GR}(\mathscr{F}): x' \in U, \phi(x') = (x_1, x_2) \in R^p \times R^q,$$

$y' \in V$, $\psi(y') = (y_1, y_2) \in R^p \times R^q$, $h_\alpha(x_2) = y_2$ et α' est le relèvement d'holonomie du chemin α à x', où h_α est l'holonomie suivant le chemin $\alpha\}$,

et

$$\phi \times_\alpha \psi(\langle y', \alpha', x'\rangle) = (x_1, x_2, y_1) \in R^p \times R^q \times R^p.$$

Alors

$$\phi p_1 (\phi \times_\alpha \psi)^{-1}: R^p \times R^q \times R^p \to R^p \times R^q$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2)$$

et

$$\psi p_2 (\phi \times_\alpha \psi)^{-1}: R^p \times R^q \times R^p \to R^p \times R^q$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, h_\alpha(x_2)).$$

Il y a trois feuilletages naturels sur le graphe $\mathrm{GR}(\mathscr{F})$:

i) défini par le fibres de p_1 noté $\mathscr{F}_1$;

ii) défini par les fibres de p_2 noté $\mathscr{F}_2$;

iii) $\mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2 = p_1^{-1}\mathscr{F} = p_2^{-1}\mathscr{F}$.

Les fibres des submersions p_1 et p_2 sont les revêtements d'holonomie des feuilles du feuilletages $\mathscr{F}$. Soient Q un sousfibré de TM supplémentaire à $T\mathscr{F}$ et $\tilde{Q}$ le sousfibré de $TGF(\mathscr{F})$ suivant:

$$\tilde{Q} = \{X \in T\mathrm{GR}(\mathscr{F}): dp_1(X) \in Q \text{ et } dp_2(X) \in Q\}.$$

Le fibré tangent de $\mathrm{GR}(\mathscr{F})$ admet la décomposition:

$$T\mathrm{GR}(\mathscr{F}) = T\mathscr{F}_1 \oplus T\mathscr{F}_2 \oplus \tilde{Q}.$$

Une courbe $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathrm{GR}(\mathscr{F})$ est tangente à $\tilde{Q}$ si et seulement si les courbes $p_1\gamma$ et $p_2\gamma$ sont tangentes à Q. En plus, le fibré $\tilde{Q}$ est isomorphe à $p_1^* Q$ et à $p_2^* Q$ et $\tilde{Q} = p_1^{-1} Q \cap p_2^{-1} Q$.

Soit $\mathbf{E}_Q$ la partie transverse du système $\mathbf{E}$; $\mathbf{E}_Q$ est un sousfibré du fibré $J^k(R, M; Q)$ des jets des applications tangentes à Q. On peut décrire le fibré $J^k(R, \mathrm{GR}(\mathscr{F}); \tilde{Q})$ comme l'ensemble

$$\{j^k f \in J^k(R, \mathrm{GR}(\mathscr{F})): j^k p_1 f \in J^k(R, M; Q) \text{ et } j^k p_2 f \in J^k(R, M; Q)\}$$

Alors l'ensemble

$$\mathbf{E}_{\tilde{Q}} = \{j^k f \in J^k(R, \mathrm{GR}(\mathscr{F})): j^k p_1 f \in \mathbf{E}_Q \text{ et } j^k p_2 f \in \mathbf{E}_Q\}$$

est isomorphe à la foi à $p_1^* \mathbf{E}_Q$ et $p_2^* \mathbf{E}_Q$. C'est un sousfibré de $J^k(R, \mathrm{GR}(\mathscr{F}); \tilde{Q})$.

Le sousfibré $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ est le sousfibré feuilleté de $J^k(R, \mathrm{GR}(\mathscr{F}); \tilde{Q})$ pour le feuilletage $\mathscr{F}_1 \oplus \mathscr{F}_2$. Le fibré de condition initiales $\mathbf{E}_0^r(\tilde{Q})$, un sousfibré de $J^k(R, \mathrm{GR}(\mathscr{F}); \tilde{Q})$, est isomorphe à $p_1^* \mathbf{E}_0^r(Q)$ où $\mathbf{E}_0^r(Q)$ est le fibré de conditions initiales du système $\mathbf{E}_Q$. En effet, une application $f: R \to \mathrm{GR}(\mathscr{F})$ est une solution du système $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ si et seulement si les applications $p_1 f$ et $p_2 f$ sont des solutions du système $\mathbf{E}_Q$. On en déduit qui si des solutions transverses du système $\mathbf{E}$ sont déterminées uniquement par leurs conditions initiales il en est de même pour les solutions transverse du système $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$; même chose pour la dépendance différentielle sur les conditions initiales. Nous ne pouvons rien dire sur l'existence de solutions mais si le système $\mathbf{E}$ est transversalement complet et STUD, il est possible de démontrer que le système $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ est aussi STUD et transversalement complet. A cause des considérations précédentes il suffit de prouver que si pour n'importe quel $\xi \in \mathbf{E}_0^r(Q)$ il existe une solution globale du système $\mathbf{E}$ telle que $j_0^r f = \xi$, alors pour n'importe quel $\tilde{\xi}$ de $\mathbf{E}_0^r(\tilde{Q})$ il existe une solution globale $\tilde{f}$ du système $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ telle que $j_0^r \tilde{f} = \tilde{\xi}$.

Soient $\tilde{\xi}$ un r-jet du fibré de conditions initiales, $\xi_1 = N^r(p_1)(\tilde{\xi})$ et $\xi_2 = N^r(p_2)(\tilde{\xi})$. Si $\tilde{\xi}$ est dans la fibre au dessus de $\langle y, \alpha, x \rangle$, alors $\xi_2 = N^r(T_\alpha)\xi_1$, ou de façon équivalente ξ_2 est le but du chemin $\tilde{\alpha}$, le relèvement de α à ξ_1 dans $\mathbf{E}_0^r(Q)$. Soient f_t les solutions du système $\mathbf{E}$ à conditions initiales $\tilde{\alpha}(t)$. Alors pour n'importe quel vecteur $v \in R$ la courbe $\alpha_v: [0, 1] \to M$, $\alpha_v(t) = f_t(v)$, $t \in [0, 1]$, est une courbe dans la feuille (cf. [5]), et en plus, l'application $\tilde{f}: R \to \mathrm{GR}(\mathscr{F})$, $\tilde{f}(v) = \langle f_1(v), \alpha_v, f_0(v) \rangle$ est différentiable. C'est une solution du système $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ à

condition initiale $\tilde{\xi}$. En plus, $\tilde{f}$ est tangente à $\tilde{Q}$ et c'est le relèvement de la solution f à $\mathrm{GR}(\mathscr{F})$ relativement aux projections p_1 et p_2 et tangent à $\tilde{Q}$. Nous avons démontré le lemme suivant.

Lemme 2. *Si le système* **E** *est transversalement complet et* STUD, *alors le système* $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ *l'est aussi. En plus, les solutions transverses de* $\mathbf{E}_{\tilde{Q}}$ *sont les relèvements tangents à* $\tilde{Q}$ *des solutions du système* **E**.

Pour démontrer que p_1: $\mathrm{GR}(\mathscr{F}) \to M$ est une fibraton localement triviale il suffit de trouver un sousfibré Γ de $T\mathrm{GR}(\mathscr{F})$ transverse aux fibres de p_1 et une famille de chemins sur M telle que les chemins de cette famille peuvent être relevés horizontalement relativement à Γ à $\mathrm{GR}(\mathscr{F})$ de telle façon que n'importe quelle paire de points de la variété M puissent être liés par un chemin de cette famille et que ces chemins puissent être choisis différentiablement. Dans notre cas on peut prendre la famille des chemins différentiables par morceaux dont les morceaux sont ou des courbes de solution ou des courbes tangentes aux feuilles.

Comme sousfibré Γ nous prenons $\mathscr{F}_2 \oplus \tilde{Q}$. Nous avons déjà démontré qu'on peut relever des solutions et alors des courbes de solution. Une courbe γ: $[0, s] \to M$ tangente aux feuilles se relève à la manière suivante. Soit $\langle y, \alpha, x\rangle$ un point de $\mathrm{GR}(\mathscr{F})$ au-dessus de $\gamma(0)=x$. Soit γ_t la courbe suivante tangente aux feuilles, γ_t: $[0, t] \to M$ $\gamma_t(u)=\gamma(u)$ pour $0 \leqq u \leqq t \leqq s$. Alors on pose $\tilde{\gamma}(t) = \langle y, \alpha * \gamma_t^{-1}, \gamma(t)\rangle$. La courbe $\tilde{\gamma}$ est un relèvement horizontal de la courbe γ tangente au fibré Γ.

Pour chaque point x de M il existe un voisinage U de ce point qui peut être parametrisé par des chemin de cette type. En effet, soient X une section feuilletée de $\mathbf{E}_0^r(Q)$ au voisinage de x et la transformation $\Phi_{X,v}$: $M \to M$:

$$\Phi_{X,v}(y) = f(X(y))(v)$$

où $f(X(y))$ est la solution de **E** à la condition initiale $X(y)$ et $v \in R$. On peut trouver des sections feuilletées $X_1, \ldots, X_q$ de $\mathbf{E}_0^r(Q)$ dans un voisinage de x, P un voisinage de x dans la feuille de $\mathscr{F}$ passant par ce point consideré comme une boule au centre 0 dans R^p et des vecteurs $v_1, \ldots v_q$ de R tels que l'application:

$$\exp: P \times R^q \to M \quad \text{où}$$

$$\exp(y, t_1, \ldots t_q) = \phi_{X_q, t_q v_q} \cdots \phi_{X_1, t_1 v_1}(y),$$

est une difféomorphisme d'un voisinage de $(x, 0)$ sur un voisinage U de x dans M.

Alors, à chaque point z de U correspond un chemin γ_z: $[0, q+1] \to M$

$$\gamma_z(s) = \begin{cases} \exp(s\, y(z), 0) & s \in [0, 1] \\ \exp(y(z), t_1(z), .t_{i-1}(z), s_i t_i(z), 0, .) & s \in [i, i+1] \end{cases}$$

où $\exp^{-1}(z) = (y(z), t_1(z), \ldots t_q(z))$, et $s_i = s - i$ pour $s \in [i, i+1]$.

Les relèvement de ces chemins nous donnent une trivialisation de p_1 au dessus de ce voisinage U du point x. Alors nous avons démontré le:

Théorème 1. *Soit* **E** *un système feuilleté, transversalement complet, transversalement transitif et* STUD *des équations différentielles sur une variété feuilletée* $(M, \mathcal{F})$. *Alors la projection de source du graphe est une fibration localement triviale.*

Le graphe $\mathrm{GR}(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$ est un groupoïde (cf. [1]), alors on peut construire le classifiant $B\mathcal{G}$. Dans notre cas nous avons le corollaire suivant.

Corollaire (cf. [1]). *L'application i de M dans* $B\mathcal{G}$ *classifiant* $\mathrm{GR}(\mathcal{F})$ *comme un* $\mathcal{G}$*-fibré principal est homotopiquement équivalente à une fibration localement triviale de base* $B\mathcal{G}$.

H. Winkelnkemper nous a informé que les résultats de [4] sont aussi vrais dans notre cas (cf. [4], Theorems 1 and 2). Par example:

Théorème 2. *Soit* $(M, \mathcal{F})$ *une variété feuilletée admettant un système* **E** *feuilleté, transveralement complet, transversalement transitif et* STUD. *Si la variété M est compacte et simplement connexe alors la feuille universale de* $\mathcal{F}$ *a, au plus, deux buts.*

The author would like to express his deep gratitude to the referee whose comments helped improve the first version of the paper.

Références

1. Haefliger, A.: Groupoïdes d'holonomie et classifiants, dans »Structures transverses des feuilletages«. Astérisque **116**, 1984, 70–97
2. Haefliger, A.: Pseudogroups of local isometries, dans »Differential Geometry«, L.A. Cordero ed., Proceedings of Vth Colloquium on Differential Geometry, Santiago de Compostela 1984, Pitman 1985, 174–197
3. Winkelnkemper, H.: The graph of a foliation. Ann. Global. Anal. Geom. **1, 3**, 51–75 (1983)
4. Winkelnkemper, H.: The number of ends of the universal leaf of a Riemannian foliation, dans Differential Geometry, Proceeding, Special Year, Maryland 1981–82, R. Brooks ed., Birkhäuser 1983, 247–254
5. Wolak, R.A.: Foliations admitting transverse systems of differential equations. Comp. Math. **67**, 89–101 (1988)
6. Wolak, R.A.: Foliated and associated geometric structures on foliated manifolds, CRM preprint n° 60, Bellaterra (Barcelona), January 1988

Reçu le 29 Octobre 1987; version finale le 12 Juillet 1988