Werk

Titel: Algebraische Varietäten und q-vollständige komplexe Räume.

Autor: Peternell, Mathias

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0200|log54

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 200, 547–581 (1989)

Mathematische Zeitschrift

© Springer-Verlag 1989

Algebraische Varietäten und q-vollständige komplexe Räume*

Mathias Peternell
GH Wuppertal, Mathematik, D-5600 Wuppertal, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Durch die Einführung der analytischen Konvexität wird ein Zusammenhang zwischen geometrischen und analytischen Eigenschaften einer komplexen Mannigfaltigkeit hergestellt. So sind die Steinschen Mannigfaltigkeiten, auf denen Fortsetzungssätze für holomorphe Funktionen gelten, durch die Existenz streng plurisubharmonischer Ausschöpfungsfunktionen charakterisiert [14]. Solche Mannigfaltigkeiten heißen 1-vollständig.

Alle Eigenwerte der Leviform einer streng plurisubharmonischen- oder 1-konvexen-Funktion sind positiv. Soll nur noch eine bestimmte Anzahl von Eigenwerten positiv sein, so gelangt man zum Begriff der q-Konvexität einer Funktion und weiter zur q-Vollständigkeit eines komplexen Raumes. Auch hier führt diese geometrische Eigenschaft zur Berechnung wichtiger komplex-analytischer Invarianten.

Satz [2]. *Ist X q-vollständig, so verschwinden die Kohomologiegruppen $H^i(X, F)$ für $i \geqq q$ und jede kohärente Garbe F auf X.*

Aus komplexer Konvexität folgt reelle Konvexität: Die Hessesche hat mindestens so viele positive Eigenwerte wie die Leviform. Mit den Methoden der Morse-Theorie (siehe z.B. [20]) gewinnt man dann topologische Aussagen über q-vollständige komplexe Mannigfaltigkeiten. Als Beispiel hierfür seien die Lefschetz-Sätze erwähnt:

Ist X ein irreduzibler kompakter komplexer Raum, und ist A eine analytische Teilmenge von X, so daß $X - A$ eine q-vollständige komplexe Mannigfaltigkeit ist, so gilt $\pi_i(X, A) = 0$ und $H_i(X, A; \mathbb{Z}) = 0$ für $i \leqq \dim X - q$.

Der Lefschetz-Satz für Hyperflächenschnitte [1] kann mit dieser Methode bewiesen werden: Ist H eine Hyperfläche im $\mathbb{P}_n$ und A eine komplexe Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{P}_n$, die nicht in H liegt, so ist $A - H$ eine Steinsche, also 1-vollständige komplexe Mannigfaltigkeit. Somit ist $\pi_i(A, A \cap H) = 0$ für $i \leqq \dim A - 1$.

* Die vorliegende Arbeit wurde als Habilitationsschrift vom Fachbereich Mathematik der Gesamthochschule Wuppertal angenommen

Weitere Lefschetz-Sätze wurden mit anderen Methoden in [5, 6, 11, 19, 22] und [27] bewiesen.

Aussagen über die q-Vollständigkeit bzw. q-Konvexität komplexer Mannigfaltigkeiten hängen sehr oft mit Krümmungsbedingungen zusammen. So wurde in [25] bewiesen, daß das Komplement einer q-codimensionalen komplexen Untermannigfaltigkeit mit positivem Normalenbündel in einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit q-konvex ist, dies wurde in [10] auf lokal vollständige Durchschnitte verallgemeinert. Die q-Konvexität des Komplements einer q-codimensionalen Untermannigfaltigkeit des projektiv-algebraischen Raumes [4] ist ein Spezialfall hiervon. Wegen der Positivität des Tangentialbündels eignen sich Zariski-offene Teilmengen des projektiv-algebraischen Raumes besonders gut zur Untersuchung auf q-Vollständigkeit.

Aus den oben erwähnten Sätzen erhält man noch keine Aussagen über q-Vollständigkeit. Ein solches Resultat ergibt sich aus den in [7] und [16] bewiesenen Sätzen: Seien A und X algebraische Mengen im $\mathbb{P}_n$, es sei $\dim A_i \geqq n-q$ für jede irreduzible Komponente A_i von A, $\dim X = m$. Dann ist $X \setminus A$ $\tilde{q}$-vollständig mit $\tilde{q} = m - \left[\frac{m}{q}\right] + 1$. Dabei dürfen A und X singulär sein; $\tilde{q}$ hängt nicht von der Art der Singularitäten ab.

Ist z.B. $A \subset \mathbb{P}_4$, $\dim A_i \geqq 2$ für alle irreduziblen Komponenten A_i, so ist $\mathbb{P}_4 \setminus A$ 3-vollständig. Die Zahl $\tilde{q} = 3$ ist hierbei die bestmögliche Schranke, selbst wenn A nichtsingulär ist. In [18], § 8 wird ein Beispiel einer nichtsingulären Fläche $A \subset \mathbb{P}_4$ mit $H^1(A, \mathcal{O}) \neq 0$ gegeben. Wäre $\mathbb{P}_4 \setminus A$ 2-vollständig, so folgte als Lefschetz-Satz $H^1(A, \mathbb{Z}) = 0$ und damit $H^1(A, \mathcal{O}) = 0$.

In dieser Arbeit wird die q-Vollständigkeit von Varietäten $X \setminus A$ behandelt, wobei q von den Singularitäten von A abhängt. Der Einfachheit halber soll hier ein Spezialfall des Hauptsatzes (Satz 5.2) angegeben werden:

Sind X, $Y \subset \mathbb{P}_n$ algebraische Mengen, $\dim Y = n-q$, *ist weiter $I \subset \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe mit Nullstellenmenge $X \cap Y$ und* $\operatorname{cg} I_x \leqq p$ *für alle $x \in X \cap Y$, so ist $X \setminus Y$ $(p+q-1)$-vollständig.*

Der Corang $\operatorname{cg} I_x$ ist die Minimalzahl der Erzeugenden des $\mathcal{O}_{X,x}$-Moduls I_x. Ist $X = \mathbb{P}_n$ und Y ein lokal vollständiger Durchschnitt der Codimension q, so ist $\mathbb{P}_n \setminus Y$ $(2q-1)$-vollständig. Hieraus ergibt sich ein Lefschetz-Satz:

$$\pi_i(\mathbb{P}_n, Y) = 0, \qquad H_i(\mathbb{P}_n, Y; \mathbb{Z}) = 0 \qquad \text{für } i \leqq n - 2q + 1.$$

Dieser Satz wurde zuerst in [11] bewiesen, für die Homologie mit rationalen Koeffizienten und nichtsinguläres Y in [5].

Ein Vergleich der Schranke $\tilde{q} = m - \left[\frac{m}{q}\right] + 1$ aus [7] und [16] mit den Ergebnissen der hier vorliegenden Arbeit zeigt folgendes für $X = \mathbb{P}_n \setminus A$: Sind die Singularitäten von A harmlos (z.B. lokal vollständiger Durchschnitt), so erhält man aus Satz 5.2 eine bessere Schranke q: Ist z.B. $A \subset \mathbb{P}_5$ lokal vollständiger Durchschnitt, $\dim A = 3$, so ist X 3-vollständig; dagegen ist $\tilde{q} = 5 - [\frac{5}{3}] + 1 = 5$, man erhält also kein Resultat.

Andererseits folgt aus Satz 5.2 für $A \subset \mathbb{P}_4$, $\dim A = 2$ die 3-Vollständigkeit von $\mathbb{P}_4 \setminus A$ nur für lokal vollständige Durchschnitte A, für beliebiges A ergibt der Satz keine Aussage, die Schranke $\tilde{q}$ ist in diesem Falle besser.

Aus der $\tilde{q}$-Vollständigkeit ergibt sich außerdem ein interessanter Lefschetz-Satz: Ist $A \subset \mathbb{P}_n$, $\dim A_i \geqq \frac{2n}{3}$ für jede Komponente A_i von A, so ist A einfach zusammenhängend. In [11] wurde bewiesen, daß A einfach zusammenhängend ist, falls $\dim A > n/2$ und A irreduzibel ist.

In [27] und [28] werden Lefschetz-Sätze in homogenen Mannigfaltigkeiten bewiesen. Mit den dabei entwickelten Methoden können unter der Verwendung der stratifizierten Morse-Theorie von Goresky und Mac Pherson [12] sehr allgemeine Lefschetz-Sätze gezeigt werden [22]. Spezialisiert man diese auf den Fall des projektiven Raumes, so erhält man beispielsweise: $\pi_i(\mathbb{P}_n, Y) = 0$ für $i \leqq 2 \dim Y + 1 - n - \Delta$, wobei der Defekt Δ nur von der Topologie der Singularitäten von Y abhängt. Aus Satz 5.2 ergibt sich dann ein besserer Lefschetz-Satz, wenn die Dimension des singulären Ortes von Y klein ist.

Sei etwa $Y \subset \mathbb{P}_n$ die Nullstellenmenge eines kohärenten Ideals I, $\dim Y = n - q$, seien $y_1, \ldots, y_r \in Y$, so daß $\operatorname{cg} I_x = q$ für $x \in Y \setminus \{y_1, \ldots, y_r\}$ und $\operatorname{cg} I_x \leqq 2q$ für $x \in Y$. Dann ist $\mathbb{P}_n \setminus Y$ nach Satz 5.2 $2q$-vollständig, also $\pi_i(\mathbb{P}_n, Y) = 0$ für $i \leqq n - 2q$.

Aus den Sätzen von Andreotti und Grauert folgt das Verschwinden analytischer Kohomologiegruppen. Die algebraische Kohomologie Zariski-offener Teilmengen des projektiv-algebraischen Raumes ist in [21] untersucht worden. Dort wurde die in [15] eingeführte lokale Kohomologie benutzt. Vergleichssätze, die einen Zusammenhang zwischen der kohomologischen Dimension [18] und der q-Vollständigkeit herstellen könnten, stehen jedoch für Komplemente singulärer algebraischer Mengen bisher nicht zur Verfügung.

Neben der q-Vollständigkeit von Komplementen algebraischer Mengen in algebraischen Varietäten erhält man aus den bereitgestellten Methoden weitere, für sich interessante Sätze in den Abschnitten 2, 3 und 6.

Der letzte Abschnitt behandelt die Einhängung eines p-vollständigen in einem q-vollständigen Raum und die Frage, ob p-konvexe Funktionen in einer Umgebung eines p-vollständigen Raumes existieren. Dieses Resultat (Satz 6.1) ist besonders im Vergleich mit Satz 2.3 [10] interessant.

Es soll ein kurzer Überblick über den Aufbau der Arbeit gegeben werden. Zunächst wird der Begriff der q-Konvexität einer Funktion bezüglich einer linearen Menge eingeführt. Der Sinn dieser Definition besteht darin, daß es feste Richtungen gibt, in denen alle im Verlauf der Konstruktion vorkommenden Funktionen plurisubharmonisch sind. Sind f und g q-konvexe Funktionen im $\mathbb{C}^n$, so kann man ohne nähere Kenntnis der Eigenvektoren der Leviformen nicht mehr über deren Summe $f+g$ aussagen, als daß sie $(2q-1)$-konvex ist. Gibt es jedoch in jedem Punkt einen Vektorraum der Dimension $n-q+1$, in dessen Richtung f und g gleichzeitig 1-konvex sind, so gilt dies auch für die Summe: $f+g$ ist dann wieder q-konvex.

Dieses Verfahren wird besonders wichtig für Ausschöpfungsfunktionen von Komplementen analytischer Teilmengen A. Die lineare Menge – die dann in Definition 3.1 als A-zulässig bezeichnet wird – besteht aus allen Richtungen parallel zu A und einer Richtung senkrecht zu A. Die Anzahl linear unabhängi-

ger Richtungen parallel zu A hängt davon ab, wie singulär A ist. In Satz 3.1 wird dann festgestellt, daß die Eigenwerte der Leviformen bestimmter Ausschöpfungsfunktionen von $X-A$, eingeschränkt auf diese Richtungen, bei Annäherung an A nach unten beschränkt sind.

Die q-Vollständigkeit eines Tripels (C, B, A) ist eine Abschwächung der q-Vollständigkeit von $C-A$, indem für die Ausschöpfungsfunktion von $C-A$ nur die q-Konvexität außerhalb einer Umgebung von $B-A$ gefordert wird. In Anlehnung an die Homologie eines Paares in der algebraischen Topologie kann man die q-Vollständigkeit von (C, B, A) als q-Vollständigkeit von $C-A$ relativ zu $B-A$ auffassen. Satz 3.3, der den Induktionsschritt in unserem Beweis ermöglicht, entspricht dann einer Anwendung der langen exakten Homologiesequenz.

In Abschnitt 2 werden Konvexitätsaussagen für das Maximum und das Minimum q-konvexer Funktionen gezeigt, besser gesagt: Diese Funktionen werden durch differenzierbare Funktionen ersetzt, die auf ähnliche Weise aus zwei Funktionen f und g wie $\min(f, g)$ und $\max(f, g)$ hervorgehen. Damit werden Glättungssätze vermieden, die für die Maximumsbildung, nicht aber für die Bildung des Minimums möglich wären.

In den Abschnitten 4 und 5 werden die Methoden auf den projektiv-algebraischen Raum angewandt. Dies wird durch Satz 4.1 ermöglicht, der implizit die Positivität des Hyperebenenbündels ausnutzt.

1. q-Konvexität bezüglich linearer Mengen

Alle hier betrachteten komplexen Räume $X=(X, \mathcal{O}_X)$ sollen parakompakt und reduziert sein. Ist A eine analytische Teilmenge des komplexen Raumes X, so soll A wieder als komplexer Raum aufgefaßt werden. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Induktionsbeweise ist es sinnvoll, $X=\varnothing$ als komplexen Raum mit $\dim X=-1$ zuzulassen.

Es sei $T_x X$ der holomorphe Tangentialraum an X im Punkte $x\in X$, $TX := \bigcup_{x\in X} T_x X$. Ist $X=\mathbb{C}^n$, so werde $T_x X$ in natürlicher Weise mit $\mathbb{C}^n$ identifiziert. Mit $\|z\|$ werde die euklidische Norm in $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

Eine Karte des komplexen Raumes X ist eine holomorphe Einbettung ι: $U\hookrightarrow B$, wobei U eine offene Teilmenge von X und B eine offene Teilmenge eines Raumes $\mathbb{C}^n$ ist. Holomorphe Einbettung bedeutet, daß $\iota(U)$ eine analytische Menge in B und die Abbildung $\iota: U\to\iota(U)$ biholomorph ist. Ist $\iota: U\hookrightarrow B$ eine Karte und $x\in U$, so ist die Differentialabbildung $\iota_*: T_x X\to\mathbb{C}^n$ ein injektiver Homomorphismus komplexer Vektorräume.

Es sei B eine offene Umgebung eines Punktes $x\in\mathbb{C}^n$ und $f\in C^\infty(B)$. Man definiert dann die Leviform $L(x, f)$ von f im Punkte x, indem man für zwei Tangentialvektoren $\xi, \eta\in\mathbb{C}^n$ setzt:

$$L(x, f)(\xi, \eta)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}\,\xi_i\bar{\eta}_j.$$

Außerdem sei $L(x, f)\,\xi=L(x, f)(\xi, \xi)$.

Die üblichen Definitionen der Differenzierbarkeit und q-Konvexität von Funktionen auf einem komplexen Raum seien kurz angegeben: Eine Funktion

$f: X \to \mathbb{R}$ heißt genau dann differenzierbar, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Karte $\iota: U \hookrightarrow B$ von X mit $x \in U$ und ein $g \in C^\infty(B)$ gibt, so daß $g \circ \iota = f \mid U$ ist. Kann man g so wählen, daß es einen komplexen Untervektorraum $M \subset \mathbb{C}^n$ der Dimension $\dim M \geqq n-q+1$ gibt mit $L(\iota(x), g)(\xi, \xi) > 0$ für alle $\xi \in M - \{0\}$, so heißt f q-konvex ($q \in \mathbb{N}$).

Mit $C^\infty(X)$ werde die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f: X \to \mathbb{R}$, mit $C^\infty(X, \mathbb{C})$ die Menge aller $f: X \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in C^\infty(X)$ bezeichnet.

Sei W eine Teilmenge von X. Eine stetige Funktion $f: W \to \mathbb{R}$ heißt eine Ausschöpfungsfunktion, wenn für alle $c \in \mathbb{R}$ die Menge $\{f \leqq c\} = \{z \in W: f(z) \leqq c\}$ kompakt ist. $A(W)$ sei die Menge aller Ausschöpfungsfunktionen $f: W \to \mathbb{R}$. Sind $f \geqq g$ stetige reelle Funktionen auf W, so ist $f \in A(W)$, falls $g \in A(W)$.

X heißt q-vollständig, wenn es eine q-konvexe Funktion $f \in A(X)$ gibt.

Definition 1.1. *Es seien X ein komplexer Raum und $M \subset TX$. Für $x \in X$ werde $M_x := M \cap T_x X$ gesetzt. M heißt eine lineare Menge über X, wenn M_x für alle $x \in X$ ein komplexer Untervektorraum von $T_x X$ ist.*

Ist $W \subset X$, $M \subset TX$, so sei $M \mid W \subset TX$ mit $(M \mid W)_x = M_x$ für alle $x \in W$ und $(M \mid W)_x = \{0\}$ für alle $x \in X - W$.

Im folgenden seien X ein komplexer Raum, W eine offene Teilmenge von X, $f \in C^\infty(W)$ und M eine lineare Menge über X.

Definition 1.2. a) *Ist $x \in W$, so heißt f schwach q-konvex bezüglich M_x, wenn es einen komplexen Untervektorraum $N \subset M_x$ mit $\dim N \geqq \dim M_x - q + 1$, eine Karte $\iota: U \hookrightarrow B$ von X mit $x \in U \subset W$ und ein $g \in C^\infty(B)$ gibt, so daß $g \circ \iota = f \mid U$ und $L(\iota(x), g)\, \iota_* \xi \geqq 0$ ist für alle $\xi \in N$. Weiter heißt f schwach q-konvex bezüglich M, wenn f für alle $x \in W$ schwach q-konvex bezüglich M_x ist.*

b) *f heißt q-konvex bezüglich M, wenn es zu jedem $x \in W$ eine offene Umgebung $U \subset W$ und eine 1-konvexe Funktion $g \in C^\infty(U)$ gibt, so daß $(f \mid U) - g$ schwach q-konvex bezüglich M ist.*

c) *f heißt pseudokonvex bezüglich M in einem Punkte $x \in W$, wenn es eine offene Umgebung $U \subset W$ von x und endlich viele Funktionen $f_i \in C^\infty(U)$, $1 \leqq i \leqq s$, gibt, so daß die f_i 1-konvex bezüglich M sind und $f \mid U = \max_{1 \leqq i \leqq s} f_i$ gilt.*

f heißt pseudokonvex bezüglich M, wenn f in jedem Punkt $x \in W$ pseudokonvex bezüglich M ist.

Unmittelbar aus diesen Definitionen folgt: f ist genau dann q-konvex, wenn f q-konvex bezüglich TX ist, f ist genau dann schwach q-konvex bezüglich M, wenn es eine lineare Menge $N \subset M$ über W mit $\dim N_x \geqq \dim M_x - q + 1$ für $x \in W$ gibt, so daß f schwach 1-konvex bezüglich N ist, f ist genau dann schwach 1-konvex bezüglich M_x, wenn es zu jeder Karte $\iota: U \hookrightarrow B$ mit $x \in U \subset W$ ein $g \in C^\infty(B)$ mit $g \circ \iota = f \mid U$ gibt, so daß $L(\iota(x), g)\, \iota_* \xi \geqq 0$ für alle $\xi \in M_x$ gilt.

Lemma 1.1. *f ist genau dann q-konvex bezüglich M, wenn es eine lineare Menge $N \subset M$ über W mit $\dim N_x \geqq \dim M_x - q + 1$ für $x \in W$ gibt, so daß f 1-konvex bezüglich N ist.*

Beweis. Es gebe eine solche lineare Menge N über W. Zu jedem $x \in W$ gibt es dann eine offene Umgebung $U \subset W$ und eine 1-konvexe Funktion $g \in C^\infty(U)$,

so daß $f \mid U - g$ schwach 1-konvex bezüglich N ist. Dann ist $f \mid U - g$ schwach q-konvex bezüglich M, also ist f q-konvex bezüglich M.

Umgekehrt sei f q-konvex bezüglich M. Dann gibt es eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_i: i \in I\}$ von W und 1-konvexe Funktionen $g_i \in C^\infty(U_i)$, so daß $f \mid U_i - g_i$ schwach q-konvex bezüglich M ist. Es gibt eine offene Überdekkung $\{V_i: i \in I\}$ von W mit $\bar{V}_i \subset U_i$ für alle $i \in I$. Zu jedem $x \in W$ werde nun ein $i(x) = i \in I$ gewählt, so daß $x \in V_i$.

Da $f \mid U_i - g_i$ schwach q-konvex bezüglich M_x ist, gibt es einen komplexen Untervektorraum $N_x \subset M_x$ mit $\dim N_x \geqq \dim M_x - q + 1$, so daß $f \mid U_i - g_i$ schwach 1-konvex bezüglich N_x ist. Dann ist $N = \bigcup_{x \in W} N_x$ eine lineare Menge über W, und es bleibt zu zeigen, daß f 1-konvex bezüglich N ist.

Da die Familie $\{U_i: i \in I\}$ lokal endlich ist, kann man zu jedem $x \in W$ eine offene Umgebung $U \subset W$ mit den folgenden Eigenschaften finden: Die Menge $J := \{i \in I: U \cap V_i \neq \varnothing\}$ ist endlich und $U \Subset \bigcap_{i \in J} U_i$. Es sei $i = i(x)$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß $g_j - \delta g_i$ für alle $j \in J$ auf U 1-konvex ist. Die Funktion $g = \delta g_i \mid U$ ist 1-konvex. Für $y \in U$, $j = i(y)$ ist dann $y \in V_j$, also $j \in J$. Die Funktion $f \mid U - g_j \mid U$ ist schwach 1-konvex bezüglich N_y. Da $g_j \mid U - g$ 1-konvex ist, folgt: $f \mid U - g$ ist schwach 1-konvex bezüglich N und f 1-konvex bezüglich N.

Lemma 1.2. *Es sei $\iota: W \hookrightarrow B$ eine Karte von X. Die Funktion f ist genau dann 1-konvex bezüglich M, wenn zu jeder kompakten Menge $K \subset W$ ein $\delta > 0$ und für alle $x \in K$ ein $g \in C^\infty(B)$ existiert mit $g \circ \iota = f$, so daß $L(\iota(x), g)\, \iota_* \xi \geqq \delta \| \iota_* \xi \|^2$ für alle $\xi \in M_x$.*

Beweis. Das Kriterium sei erfüllt. Sei $x \in W$ und U eine offene Umgebung von x mit $U \Subset W$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f \mid U - \delta \| \iota \|^2 \mid U$ schwach 1-konvex bezüglich M ist. Da $\delta \| \iota \|^2$ 1-konvex ist, folgt die Behauptung.

Es sei nun f 1-konvex bezüglich M und $x \in W$. Dann ist zu zeigen, daß es eine offene Umgebung U von x in W, ein $\delta > 0$ und zu jedem $y \in U$ ein $g \in C^\infty(B)$ gibt mit $g \circ \iota = f$ und $L(\iota(y), g)\, \iota_* \xi \geqq \delta \| \iota_* \xi \|^2$ für alle $\xi \in M_y$.

Hierzu sei V eine offene Umgebung von x in W und $h \in C^\infty(V)$ eine 1-konvexe Funktion, so daß $f \mid V - h$ schwach 1-konvex bezüglich M ist. Seien nun U eine offene Umgebung von x in W und $\delta > 0$, so daß $h - \delta \| \iota \|^2$ auf U 1-konvex ist. Dann ist $f - \delta \| \iota \|^2 \mid U$ schwach 1-konvex bezüglich M, und es gibt zu jedem $y \in U$ ein $g' \in C^\infty(B)$ mit $g' \circ \iota = f - \delta \| \iota \|^2$ und $L(\iota(y), g')\, \iota_* \xi \geqq 0$ für alle $\xi \in M_y$. Setzt man nun $g(z) = g'(z) + \delta \| z \|^2$, so folgt die Behauptung.

Eine konvexe Funktion ist ein $r \in C^\infty(\mathbb{R})$, das $r' > 0$ und $r'' \geqq 0$ erfüllt. Neben f sei für das folgende Lemma noch ein $g \in C^\infty(W)$ gegeben.

Lemma 1.3. a) *Ist f 1-konvex bezüglich M und $U \Subset W$ offen, so gibt es eine reelle Zahl $K > 0$, so daß $Kf + g \mid U$ 1-konvex bezüglich M ist.*

b) *Ist $x \in W$, $r \in C^\infty(\mathbb{R})$, $r''(f(x)) \geqq 0$, so ist $r \circ f - r'(f(x)) f$ schwach 1-konvex bezüglich $T_x X$.*

c) *Ist f q-konvex bezüglich M, r eine konvexe Funktion, $a \geqq 0$ eine reelle Zahl mit $r' \circ f > a$, so ist $r \circ f - af$ q-konvex bezüglich M.*

d) *Ist f q-konvex bezüglich M und r eine konvexe Funktion, so ist $r \circ f$ q-konvex bezüglich M.*

e) *Sind a, b positive reelle Zahlen, f und $abf+g$ 1-konvex bezüglich M und r eine konvexe Funktion mit $r'\circ f \geqq br'\circ g$, so ist $a(r\circ f)+r\circ g$ 1-konvex bezüglich M.*

f) *Ist f q-konvex bezüglich M, $x\in W$ und g schwach 1-konvex bezüglich T_xX, so gibt es eine offene Umgebung U von x in W, so daß $(f+g)\mid U$ q-konvex bezüglich M ist.*

Beweis. a) Ist f 1-konvex bezüglich M, so gibt es zu jedem $x\in W$ eine offene Umgebung $V(x)\subset W$ und eine 1-konvexe Funktion $h\in C^\infty(V(x))$, so daß $f\mid V(x)-h$ schwach 1-konvex bezüglich M ist. Sei $W(x)\subset V(x)$ eine offene Umgebung von x und $K(x)>0$, so daß $(K(x)-1)h+g$ auf $W(x)$ 1-konvex ist. Dann ist $K(x)f+g\mid W(x)$ 1-konvex bezüglich M. Es gibt endlich viele $x_i\in W$, $1\leqq i\leqq s$, so daß $\bigcup_{i=1}^{s} W(x_i)\supset U$ ist. Setzt man $K:=\max_{1\leqq i\leqq s} K(x_i)$, so ist $Kf+g\mid U$ 1-konvex bezüglich M.

b) Hierzu seien $\iota: U\hookrightarrow B$ eine Karte von X mit $x\in U\subset W$ und $h\in C^\infty(B)$ mit $h\circ\iota=f\mid U$. Weiter sei $a:=r'(f(x))$. Dann ist $(r\circ h-ah)\circ\iota=(r\circ f-af)\mid U$ und für alle $\eta\in T_{\iota(x)}B$ gilt: $L(\iota(x), r\circ h)\eta\geqq aL(\iota(x), h)\eta$ wegen $r''(f(x))\geqq 0$. Also ist $r\circ f-af$ schwach 1-konvex bezüglich T_xX.

c) Nach Lemma 1.1 gibt es eine lineare Menge $N\subset M$ über W mit $\dim N_x \geqq \dim M_x-q+1$ für alle $x\in W$, so daß f 1-konvex bezüglich N ist. Es seien $U\Subset W$ offen und $b>a$, so daß $r'\circ f>b$ auf U gilt. Ist $x\in U$, so ist wegen b) die Funktion $r\circ f-r'(f(x))f$ schwach 1-konvex bezüglich T_xX, also $r\circ f-bf\mid U$ schwach 1-konvex bezüglich N und deshalb $r\circ f-af\mid U$ 1-konvex bezüglich N. Da $U\Subset W$ beliebig war, ist $r\circ f-af$ 1-konvex bezüglich N. Aus Lemma 1.1 folgt, daß $r\circ f-af$ q-konvex bezüglich M ist.

Setzt man $a=0$, so folgt d) aus c).

e) Es sei $U\Subset W$ offen. Es ist zu zeigen, daß $a(r\circ f)+r\circ g\mid U$ 1-konvex bezüglich M ist. Hierzu sei $\gamma>0$, so daß $r'\circ g>\gamma$ auf U. Es sei nun $x\in U$, $\alpha:=r'(f(x))$, $\beta:=r'(g(x))$. Dann ist $\alpha\geqq b\beta$. Nach b) sind $r\circ f-\alpha f$ und $r\circ g-\beta g$ schwach 1-konvex bezüglich T_xX, dies trifft dann auch für die Funktion $a(r\circ f)+r\circ g-(a\alpha f+\beta g)$ zu. Da f 1-konvex bezüglich M und $\alpha\geqq b\beta$ ist, gilt: $a(r\circ f)+r\circ g-\beta(abf+g)$ ist schwach 1-konvex bezüglich M_x. Da $abf+g$ 1-konvex bezüglich M ist, folgt wegen $\beta>\gamma$, daß $a(r\circ f)+r\circ g-\gamma(abf+g)\mid U$ schwach 1-konvex bezüglich M ist. Da $\gamma>0$ und $abf+g$ 1-konvex bezüglich M ist, folgt die Behauptung.

f) Es gibt zu $x\in W$ eine offene Umgebung $V\subset W$ und eine 1-konvexe Funktion $h\in C^\infty(V)$, so daß $f\mid V-h$ schwach q-konvex bezüglich M ist. Sei $U\subset V$ eine offene Umgebung von x, so daß $h+g$ auf U 1-konvex ist. Dann ist $f+g\mid U$ q-konvex bezüglich M.

Definition 1.3. *Es seien X ein komplexer Raum, $A\subset B\subset C$ analytische Teilmengen von X und M eine lineare Menge über X.*

a) *X heißt genau dann q-vollständig bezüglich M, wenn es eine Ausschöpfungsfunktion $f\in C^\infty(X)$ gibt, die q-konvex bezüglich M ist.*

b) *Das Tripel (C, B, A) heißt genau dann q-vollständig bezüglich M, wenn es zu jeder Umgebung U von $B-A$ in X eine Umgebung V von $C-B$ in X gibt, so daß $X-A$ q-vollständig bezüglich $M\mid V-U$ ist.*

c) *Das Paar* (C, B) *heißt genau dann* q*-vollständig bezüglich* M*, wenn das Tripel* (C, B, B) q*-vollständig bezüglich* M *ist.*

Ein Paar (C, B) ist also genau dann q-vollständig bezüglich M, wenn es eine Umgebung U von $C-B$ gibt, so daß $X-B$ q-vollständig bezüglich $M \mid U$ ist.

Das Paar (X, B) ist genau dann q-vollständig bezüglich M, wenn der Raum $X-B$ q-vollständig bezüglich M ist.

X ist genau dann q-vollständig, wenn X q-vollständig bezüglich TX ist. Der komplexe Raum X bzw. das Paar (C, A) ist genau dann q-vollständig bezüglich einer linearen Menge M, wenn es eine lineare Menge $N \subset M$ mit $\dim N_x \geqq \dim M_x - q + 1$ für alle $x \in X$ gibt, so daß X bzw. (C, A) 1-vollständig bezüglich N ist.

Diese Aussagen folgen direkt aus Lemma 1.1.

2. Verheften 1-konvexer Funktionen

Lemma 2.1. *Es seien* $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\phi: (-\infty, c) \to \mathbb{R}$ *eine monoton wachsende Funktion und* ε *eine positive reelle Zahl. Dann gibt es Funktionen* $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \in C^\infty((-\infty, c))$*, so daß gilt:*

$$
\begin{array}{llll}
r_1' > 0 & \text{und} & r_1''/r_1' < -\phi & \\
r_2' > 0, & r_2''/r_2' > \phi, & \lim\limits_{t \to c} r_2(t) = +\infty & \\
r_3' > 0, & r_3'' \geqq 0, & r_3(\varepsilon) = \varepsilon, & r_3(t) > \phi(t), \quad \text{falls } t \geqq 2\varepsilon \\
r_4' > 0, & r_4'' \geqq 0, & r_4 > \phi & \\
r_5' > \phi, & r_5'' \geqq 0. & &
\end{array}
$$

Der elementare Beweis soll hier nicht durchgeführt werden.

Lemma 2.2. *Es seien* $W \subset X$, $f \in A(W)$ *und* g *eine stetige reelle Funktion auf* W*. Dann gilt:*

a) *Es gibt eine konvexe Funktion* r *mit* $r' > 1$*, so daß* $r \circ f + g \in A(W)$.

b) *Ist* $\varepsilon > 0$*, so gibt es eine konvexe Funktion* r*, so daß* $r(\varepsilon) = \varepsilon$ *und* $r \circ f(x) > g(x)$*, falls* $f(x) \geqq 2\varepsilon$ *ist.*

c) *Es gibt eine konvexe Funktion* r*, so daß* $r \circ f > g$ *ist.*

Beweis. Sei $x_0 \in W$. Für $t \in \mathbb{R}$ ist die Menge $A_t := \{x_0\} \cup \{x \in W: f(x) \leqq t\}$ kompakt. Sei $\psi(t) := -\inf\{g(x): x \in A_t\}$. Diese Funktion wächst monoton. Nach Lemma 2.1 gibt es eine konvexe Funktion r_1 mit $r_1(t) > \psi(t)$. Es sei $r(t) = r_1(t) + t$. Dann ist r eine konvexe Funktion mit $r > 1$.

Sei $x \{ W$ und $t := f(x)$. Dann ist $x \in A_t$, also $-\psi(t) \leqq g(x)$. Deshalb gilt:

$$r \circ f(x) + g(x) = r_1(t) + t + g(x) > \psi(t) + t + g(x) \geqq t = f(x).$$

Also ist $r \circ f + g > f$, und es ist $r \circ f + g \in A(W)$, da f eine Ausschöpfungsfunktion von W war.

Um b) zu zeigen, setze man

$$\phi(t)=\sup\{g(x)\colon x\in A_t\}.$$

Nach Lemma 2.1 gibt es eine konvexe Funktion r, so daß $r(\varepsilon)=\varepsilon$ und $r(t)>\phi(t)$, falls $t\geqq 2\varepsilon$. Ist dann $x\in W$ und $f(x)\geqq 2\varepsilon$, so folgt, wenn man wieder $f(x)=t$ setzt, daß $x\in A_t$, also $\phi(t)\geqq g(x)$ und somit $r(f(x))>\phi(t)\geqq g(x)$.

Ist $f\in A(W)$, so gibt es ein $c\in\mathbb{R}$, so daß $f>c$ ist. Setzt man in b) nun $\varepsilon=1$, so gibt es eine konvexe Funktion s, so daß $s\circ(f-c+2)\,g$ ist. Ist $r(t):=s(t-c+2)$, so ist r eine konvexe Funktion und $r\circ f>g$.

Lemma 2.3. *Seien X ein komplexer Raum und M eine lineare Menge über X.*

a) *Es seien $\{U_i\colon i\in I\}$ eine lokal endliche offene Überdeckung durch offene Mengen $U_i\Subset X$ von X und $f_i\in C^\infty(X)$ für $i\in I$. Ist X 1-vollständig bezüglich M, so gibt es eine Ausschöpfungsfunktion $f\in C^\infty(X)$ von X, so daß für alle $i\in I$ gilt: $f-f_i$ ist 1-konvex bezüglich M.*

b) *Es sei $U\Subset X$ eine offene Teilmenge von X, die 1-vollständig bezüglich M ist. Dann gibt es eine Funktion $f\in C^\infty(U)$ mit $f\geqq 0$ und der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $g\in C^\infty(X)$ gibt es ein $\delta>0$, so daß $f+\delta g\,|\,U$ 1-konvex bezüglich M ist.*

Beweis. a) Sei $g\in C^\infty(X)$ eine Ausschöpfungsfunktion, die 1-konvex bezüglich M ist. Da $U_i\Subset X$, gibt es nach Lemmaa 1.3a) reelle Zahlen $a_i>0$, so daß $a_i g-f_i\,|\,U_i$ 1-konvex bezüglich M ist. Sei $i_0\in I$ beliebig. Für $t\in\mathbb{R}$ sei $B_t:=\{i_0\}\cup\{i\in I\colon$ Es gibt ein $x\in U_i$, so daß $g(x)\leqq t\}$.

Da die Überdeckung $\{U_i\colon i\in I\}$ lokal endlich und die Menge $\{g\leqq t\}$ kompakt ist, sind dies endliche, nichtleere Mengen. Sei $\psi(t):=\sup\{a_i\colon i\in B_t\}$. Dies ist eine monoton wachsende Funktion. Nach Lemma 2.1 gibt es eine konvexe Funktion r mit $r'>\psi$. Ist $x\in U_i$ und $g(x)=t$, so ist $i\in B_t$, also $a_i\leqq\psi(t)$. Dann ist $r'(t)>a_i$, also $r'\circ g>a_i$ auf U_i.

Da $g\,|\,U_i$ 1-konvex bezüglich M ist, ist damit $r\circ g-a_i g\,|\,U_i$ 1-konvex bezüglich M. Deshalb ist $r\circ g-f_i\,|\,U_i=(r\circ g-a_i g)\,|\,U_i+(a_i g-f_i)\,|\,U_i$ 1-konvex bezüglich M. Setzt man $f:=r\circ g$, so ist $f-f_i\,|\,U_i$ 1-konvex bezüglich M, und f ist eine Ausschöpfungsfunktion, da $g\in A(X)$ und r konvex ist.

b) Es gibt endlich viele offene Mengen $V_i\Subset U_i$, $1\leqq i\leqq r$ in X mit $\bigcup_{i=1}^{r} V_i\supset U$, so daß für $1\leqq i\leqq r$ Funktionen $f_i\in C^\infty(X)$ existieren, deren Einschränkungen $f_i\,|\,U_i$ 1-konvex sind.

Es gibt nun eine lokal endliche offene Überdeckung $\{W_j\colon j\in J\}$ von U, so daß zu jedem $j\in J$ ein $i=i(j)$ mit $1\leqq i\leqq r$ und $W_j\Subset U\cap V_{i(j)}$ existiert. Nach Teil a) gibt es eine Ausschöpfungsfunktion $f\in C^\infty(U)$, so daß $f-f_{i(j)}\,|\,W_j$ 1-konvex bezüglich M ist. Da f als Ausschöpfungsfunktion nach unten beschränkt ist, kann man f so wählen, daß $f\geqq 0$ ist.

Es sei nun $g\in C^\infty(X)$. Da $f_i\,|\,U_i$ 1-konvex und $V_i\Subset U_i$, gibt es zu jedem $1\leqq i\leqq r$ ein $\delta_i>0$, so daß $f_i+\delta_i g\,|\,V_i$ 1-konvex ist. Es sei $\delta:=\min\{\delta_i\colon 1\leqq i\leqq r\}$. Dann ist $f_i+\delta g\,|\,V_i$ 1-konvex. Auf W_j ist somit $f+\delta g=f-f_{i(j)}+f_{i(j)}+\delta g$ 1-konvex bezüglich M.

Besitzt ein komplexer Raum eine Ausschöpfungsfunktion, die das Maximum oder das Minimum zweier 1-konvexer Funktionen ist, so kann man auf die

1-Vollständigkeit bzw. 2-Vollständigkeit dieses Raumes schließen. Da $\max(f, g)$ im allgemeinen nicht mehr differenzierbar ist, ersetzt man diesen Ausdruck durch $r\circ f+r\circ g$, wobei r eine konvexe Funktion ist. Die Funktion r bewirkt, daß die Leviform von $r\circ f+r\circ g$ im wesentlichen nur von der Leviform der größeren der beiden Funktionen abhängt. Bildet man das Minimum, so muß eine konkave Funktion r gewählt werden. Deshalb geht ein positiver Eigenwert verloren.

In den nächsten beiden Sätzen wird diese Argumentation präzisiert.

Satz 2.1. *Es seien X ein komplexer Raum, M eine lineare Menge über X, $\{f_i: i\in I\}$ eine Familie von Funktionen $f_i\in C^\infty(X)$ und $f\in A(X)$, so daß gilt:*

(1) $f>0$, $f_i\geqq 0$ *für alle* $i\in I$.

(2) $f=\max\limits_{i\in I} f_i$.

(3) *Zu jedem $x\in X$ gebe es eine Umgebung U, so daß $f_i|U=0$ für alle $i\in I$ bis auf endlich viele.*

(4) *Ist $f_i(x)=f(x)$, so gibt es eine offene Umgebung U von x, so daß $f_i|U$ 1-konvex bezüglich M ist.*

Dann gibt es eine konvexe Funktion r mit $r(0)=0$, so daß $g:=\sum\limits_{i\in I} r\circ f_i\in A(X)$ und g 1-konvex bezüglich M ist.

Beweis. Ist r eine beliebige konvexe Funktion mit $r(0)=0$, so gibt es zu jedem $x\in X$ eine offene Umgebung U und eine endliche Teilmenge $J\subset I$, so daß $\sum\limits_{i\in I} r\circ f_i=\sum\limits_{i\in J} r\circ f_i$ ist. Die Funktion $g=\sum\limits_{i\in I} r\circ f_i$ ist also stets wohldefiniert, es ist $g\in C^\infty(X)$. Da $f_i\geqq 0$ und $f=\max f_i$, ist $g\geqq r\circ f$. Da $r'>0$ und $f\in A(X)$, ist $r\circ f$ und damit auch g eine Ausschöpfungsfunktion von X. Es bleibt also zu zeigen, daß man die konvexe Funktion r so wählen kann, daß g 1-konvex bezüglich M ist.

Man kann zu jedem $x\in X$ eine endliche Teilmenge $\varnothing\neq I_x\subset I$, eine offene Umgebung $U=U(x)\Subset X$ und reelle Zahlen $A=A(x)$, $\varepsilon=\varepsilon(x)$ mit $A>0$, $0<\varepsilon\leqq 1$ finden, so daß gilt:

(5) $f_j|U=0$, falls $j\notin I_x$.

(6) Ist $f_j(x)=f(x)$, so ist $f_j|U$ 1-konvex bezüglich M.

(7) Ist $f_j(x)=f(x)>f_k(x)$, so ist $Af_j+f_k|U$ ·1-konvex bezüglich M und $f_j-f_k|U>\varepsilon$.

Zu $\{U(x): x\in X\}$ wähle man eine lokal endliche Verfeinerung, d.h. eine lokal endliche offene Überdeckung $\{V_j: j\in J\}$, so daß zu jedem $j\in J$ ein $x_j\in X$ mit $V_j\subset U(x_j)$ existiert.

Für $j\in J$ sei $A_j:=A(x_j)$, $\varepsilon_j:=\varepsilon(x_j)$ und $I_j:=I_{x_j}$. Weiter sei s_j die Anzahl der Elemente von I_j. Schließlich sei j_0 ein beliebiges Element von J. Für $t\in\mathbb{R}$ sei

$$A_t:=\{j_0\}\cup\{j\in J: \text{Es gibt ein } x\in V_j \text{ mit } f(x)\leqq t+1\}.$$

Da $f\in A(X)$ und $\{V_j: j\in J\}$ lokal endlich ist, gilt: $A_t\neq\varnothing$ ist endlich, und

$$\phi(t):=\sup\{\varepsilon_j^{-1}\log(s_jA_j): j\in A_t\}$$

ist wohldefiniert und wächst monoton. Nach Lemma 2.1 gibt es eine konvexe Funktion r mit $r''/r' > \max(\phi, 0)$, wobei man $r(0)=0$ wählen kann.

Sei $j\in J$ fest. Auf V_j ist $g=\sum_{i\in I_j} r\circ f_i$. Es ist zu zeigen, daß $g\,|\,V_j$ 1-konvex bezüglich M ist.

Zur Vereinfachung der Schreibweise seien $I_j=\{1,\ldots,s\}$ mit $s=s_j$, $f_i(x_j)=f(x_j)$ für $1\leqq i\leqq k$ und $f_i(x_j)<f(x_j)$ für $k+1\leqq i\leqq s$. Weiter werde $\varepsilon=\varepsilon_j$ und $A=A_j$ gesetzt.

Zu festem $x\in V_j$ gibt es ein $1\leqq i\leqq k$ mit $f(x)=f_i(x)$. Sei $k+1\leqq l\leqq s$. Wegen (7) ist nun $f_i(x)-f_l(x)>\varepsilon$. Da r' monoton wächst, ist $r'\circ f_l(x)\leqq r'\circ[f_i(x)-\varepsilon]$. Es gibt also eine reelle Zahl mit $f_i(x)-\varepsilon<t<f_i(x)$, so daß

$$\log r'\circ f_i(x)-\log r'\circ f_l(x)\geqq\varepsilon\,\frac{r''(t)}{r'(t)}.$$

Da $f(x)=f_i(x)<t+\varepsilon\leqq t+1$, ist $j\in A_t$. Deshalb gilt: $\phi(t)\geqq\varepsilon^{-1}\log(sA)$. Da $r''/r'>\phi$, ist dann

$$\log r(f(x))-\log r(f_l(x))>\log(sA),$$

also

$$r'\circ f/r'\circ f_l>sA \quad \text{auf } V_j.$$

Wegen (7) sind die Funktionen $f_i\,|\,V_j$ und $Af_i+f_l\,|\,V_j$ 1-konvex bezüglich M.

Es ist $Af_i+f_l=s^{-1}(sAf_i)+f_l$. In einer kleinen Umgebung W von x, die in V_j liegt, ist $r'\circ f_i>sA\ r'\circ f_l$. Aus e) in Abschnitt 1 folgt dann: $s^{-1}r\circ f_i+r\circ f_l\,|\,W$ ist 1-konvex bezüglich M. Ist W hinreichend klein gewählt, so gilt dies für alle $k+1\leqq l\leqq s$. Dann ist $(s-k)/s\ r\circ f_i+\sum_{\kappa=k+1}^{s} r\circ f_\kappa\,|\,W$ 1-konvex bezüglich M. Da die Funktionen $r\circ f_j$, $1\leqq j\leqq k$, alle auf V_j 1-konvex bezüglich M sind, ist $g\,|\,W$ 1-konvex bezüglich M.

Korollar 1. *Es gebe ein $f\in A(X)$, so daß f pseudokonvex bezüglich M ist. Dann ist X 1-vollständig bezüglich M.*

Beweis. Es darf $f>1$ angenommen werden. Es gibt dann eine lokal endliche Überdeckung $\{U_i: i\in I\}$ von X durch offene Mengen $U_i\Subset X$ und Funktionen $f_j^{(i)}\in C^\infty(U_i)$, $1\leqq j\leqq s_i$, so daß gilt:

$$f_j^{(i)}\geqq 1/2, \qquad f\,|\,U_i=\max f_j^{(i)},$$
$$f_j^{(i)} \text{ ist 1-konvex bezüglich } M.$$

Seien $W_i\Subset V_i\Subset U_i$ offene Mengen, so daß $\bigcup_{i\in I} W_i=X$ und χ_i, $\rho_i\in C^\infty(X)$, so daß $\rho_i\,|\,V_i\equiv 1$, $\operatorname{supp}\rho_i\Subset U_i$, $0\leqq\rho_i\leqq 1$, $\chi_i\,|\,W_i=0$, $\{\chi_i=0\}\Subset V_i$, $-1/2\leqq\chi_i\leqq 0$, so daß $f_j^{(i)}+\chi_i\,|\,V_i$ 1-konvex bezüglich M ist. Man setze nun $g_j^{(i)}=\rho_i(f_j^{(i)}+\chi_i)$ auf U_i und $g_j^{(i)}=0$ auf $X-U_i$.

Dann ist $g_j^{(i)}\geqq 0$, $f=\max g_j^{(i)}$. Ist $g_j^{(i)}(x)\neq 0$, so folgt $x\in U_i$. Da $\{U_i: i\in I\}$ lokal endlich ist, gilt (3) aus Satz 2.1.

Ist $g_j^{(i)}(x)=f(x)$, so gilt $x\in V_j$ und $g_j^{(i)}\,|\,V_j$ ist 1-konvex bezüglich M. Die Bedingungen aus Satz 2.1 sind erfüllt und X ist 1-vollständig bezüglich M.

Korollar 2. *(C, B) ist genau dann 1-vollständig bezüglich M, wenn es eine Funktion $f: X-B \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $f \mid C-B \in A(C-B)$ und f in jedem Punkte $x \in C-B$ pseudokonvex bezüglich M ist.*

Beweis. Ist (C, B) 1-vollständig bezüglich M, so gibt es eine Umgebung U von $C-B$, so daß $X-B$ 1-vollständig bezüglich $M \mid U$ ist. Ist $f \in C^\infty(X-B) \cap A(X-B)$ 1-konvex bezüglich M, so ist $f \mid C-B$ eine Ausschöpfungsfunktion. Außerdem ist f in jedem Punkt von $C-B$ pseudokonvex bezüglich M. Umgekehrt sei f eine reelle Funktion auf $X-B$, pseudokonvex bezüglich M in jedem Punkt von $C-B$, so daß $f \mid C-B$ eine Ausschöpfungsfunktion ist. Es gibt dann eine offene Umgebung U von $C-B$ in X, so daß $f \mid U$ pseudokonvex bezüglich M ist. Sei $h \in C^\infty(X-B)$ eine beliebige Ausschöpfungsfunktion von $X-B$. Nach Lemma 2.2 gibt es eine konvexe Funktion r, so daß $r \circ f > h$ auf $C-B$ gilt. Dann gibt es eine offene Umgebung V von $C-B$ in U, so daß $\bar{V}-B \subset U$ und $r \circ f > h$ auf $\bar{V}-B$ ist.

Sei $\rho \in C^\infty(X-B)$ mit $\rho \mid V \equiv 1$, $\overline{\{x \in X-B: \rho(x) \neq 0\}} - B \subset U$. Schließlich werde $g = \max(\rho(r \circ f), h)$ gesetzt. Dann ist $g \in A(X-B)$, weiter ist g pseudokonvex bezüglich $M \mid V$.

Nach Korollar 1 ist $X-B$ 1-vollständig bezüglich $M \mid V$, also (C, B) 1-vollständig bezüglich M.

Satz 2.2. *Seien X ein komplexer Raum, M eine lineare Menge über X, f, $g \in C^\infty(X) \cap A(X)$ und S eine offene Umgebung der Menge $\{f=g\}$, so daß $f \mid S \cup \{f<g\}$ und $g \mid S \cup \{g<f\}$ 1-konvex bezüglich M sind.*

Dann gibt es eine lineare Menge N über X, so daß gilt:

(8) $N \subset M$,

(9) $N_x = M_x$, *falls* $x \in X-S$,

(10) $\dim N_x \geqq \dim M_x - 1$ *für* $x \in X$,

(11) X *ist 1-vollständig bezüglich* N.

Insbesondere ist X 2-vollständig bezüglich M.

Beweis. Es sei V eine offene Umgebung der Menge $\{f=g\}$ mit $\bar{V} \subset S$. Dann werde $V_1 := V \cup \{f<g\}$, $V_2 := V \cup \{g<f\}$ gesetzt.

Weiter seien $\rho, \eta \in C^\infty(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

(12) $0 \leqq \eta \leqq 1$, $0 \leqq \rho \leqq 1$,

(13) $\operatorname{supp} \rho \subset V_1$, $\operatorname{supp} \eta \subset V_2$,

(14) $\rho \equiv 1$ in einer Umgebung von $\{f \leqq g\}$,
$\eta \equiv 1$ in einer Umgebung von $\{g \leqq f\}$.

Nun seien $f_1 := \rho f + (1-\rho)(g+1)$ und $g_1 := \eta g + (1-\eta)(f+1)$. Auf $X-V_1$ ist $f_1 = g+1$ und $f \geqq g$, also $g = g_1$. Andererseits ist $g_1 = f_1 + 1$ auf $X-V_2$. Also gilt:

(15) $|f_1 - g_1| = 1$ auf $X-V$.

Es sei T eine offene Umgebung von $\{f=g\}$ in S, so daß $\rho \mid T=1$ und $\eta \mid T=1$. Weiter seien $T_1=T\cup\{f<g\}$, $T_2=T\cup\{g<f\}$. Es ist dann $f_1 \mid T_1 \equiv f \mid T_1$, $g_1 \mid T_2 \equiv g \mid T_2$, also ist $f_1 \mid T_1$, $g_1 \mid T_2$ 1-konvex bezüglich M. Da $T_1 \cup T_2 = X$, folgt aus (15):

(16) $f_1 \mid X-\overline{V}$, $g_1 \mid X-\overline{V}$ sind 1-konvex bezüglich M.

Ist $g(x) \leqq f(x)$, so ist $g_1(x)=g(x) \leqq f_1(x)$. Also ist $\{f_1<g_1\} \subset \{f<g\}$ und ebenso $\{g_1<f_1\} \subset \{g<f\}$. Hieraus folgt:

(17) $f_1 \mid T\cup\{f_1<g_1\}$ und $g_1 \mid T\cup\{g_1<f_1\}$ sind 1-konvex bezüglich M.

Da $f, g \in A(X)$, hat man außerdem noch:

(18) $f_1, g_1 \in A(X)$.

Zu jedem $x\in X$ wähle man nun eine zusammenhängende offene Umgebung $U=U(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

(19) Ist $f_1(x) \neq g_1(x)$, so ist $f_1(y) \neq g_1(y)$ für alle $y\in U$.

(20) Ist $x\in S$, so ist $U\subset S$.

(21) Ist $x\in T$, so ist $U\subset T$.

(22) Ist $x\notin \overline{V}$, so ist $U\cap \overline{V}=\varnothing$.

(23) Es gibt eine Karte $j\colon U \hookrightarrow B$ von X.

Zu der Überdeckung $\{U(x)\colon x\in X\}$ werde nun eine lokal endliche Verfeinerung gewählt. Seien also I eine Indexmenge, $x_i\in X$ und $V_i \Subset U(x_i)$ offene Mengen für $i\in I$, so daß $\{V_i\colon i\in I\}$ eine lokal endliche Überdeckung von X ist.

Es seien nun

$$I_1 := \{i\in I\colon x_i\in \overline{V}-T, f_1(x_i)<g_1(x_i)\},$$
$$I_2 := \{i\in I\colon x_i\in \overline{V}-T, g_1(x_i)<f_1(x_i)\},$$
$$I_3 := \{i\in I\colon x_i\in \overline{V}\cap T\},$$
$$I_4 := \{i\in I\colon x_i\notin \overline{V}, f_1(x_i)-g_1(x_i)=1\},$$
$$I_5 := \{i\in I\colon x_i\notin \overline{V}, g_1(x_i)-f_1(x_i)=1\}.$$

Diese sind paarweise disjunkt, es ist $\bigcup_{\alpha=1}^{5} I_\alpha = I$.

Es sei $U_i := U(x_i)$. Wegen (23) gibt es eine Karte $j_i\colon U_i \hookrightarrow B_i$ von X.

Zu jedem $x\in X$ wähle man nun ein festes $i=i(x)$, so daß $x\in V_i$. Wegen (16) gilt: $f_1 \mid U_i$ und $g_1 \mid U_i$ sind 1-konvex bezüglich M, falls $i\in I_4\cup I_5$. Aus (17) folgt: $f_1 \mid U_i$ ist 1-konvex bezüglich M, falls $i\in I_1\cup I_3$, $g_1 \mid U_i$ ist 1-konvex bezüglich M, falls $i\in I_1\cup I_2$.

Es sei $i\in I-I_2$. Da $V_i \Subset U_i$, gibt es nach Lemma 1.2 zu jedem $x\in X$ mit $i_x=i$ ein $f_x\in C^\infty(B_i)$ und eine reelle Zahl $a_i>0$, so daß $f_x\circ j_1 = f_1 \mid U_i$ und $L(j_i(x), g)\,\xi \geqq a_i \|\xi\|^2$ für alle $\xi \in j_{i*} M_x$. Ist $i\in I_2$, so gibt es aus dem gleichen

Grund zu jedem $x\in X$ mit $i=i_x$ ein $g_x\in C^\infty(B_i)$ und ein $a_i>0$, so daß $g_x\circ j_i=g_1\mid U_i$ und $L(j_i(x), g_x)\,\xi\geqq a_i\|\xi\|^2$ für alle $\xi\in j_{i*}M_x$.

Da U_i zusammenhängend ist, folgt aus (15): Ist $i\in I_4$, so ist $f_1\mid U_i-1=g_1\mid U_i$, ist $i\in I_5$, so ist $f_1\mid U_i+1=g_1\mid U_i$. Falls $i\in I_4$, so setze man $g_x:=f_x-1$, ist $i\in I_5$, so setze man $g_x:=f_x+1$ für alle $x\in X$ mit $i=i_x$.

Für $i\in I_2$ sei $\tilde f_i\in C^\infty(B_i)$ mit $\tilde f_i\circ j_i=f_1\mid U_i$, für $i\in I_1$ sei $\tilde g_i\in C^\infty(B_i)$ mit $\tilde g_i\circ j_i=g_1\mid U_i$. Da $V_i\Subset U_i$, gibt es reelle Zahlen $b_i>0$ für $i\in I_1\cup I_2$, so daß $L(j_i(x),\tilde f_i)\,\xi\geqq -b_i\|\xi\|^2$, falls $i\in I_2$ und $L(j_i(x),\tilde g_i)\,\xi\geqq -b_i\|\xi\|^2$, falls $i\in I_1$, für alle $x\in V_i$, $\xi\in T_{i(x)}B_i$. Für $i\in I-(I_1\cup I_2)$ setze man $b_i=1$. Schließlich sei $f_x:=\tilde f_i$, falls $i=i_x\in I_2$ und $g_x:=\tilde g_i$, falls $i=i_x\in I_1$. Damit hat man zu jedem $i\in I$ positive reelle Zahlen a_i, b_i und zu jedem $x\in X$ mit $i_x=i$ Funktionen f_x, $g_x\in C^\infty(B_i)$ gefunden, so daß folgendes gilt:

$$f_x\circ j_i=f_1\mid U_i,\qquad g_x\circ j_i=g_1\mid U_i, \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &L(j_i(x),f_x)\,\xi\geqq -b_i\|\xi\|^2,\\ &L(j_i(x),g_x)\,\xi\geqq -b_i\|\xi\|^2 \quad \text{für alle } \xi\in T_xB_i, \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} &L(j_i(x),f_x)\,\xi\geqq a_i\|\xi\|^2, \quad \text{falls } i\notin I_2,\\ &L(j_i(x),g_x)\,\xi\geqq a_i\|\xi\|^2, \quad \text{falls } i\notin I_1 \text{ für } \xi\in j_{i*}M_x. \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} g_x&=f_x+1, \quad \text{falls } i\in I_4,\\ g_x&=f_x-1, \quad \text{falls } i\in I_5. \end{aligned} \tag{27}$$

Ist $i\in I_1\cup I_2$, so ist $f_1(x_i)\neq g_1(x_i)$. Wegen (19) und $V_i\Subset U_i$ gibt es zu jedem $i\in I$ eine reelle Zahl $s_i>0$, so daß gilt:

$$|g_1(y)-f_1(y)|>s_i \quad \text{für } y\in V_i, \text{ falls } i\in I_1\cup I_2. \tag{28}$$

Sei $i_0\in I$ ein beliebiges Element. Für $t\in\mathbb{R}$ setze man

$$A_t:=\{i_0\}\cup\{i\in I\colon \text{Es gibt ein } x\in V_i \text{ mit } \min(f_1(x), g_1(x))<t\}.$$

Da f_1 und g_1 Ausschöpfungsfunktionen und $\{V_i\colon i\in I\}$ lokal endlich ist, gilt: $A_t\neq\varnothing$ ist eine endlich Menge. Für $t\in\mathbb{R}$ werde dann

$$\phi(t):=-\inf\{s_i^{-1}\log(a_i/2b_i)\colon i\in A_t\}$$

gesetzt. Dies ist eine monoton wachsende Funktion.

Nach Lemma 2.1 gibt es ein $s\in C^\infty(\mathbb{R})$, so daß $s'>0$ und $s''/s'<-\max(\phi, 0)$ ist. Es sei nun $k:=s\circ f_1+s\circ g_1\in C^\infty(X)$. Für $i\in I$ sei

$$T_i:=\sup\{[-s''\circ f_1(x)+s''\circ g_1(x)]/(s'\circ f_1(x)+s'\circ g_1(x))^2\colon x\in V_i\}.$$

Weiter sei $c:=2\lim\limits_{t\to\infty}s(t)\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Für $t<c$ sei dann

$$B_t:=\{i_0\}\cup\{i\in I\colon \text{Es gibt ein } x\in V_i, \text{ so daß } k(x)\leqq t\}.$$

Ist $t<c$ und $k(x)\leqq t$, so ist $s\circ f_1(x)\leqq t/2$ oder $s\circ g_1(x)\leqq t/2$. Da $s\colon \mathbb{R}\to(-\infty, c/2)$ ein Homöomorphismus ist, muß die Menge $\{k\leqq t\}$ für alle $t<c$ kompakt sein. Da $\{V_i\colon i\in I\}$ lokal endlich ist, folgt die Endlichkeit der Menge $B_t\neq\varnothing$.

Für $t<c$ werde dann

$$\psi(t):=\sup\{T_i\colon i\in B_t\}$$

gesetzt. Dies ist eine monoton wachsende Funktion. Nach Lemma 2.1 gibt es ein $r\in C^\infty((-\infty, c))$, so daß $r'>0$, $r''/r'>\max(\psi, 0)$ und $\lim_{t\to c} r(t)=+\infty$ ist. Schließlich werde $h:=r\circ k\in C^\infty(X)$ gesetzt. Da für $t<c$ die Mengen $\{k\leqq t\}$ kompakt sind und weiter $r'>0$, $\lim_{t\to c} r(t)=+\infty$ gilt, ist h eine Ausschöpfungsfunktion von X.

Sei $\alpha:=(r'\circ k)(s'\circ\min(f_1, g_1))\colon X\to\mathbb{R}$. Dann ist $\alpha>0$ und wegen $V_i\Subset U_i$ gibt es zu jedem $i\in I$ eine reelle Zahl $\delta_i>0$, so daß $\alpha(x)>2\delta_i/a_i$ für alle $x\in V_i$.

Gegeben sei nun ein beliebiges $x\in X$. Es werde nun $i:=i_x$, $j:=j_i$ und $z:=j(x)$ gesetzt. Weiter seien

$$N_x:=\{\xi\in M_x\colon df_x(z)(j_*\xi)=dg_x(z)j_*\xi\}$$

und

$$\tilde{h}:=\tilde{h}_x:=r\circ(s\circ f_x+s\circ g_x)\in C^\infty(B_i).$$

Dann ist $\tilde{h}\circ j=h\mid U_i$.

Es sei $\xi\in j_* N_x$. Dann soll die Leviform $L:=L(z,\tilde{h})\xi$ abgeschätzt werden. Zur Abkürzung seien $L_1:=L(z, f_x)\xi$ und $L_2:=L(z, g_x)\xi$. Zunächst wird gezeigt:

$$s'(f_1(x))L_1+s'(g_1(x))L_2\geqq a_i/2\, s'(\min(f_1(x), g_1(x)))\|\xi\|^2. \tag{29}$$

Ist $i\in I_3\cup I_4\cup I_5$, so gilt wegen (26): $L_1\geqq a_i\|\xi\|^2$ und $L_2\geqq a_i\|\xi\|^2$. Aus $s'>0$ folgt dann (29).

Es sei nun $i\in I_1$. Nach (28) gilt dann $f_1-g_1<-s_i$ auf V_i. Wendet man den Mittelwertsatz auf die Funktion $\log s'$ an, so findet man ein t mit $f_1(x)<t<g_1(x)$, so daß gilt:

$$\log s'(f_1(x))-\log s'(g_1(x))=(s''(t)/s'(t))(f_1(x)-g_1(x)).$$

Da $s''/s'<0$, folgt weiter:

$$\log s'(f_1(x))/s'(g_1(x))>-s_i\, s''(t)/s'(t).$$

Nun ist $x\in V_i$ und $t>f_1(x)=\min(f_1(x), g_1(x))$. Nach Definition ist dann $i\in A_t$, also $-\phi(t)\leqq s_i^{-1}\log(a_i/2b_i)$. Da $s''(t)/s'(t)<-\phi(t)$, folgt aus $s_i>0$ nun:

$$s'(f_1(x))/s'(g_1(x))>2b_i/a_i.$$

Wegen (26) ist $L_1\geqq a_i\|\xi\|^2$ und wegen (25) $L_2\geqq -b_i\|\xi\|^2$. Wegen $s'>0$ ist dann $s'(f_1(x))L_1+s'(g_1(x))L_2\geqq s'(f_1(x))(a_i/2)\|\xi\|^2$. Da $f_1(x)=\min(f_1(x), g_1(x))$, folgt (29). Der Fall $i\in I_2$ wird analog behandelt, wobei die Rollen von f_x und g_x

bzw. f_1 und g_1 miteinander vertauscht werden. Zur Abkürzung sei nun $u:=f_x$, $v:=g_x$, $\tilde{k}:=s\circ u+s\circ v$ und $L':=L(z,\tilde{k})\,\xi$. dann gilt:

$$\begin{aligned}L&=r'(k(x))\,L'+r''(k(x))\,|\partial\tilde{k}(z)\,\xi|^2\\&=r'(k(x))[s'(f_1(x))\,L_1+s'(g_1(x))\,L_2]\\&\quad+r'(k(x))[s''(f_1(x))\,|\partial u(z)\,\xi|^2+s''(g_1(y))\,|\partial v(z)\,\xi|^2]\\&\quad+r''(k(x))[s'(f_1(x))\,\partial u(z)\,\xi+s'(g_1(x))\,\partial v(z)\,\xi]^2.\end{aligned}$$

Wegen $\xi\in j_*N_x$ ist $\partial u(z)\,\xi=\partial v(z)\,\xi$. Setzt man $a:=\partial u(z)\,\xi$, so erhält man

$$\begin{aligned}L&=r'(k(x))(s'(f_1(x))\,L_1+s'(g_1(x))\,L_2)+\mathrm{r}'(k(x))\,|a|^2(s''(f_1(x))+s''(g_1(x)))\\&\quad+r''(k(x))\,|a|^2(s'(f_1(x))+s'(g_1(x)))^2.\end{aligned}$$

Da $\alpha(x)>2\delta_i/a_i$, folgt aus (29):

$$\begin{aligned}L&\geqq\delta_i\|\xi\|^2+[r'\circ k(x)(s''\circ f_1(x)+s''\circ g_1(x))\\&\quad+r''\circ k(x)(s'\circ f_1(x)+s'(g_1(x)))^2]\,|a|^2.\end{aligned}\tag{30}$$

Sei $t:=k(x)$. Da $x\in V_i$, ist dann $i\in B_t$, also

$$\psi(t)\geqq T_i\geqq-[s''(f_1(x))+s''(g_1(x))]/(s'(f_1(x))+s'(g_1(x)))^2.$$

Da $r''(t)/r'(t)>\psi(t)$, folgt aus (30)

$$L\geqq\delta_i\|\xi\|^2.\tag{31}$$

Es sei nun $N=\bigcup_{x\in X}N_x$. N ist eine lineare Menge über X. Es soll gezeigt werden, daß h 1-konvex bezüglich N ist.

Hierzu sei $x\in X$ und W eine offene Umgebung von x in X, so daß $J_1:=\{i\in I: W\cap V_i\neq\varnothing\}$ eine endliche Menge ist. Weiter sei $W'\subset W$ eine offene Umgebung von x, so daß $W'\cap\overline{V}_i=\varnothing$, falls $i\in J_1$ und $x\notin\overline{V}_i$. Schließlich seien $J:=\{i\in I: x\in\overline{V}_i\}$ und $W''\subset W'$ eine offene Umgebung von x, so daß $W''\Subset\bigcap_{i\in J}U_i$.

Da $W''\Subset\bigcap_{i\in J}U_i$, gibt es eine 1-konvexe Funktion $\chi\in C^\infty(W'')$, so daß die Funktionen $\delta_i\|j_i\|^2-\chi$ für alle $i\in J$ 1-konvex sind.

Sei $h':=h\,|\,W''-\chi$. Weiter seien $y\in W''$ und $i=i_y$. Da $W'\cap V_i\neq\varnothing$, ist $i\in J$, also $\delta_i\|\mathrm{j}_i\|^2-\chi$ auf W'' 1-konvex. Wegen (31) ist $h-\delta_i\|j_i\|^2$ bezüglich N_y schwach 1-konvex, somit ist h' bezüglich N_y schwach 1-konvex. Da dies für alle $y\in W''$ gilt, ist h' bezüglich N schwach 1-konvex. Da $\chi\in C^\infty(W'')$ 1-konvex ist, gilt nach Definition: h ist 1-konvex bezüglich N.

Da $h\in A(X)$, ist der komplexe Raum X 1-vollständig bezüglich N. Es ist $N\subset M$ und $\dim N_x\geqq\dim M_x-1$ für alle $x\in X$. Insbesondere ist X also 2-vollständig bezüglich M.

Ist $x\notin S$, so ist $x_i\notin S$ wegen (20). Da $\overline{V}\subset S$, ist $x_i\notin V$ und deshalb $i\in I_4\cup I_5$. Aus (27) folgt dann $df_x=dg_x$, also $N_x=M_x$. Wird ein komplexer Raum X durch

q offene Steinsche Mengen überdeckt, so gilt $H^i(X, F)=0$ für jede kohärente analytische Garbe F auf X und jedes $i \geqq q$. Aus dem nächsten Satz folgt, daß X unter diesen Voraussetzungen q-vollständig ist

Satz 2.3. *Seien X ein komplexer Raum und U, V offene Teilmengen von X, so daß U p-vollständig und V q-vollständig ist. Dann gilt: $U \cup V$ ist $(p+q)$-vollständig.*

Beweis. Es seien f eine q-konvexe Ausschöpfungsfunktion von U und g eine q-konvexe Ausschöpfungsfunktion von V. Es gibt dann eine lineare Menge M über $U \cup V$ mit $\dim M_x \geqq \dim T_x - p - q + 2$ für alle $x \in U \cup V$, so daß f und g 1-vollständig bezüglich M sind.

Es sei nun $\rho \in C^\infty(U)$ mit $0 \leqq \rho \leqq 1$, $\rho(x)=1$, falls $x \in U - V$ oder falls $x \in U \cap V$ und $f(x) \leqq g(x)+1$; $\rho(x)=0$, falls $x \in U \cap V$ und $f(x) > g(x)+2$. Für $x \in U - V$ sei dann $f_1(x)=f(x)$, für $x \in U \cap V$ sei

$$f_1(x)=\rho(x) f(x)+(1-\rho(x))(g(x)+1),$$

für $x \in V - U$ sei $f_1(x)=g(x)+1$. Dann ist $f_1 \in C^\infty(U \cup V)$ eine Ausschöpfungsfunktion.

Weiter sei $\chi \in C^\infty(V)$ mit $0 \leqq \chi \leqq 1$; $\chi(x)=1$, falls $g(x) \leqq f_1(x)+1$ und $\chi(x)=0$, falls $g(x) > f_1(x)+2$. Es sei dann

$$g_1(x)=\chi(x) g(x)+(1-\chi(x))(f_1(x)+1)$$

für $x \in V$ und $g_1(x)=f_1(x)+1$ für $x \in U - V$. Auch $g_1 \in C^\infty(U \cup V)$ ist dann eine Ausschöpfungsfunktion.

Sei $S_1 := \{x \in U \cup V: g_1(x) < f_1(x)+1\}$. S_1 ist eine offene Umgebung der Menge $\{g_1 \leqq f_1\}$. Ist $x \in S_1$, so ist $x \in V$, da $g_1(x)=f_1(x)+1$ für $x \notin V$. Wäre nun $\chi(x) \neq 1$, so hätte man $g(x) > f_1(x)+1$, also $g_1(x) \geqq f_1(x)+1$, da $0 \leqq \chi \leqq 1$. Also ist $\chi \mid S_1 \equiv 1$, $g_1 \mid S_1 = g \mid S_1$ und $g_1 \mid S_1$ 1-konvex bezüglich M.

Sei $S_2 := \{x \in U \cup V: f_1(x) < g_1(x)+1\}$. S_2 ist eine offene Umgebung von $\{f_1 \leqq g_1\}$. Es sei $x \in S_2$. Wäre $x \notin U$, so hätte man $f_1(x)=g(x)+1$, also $g(x) < g_1(x)$. Wegen $0 \leqq \chi \leqq 1$ folgte dann $f_1(x)+1 > g(x)$, also $\chi(x)=1$ und somit $g_1(x)=g(x)$. Also ist $x \in U$.

Wäre weiter $\rho(x) \neq 1$, so hätte man $x \in U \cap V$ und $f(x) > g(x)+1$ und weiter $f_1(x) \geqq g(x)+1$, da $0 \leqq \rho \leqq 1$. Dann wäre $\chi(x)=1$, also $f_1(x) \geqq g_1(x)+1$ im Widerspruch zu $x \in S_2$. Deshalb ist $\rho \mid S_2 \equiv 1$ und $f_1 \mid S_2 = f \mid S_2$ 1-vollständig bezüglich M.

Nach Satz 2.2 ist nun $U \cup V$ 2-vollständig bezüglich M. Also ist $U \cup V$ $(p+q)$-vollständig.

3. Zulässige lineare Mengen

Ist A eine analytische Teilmenge von X, so soll eine Ausschöpfungsfunktion von $X - A$ angegeben werden, die sich in der Nähe von A wie der negative Logarithmus einer Abstandsfunktion verhält. Insbesondere kann man in der Nähe von A die Leviform dieser Ausschöpfungsfunktion in den Richtungen kontrollieren, die parallel zu A liegen.

Lemma 3.1. *Es seien $G' \Subset G \subset \mathbb{C}^n$ offene Mengen und $s_{ij} \in C^\infty(G; \mathbb{C})$ für $1 \leqq i, j \leqq q$, so daß $(s_{ij}(z))$ für alle $z \in G$ eine positiv-definite hermitesche Matrix ist. Für $z \in G$, $w \in \mathbb{C}^q - \{0\}$ seien $g(z, w) := \log \sum_{i,j=1}^{q} s_{ij}(z) w_i \bar{w}_j$ und $V(w) := \{(u, \lambda w): u \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Dann gibt es eine positive reelle Zahl a, so daß für alle $x = (z, w) \in G' \times (\mathbb{C}^q - \{0\})$ gilt:*

(1) $L(x, g)\xi \leqq a\|\xi\|^2$ *für alle* $\xi \in V(w)$,

(2) $L(x, g)\xi \geqq -a\|\xi\|^2$ *für alle* $\xi \in \mathbb{C}^{n+q}$.

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C}^q - \{0\}$ sei $\phi_\lambda \in C^\infty(G)$ mit

$$\phi_\lambda(z) = \log \sum_{i,j=1}^{q} \lambda_i \bar{\lambda}_j s_{ij}(z).$$

Für $z \in G$, $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}^q - \{0\}$ sei dann $\psi(z, \lambda, \xi) = L(z, \phi_\lambda)\xi$.

Die stetige Funktion $|\psi|$ ist, da $G' \Subset G$, auf der Menge

$$S := \{(z, \lambda, \xi): z \in G', \|\lambda\| = 1, \|\xi\| = 1\}$$

beschränkt. Sei also $b > 0$, so daß $|\psi(x)| < b$ ist für $x \in S$. Ist $c \in \mathbb{C} - \{0\}$, so ist $\phi_{c\lambda} = \log|c|^2 + \phi_\lambda$, also $\psi(z, c\lambda, \xi) = \psi(z, \lambda, \xi)$.

Somit ist für $z \in G'$, $w \in \mathbb{C}^q - \{0\}$, $\xi \in \mathbb{C}^n$:

$$L(z, \phi_w)\xi = (L(z, \phi_w)(\xi/\|\xi\|))\,\|\xi\|^2 = \psi(z, \phi_{w/\|w\|}, \xi/\|\xi\|)\,\|\xi\|^2,$$

d.h.

(3) $|L(z, \phi_w)\xi| \leqq b\|\xi\|^2$ für alle $z \in G'$, $w \in \mathbb{C}^q - \{0\}$, $\xi \in \mathbb{C}^n$.

Weiter gibt es positive Zahlen C, D, so daß für alle $z \in G'$, $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\eta, \zeta \in \mathbb{C}^q$ gilt:

$$C\|\eta\|^2 \leqq \sum_{i,j=1}^{q} s_{ij}(z)\eta_i\bar{\zeta}_j \leqq D\|\eta\|^2, \qquad \left|\sum_{i,j=1}^{q} (\partial s_{ij}(z)\xi)\eta_i\bar{\zeta}_j\right| \leqq D\|\xi\|\,\|\eta\|\,\|\zeta\|.$$

Es seien nun $z \in G'$, $w \in \hbar\mathbb{C}^q - \{0\}$, $x = (z, w)$ und $L = L(x, g)$ die Leviform von g in x. Auf $\mathbb{C}^q$ werde durch

$$\langle \zeta, \eta \rangle := \sum_{i,j=1}^{q} s_{ij}(z)\zeta_i\bar{\eta}_j$$

ein Skalarprodukt erklärt. Für $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_{n+q}) \in \mathbb{C}^{n+q}$ seien $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und $\xi'' = (\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+q})$. Dann läßt sich jeder Vektor in $\mathbb{C}^{n+q}$ in der Form $\xi = \alpha + \beta + \gamma$ schreiben, wobei $\alpha'' = 0$, $\beta' = \gamma' = 0$, $\beta'' = \lambda w$ und $\langle \gamma'', w \rangle = 0$. Hieraus ergibt sich: $L\beta = L(\alpha, \beta) = L(\beta, \gamma) = 0$. Somit ist $L\xi = L\alpha + L\gamma + 2\,\mathrm{Re}\,L(\alpha, \gamma)$. Weiter ist $L\alpha = L(z, \phi_w)\alpha'$.

Wegen (3) ist dann $|L\alpha| \leqq b\,\|\alpha'\|$. Ist $\xi \in V(w)$, so ist $\gamma = 0$, also $L\xi = L\alpha \leqq b\,\|\alpha'\| \leqq b\,\|\xi\|$. Somit ist

(4) $L\xi \leqq b\,\|\xi\|$, falls $\xi \in V(w)$.

Weiter ist $L\gamma = \langle \gamma'', \gamma'' \rangle / \langle w, w \rangle \geqq C\,\|\gamma\|^2/(D\,\|w\|^2)$.

Außerdem gilt:

$$L(\alpha, \gamma) = (1/\langle w, w \rangle) \sum_{i,j=1}^{q} (\partial s_{ij}(z)\,\alpha')\, w_i\, \bar{\gamma}_{j+n},$$

also

$$|2 \operatorname{Re} L(\alpha, \gamma)| \leqq 2D\,\|\alpha\|\,\|\gamma\|/\|w\|.$$

Wegen $L\xi = L\alpha + L\gamma + 2 \operatorname{Re} L(\alpha, \gamma)$ und $|L\alpha| \leqq b\,\|\alpha\|$ ist dann

$$\begin{aligned} L\xi &\geqq C\,\|\gamma\|^2/(D\,\|w\|^2) - b\,\|\alpha\| - 2D\,\|\alpha\|\,\|\gamma\|/\|w\| \\ &= (C/D)(\|\gamma\|/\|w\| - D^2\,\|\alpha\|/C)^2 - (b + D^4/C^2)\,\|\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun $a := b + D^4/C^2$, so folgt (1) aus (4). Außerdem ist $L\xi \geqq -a\,\|\alpha\|^2 \geqq -a\,\|\xi\|^2$, womit auch (2) gezeigt ist.

Es sei $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe. Die Nullstellenmenge $N(\mathcal{J}) := \operatorname{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{J})$ von $\mathcal{J}$ ist dann eine analytische Teilmenge von X. Für $x \in X$ ist $\operatorname{cg} \mathcal{J}_x$ die Minimalzahl von Erzeugenden des Ideals $\mathcal{J}_x$.

Satz 3.1. *Es seien X ein komplexer Raum, $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe und $A = N(\mathcal{J})$. Dann gibt es eine Funktion $h \in C^\infty(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(5) $h \geqq 0$, $\{h = 0\} = A$.

(6) *Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Karte $\iota\colon U \hookrightarrow B$ von X mit $x \in U$ und ein $\tilde{h} \in C^\infty(B)$ mit $\tilde{h} \geqq 0$ und $\tilde{h} \circ \iota = h \mid U$.*

(7) *Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $\theta \in C^\infty(U)$, so daß gilt:*

$$\begin{aligned} \log(h \mid U - A) + \theta \mid U - A \quad &\text{ist 1-konvex,} \\ -\log(h \mid U - A) + \theta \mid U - A \quad &\text{ist } q\text{-konvex,} \end{aligned}$$

wobei $q = \operatorname{cg} \mathcal{J}_x$ ist.

Beweis. Es sei $\{U_n : n \in N\}$ eine lokal endliche Überdeckung von X durch offene Mengen $U_n \Subset X$, so daß für alle $n \in N$ endlich viele holomorphe Funktionen $f_i^{(n)}$, $1 \leqq i \leqq r_n$, auf U_n existieren, deren Keime in jedem Punkt $x \in U_n$ das Ideal $\mathcal{J}_x$ erzeugen. Weiter seien $V_n \Subset U_n$ offene Mengen, die X überdecken und $\rho_n \in C^\infty(X)$ $\rho_n \geqq 0$, $\operatorname{supp} \rho_n \subset V_n$ und $\sum_{n \in N} \rho_n > 0$. Nun seien

$$h_n(x) := \rho_n(x) \sum_{i=1}^{r_n} |f_i^{(n)}(x)|^2,$$

falls $x \in U_n$, und $h_n(x) = 0$, falls $x \notin U_n$, und $h = \sum_{n \in N} h_n$. Dann erfüllt $h \in C^\infty(X)$ die Bedingung (5).

Es sei nun $x \in X$ beliebig und $q = \operatorname{cg} \mathscr{I}_x$. Dann gibt es eine Karte $\iota: U \hookrightarrow B$ von X mit $x \in U$ und folgenden Eigenschaften:

$$N' := \{n \in N: x \in \overline{V}_n\} \quad \text{ist endlich.}$$
$$U \cap V_n = \varnothing, \quad \text{falls } n \notin N'.$$
$$U \subset \bigcap_{n \in N'} U_n.$$

Weiter gibt es holomorphe Funktionen g_i für $1 \leqq i \leqq q$ auf B, so daß $f_i := g_i \circ \iota \in \mathscr{I}(U)$ und holomorphe Funktionen $g_{ij}^{(n)}$ auf B für $n \in N'$, $1 \leqq i \leqq r_n$ und $1 \leqq j \leqq q$, so daß mit $f_{ij}^{(n)} := g_{ij}^{(n)} \circ \iota$ gilt:

$$f_i^{(n)} | U = \sum_{j=1}^{q} f_{ij}^{(n)} f_j. \tag{8}$$

Schließlich seien $\tilde{\rho}_n \in C^\infty(B)$ für $n \in N'$ mit $\tilde{\rho}_n \circ \iota = \rho_n | U$.

Nun sei $\tilde{h} := \sum_{n \in N'} \tilde{\rho}_n \left| \sum_{i=1}^{r_n} g_{ij}^{(n)} g_j \right|^2$. Es ist $\tilde{h} \in C^\infty(B)$ und $\tilde{h} \circ \iota = h | U$. Außerdem ist $\tilde{h} = \sum_{j,k=1}^{q} s_{jk} g_j \bar{g}_k$, wobei $s_{jk} = \sum_{n \in N'} \tilde{\rho}_n \sum_{i=1}^{r_n} g_{ij}^{(n)} \overline{g_{ik}^{(n)}}$. Für $z \in B$ ist also $(s_{jk}(z))_{j,k=1}^{q}$ eine hermitesche Matrix. Es soll nun gezeigt werden, daß $(s_{jk}(\iota(x)))$ positiv-definit ist. Für festes $n \in N'$ sei $T = (t_{ij})$ die (r_n, q)-Matrix mit

$$t_{ij} = f_{ij}^{(n)}(x).$$

Es seien σ_i, $1 \leqq i \leqq q$, bzw. η_i, $1 \leqq i \leqq r_n$ die Bilder der Keime der Funktionen f_i bzw. $f_i^{(n)}$ in x bei der Quotientenabbildung $\mathscr{I}_x \to \mathscr{I}_x / m_x \mathscr{I}_x$. Dabei sei m_x das maximale Ideal von $\mathscr{O}_{X,x}$. Dann sind $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_q\}$ eine Basis und $\{\eta_1, \ldots, \eta_{r_n}\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathscr{I}_x / m_x \mathscr{I}_x$. Diese definieren einen Isomorphismus $\phi: \mathbb{C}^q \to \mathscr{I}_x / m_x \mathscr{I}_x$ und einen Epimorphismus $\psi: \mathbb{C}^{r_n} \to \mathscr{I}_x / m_x \mathscr{I}_x$. Dann ist $\phi^{-1} \circ \psi$ surjektiv und die zugehörige Matrix T besitzt den Rang q.

Hieraus folgt, daß für alle $n \in N'$ die Matrix

$$M_n := \left(\sum_{i=1}^{r_n} f_{ij}^{(n)}(x) \overline{f_{ik}^{(n)}(x)} \right)_{j,k=1}^{q}$$

positiv-definit ist. Da $\rho_n \geqq 0$ und $\sum \rho_n > 0$, ist dann auch $(s_{jk}(\iota(x)))_{j,k=1}^{q} = \sum_{n \in N'} \rho_n(x) M_n$ positiv-definit. Es darf nun angenommen werden, daß B so klein ist, daß die hermitesche Matrix $(s_{jk}(z))$ für alle $z \in B$ positiv-definit ist.

Dann ist $\tilde{h} \geqq 0$, also die Bedingung (6) erfüllt.

Die Abbildung $\kappa: U \hookrightarrow B \times \mathbb{C}^q$ mit $\kappa = (\iota, f_1, \ldots, f_q)$ ist eine Karte von X. Sei

$$g(z, w) := \sum_{j,k=1}^{q} s_{jk}(z) w_j \bar{w}_k \quad \text{für } z \in B,\ w \in \mathbb{C}^q.$$

Die Menge B ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$. Wie in Lemma 3.1 sei $V(w) := \{(z, \lambda w): z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}\}$ für $w \in \mathbb{C}^q - \{0\}$. Weiter seien $B' \Subset B$ eine offene Umgebung von $\iota(x)$ und $U' := \iota^{-1}(B)$. Dann ist U' eine offene Umgebung von x in X. Nach Lemma 3.1 gibt es eine Zahl $a > 0$, so daß für alle $y = (z, w) \in B' \times (\mathbb{C}^q - \{0\})$ gilt:

$$L(y, \log g)\,\xi \leqq a\,\|\xi\|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in V(w),$$

$$L(y, \log g)\,\xi \geqq -a\,\|\xi\|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{C}^{n+q}.$$

Für $z \in B'$, $w \in \mathbb{C}^q$ sei $\tilde{\theta}(z, w) = (a+1)(\|z\|^2 + \|w\|^2)$. Da $\dim V(w) = n+1$ für alle $w \in \mathbb{C}^q - \{0\}$, gilt: $\tilde{\theta} - \log g$ ist q-konvex, $\tilde{\theta} + \log g$ ist 1-konvex auf $B' \times (\mathbb{C}^q - \{0\})$.

Setzt man $\theta := \tilde{\theta} \circ \kappa$, so folgt (7) wegen $g \circ \kappa = h \mid U$.

Definition 3.1. *Es seien X ein komplexer Raum, A eine analytische Teilmenge von X und M eine lineare Menge über X. Dann sei $Q(A, M)$ die Menge aller $f \in C^\infty(X - A)$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung U und ein $g \in C^\infty(X)$, so daß $f + g$ auf $U - A$ 1-konvex bezüglich M ist. Die lineare Menge M heißt A-zulässig, falls $Q(A, M) \cap A(X - A) \neq \varnothing$ ist.*

Sei $f \in C^\infty(X - A)$. Es gilt $f \in Q(A, M)$ genau dann, wenn es zu jedem $x \in A$ eine offene Umgebung U und eine Funktion $g \in C^\infty(U)$ gibt, so daß $f \mid U - A + g \mid U - A$ 1-konvex bezüglich M ist.

Ist $f \in Q(A, M)$ und ist $h \in C^\infty(X)$, so ist $f + h \mid X - A \in Q(A, M)$.

Korollar 1. *Es gibt ein $g \in Q(A, TX)$, so daß $-g \in A(X - A)$ ist.*

Beweis. Man wähle eine Funktion $h \in C^\infty(X)$ nach Satz 3.1. Wegen (7) ist $\log(h \mid X - A) \in Q(A, TX)$. Es sei nun $h_1 \in C^\infty(X - A)$ mit $h_1 \leqq 0$ und U eine offene Umgebung von A, so daß $h_1 = \log h$ auf $U - A$. Weiter sei $h_2 \in C^\infty(X)$ eine Ausschöpfungsfunktion von X. Man setze $g := h_1 - h_2$.

Definition 3.2. *Es sei A eine analytische Teilmenge des komplexen Raumes X. Dann sei Q die Menge aller natürlichen Zahlen q, so daß es eine kohärente Idealgarbe $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ mit Nullstellenmenge $N(\mathcal{I}) = A$ und $\operatorname{cg} \mathcal{I}_x \leqq q$ für alle $x \in A$ gibt. Weiter sei $q(X, A) := \inf Q$, falls $Q \neq \varnothing$ und $q(X, A) = \infty$, falls $Q = \varnothing$.*

Ist A kompakt, so ist $q(X, A) < +\infty$. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und A eine zusammenhängende komplexe Untermannigfaltigkeit, so ist $q(X, A) = \operatorname{codim}_x A$. Die analytische Menge A ist ein lokal vollständiger Durchschnitt, wenn $q(X, A) = \dim_x X - \dim_x A$ für alle $x \in A$ gilt.

Korollar 2. *Es sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe mit Nullstellenmenge A. Für $k \in \mathbb{N}$ seien $S_k = \{x \in X: \operatorname{cg} \mathcal{I}_x > k\}$ und U_k offene Umgebungen von S_k. Dann gibt es eine A-zulässige lineare Menge M über X, so daß $\dim M_x \geqq \dim T_x - k + 1$ für alle $x \in X - U_k$ gilt.*

Beweis. Die Funktion $h \in C^\infty(X)$ sei nach Satz 3.1 gewählt. Seien $g \in C^\infty(X - A)$ und U eine offene Umgebung von A, so daß $g \geqq 0$ und $g(x) = -\log h(x)$ für $x \in U - A$.

Sei $q(x)=\operatorname{cg} I_x$ für $x\in X$. Es gibt zu jedem $x\in X$ eine offene Umgebung $U=U(x)$ und ein $f=f_x\in C^\infty(X)$, so daß gilt: $U\subset U_k$ für alle $k<q(x)$, $g+f\mid U-A$ ist $q(x)$-konvex.

Sei $\{V_i: i\in I\}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von X, $x_i\in X$ für $i\in I$, so daß $V_i\subset U(x_i)$. Sodann werde $f_i:=f_{x_i}$ und $q_i:=q(x_i)$ gesetzt.

Da $g+f_i\mid V_i-A$ q_i-konvex ist, gibt es eine lineare Menge M^i über V_i mit $\dim M^i_z\geqq\dim T_z X-q_i+1$ für $z\in V_i$, so daß $g+f_i\mid V_i-A$ 1-konvex bezüglich M^i ist.

Zu jedem $x\in X$ werde nun ein $i\in I$ mit $x\in V_i$ fest gewählt. Es sei dann $M_x:=M^i_x$ und $M:=\bigcup_{x\in X} M_x$.

Ist $q_i>k$, so ist $V_i\subset U(x_i)\subset U_k$. Aus $x\notin U_k$ folgt somit $q_i\leqq k$. Also ist $\dim M_x=\dim M^i_x\geqq\dim T_x X-q_i+1\geqq\dim T_x X-k+1$.

Da $g+f_i\mid U_i-A$ 1-konvex bezüglich M ist, folgt weiter: $g\in Q(A, M)$. Ist $f\in C^\infty(X)$ eine Ausschöpfungsfunktion von X, so ist $f+g\in Q(A, M)\cap A(X-A)$. Also ist M eine A-zulässige lineare Menge über X.

Korollar 3. *Es gibt eine A-zulässige lineare Menge M über X mit* $\dim M_x\geqq\dim T_x X-q(X, A)+1$ *für alle $x\in X$.*

Beweis. Sei $q:=q(X, A)$. Es gibt dann eine kohärente Idealgarbe $I\subset\mathcal{O}_X$, so daß $N(I)=A$ und $\operatorname{cg} I_x\leqq q$ für alle $x\in X$ gilt. Dann ist $S_k=\varnothing$ für $k=q$ und man wähle $U_k=\varnothing$ für $k=q$, $U_k=X$ für $k\neq q$. Nach Korollar 2 gibt es dann eine A-zulässige lineareMenge M über X, so daß $\dim M_x\geqq\dim T_x X-q+1$ für alle $x\in X-U_q=X$ gilt.

Lemma 3.2. *Es seien $A\subset B$ analytische Teilmengen des komplexen Raumes X, M eine A-zulässige lineare Menge über X und U eine Umgebung von $B-A$. Dann ist $M\mid X-U$ eine B-zulässige lineare Menge über X.*

Beweis. Es sei $N=M\mid X-U$. Es gibt dann eine Funktion $f\in Q(A, M)\cap A(X-A)$. Sei $g\in C^\infty(X-B)$ eine Ausschöpfungsfunktion. Seien U_1, U_2, U_3 offene Umgebungen von $B-A$, in $X-A$, so daß $\bar{U}_1-A\subset U_2$, $\bar{U}_2-A\subset U_3$ und $\bar{U}_3-A\subset U$ ist. Weiter sei $\rho\in C^\infty(X-A)$ mit $0\leqq\rho\leqq 1$, $\rho\mid U_1\equiv 1$ und $\rho\mid(X-A)-U_2\equiv 0$.

Es werde nun $h=\rho g+f$ auf $X-B$ gesetzt. Dies ist eine Ausschöpfungsfunktion von $X-B$.

Sei $x\in B$. Es ist zu zeigen, daß es eine offene Umgebung V von x und eine Funktion $\phi\in C^\infty(V)$ gibt, so daß $h+\phi\mid V-B$ 1-konvex bezüglich N ist. Ist $x\in B-A$, so wähle man $V=U_3$ und $\phi\equiv 0$. Da $N_z=\{0\}$ für $z\in U_3$, ist $h+\phi\mid V-B$ 1-konvex bezüglich N. Sei nun $x\in A$.

Dann wähle man V und ϕ so, daß $f+\phi\mid V-A$ 1-konvex bezüglich M ist. Auf $(V-A)-U_2$ stimmen h und f überein, also ist $h+\phi\mid(V-B)-\bar{U}_2$ 1-konvex bezüglich M und somit 1-konvex bezüglich N. Da $N_z=\{0\}$ für $z\in U_3$, ist $h+\phi\mid V\cap(U_3-B)$ 1-konvex bezüglich N. Deshalb ist $h+\phi\mid V-B$ 1-konvex bezüglich N.

Lemma 3.3. *Es seien X ein komplexer Raum; A eine analytische Teilmenge von X, M eine lineare Menge über X, $f\in Q(A, M)$, $V\Subset U$ offen in X, $g\in C^\infty(U)$ 1-konvex. Dann gibt es ein $a>0$, so daß $f+ag\mid V-A$ 1-konvex bezüglich M ist.*

Beweis. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $W(x)$ und ein $\phi_x \in C^\infty(X)$, so daß $f+\phi \mid W(x)-A$ 1-konvex bezüglich M ist. Da $V \Subset U$, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_s \in U$, so daß $\bigcup_{\sigma=1}^{s} W(x_0) \supset V$ ist. Seien $\phi_\sigma := \phi_{x_\sigma}$ und $W_\sigma = W(x_\sigma)$ für $1 \leqq \sigma \leqq s$.

Es gibt reelle Zahlen $a_\sigma > 0$, so daß $a_\sigma g - \phi_\sigma \mid V$ 1-konvex bezüglich M sind für $1 \leqq \sigma \leqq s$. Sei $a := \max\{a_\sigma : 1 \leqq \sigma \leqq s\}$. Dann ist $ag - \phi_\sigma \mid V$ 1-konvex bezüglich M. Auf $V \cap W_\sigma$ ist deshalb auch $ag + f = ag - \phi_\sigma + f + \phi_\sigma$ 1-konvex bezüglich M.

Da $\bigcup_{\sigma=1}^{s} W_\sigma \supset V$, folgt: $ag + f \mid V$ ist 1-konvex bezüglich M.

Lemma 3.4. *Es seien X ein komplexer Raum, M eine lineare Menge über X, A eine analytische Teilmenge von X und $f \in Q(A, M)$. Weiter sei X 1-vollständig bezüglich M. Dann gibt es eine Ausschöpfungsfunktion $g \in C^\infty(X)$, so daß $f+g \mid X - A$ 1-konvex bezüglich M ist.*

Beweis. Zu jedem $x \in X$ wähle man eine offene Umgebung $U(x)$ und ein $f_x \in C^\infty(X)$, so daß $f + f_x \mid U(x) - A$ 1-konvex bezüglich M ist. Es gibt eine lokal endliche offene Überdeckung $\{V_i : i \in I\}$ von X, so daß zu jedem $i \in I$ ein $x_i \in X$ mit $V_i \Subset U(x_i)$ existiert. Sei $f_i := f_{x_i}$. Nach Lemma 2.3 gibt es nun ein $g \in C^\infty(X)$, so daß $g - f_i \mid V_i$ 1-konvex bezüglich M und g eine Ausschöpfungsfunktion ist. Dann ist $g + f = g - f_i + f + f_i$ auf $V_i - A$ 1-konvex bezüglich M für alle $i \in I$. Also ist $f+g \mid X - A$ 1-konvex bezüglich M.

Satz 3.2. *Es seien A eine analytische Teilmenge des komplexen Raumes X und M eine A-zulässige lineare Menge über X. Ist X 1-vollständig bezüglich M, so ist $X - A$ 1-vollständig bezüglich M.*

Beweis. Sei $f \in Q(A, M) \cap A(X - A)$. Nach Lemma 3.4 gibt es eine Ausschöpfungsfunktion $g \in C^\infty(X)$, so daß $f+g \mid X - A$ 1-konvex bezüglich M ist. Da $f+g \mid X - A$ eine Ausschöpfungsfunktion von $X - A$ ist, folgt die Behauptung.

Korollar. *Es sei X r-vollständig und $q = q(X, A)$. Dann ist $X - A$ $(q+r-1)$-vollständig.*

Beweis. Nach dem Korollar 3 zu Satz 3.1 gibt es eine A-zulässige lineare Menge M über X mit $\dim M_x \geqq \dim T_x X - q + 1$ für alle $x \in X$. Weiter gibt es eine lineare Menge N über X, so daß $\dim N_x \geqq \dim T_x X - r + 1$ für $x \in X$ und X 1-vollständig bezüglich N ist. Sei $P := M \cap N$. Dann ist $\dim P_x \geqq \dim T_x X - r - q + 2$ für $x \in X$, und $X - A$ ist nach Satz 3.2 1-vollständig bezüglich P. Daher ist $X - A$ $(r+q-1)$-vollständig.

Das Korollar ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von Ballico [3].

Lemma 3.5. *Es seien A eine analytische Teilmenge des komplexen Raumes X, M eine lineare Menge über X, U eine offene Umgebung von A in X und $g \in C^\infty(X)$. Ist X 1-vollständig bezüglich M, so gibt es eine Funktion $f \in \mathbb{C}^\infty(X)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(9) $f \geqq 0$, $\{f = 0\} = A$,

(10) $f \mid X - U > g \mid X - U$,

(11) $f|X-A$ ist 1-konvex bezüglich M,

(12) f ist schwach 1-konvex bezüglich M.

Beweis. Die Funktion $h\in C^\infty(x)$ werde nach Satz 3.1 gewählt. Nach Lemma 3.4 gibt es ein $f_1\in C^\infty(X)$, so daß $f_1|X-A+\log(h|X-A)$ 1-konvex bezüglich M ist. Es sei $f_3\in C^\infty(X)$ eine Ausschöpfungsfunktion, die 1-konvex bezüglich M ist. Dann ist $f_3|X-U\in A(X-U)$. Nach Lemma 2.2 gibt es eine konvexe Funktion r, so daß $r\circ(f_3|X-U)>r\circ(-\log h-f_1+g)|X-U$. Sei $f_2=r\circ f_3$. Dann ist f_2 1-konvex bezüglich M nach Lemma 1.2. Außerdem ist $f_1+f_2+\log h>g$ auf $X-U$.

Es sei nun $f:=h\cdot\exp(f_1+f_2)$. Da die Exponentialfunktion eine konvexe Funktion und $f_1+f_2+\log h|X-A$ 1-konvex bezüglich M ist, gilt: $f|X-A$ ist 1-konvex bezüglich M. Weiter ist $f\geqq 0$ und $\{f=0\}=A$ und $f\geqq\log f>g$ auf $X-U$.

Schließlich muß noch gezeigt werden, daß f schwach 1-konvex bezüglich M_x ist, falls $x\in A$. Da die Funktion h so gewählt war, daß die Bedingung (6) aus Satz 3.1 erfüllt ist, gibt es eine Karte $\iota: V\hookrightarrow B$ von X mit $x\in V$ und ein $\tilde{h}\in C^\infty(B)$ mit $\tilde{h}\circ\iota=h|V$ und $\tilde{h}\geqq 0$. Da $\tilde{h}(\iota(x))=h(x)=0$, nimmt $\tilde{h}$ in $\iota(x)$ sein Minimum an. Also ist die Leviform von $\tilde{h}$ in $\iota(x)$ positiv-semidefinit, h ist also sogar schwach 1-konvex bezüglich T_xX.

Satz 3.3. *Es seien X ein komplexer Raum, $A\subset B\subset C$ analytische Teilmengen von X und M eine lineare Menge über X. Ist (B, A) 1-vollständig bezüglich M und (C, B, A) 1-vollständig bezüglich M, so gibt es zu jeder offenen Umgebung U von $B-A$ in X eine lineare Menge N über X mit $N\subset M$, $N_x=M_x$ für alle $x\in X-U$, $\dim N_x\geqq\dim M_x-1$ für alle $x\in X$, so daß (C, A) 1-vollständig bezüglich N ist.*

Beweis. Sei $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von $B-A$ in $X-A$ mit $\tilde{U}\subset U$, so daß $X-A$ 1-vollständig bezüglich $M':=M|U$ ist. Weiter sei $f_1\in C^\infty(X-A)$ eine Ausschöpfungsfunktion, die 1-konvex bezüglich M' ist. Nach Lemma 3.5 gibt es ein $f_2\in C^\infty(X-A)$, so daß gilt:

$f_2\geqq 0$, $\{f_2=0\}=B-A$,

$f_2|(X-A)-\tilde{U}>f_1|(X-A)-\tilde{U}$,

$f_2|X-B$ ist 1-konvex bezüglich M',

$f_2|X-A$ ist schwach 1-konvex bezüglich M'.

Da U offen, $f_1\in A(X-A)$ und $f_2>f_1$ auf $X-(\tilde{U}\cup A)$ gilt, ist $f_2|(X-A)-\tilde{U}$ eine Ausschöpfungsfunktion, nimmt also dort ein positives Minimum an. Es sei nun $\delta>0$, so daß

$$f_2(x)>2\delta \quad \text{für } x\in(X-A)-\tilde{U},$$

$$V:=\{x\in X-A: f_2(x)<\delta\}.$$

V ist eine offene Umgebung von $B-A$ in $X-A$: Da (C, B, A) 1-vollständig bezüglich M ist, gibt es eine offene Umgebung W von $C-B$ in $X-B$, so daß

$X-A$ 1-vollständig bezüglich $M'':=M|W-V$ ist. Nach Lemma 2.2 c) gibt es eine Ausschöpfungsfunktion $g\in C^\infty(X-A)$ mit

$$g>f_1+\delta,$$

die 1-konvex bezüglich M'' ist.

Da $f_1|(X-A)-\tilde{U}$ eine Ausschöpfungsfunktion ist, gibt es nach Lemma 2.2 b) eine konvexe Funktion r mit $r(\delta)=\delta$ und $r\circ f_2>g-f_1$ auf $(X-A)-\tilde{U}$.

Seien nun $f:=f_1+r\circ f_2$, $U':=W\cup V$ und $\tilde{M}:=M|U'$. U' ist eine offene Umgebung von $C-A$.

Die Funktion $\min(f, g)$ ist eine Ausschöpfungsfunktion von $X-A$. Ist $x\notin\tilde{U}$, so ist $r\circ f_2(x)>g(x)-f_1(x)$, also $f(x)>g(x)$. Deshalb ist $\{x\in X-A: f(x)\leqq g(x)\}\subset\tilde{U}$.

Da $r\circ f_2$ schwach 1-konvex bezüglich M' und f_1 1-konvex bezüglich M' ist, gilt: f ist 1-konvex bezüglich $M'=M|\tilde{U}$. Da $\tilde{M}\subset M$, folgt:

$f|\tilde{U}$ ist 1-konvex bezüglich $\tilde{M}$.

Sei $S:=(X-A)-\bar{V}$. Ist $x\in X-A$, $x\notin S$, so ist $x\in\bar{V}-A$, also $f_2(x)\leqq\delta$ und somit $g(x)>f_1(x)+\delta\geqq f(x)$, da $r(\delta)=\delta$.

Also gilt: S ist eine offene Umgebung der Menge $\{x\in X-A: g(x)\leqq f(x)\}$ in $X-A$. Weiter ist $\tilde{M}=M|U'$, also $\tilde{M}|S=M|U'\cap S$. Da $U'=V\cup W$, folgt $\tilde{M}|S\subset M|W-\bar{V}\subset M''$, da $M''=M|W-V$ ist. Also ist g 1-konvex bezüglich $\tilde{M}|S$ und daher $g|S$ 1-konvex bezüglich $\tilde{\mathrm{M}}$.

Schließlich ist U eine Umgebung von $\{f=g\}$, da $\tilde{U}\subset U$. Also gilt:

$f|U\cup\{f<g\}$ ist 1-konvex bezüglich $\tilde{M}$,

$g|U\cup\{g<f\}$ ist 1-konvex bezüglich $\tilde{M}$.

Nach Satz 2.2 gibt es eine lineare Menge $\tilde{N}\subset\tilde{M}$ über X, so daß $\tilde{N}_x=\tilde{M}_x$, falls $x\in X-U$, $\dim\tilde{N}_x\geqq\dim\tilde{M}_x-1$ für alle $x\in X$ und $X-A$ 1-vollständig bezüglich $\tilde{N}$ ist. Sei $N_x=\tilde{N}_x$, falls $x\in U'$ und $N_x=M_x$, falls $x\in X-U'$, $N:=\bigcup_{x\in X}N_x$. Dann ist $N\subset M$, $N_x=M_x$ für $x\in X-U'$ und $\dim N_x\geqq\dim M_x-1$ für $x\in U'$. Weiter gilt: $X-A$ ist 1-vollständig bezüglich $N|U'$. Da U' eine Umgebung von $C-A$ ist, folgt: (C, A) ist 1-vollständig bezüglich N.

Korollar. *Ist (B, A) q-vollständig bezüglich M und (C, B, A) 1-vollständig bezüglich M, so ist $(C, A)(q+1)$-vollständig bezüglich M.*

Beweis. Nach den Bemerkungen zu Definition 1.3 gibt es eine lineare Menge $M'\subset M$ über X mit $\dim M'_x\geqq\dim M_x-q+1$, so daß (B, A) 1-vollständig bezüglich M' ist. Nach Satz 3.3 gibt es eine lineare Menge N über X mit $\dim N_x\geqq\dim M_x-1$, so daß (C, A) 1-vollständig bezüglich N ist. Dann ist (C, A) $(q+1)$-vollständig bezüglich M.

4. Komplemente in projektiven Kegeln

Seien z und w zwei verschiedene Punkte im projektiv-algebraischen Raum $\mathbb{P}_n$. Dann gibt es genau einen eindimensionalen linearen Raum, der z und w enthält, die komplexe Gerade $\mathfrak{g}(z, w)$ durch z und w.

Definition 4.1. *Für eine algebraische Menge Z im $\mathbb{P}_n$ und einen Punkt $z\in\mathbb{P}_n - Z$ sei*

$$L_z Z := \bigcup_{x\in Z} \mathfrak{g}(z, x),$$

falls $Z\neq\varnothing$ und $L_z Z=\{z\}$, falls $Z=\varnothing$.

Es sei H eine Hyperebene, die den Punkt z nicht enthalte und $W:=L_z Z\cap H$.

Die Menge Z wird also entlang von dem Punkt z ausgehender Strahlen auf die Menge W projiziert. Dies ist eine surjektive endlich holomorphe Abbildung, also ist W eine algebraische Teilmenge von $H=\mathbb{P}_{n+1}$ mit $\dim W=\dim Z$. Die Menge $L_z Z$ ist der projektive Kegel über W mit dem Scheitel z.

Deshalb ist $L_z Z$ eine algebraische Teilmenge des $\mathbb{P}_n$ mit $\dim L_z=\dim Z+1$.

Satz 4.1. *Es seien $B\subset\mathbb{P}_n$ algebraisch, $z\in\mathbb{P}_n - B$ and $C:=L_z B$. Dann gibt es endlich viele algebraische Mengen C_σ, $1\leqq\sigma\leqq s$, und eine reelle Funktion g auf $C-B$, so daß gilt:*

(1) $C=C_0\supset C_1\supset\ldots\supset C_s\supset C_{s+1}=\varnothing$

(2) $g\geqq 0$,

(3) *g ist lokal nach oben beschränkt, d.h. für jede konvergente Folge (x_k) mit $x_k\in C-B$ und $\lim\limits_{k\to\infty} x_k\in C-B$ ist* $\limsup g(x_k)<+\infty$,

(4) $g|C_\sigma-(C_{\sigma+1}\cup B)\in C^\infty(C_\sigma-(C_{\sigma+1}\cup B))$, *und zu jeder Funktion $h\in C^\infty(\mathbb{P}_n)$ gibt es eine reelle Zahl $\delta>0$, so daß $g+\delta h|C_\sigma-(C_{\sigma+1}\cup B)$ 1-konvex ist für alle $0\leqq\sigma\leqq s$.*

Beweis. Da durch eine lineare Transformation an der Aussage des Satzes nichts geändert wird, darf angenommen werden, daß der Punkt z die homogenen Koordinaten $(0:0:\ldots:0:1)$ besitzt. Dann ist $C-\{z\}$ die Menge aller $(x_0:\ldots:x_{n-1}:x)\in\mathbb{P}_n$, so daß es ein $x\in\mathbb{C}$ mit $(x_0:\ldots:x_{n-1}:x)\in B$ gibt.

Sei $\tilde{C}:=\{(z_0:\ldots:z_n:w_n)\in\mathbb{P}_{n+1}:(z_0:\ldots:z_{n-1}:w_n)\in B\}\cup\{(0:\ldots:0:1:0)\}$. $\tilde{C}$ ist der projektive Kegel über B. Da $(0:\ldots:0:1)\notin\tilde{C}$, ist $p:\tilde{C}\to C$, $p(z_0:\ldots:z_n:w_n):=(z_0:\ldots:z_n)$ definiert. Dies ist eine endliche, holomorphe, surjektive Abbildung. Sei $H\subset\mathbb{P}_{n+1}$ die durch die Gleichung $z_n=w_n$ gegebene Hyperebene. Dann ist $B=p(H\cap\tilde{C})$. Es gibt nun algebraische Mengen $C=C_0\supset C_1\supset\ldots\supset C_s\supset C_{s+1}=\varnothing$, so daß mit $\tilde{C}_\sigma:=p^{-1}(C\sigma)$ gilt: $p|\tilde{C}_\sigma-\tilde{C}_{\sigma+1}\to C_\sigma-C_{\sigma+1}$ ist eine unverzweigte Überlagerung. Da der komplexe Raum $\tilde{C}-H\Subset\tilde{C}$ Steinsch ist, folgt aus Lemma 2.3 b) mit $M=T\tilde{C}$ die Existenz einer Funktion $f\in C^\infty(\tilde{C}-H)$ mit $f\geqq 0$ und der folgenden Eigenschaft: Zu jeder Funktion $\tilde{h}\in C^\infty(\tilde{C})$ gibt es ein $\delta>0$, so daß $f+\delta\tilde{h}|\tilde{C}-H$ 1-konvex ist.

Wählt man $\tilde{h}=0$, so folgt: f ist 1-konvex.

Für $y\in C-B$ ist $p^{-1}(y)\subset\tilde{C}-H$ eine endlich, nicht leere Menge. Deshalb ist die Funktion $g(y)=\sum\limits_{p(x)=y} f(x)$ wohldefiniert auf $C-B$, es ist $g\geqq 0$.

Da $p:\tilde{C}\to C$ eine endliche Abbildung und C kompakt ist, gibt es eine natürliche Zahl m, so daß jede Faser von p höchstens m Elemente enthält. Für alle $y\in C-B$ ist dann $g(y)\leqq m\cdot\max\{f(x):p(x)=y\}$. Sei nun (y_k) eine Folge in $C-B$, die gegen einen Punkt $y\in C-B$ konvergiert. Dann gibt es Punkte $x_k\in\tilde{C}-H$ mit $p(x_k)=y_k$ und $f(x_k)=\max\{f(x):p(x)=y_k\}$.

Sei (x_{n_k}) eine konvergente Teilfolge von (x_k) mit $\limsup f(x_k)=\limsup f(x_{n_k})$ und $x:=\lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Dann ist $p(x)=y$, also $x\in\tilde{C}-H$ und somit $\limsup f(x_k)=f(x)$. Mithin ist $\limsup g(y_k)\leqq mf(x)<+\infty$, die Funktion $g: C-B\to\mathbb{R}$ ist lokal nach oben beschränkt.

Um (4) zu zeigen seien $h\in C^\infty(\mathbb{P}_n)$ und $0\leqq\sigma\leqq s$. Es werde $D:=C_\sigma-(C_{\sigma+1}\cup B)$ gesetzt. Da $\tilde{h}:=(h|C)\circ p\in C^\infty(\tilde{C})$, gibt es ein $\delta>0$, so daß $f+\delta\tilde{h}|\tilde{C}-H$ 1-konvex ist. Wenn gezeigt wird, daß es zu jedem $y\in D$ eine in D offene Umgebung U gibt, so daß $g|U\in C^\infty(U)$ und $g+\delta h|U$ 1-konvex ist, folgt (4).

Da $p|\tilde{C}_\sigma-\tilde{C}_{\sigma+1}\to C_\sigma-C_{\sigma+1}$ eine endliche Überlagerung ist, gibt es zu jedem $y\in D$ eine in D offene Umgebung U von y und endlich viele, paarweise disjunkte, in $\tilde{C}_\sigma-\tilde{C}_{\sigma+1}$ offene Mengen U_i, $1\leqq i\leqq k$, so daß $p^{-1}(U)=\bigcup_{i=1}^{k} U_i$ und $p_1:=p|U_i\to U$ biholomorph ist. Insbesondere ist $U_i\subset\tilde{C}-H$, also f auf U_i definiert. Dann ist $g|U=\sum_{i=1}^{k} f\circ p_i^{-1}$, also $g|U\in C^\infty(U)$.

Weiter ist $h|U=\tilde{h}\circ p_1^{-1}$ und damit $g+\delta h|U=(f+\delta\tilde{h})\circ p_1^{-1}+\sum_{i=2}^{k} f\circ p_i^{-1}$. Da die Abbildungen $p_i^{-1}: U\to U_i$ biholomorph und die Funktionen $f+\delta\tilde{h}|U_1$ bzw. $f|U_i$ für $2\leqq i\leqq k$ 1-konvex sind, ist $g+\delta h|U$ eine 1-konvexe Funktion.

Lemma 4.1. *Es seien X, Z algebraische Mengen im $\mathbb{P}_n$, $B=X\cap Z$, $z\in\mathbb{P}_n-B$, $C=L_zZ\cap X$ und M eine B-zulässige lineare Menge über X. Dann ist (C, B) 1-vollständig bezüglich M.*

Beweis. Nach Satz 4.1 wähle man algebraische Mengen $L_zZ=\tilde{C}_0\supset\ldots\supset\tilde{C}_{s+1}=\varnothing$ und eine Funktion $g: L_zZ-Z\to\mathbb{R}$. Für $0\leqq\sigma\leqq s+1$ setze man $C_\sigma:=\tilde{C}_\sigma\cap X$. Durch absteigende Induktion über $s+1\geqq\sigma\geqq 0$ wird gezeigt:

(E_σ) Das Paar $(C_\alpha, B\cap C_\sigma)$ ist 1-vollständig bezüglich M.

Die Aussage (E_0) ist die Behauptung des Satzes. Für $\sigma=s+1$ ist nichts zu zeigen, da alle auftretenden Mengen leer sind. Zum Beweis des Lemmas muß also nur noch gezeigt werden, daß für $0\leqq\sigma\leqq s$ aus $(E_{\sigma+1})$ die Aussage (E_σ) folgt. Sei also σ fest gewählt und $(E_{\sigma+1})$ richtig.

Es gibt endlich viele offene Mengen $W_i\Subset V_i\Subset U_i$, $1\leqq i\leqq m$ im $\mathbb{P}_n$, so daß $\bigcup_{i=1}^{m} W_i=\mathbb{P}_n$ und zu jedem i eine Funktion $f_i\in C^\infty(\mathbb{P}_n)$ existiert, deren Einschränkung auf U_i 1-konvex ist. Nach Wahl von g gibt es reelle Zahlen $\delta_i>0$, so daß $g-\delta_i f_i|\tilde{C}_\sigma-(\tilde{C}_{\sigma+1}\cup Z)$ 1-konvex ist. Setzt man $\delta:=\min\{\delta_i: 1\leqq i\leqq m\}$, so gilt: $g-\delta f_i|\tilde{C}_\sigma-(\tilde{C}_{\sigma+1}\cup Z)$ ist 1-konvex für $1\leqq i\leqq m$. Zur Abkürzung sei $D:=C_\sigma-(C_{\sigma+1}\cup B)$. Dann ist $(g-\delta f_i)|D$ 1-konvex. Nach einem Fortsetzungssatz für 1-konvexe Funktionen ([17], Satz 3.3) gibt es eine offene Umgebung U von D in $X-(C_{\sigma+1}\cup B)$, sowie 1-konvexe Funktionen $p_i\in C^\infty(U)$ mit $p_i|D=2(g-\delta f_i|D)$ für $1\leqq i\leqq m$.

Weiter seien $\chi_i\in C^\infty(\mathbb{P}_n)$ mit $0\leqq\chi_i\leqq 1$, $\chi_i|W_i=1$ und $\chi_i|\mathbb{P}_n-V_i\equiv 0$ für $1\leqq i\leqq m$. Nun ist $f_i|U_i$ 1-konvex, weiter gilt $\operatorname{supp}\chi_i\Subset U_i$. Daher gibt es ein $\varepsilon>0$, so daß für $1\leqq i\leqq m$ gilt: $f_i+\varepsilon\chi_i|U_i$ ist 1-konvex.

Für $x \in U$, $1 \leqq i \leqq m$ werde nun

$$q_i(x) := p_i(x) + 2\delta f_i(x) + \delta\varepsilon(\chi_i(x) - 1)$$

und

$$g_1(x) := \max\{q_i(x): 1 \leqq i \leqq m\}$$

gesetzt.

Es sei $x \in D$. Dann ist $q_i(x) \leqq p_i(x) + 2\delta f_i(x) = 2g(x)$. Es ist $q_i(x) = 2g(x)$ genau dann, wenn $\chi_i(x) = 1$ ist. Da $\chi_i | W_i \equiv 1$ und zu jedem $x \in \mathbb{P}_n$ ein i mit $x \in W_i$ existiert, folgt: $g_1 | D = 2g | D$.

Es sei nun $J(x) = \{1 \leqq i \leqq m: x \in V_i\}$ für $x \in D$. Ist $j \notin J(x)$, so ist $\chi_j(x) = 0$, also $q_j(x) < 2g(x) = g_1(x)$. Zu jedem $x \in D$ gibt es dann eine offene Umgebung $U(x) \subset U$, so daß

$$g_1 | U(x) = \max\{q_j | j \in J(x)\} | U(x).$$

Da M eine B-zulässige lineare Menge über X ist, gibt es ein $h_1 \in Q(B, M)$, das eine Ausschöpfungsfunktion von $X - B$ ist. Nach Korollar 1 zu Satz 3.1 gibt es ein $h_2 \in Q(C_{\sigma+1}, TX)$, so daß $-h_2$ eine Ausschöpfungsfunktion von $X - C_{\sigma+1}$ ist. Nach Lemma 3.3 gibt es positive reelle Zahlen a_j, b_j für $1 \leqq j \leqq m$, so daß gilt:

$h_1 + a_j f_j | V_j - B$ ist 1-konvex bezüglich M,

$h_2 + b_j f_j | V_j - C_{\sigma+1}$ ist 1-konvex.

Sei $a \geqq \max(a_j, b_j)$ für $1 \leqq j \leqq m$. Dann gilt:

$h_1 + a f_j | V_j - B$ ist 1-konvex bezüglich M,

$h_2 + a f_j | V_j - C_{\sigma+1}$ ist 1-konvex.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $(E_{\sigma+1})$ richtig. Es gibt also eine offene Umgebung V von $C_{\sigma+1} - C$ in X, so daß $X - B$ 1-vollständig bezüglich $N := M | V$ ist. Sei $g_2 \in C^\infty(X - B)$ eine Ausschöpfungsfunktion, die 1-konvex bezüglich N ist.

Da $h_1 \in A(X - B)$ und V offen ist, gilt: $h_1 | (X - B) - V$ ist eine Ausschöpfungsfunktion. Nach Lemma 2.2 c) gibt es eine konvexe Funktion r, so daß $r \circ h_1 > g_2 - h_2$ auf $(X - B) - V$ ist.

Nun seien $g_3, g_4 \in C^\infty(U)$ definiert durch

$$g_3 := r \circ ((a/\delta) g_1 + h_1) + (a/\delta) g_1; \qquad g_4 := g_3 + h_2.$$

Es sei $x \in D$ und $j \in J(x)$. Auf $V_j \cap U$ gilt dann:

$$(a/\delta) q_j + h_1 = (a/\delta) p_j + a(f_j + \varepsilon\chi_j) - \delta\varepsilon + a f_j + h_1.$$

Da alle Summanden bis auf die Konstante $-\delta\varepsilon$ auf $V_j \cap U$ 1-konvex sind, folgt: $a/\delta\, q_j + h_1 | V_j \cap U$ ist 1-konvex bezüglich M. Ebenso ist $a/\delta\, q_j + h_2 | V_j \cap U$ 1-konvex bezüglich M.

Da $g_1 = \max\{q_j: j \in J(x)\}$ auf $U(x)$, folgt hieraus, daß $g_4 | U(x) \cap \bigcap_{j \in J(x)} V_j$ pseudokonvex bezüglich M ist; denn auf $U(x) \cap \bigcap_{j \in J(x)} V_j$ gilt: $g_4 = \max\{u_j: j \in J(x)\}$, $u_j = r \circ (a/\delta\, q_j + h_1) + a/\delta\, q_j + h_2$. Somit ist g_4 in allen Punkten $x \in D$ pseudokonvex bezüglich M.

Die Funktion $g: L_z Z \to \mathbb{R}$ ist lokal nach oben beschränkt. Deshalb gibt es zu jedem Punkt $x \in C_{\sigma+1} - B$ eine offene Umgebung $W(x)$ in X und eine reelle

Zahl c, so daß $r\circ(2a/\delta g+h_1)+2a/\delta g<c$ auf $W(x)\cap D$ gilt. Da $g_1|D=2g|D$, ist also $g_3<c$ auf $W(x)\cap D$. Nun ist aber $-h_2$ eine Ausschöpfungsfunktion von $X-C_{\sigma+1}$. Deshalb gibt es eine offene Umgebung $V(x)\subset X-B$, so daß $g_2-h_2>c$ auf $V(x)\cap D$ gilt. Es gibt somit eine offene Umgebung $W'\subset V$ der Menge $C_{\delta+1}-B$ in X, so daß $g_2>g_3+h_2$ auf $W'\cap D$ gilt. Weiter sei $W\subset W'$ eine offene Umgebung von $C_{\sigma+1}-B$ in $X-B$ mit $\bar{W}-B\subset W'$.

Nun werde eine reelle Funktion f auf $X-(B\cap C_\sigma)$ folgendermaßen definiert.

$$\begin{aligned}&\text{Für } x\in U-\bar{W} \text{ sei } f(x)=\max(g_2(x), g_4(x)),\\ &\text{für } x\in\bar{W}-B \text{ sei } f(x)=g_2(x),\\ &\text{für } x\in X-(U\cup\bar{W}\cup(B\cap C_\sigma)) \text{ sei } f(x)=0.\end{aligned}$$

Es soll gezeigt werden, daß f in den Punkten von $C_\sigma-B$ pseudokonvex bezüglich M ist. Hierzu sei $x\in D\cap(U-\bar{W})$. Ist $g_4(x)>g_2(x)$, so ist f pseudokonvex bezüglich M in x, da g_4 pseudokonvex bezüglich M in x ist. Ist $g_2(x)\geqq g_4(x)$, so ist $g_2(x)\geqq r\circ h_1(x)+h_2(x)$, da $a/\delta g_1(x)=2a/\delta g(x)\geqq 0$ und r monoton wächst. In diesem Fall ist $x\in V$.

Da $g_2|V$ 1-konvex und g_4 pseudokonvex bezüglich M in x ist, folgt auch in diesem Falle, daß f in x pseudokonvex bezüglich M ist.

Sei nun $x\in\bar{W}\cap D$. Dann ist $g_2(x)>g_4(x)$, also $g_2=f$ in einer Umgebung von x. Da $x\in V$ und $g_2|V$ 1-konvex bezüglich M ist, folgt: f ist pseudokonvex bezüglich M in x. Sei schließlich $x\in C_{\sigma+1}-B$. Dann ist $x\in W\subset V$. Da $f|W=g_2|W$, ist f in x pseudokonvex bezüglich M.

Damit ist gezeigt: f ist in allen Punkten $x\in C_\sigma-B$ pseudokonvex bezüglich M. Insbesondere ist $f|C_\sigma-B$ stetig.

Da $f\geqq g_2$ auf $C_\sigma-B$ und $g_2\in A(x-B)$, ist $f|C_\sigma-(C_\sigma\cap B)$ eine Ausschöpfungsfunktion. Nach Korollar 2 zu Satz 2.1 folgt dann: $(C_\sigma, C_\sigma\cap B)$ ist 1-vollständig bezüglich M, womit die Aussage (E_σ) Bewiesen ist.

Satz 4.2. *X, Y und $A\subset X\cap Y$ seien algebraische Mengen im $\mathbb{P}_n$, M eine A-zulässige lineare Menge über X und $z\in\mathbb{P}_n-Y$. Dann ist $(X\cap L_zY, X\cap Y, A)$ 1-vollständig bezüglich M.*

Beweis. Es seien $B:=X\cap Y$ und $C:=X\cap L_zY$. Gegeben sei eine offene Umgebung von $B-A$ in $X-A$. Es ist zu zeigen, daß es eine Umgebung V von $C-B$ gibt, so daß $X-A$ 1-vollständig bezüglich $M|V-U$ ist. Nach Lemma 3.2 ist die lineare Menge $N:=M|X-U$ B-zulässig. Aus Lemma 4.1 folgt dann, daß (C, B) 1-vollständig bezüglich N ist, und damit die Behauptung.

5. q-Vollständigkeit von Komplementen algebraischer Mengen

Definition 5.1. *Für algebraische Mengen $X, Y\subset\mathbb{P}_n$ sei $c(X, Y)$ die kleinste Zahl $c\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt Mengen $Y=Y_0\subset Y_1\subset\ldots\subset Y_c$ und Punkte $z_i\in Y_{i+1}-Y_i$ für $0\leqq i\leqq c-1$, so daß $Y_{i+1}=L_{z_i}Y_i$ und $X\subset Y_c$ ist.*

Es ist also stets $c(X, Y)\leqq n-\dim Y$, da $\dim Y_{i+1}=\dim Y_i+1$. Es ist $c(X, Y)=0$ genau dann, wenn $X\subset Y$ ist.

Satz 5.1. *Es seien $X, Y\subset\mathbb{P}_n$ algebraisch, $c=c(X, Y)$, $A=X\cap Y$ und M eine A-zulässige lineare Menge über X. Dann ist $X-Y$ c-vollständig bezüglich M.*

Beweis. Es seien $Y=Y_0\subset Y_1\subset\ldots\subset Y_c$, $z_i\in Y_{i+1}-Y_i$ für $0\leqq i<c$, so daß $Y_{i+1}=L_{z_i}Y_i$ und $X\subset Y_c$. Für $0\leqq i\leqq c$ sei $X_i:=Y_i\cap X$. Durch vollständige Induktion über i beweist man nun, daß (X_i, A) i-vollständig bezüglich M ist, woraus für $i=c$ die Behauptung folgt, da (X, A) genau dann c-vollständig bezüglich M ist, wenn $X-A$ c-vollständig bezüglich M ist.

Nach Lemma 4.1 ist (X_1, A) 1-vollständig bezüglich M. Nach Satz 4.2 ist (X_{i+1}, X_i, A) 1-vollständig bezüglich M. Da (X_i, A) nach Induktionsvoraussetzung i-vollständig bezüglich M ist, folgt aus dem Korollar zu Satz 3.3, daß (X_{i+1}, A) $(i+1)$-vollständig bezüglich M ist.

Korollar 1. *Es seien X, $Y\subset\mathbb{P}_n$ algebraisch, $A=X\cap Y$, $c=c(X, Y)$ und $q=q(X, A)$. Dann ist $X-A$ $(q+c-1)$-vollständig.*

Beweis. Nach Korollar 3 zu Satz 3.1 gibt es eine A-zulässige lineare Menge M über X, so daß $\dim M_x\geqq\dim T_x-q+1$ für alle $x\in X$ gilt. Nach Satz 5.1 ist $X-A$ außerdem c-vollständig bezüglich M. Also ist $X-A$ $(q+c-1)$-vollständig.

Korollar 2. *Ist $A\subset\mathbb{P}_n$ ein lokal vollständiger Durchschnitt der Codimension q, so ist $\mathbb{P}_n-A$ $(2q-1)$-vollständig.*

Folgendes einfache Lemma erweist sich als nützlich.

Lemma 5.1. *Seien $A\subset B\subset X$ analytische Mengen in dem komplexen Raum X und M eine lineare Menge über X. Ist $X-B$ 1-vollständig bezüglich M, so ist das Tripel (X, B, A) 1-vollständig bezüglich M.*

Beweis. Es sei U eine Umgebung von $B-A$ in $X-A$. Zu zeigen ist, daß $X-A$ 1-vollständig bezüglich $M|X-U$ ist. Hierzu sei $f\in C^\infty(X-B)$ eine Ausschöpfungsfunktion von $X-B$, die 1-konvex bezüglich M ist. Seien $g\in C^\infty(X-A)$ eine Ausschöpfungsfunktion von $X-A$, W_1 und W_2 offene Umgebungen von $B-A$ in $X-A$, so daß $\bar{W}_2-A\subset W_1$, $\bar{W}_1-A\subset U$ und $\rho\in C^\infty(X-A)$ mit $0\leqq\rho\leqq 1$, $\rho|W_2=0$, $\rho|(X-A)-W_1=1$. Dann werde $h(x):=\rho(x)f(x)+[1-\rho(x)]g(x)$ für $x\in X-(A\cup B)$ und $h(x):=g(x)$ für $x\in B-A$ gesetzt. Dann ist $h\in C^\infty(X-A)$ eine Ausschöpfungsfunktion. Weiter gilt: $h|(X-A)-\bar{W}_1=f|(X-A)-\bar{W}_1$. Da f 1-konvex bezüglich M und $\bar{W}_1-A\subset U$, folgt: h ist 1-konvex bezüglich $M|X-U$. Also ist (X, B, A) 1-vollständig bezüglich M.

Korollar 1 zu Satz 5.1 kann folgendermaßen verallgemeinert werden.

Es seien X, $Y\subset\mathbb{P}_n$ algebraisch, $A=X\cap Y$ und $c=c(X, Y)$. Weiter sei $\mathcal{I}\subset\mathcal{O}_X$ eine kohärente Idealgarbe mit $N(\mathcal{I})=A$ und $B\subset A$ eine analytische Menge, so daß $\operatorname{cg}\mathcal{I}_x\leqq p$ für $x\in X-B$ und $\operatorname{cg}\mathcal{I}_x\leqq q$ für $x\in X$.

Satz 5.2. *$X-A$ ist $\tilde{q}$-vollständig, wobei $\tilde{q}=\dim B+\max(p+c, q)$.*

Beweis. Ist $B=\varnothing$, so ist $\dim B=-1$, und Satz 5.2 ist in diesem Falle Korollar 1 zu Satz 5.1.

Es sei nun $B\neq\varnothing$ und $k:=\dim B$. Weiter sei $H\subset\mathbb{P}_n$ ein linearer Raum mit $\dim H=n-k-1$ und $H\cap B=\varnothing$. Sei V eine offene Umgebung von B in $\mathbb{P}_n$, so daß $\bar{V}\cap H=\varnothing$. Weiter sei $S_p:=\{x\in X:\operatorname{cg}\mathcal{I}_x>p\}$; $S_q=\{x\in X:\operatorname{cg}\mathcal{I}_x>q\}$.

Dann ist $S_p\subset B$, also V eine Umgebung von S_p. Da außerdem $S_q=\varnothing$ ist, gibt es nach Korrollar 2 zu Satz 3.1 eine A-zulässige lineare Menge M über

X, so daß $\dim M_x \geqq \dim T_x X - q + 1$ für alle $x \in X$ und $\dim M_x \geqq \dim T_x X - p + 1$ für alle $x \in X - V$.

Sei $C := X \cap H$. Da $\mathbb{P}_n - H$ $(k+1)$-vollständig ist, gilt dies auch für $X - C$, und es gibt eine lineare Menge N über X mit $\dim N_x \geqq \dim T_x X - k$ für $x \in X$, so daß $X - C$ 1-vollständig bezüglich N ist. Da M eine A-zulässige lineare Menge über X ist, folgt aus Satz 3.2: $X - (A \cup C)$ ist 1-vollständig bezüglich $M \cap N$; denn $X - C$ ist 1-vollständig bezüglich $M \cap N \subset N$ und $M \cap N$ ist als Teilmenge von M eine A-zulässige lineare Menge. Aus Lemma 5.1 folgt nun: Das Tripel $(X, A \cup C, A)$ ist 1-vollständig bezüglich der linearen Menge $N \cap N$.

Da M eine A-zulässige lineare Menge über X ist, folgt aus Satz 5.1: $X - A$ ist c-vollständig bezüglich M. Es gibt also eine lineare Menge P' über X mit $\dim P'_x \geqq \dim T_x X - c + 1$, so daß $X - A$ 1-vollständig bezüglich $P' \cap M$ ist. Sei $P_x := (P' \cap M)_x$ für $x \in X - \bar{V}$, $P_x = T_x X$ für $x \in \bar{V}$ und $P = \bigcup_{x \in X} P_x$. Dann ist $P | X - \bar{V} = (P' \cap M) | X - \bar{V}$. Da $X - \bar{V}$ eine Umgebung von $C - A = (C \cup A) - A$ ist, gilt: $(C \cup A, A)$ ist 1-vollständig bezüglich P. Aus Satz 3.3 folgt dann: Es gibt eine lineare Menge $\tilde{M}$ über X mit $\dim \tilde{M}_x \geqq \dim (P_x \cap M_x \cap N_x) - 1$ für alle $x \in X$ und $\tilde{M}_x = P_x \cap M_x \cap N_x$ für $x \in \bar{V}$, so daß $X - A$ 1-vollständig bezüglich $\tilde{M}$ ist.

Sei $x \in X - \bar{V}$. Dann ist $P_x \cap M_x \cap N_x = P'_x \cap M_x \cap N_x$, $\dim P'_x \geqq \dim T_x X - c + 1$, $\dim M_x \geqq \dim T_x - p + 1$ und $\dim N_x \geqq \dim T_x X - k$. Also ist

$$\dim M_x \geqq \dim T_x X - (p + k + c) + 1 \qquad \text{für } x \in X - \bar{V}.$$

Ist $x \in \bar{V}$, so ist $\tilde{M}_x = M_x \cap N_x$, also $\dim M_x \geqq \dim T_x X - (q + k) + 1$. Daher ist $\dim \tilde{M}_x \geqq \dim T_x X - \tilde{q} + 1$ für $x \in X$. Da $X - A$ 1-vollständig bezüglich $\tilde{M}$ ist, folgt: $X - A$ ist $\tilde{q}$-vollständig.

6. Einhängung q-vollständiger Räume

Lemma 6.1. *Es seien A eine analytische Teilmenge des komplexen Raumes X, $f \in C^\infty(X)$, so daß $f | A$ q-konvex ist, und x ein nicht-singulärer Punkt von A. Dann gibt es eine offene Umgebung W von x in X und eine Funktion $g \in C^\infty(X)$ mit kompaktem Träger, so daß $g \geqq 0$, $g | A = 0$ und weiter gilt:*

(1) *$f + g | W$ ist q-konvex*

(2) *ist $\rho \in C^\infty(X)$ mit $\rho \geqq 0$, so ist ρg schwach 1-konvex bezüglich $TX | A$.*

Beweis. Da x ein regulärer Punkt von A ist, darf angenommen werden, daß X eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ und $A = \{z \in X : z_1 = \ldots = z_k = 0\}$ ist. Sei $\chi \in C^\infty(X)$ mit $\chi \geqq 0$, $\chi \equiv 1$ in einer Umgebung von x, so daß $\operatorname{supp} \chi$ kompakt ist. Es werde $L = L(x, f)$ und $Q(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \bar{\eta}_i$ für $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$ gesetzt.

Da $f | A$ q-konvex ist, gibt es einen Untervektorraum $T_1 \subset \{\xi \in \mathbb{C}^n : \xi_1 = \ldots = \xi_k = 0\} = T_x A$ mit $\dim T_1 = n - k - q + 1$, so daß $L | T_1$ positiv-definit ist.

Sei nun a eine positive reelle Zahl und $L' = L + aQ$. Weiter seien $T_2 = \{\xi \in \mathbb{C}^n : \xi_{k+1} = \ldots = \xi_n = 0\}$, $T := T_1 \oplus T_2$. Dann ist $\dim T = n - q + 1$. Ist a hinrei-

chend groß, so ist $L'|T$ positiv-definit. Setzt man nun $g(z)=a\chi(z)\sum_{i=1}^{k}|z_i|^2$ für $z\in X$, so ist $g\geqq 0$, $g|A=0$, und g hat kompakten Träger in X. Weiter ist $L(x,f+g)=L'$. Also ist $f+g$ in einer Umgebung von x q-konvex. Nun sei $\rho\in C^\infty(X)$ mit $\rho\geqq 0$ und $y\in A$. Dann ist $L(y,\rho g)=\rho(y)L(y,g)$ positivsemidefinit. Also ist ρg schwach 1-konvex bezüglich $TX|A$.

Satz 6.1. *Es seien X ein komplexer Raum und A eine q-vollständige analytische Teilmenge von X mit $\dim A<\infty$. Dann gibt es eine offene Umgebung U von A und eine q-konvexe Funktion $f\in C^\infty(U)$, so daß $f|A$ eine Ausschöpfungsfunktion ist.*

Beweis. Es sei M eine lineare Menge über A, so daß $\dim M_x\geqq\dim T_xA-q+1$ für $x\in A$ und A 1-vollständig bezüglich M ist. Da $\dim A<\infty$, gibt es endlich viele analytische Mengen $A=A_0\supset A_1\supset\ldots\supset A_s\supset A_{s+1}=\varnothing$, so daß A_i-A_{i+1} eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Durch absteigende Induktion über $s+1\geqq i\geqq 0$ wird gezeigt:

(E_i) Es gibt eine offene Umgebung V von A_i in X und eine q-konvexe Funktion $g\in C^\infty(V)$, so daß gilt:

(1) $g|A_i$ ist eine Ausschöpfungsfunktion,

(2) $g|A\cap V$ ist 1-konvex bezüglich M.

Aus (E_0) folgt die Aussage des Satzes. Da $A_{s+1}=\varnothing$, also (E_{s+1}) richtig ist, braucht nur noch gezeigt zu werden: Aus (E_{i+1}) folgt (E_i), wobei $0\leqq i\leqq s$ ist.

Ist (E_{i+1}) richtig, so gibt es eine offene Umgebung V von A_{i+1} und ein $g\in C^\infty(V)$, so daß g q-konvex ist und (1) und (2) erfüllt sind. Da $g|A_{i+1}$ eine Ausschöpfungsfunktion ist, gibt es eine offene Umgebung V_1 von A_{i+1} in V und eine Ausschöpfungsfunktion $g_1\in C^\infty(X)$, so daß $g_1|V_1=g|V_1$. Es darf $g>0$, $g_1>0$ angenommen werden. Da A 1-vollständig bezüglich M ist, gibt es nach Lemma 3.5 ein $h_1\in C^\infty(A)$, so daß gilt:

$h_1\geqq 0$, $\{h_1=0\}=A_{i+1}$

$h_1|A-V_1>g_1|A-V_1$

$h_1|A-A_{i+1}$ ist 1-konvex bezüglich M.

Weiter sei $h_2\in C^\infty(X)$ mit $h_2|A=h_1$. Da $g_1>0$ und $h_2|A_{i+1}=0$, gibt es eine offene Umgebung V_2 von A_{i+1} mit $\bar V_2\subset V_1$, so daß $g_1|V_2>h_2|V_2$. Sei V_3 eine weitere offene Umgebung von A_{i+1} mit X mit $\bar V_3\subset V_2$ und $\chi\in C^\infty(X)$ mit $0\leqq x\leqq 1$, $\chi|V_3\equiv 1$ und $\operatorname{supp}\chi\subset V_2$.

Schließlich werde $h_3:=(1-\chi)h_2$ gesetzt. Für $F:=\max(g_1,h_3)|A$ gilt dann: F ist eine Ausschöpfungsfunktion von A. Weiter ist $g_1>0$ und $h_3\geqq 0$ auf A, insbesondere ist $F>0$. Ist $x\in A$ und $g_1(x)=F(x)$, so gilt: $x\in V_1$. Die Menge $A\cap V_1$ ist also eine offene Umgebung von x in A und $g_1|A\cap V_1$ ist 1-konvex bezüglich M. Ist $h_3(x)=F(x)$ für ein $x\in A$, so ist $h_2(x)\geqq g_1(x)$, so $x\notin V_2$. Dann ist $A-\operatorname{supp}\chi$ eine offene Umgebung von x in A, in der $h_3=h_1$ gilt. Da $A_{i+1}\subset\operatorname{supp}\chi$ und $h_1|A-A_{i+1}$ 1-konvex bezüglich M ist, ist $h_3|A-\operatorname{supp}\chi$ 1-konvex bezüglich M.

Die Voraussetzungen von Satz 2.1 sind somit erfüllt. Es gibt also eine konvexe Funktion r, so daß $r\circ(g_1|A)+r\circ(h_3|A)$ 1-konvex bezüglich M und eine Ausschöpfungsfunktion von A ist. Setzt man $h:=r\circ g_1+r\circ h_3$, so gilt:

$h|A$ ist eine Ausschöpfungsfunktion,

$h|A$ ist 1-konvex bezüglich M,

$h|V_3$ ist q-konvex.

Die letzte Aussage gilt, da $h_3|V_3=0$ und mit $g_1|V_3$ auch $h|V_3=r\circ_{g1}|V_3$ q-konvex ist.

Mit Lemma 6.1 wird die Funktion h nun so abgeändert, daß sie auch in einer Umgebung von A_i-A_{i+1} q-konvex ist.

Es gilt: A_i-A_{i+1} enthält keinen singulären Punkt von A_i, $h|A_i$ ist q-konvex, da $h|A$ q-konvex ist wegen $\dim M_x \geqq \dim T_x X - q + 1$. Aus Lemma 6.1 folgt: Es gibt eine lokal endliche Familie $\{W_j : j\in I\}$ offener Mengen $W_j \Subset X$ mit $\bigcup_{j\in I} W_j \supset A_i - V_3$ und zu jedem $j\in I$ eine Funktion $f_j\in C^\infty(X)$, deren Träger kompakt ist, so daß gilt:

(3) $f_j \geqq 0$, $f_j|A_i=0$,

(4) $h+f_j|W_j$ ist q-konvex,

(5) ist $\rho\in C^\infty(X)$ mit $\rho\geqq 0$, so ist ρf_j schwach 1-konvex bezüglich $TX|A_i$.

Nun seien $W_j' \Subset W_j$ offene Mengen für $j\in I$, so daß $\bigcup_{j\in I} W_j' \supset A_i - V_3$, und $\rho_j\in C^\infty(X)$ mit $\rho_j|W_j' \equiv 1$ und $\operatorname{supp}\rho_j \subset W_j$. Weiter werde $f := \sum_{j\in I} \rho_j f_j + h$ gesetzt. Es ist $f\in C^\infty(X)$. Zu jedem $x\in A_i - V_3$ gibt es ein $j_0\in I$ mit $x\in W_{j_0}'$. Dann ist $h+\rho_{j_0} f_{j_0}|W_{j_0}'$ q-konvex wegen (4) und $\rho_{j_0}|W_{j_0}' \equiv 1$. Da $\sum_{j\neq j_0} \rho_j f_j$ schwach 1-konvex bezüglich $TX|A_i$ ist, folgt hieraus, daß f in einer Umgebung von x q-konvex ist. Sei $x\in V_3\cap A$. Da $h|V_3$ q-konvex und $\sum_{j\in I} \rho_j f_j$ schwach 1-konvex bezüglich $TX|A_i$ ist, folgt wieder, daß f in einer Umgebung von x q-konvex ist. Also gibt es eine offene Umgebung T_1 von A_i, so daß $f|T_1$ q-konvex ist. Schließlich ist $h|A$ 1-konvex bezüglich M. Da $\sum_{j\in I} \rho_j f_j$ schwach 1-konvex bezüglich $TX|A_i$ ist, folgt aus Lemma 1.3 f): Es gibt eine offene Umgebung T_2 von A_i in X, so daß $f|T_2\cap A$ 1-konvex bezüglich M ist. Setzt man $V'=T_1\cap T_2$, $g'=f|V'$, so folgt die Aussage (E_i).

In [10] wird die Garbe der differenzierbaren Funktionen auf einem komplexen Raum so definiert, daß eine q-konvexe Funktion auf A stets eine q-konvexe Fortsetzung auf eine Umgebung von A in X besitzt.

Definiert man die q-Vollständigkeit durch die Existenz von Ausschöpfungsfunktionen, die q-konvex im Sinne von [10] sind, so ist jeder in unserem Sinne q-vollständige komplexe Raum, der in eine komplexe Mannigfaltigkeit eingebettet werden kann, auch q-vollständig nach der neuen Definition. Sei A wieder eine analytische Teilmenge eines komplexen Raumes X mit $\dim A < \infty$. Der folgende Satz beschreibt die „Einhängung des komplexen Raumes A in $X-A$".

Satz 6.2. *Ist $X-A$ q-vollständig und ist A r-vollständig, so ist X $(q+r)$-vollständig.*

Beweis. Nach Satz 6.1 gibt es eine offene Umgebung U von A in X und eine r-konvexe Funktion f_1 auf U, so daß $f_1|A$ eine Ausschöpfungsfunktion ist. Sei

f eine reelle Funktion auf X mit $f|U=f_1$ und M eine lineare Menge über X mit $\dim M_x \geqq \dim T_x X - r + 1$ für alle $x \in X$, so daß $f|U$ 1-konvex bezüglich M ist. Da f in den Punkten von A pseudokonvex bezüglich M ist, folgt aus dem Korollar 2 zu Satz 2.1, daß das Paar (A, ϕ) 1-konvex bezüglich M ist.

Weiter gibt es eine lineare Menge N über X mit $\dim N_x \geqq \dim T_x X - q + 1$ für alle $x \in X$, so daß $X - A$ 1-konvex bezüglich N ist. Aus dem Lemma 5.1 folgt dann, daß das Tripel (X, A, ϕ) 1-vollständig bezüglich N ist. Aus Satz 3.3 folgt dann: Es gibt eine lineare Menge P über X, so daß $\dim P_x \geqq \dim(m_x \cap N_x) - 1$ für alle $x \in X$ und X 1-vollständig bezüglich P ist. Da $\dim P_x \geqq \dim T_x X - (q+r) + 1$, folgt die Behauptung.

Literatur

1. Andreotti, A., Frankel, T.: The Lefschetz theorem on hyperplane sections. Ann. Math. **69**, 713–717 (1959)
2. Andreotti, A., Grauert, H.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. Bull. Soc. Math. France **90**, 193–259 (1962)
3. Ballico, E.: Complements of analytic subvarieties and q-complete spaces. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **71**, 60–65 (1981)
4. Barth, W.: Der Abstand von einer algebraischen Mannigfaltigkeit im komplex-projektiven Raum. Math. Ann. **187**, 150–162 (1970)
5. Barth, W.: Transplanting cohomology classes in complex projective space. Am. J. Math. **92**, 951–967 (1970)
6. Barth, W., Larsen, M.: On the homotopy groups of complex projective manifolds. Math. Scand, **30**, 88–94 (1972)
7. Bott, R.: On a theorem of Lefschetz. Mich. Math. J. **6**, 211–216 (1959)
8. Diederich, K., Fornaess, J.E.: Smoothing q-convex functions and vanishing theorems. Invent. Math. **82**, 291–305 (1985)
9. Diederich, K., Fornaess, J.E.: Smoothing q-Convex Functions in the Singular Case. Math. Ann. Ann. **273**, 665–671 (1986)
10. Fritzsche, K.: q-konvexe Restmengen in kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. **221**, 251–273 (1976)
11. Fulton, W., Lazarsfeld, R.: Connectivity and its applications in algebraic geometry. Algebraic Geometry. Lecture Notes in Mathematics **862**, 26–92. Berlin Heidelberg New York: Springer 1981
12. Goresky, M., MacPherson, R.: Stratified morse theory. Proc. Symp. Pure Math. Arcata 1981, vol. 40, part 1, 517–533 (1983)
13. Grauert, H.: Kantenkohomologie. Compos. Math. **44**, 79–101 (1981)
14. Grauert, H.: On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds. Ann. Math. **68**, 460–472 (1958)
15. Grothendieck, A.: Local cohomology. Lecture Notes in Mathematics **41**. Berlin Heidelberg New York: Springer 1967
16. Hamm, H.A.: Zum Homotopietyp Steinscher Räume. J. Reine Angew. Math. **338**, 121–135 (1983)
17. Hartshorne, R.: Ample subvarieties of algebraic varieties. Lecture Notes in Mathematics 156. Berlin Heidelberg New York: Springer 1981
18. Hartshorne, R.: Cohomological dimension of algebraic varieties. Ann. Math. **88**, 403–450 (1968)
19. Larsen, M.: On the topology of complex projective manifolds. Invent. Math. **19**, 251–260 (1973)
20. Milnor, J.: Morse theory. Ann. Math. Stud. **51**. Princeton NJ: Princeton University Press 1963
21. Ogus, A.: Local cohomological dimension of algebraic varieties. Ann. Math. **98**, 327–365 (1973)
22. Okonek, C.: Barth-Lefschetz theorems for singular spaces. J. Reine Angew. Math. **374**, 24–38 (1987)
23. Peternell, M.: Continuous q-convex exhausion functions. Invent. Math. **85**, 249–262 (1986)
24. Richberg, R.: Stetige streng pseudokonvexe Funktionen. Math. Ann. **175**, 257–286 (1986)

25. Schneider, M.: Über eine Vermutung von Hartshorne. Math. Ann. **201**, 221–229 (1973)
26. Sommese, A.J.: Complex subspaces of homogenous complex manifolds I. Transplanting theorems. Duke Math. J. **46**, 527–548 (1979)
27. Sommese, A.J.: Complex subspaces of homogenous complex manifolds II. Homotopy results. Nagoya Math. J. **86**, 101–129 (1982)
28. Sommese, A.J., Van de Ven, A.: Homotopy groups of pullbacks of varieties. Nagoya Math. J. **102**, 79–90 (1986)

Eingegangen am 11. November 1987; in revidierter Form am 25. April 1988