Werk

Titel: Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation.

Autor: Lannes, Jean; Zarati, Said

Jahr: 1987

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0194|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 194, 25–59 (1987)

Mathematische Zeitschrift
© Springer-Verlag 1987

Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation

Jean Lannes [1] et Saïd Zarati [2]

[1] École Polytechnique, Centre de Mathématiques, Route de Saclay, F-91128 Palaiseau cedex, France (U.A.C.N.R.S. n° 169)

[2] Université de Tunis, Faculté des sciences - Mathématiques, 1060 Tunis, Tunisie

1. Introduction

Soit A l'algèbre de Steenrod modulo 2. On désigne par $\mathcal{M}$ la catégorie dont les objets sont les A-modules gradués et dont les morphismes sont les applications A-linéaires de degré zéro.

Définition 1.1. On dit qu'un A-module M est instable si $Sq^i x=0$ pour tout x de M et tout i tel que $i>|x|$, $|x|$ désignant le degré de x (L'origine de cette terminologie est que la cohomologie modulo 2 d'un espace topologique vérifie cette condition alors que ce n'est pas le cas, en général, de la cohomologie modulo 2 d'un spectre). On note $\mathcal{U}$ la sous catégorie pleine de $\mathcal{M}$ dont les objets sont les A-modules instables.

Définition 1.2. On note $D: \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ et on appelle foncteur de déstabilisation l'adjoint à gauche du foncteur oubli: $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{M}$. On a donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(M, N)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(DM, N)$$

pour tout A-module M et tout A-module instable N.

Le foncteur D peut être explicité de la façon suivante.

Définition 1.3. Soit M un A-module, on désigne par $B(M)$ le sous-espace vectoriel de M engendré par les éléments de la forme $Sq^i x$ avec $i>|x|$, x décrivant M. Les relations d'Adem montrent que $B(M)$ est en fait un sous A-module de M. Il est clair que $D(M)$ est le quotient $M/B(M)$.

Le foncteur D est exact à droite, on note $D_s: \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{U}$, $s \geqq 0$, ses foncteurs dérivés dont l'étude dans certains cas particuliers est l'objet de la première partie de ce papier.

Avant de poursuivre introduisons la définition suivante:

Définition 1.4. Pout tout t dans $\mathbb{Z}$, on note $\Sigma^t: \mathcal{M} \rightsquigarrow \mathcal{M}$ le foncteur qui associe au module $M=\{M^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ le module défini par $\Sigma^t M=\{M^{n-t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, la structure de A-module sur $\Sigma^t M$ étant donnée par $Sq^i(\Sigma^t x)=\Sigma^t(Sq^i x)$.

Nous explicitons dans cet article $D_s\Sigma^{1-s}M$ pout tout A-module instable M et tout $s \geqq 0$. Le résultat exprimé sous une forme provisoirement un peu vague est le suivant:

Théorème 1.5. *Pour tout A-module instable M et tout $s \geqq 0$, il existe un isomorphisme naturel: $D_s\Sigma^{1-s}M \simeq \Sigma R_s(M)$, $R_s(M)$ désignant un certain sous-A-module de $H^*((\mathbb{Z}/2)^s; \mathbb{Z}/2) \otimes M$ dépendant fonctoriellement de M.*

Ce résultat permet de décrire une relation entre, d'une part, l'homomorphisme d'Hurewicz modulo 2: $\{X, Y\} \to \mathrm{Hom}(H_*(X; \mathbb{Z}/2), H_*(\Omega^\infty S^\infty Y; \mathbb{Z}/2))$, X et Y désignant deux espaces pointés et $\{X, Y\}$ le groupe des classes d'homotopie d'applications stables de X dans Y, et d'autre part, la suite spectrale d'Adams (stable) en cohomologie modulo 2. Cette description qui est faite dans [9, 10] a été la motivation originale de l'algèbre homologique du présent papier.

En voici le plan. Le papier se compose en fait de deux parties, les paragraphes 2, 3, 4 d'une part, le paragraphe 5 d'autre part, et d'un appendice.

L'énoncé précis du théorème évoqué ci-dessus est donné au paragraphe 2. Au paragraphe 3, on décrit la méthode de démonstration. Les démonstrations sont détaillées au paragraphe 4. Il est à noter que l'on peut obtenir le théorème 1.5 en «passant à la limite» dans le théorème 6.6 de [17] (utiliser également [23]).

Le paragraphe 5 donne des exemples et des applications. Au début de ce paragraphe (5.1, 5.2, 5.3), on indique le rapport qui existe entre le module $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$ et les relations de l'algèbre de Steenrod modulo 2; on obtient en particulier un analogue algébrique du résultat de G. Brumfiel, I. Madsen, et R.J. Milgram, sur l'image réciproque des classes de Kervaire par l'application: $G \to G/\mathrm{TOP}$ [3]. A la fin du paragraphe 5 on montre comment calculer, à l'aide du theorème 2.5 (forme précise du théorème 1.5 ci-dessus) et de ses variantes, certains $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, K)$, M désignant un objet de $\mathscr{U}$ et K un injectif de cette catégorie. On donne deux exemples. On retrouve tout d'abord le calcul de certains groupes d'extensions effectués dans [2, 12] et également utilisés dans [4]. On montre ensuite, sans attendre les résultats de [9, 10], comment le théorème 2.5 permet de donner une solution de la conjecture de Segal (forme faible) pour un 2-groupe abélien élémentaire dés que l'on sait que la cohomologie modulo 2 d'un tel groupe est un injectif de la catégorie $\mathscr{U}$ [4, 14]. Signalons à ce propos que nous donnons dans [22] une solution du même type de la forme forte de cette conjecture. Précisons un peu. Par forme faible de la conjecture de Segal pour un 2-groupe abélien élémentaire V on entend la détermination des groupes $\{B_+V, S^n\}$ pour $n \geqq 0$ (B_+V désigne la réunion disjointe d'un classifiant BV du groupe V et d'un point base), par forme forte on entend la détermination du dual fonctionnel du spectre des suspensions de B_+V. J.F. Adams, J. Gunawardena, et H. Miller ont prouvé cette forme forte par des calculs de groupes d'extension effectués dans [20] que nous retrouvons dans [22] par les méthodes du présent article.

L'appendice, dû au premier auteur, montre que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\ , H^*(V; \mathbb{Z}/2))$, V désignant toujours un 2-groupe abélien élémentaire, «commute» en un certain sens au produit tensoriel de A-modules instables. Ceci permet de comparer $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\ , H^*(V; \mathbb{Z}/2))$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^*(V; \mathbb{Z}/2))$, $\mathscr{K}$

désignant la catégorie des A-algèbres instables et K un objet de $\mathscr{K}$ (voir la définition A.1.3, la cohomologie modulo 2 d'un espace topologique est un exemple de A-algèbre instable). On déduit notamment de cette comparaison que $H^*(V; \mathbb{Z}/2)$ est injectif en tant qu'objet de $\mathscr{K}$.

Signalons enfin que les résultats de cet article sont annoncés dans [21] et qu'ils sont généralisés en caractéristique impaire dans la thèse du second auteur [19].

Remerciements. Nous tenons à remercier W.M. Singer pour les conversations qu'il nous a généreusement accordées à Aarhus pendant l'été 82 qui sont pour beaucoup dans la génèse de ce travail. En particulier, c'est lui qui nous a montré que les objets algébriques que nous considérions alors, se définissaient en termes des dérivés de la déstabilisation.

2. Enoncé des résultats

2.1. Un cap-produit

Soient M_1 et M_2 deux A-modules. On définit une application

$$\mathrm{Ext}^{s'}_{\mathscr{U}}(M_1, M_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s(M_1), D_{s-s'}(M_2)),$$

ou encore un cap-produit:

$$D_s(M_1) \otimes \mathrm{Ext}^{s'}_{\mathscr{U}}(M_1, M_2) \to D_{s-s'}(M_2)$$

de la manière suivante.

Soit $L_*(M_1)$ (resp. $L_*(M_2)$) une $\mathscr{U}$-résolution libre de M_1 (resp. M_2), tout élément e de $\mathrm{Ext}^{s'}_{\mathscr{U}}(M_1, M_2)$ est représenté par une application de complexes, de degré $-s'$, $f: L_*(M_1) \to L_*(M_2)$ unique à homotopie près. Cette application induit une application de $D_s(M_1)$ vers $D_{s-s'}(M_2)$ notée $x \mapsto x \cap e$.

Rappelons qu'étant donné trois A-modules, M_1, M_2, M_3, on a le produit de Yoneda (noté $\cup$):

$$\mathrm{Ext}^{s'}_{\mathscr{U}}(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Ext}^{s''}_{\mathscr{U}}(M_2, M_3) \to \mathrm{Ext}^{s'+s''}_{\mathscr{U}}(M_1, M_3)$$

qui correspond au niveau des complexes à la composition des applications.

Par définition du cap-produit, on a la formule suivante («associativité du cap-produit»):

$$x \cap (e' \cup e'') = (x \cap e') \cap e'',$$

où x (resp. e' et e'') est un élément de $D_s M_1$ (resp. $\mathrm{Ext}^{s'}_{\mathscr{U}}(M_1, M_2)$ et $\mathrm{Ext}^{s''}_{\mathscr{U}}(M_2, M_3)$).

2.2. L'extension e^s

Soient M_1 et M_2 deux A-modules; on note $M_1 \otimes M_2$ le produit tensoriel de M_1 et M_2 sur $\mathbb{Z}/2$ muni de l'action «diagonale» de A définie à l'aide de la formule de Cartan. Si M_1 et M_2 sont instables, il en est de même pour $M_1 \otimes M_2$.

Rappelons qu'étant donné quatre A-modules M_1, M_2, N_1, N_2 on a un produit:

$$\mathrm{Ext}^{s_1}_{\mathscr{M}}(M_1, N_1) \otimes \mathrm{Ext}^{s_2}_{\mathscr{M}}(M_2, N_2) \to \mathrm{Ext}^{s_1+s_2}_{\mathscr{M}}(M_1 \otimes M_2, N_1 \otimes N_2)$$

appelé produit tensoriel (ou cross-produit) et noté $\otimes$, qui, comme précédemment, correspond au niveau des complexes $L_*(\ )$ au produit tensoriel des applications. Ce produit est relié à celui de Yoneda par la formule:

$$e_1 \otimes e_2 = (e_1 \otimes \mathrm{Id}_{M_2}) \cup (\mathrm{Id}_{N_1} \otimes e_2).$$

On considère maintenant la cohomologie modulo 2 du groupe $\mathbb{Z}/2$ que l'on note P; P est un A-module instable. En tant que $\mathbb{Z}/2$-algèbre commutative unitaire, P est librement engendrée par un générateur de degré 1 noté u: $P = \mathbb{Z}/2[u]$ (en fait, comme la cohomologie modulo 2 de tout espace topologique, P est une A-algèbre instable, voir la définition A.1.3, ce qui détermine la structure de A-module de P). Il existe un A-module, noté $\hat{P}$ caractérisé par les propriétés suivantes: $\hat{P}$ contient P comme sous-A-module, $\hat{P}/P = \Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$, $Sq^i u^{-1} = u^{i-1}$, u^{-1} désignant le générateur de $(\hat{P})^{-1}$. On note e l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2, P)$ représenté par la suite exacte:

$$0 \to P \to \hat{P} \to \Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2 \to 0.$$

On note P_s la cohomologie modulo 2 du groupe $(\mathbb{Z}/2)^s$; P_s s'identifie à $\mathbb{Z}/2[u_1, \ldots, u_s]$ avec $|u_1| = \ldots = |u_s| = 1$ ou encore au produit tensoriel de A-modules $\mathbb{Z}/2[u_1] \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}/2[u_s]$, P_s est instable.

Définition 2.2.1. On note e^s l'élément de $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2, P_s)$ produit tensoriel de s copies de e.

L'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ sur $(\mathbb{Z}/2)^s$ induit une action A-linéaire sur $H^*((\mathbb{Z}/2)^s; \mathbb{Z}/2)$ et par conséquent une action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ sur $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2, P_s)$.

On a le résultat suivant qui sera démontré en 4.3.

Lemme 2.2.2 (W.M. Singer). *L'élément e^s est invariant sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ sur $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2, P_s)$.*

2.3. L'application α_s

Soit M un A-module instable. On désigne par $e^s(M)$ l'élément de $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-s}M, P_s \otimes M)$ produit tensoriel de e^s et de l'identité de M.

Définition 2.3.1. Le cap-produit par $e^s(M)$ est une application A-linéaire $D_s(\Sigma^{-s}M) \to P_s \otimes M$ que nous notons α_s^M ou simplement α_s s'il n'y a pas de doute quant au choix de M.

Notons L_s le sous-A-module de P_s formé des éléments invariants sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$; le lemme 2.2.2 a pour conséquence:

Proposition 2.3.2. *L'image de l'application α_s^M est contenue dans $L_s \otimes M$.*

Notre résultat est que, pour tout A-module instable M, l'application $\alpha_s^{\Sigma M}$ induit un isomorphisme de $D_s \Sigma^{1-s} M$ sur un certain sous-A-module $\Sigma R_s M$ de $\Sigma L_s \otimes M$ dépendant fonctoriellement de M. Les applications topologiques de notre théorie [9, 10] sont fondées sur la relation entre ces foncteurs R_s et les constructions hyperquadratiques. Plus précisément, soit $E_+ \mathfrak{S}_{2^s}$ la réunion disjointe d'un point base et d'un espace contractile sur lequel le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{2^s}$ agit librement. Pour tout espace pointé Y, on note $\mathfrak{S}_{2^s} Y$ le quotient de l'espace $E_+ \mathfrak{S}_{2^s} \wedge (Y \wedge \ldots \wedge Y)$, Y 2^s-fois, par l'action diagonale de $\mathfrak{S}_{2^s}$. On désigne par $\Delta_s : B_+(\mathbb{Z}/2)^s \wedge Y \to \mathfrak{S}_{2^s} Y$ une «diagonale de Steenrod» déterminée par une bijection entre $(\mathbb{Z}/2)^s$ et $\{1, 2, \ldots, 2^s\}$ ($B_+(\mathbb{Z}/2)^s$ est la réunion disjointe d'un classifiant du groupe $(\mathbb{Z}/2)^s$ et d'un point base). On vérifie que $R_s \bar{H}^*(Y; \mathbb{Z}/2)$ est l'image de Δ_s^* en cohomologie modulo 2. C'est là l'origine des définitions que nous allons introduire.

2.4. *Les foncteurs R_s (comparer avec* [17] *et* [23])

Pour tout A-module instable M, on définit une application $\mathbb{Z}/2$-linéaire de M dans $P \otimes M$ en faisant correspondre à tout x de M l'élément $St_1(u; x) = \sum_{i=0}^{n} u^{n-i} \otimes Sq^i x$, n désignant le degré de x.

Par récurrence, on définit une application $\mathbb{Z}/2$-linéaire de M dans $P_s \otimes M$ en posant $St_s(u_1, \ldots, u_s; x) = St_1(u_1; St_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; x))$. On convient que $St_0(x) = x$. Pour tout s', $0 \leqq s' \leqq s$, on *a*:

$$St_s(u_1, \ldots, u_s; x) = St_{s'}(u_1, \ldots, u_{s'}; St_{s-s'}(u_{s'+1}, \ldots, u_s; x)).$$

Quand il n'y aura pas risque de confusion, on abrègera la notation $St_s(u_1, \ldots, u_s; x)$ en $St_s x$.

Definition-Proposition 2.4.1. *Soit M un A-module instable; on note $R_s M$, $s \geqq 0$, le sous-L_s-module de $P_s \otimes M$ engendré par $St_s M$.*

(i) *Le module $R_s M$ est un sous-A-module de $L_s \otimes M$, en particulier $R_s M$ est un A-module instable.*

(ii) *Soit $\{x\}$ une $\mathbb{Z}/2$-base de M, alors $\{St_s x\}$ est une L_s-base de $R_s M$.*

Les affirmations contenues dans cette proposition seront démontrées en 4.4.5 et 4.4.6.1.

Afin que la description du foncteur $R_s : \mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{U}$ soit complète, il nous faut expliciter l'anneau d'invariants L_s. Sa détermination a été faite au début de ce siècle par L.E. Dickson [7].

Définition-Proposition 2.4.2. *On note w_j la j-ème fonction symétrique élémentaire des 2^s éléments de $H^1((\mathbb{Z}/2)^s; \mathbb{Z}/2)$ ou, ce qui revient au même, des $2^s - 1$ éléments non nuls (w_j est bien sûr invariante sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ sur $H^j((\mathbb{Z}/2)^s; \mathbb{Z}/2)$); w_j est encore la j-ème classe de Stiefel-Whitney de la représentation régulière de $(\mathbb{Z}/2)^s$ ce qui justifie la notation. La sous-algèbre L_s de P_s formée des invariants*

sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Z}/2$ librement engendrée par les classes $w_{2^s-2^k}$, $0 \leqq k < s$ (corollairement les classes w_j sont nulles si $2^s - j$ n'est pas une puissance de 2).

Une démonstration de cette proposition sera donnée en 4.4.7.

2.5. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer

Théorème 2.5. *Soit M un A-module instable; alors, pour tout $s \geqq 0$, l'application $\alpha_s^{\Sigma M}$ induit un isomorphisme de $D_s \Sigma^{1-s} M$ sur $\Sigma R_s M$.*

3. Méthode de démonstration du théorème 2.5

3.1. Pour pouvoir décrire cette méthode qui est comparable à celles de [16] théorème 7.1 et [17] théorème 6.6, il nous faut introduire les définitions suivantes.

3.1.1. Définition des foncteurs Φ, Ω et Ω_1. A tout A-module M, on associe le A-module «double de M», noté ΦM, défini par:

$$(\Phi M)^n = \begin{cases} M^{n/2} & \text{si } n \equiv 0\ (2) \\ 0 & \text{si } n \equiv 1\ (2) \end{cases} \quad \text{et} \quad Sq^k(\Phi x) = \begin{cases} \Phi(Sq^{k/2} x) & \text{si } k \equiv 0\ (2) \\ 0 & \text{si } k \equiv 1\ (2). \end{cases}$$

Φx désignant l'élément de $(\Phi M)^{2n}$ correspondant à un élément x de M^n.

On note Sq_0 l'application $\mathbb{Z}/2$-linéaire de degré zéro de ΦM dans M définie par $Sq_0(x) = Sq^{|x|}(x)$. Si M est instable, l'application Sq_0 est A-linéaire. Dans ce cas, on pose $\Omega M = \Sigma^{-1} \operatorname{coker} Sq_0$ et $\Omega_1 M = \Sigma^{-1} \ker Sq_0$ ([13, 15]); on vérifie que ces A-modules sont instables. Le foncteur $\Omega: \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ est l'adjoint à gauche du foncteur $\Sigma: \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ et Ω_1 est son premier et unique foncteur dérivé.

Définition 3.1.2. On dira qu'un foncteur $F: \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ est un Σ-foncteur s'il existe une transformation naturelle: $F\Sigma \to \Sigma F$, ou ce qui revient au même $\Omega F \Sigma \to F$. On dira qu'un Σ-foncteur F est sans torsion si, pour tout A-module instable M, l'application naturelle: $\Omega F \Sigma M \to FM$ est injective. Soient F et G deux Σ-foncteurs, on dira qu'une transformation naturelle $\alpha: F \to G$ est une transformation naturelle de Σ-foncteurs si le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \Omega F \Sigma M & \longrightarrow & FM \\ \downarrow{\scriptstyle \Omega \alpha^{\Sigma M}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^M} \\ \Omega G \Sigma M & \longrightarrow & GM \end{array}$$

est commutatif. Un Σ-foncteur F induit un foncteur $\bar{F}: \mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ qui est défini sur les objets de $\mathscr{U}$ par la formule $\bar{F}M = \operatorname{coker}(\Omega F \Sigma M \to FM)$. De même, une transformation naturelle de Σ-foncteurs $\alpha: F \to G$ induit une transformation naturelle $\bar{\alpha}: \bar{F} \to \bar{G}$.

Définition 3.1.3. La valuation d'un module gradué $M=\{M^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est l'élément de $\mathbb{Z}\cup\{-\infty,+\infty\}$, noté $|M|$, défini par $|M|=\inf\{n\in\mathbb{Z};\ M^n\neq 0\}$.

Définition 3.1.4. On dira qu'un foncteur $F\colon \mathscr{U}\rightsquigarrow\mathscr{U}$ est à décroissance rapide si, pour tout A-module instable M, on a: $\lim_{p\in\mathbb{N}}(|F\Sigma^p M|-p)=+\infty$.

3.2. On démontre le théorème 2.5 à l'aide du lemme ci-dessous que l'on peut considérer comme un «lemme de Nakayama» pour les Σ-foncteurs.

Lemme 3.2.1. (Lemme de Nakayama pour les Σ-foncteurs). *Soit $\alpha\colon F\to G$ une transformation naturelle de Σ-foncteurs. On suppose que F et G sont à décroissance rapide et que G est sans torsion, alors α est une équivalence si et seulement si la transformation naturelle induite $\bar{\alpha}\colon \bar{F}\to\bar{G}$ en est une.*

Démonstration. On note respectivement C et K les Σ-foncteurs définis sur les objets de $\mathscr{U}$ par les formules $CM=\operatorname{coker}\alpha^M$, $KM=\ker\alpha^M$. Les foncteurs C et K sont à décroissance rapide.

Si $\bar{\alpha}^M$ est un épimorphisme pour tout M, alors il en est de même pour α^M. En effet, cette hypothèse implique que $\bar{C}$ est nul c'est-à-dire que pour tout M l'application naturelle $\Omega C\Sigma M\to CM$ est surjective, on en déduit l'inégalité:

$$|CM|\geqq|C\Sigma M|-1;$$

et en itérant:

$$|CM|\geqq|C\Sigma^p M|-p$$

pour tout entier p. Puisque C est à décroissance rapide, $C=0$.

Si G est sans torsion et si $\bar{\alpha}^M$ est un isomorphisme pour tout M, alors il en est de même pour α^M. En effet, ces hypothèses impliquent $\bar{K}=0$.

3.2.2. On démontre le théorème 2.5 de la façon suivante. On pose $F_s=D_s\Sigma^{1-s}$, $G_s=\Sigma R_s$. On montre tout d'abord que l'application $\alpha_s^{\Sigma M}\colon D_s\Sigma^{1-s}M\to\Sigma P_s\otimes M$ définie en 2.3.1 induit une transformation naturelle, toujours notée $\alpha_s\colon F_s\to G_s$. On vérifie ensuite les points suivants:

– F_s et G_s sont des Σ-foncteurs sans torsion et α_s est une transformation naturelle de Σ-foncteurs.

– F_s et G_s sont à décroissance rapide pour $s\geqq 1$.

– Il existe des équivalences: $\bar{F}_s\simeq\Omega_1 F_{s-1}$, $\bar{G}_s\simeq\Omega_1 G_{s-1}$ $(s\geqq 1)$ et la transformation naturelle $\bar{\alpha}_s$ s'identifie à $\Omega_1\alpha_{s-1}$.

Ces points acquis, on procède par récurrence sur s: il est trivial que α_0 est une équivalence et l'induction de $s-1$ à s se fait par le lemme de Nakayama pour les Σ-foncteurs.

4. Démonstrations

4.1. Comparaison des foncteurs D_s et $D_s\Sigma^{-1}$

Soient M un A-module et C_* une $\mathscr{M}$-résolution libre de M; on a la suite exacte courte:

$$0\to\Phi D(C_*)\xrightarrow{Sq_0}D(C_*)\to\Sigma D(\Sigma^{-1}C_*)\to 0.$$

Ceci résulte de l'identité $\Omega D = D\Sigma^{-1}$ et de l'injectivité de Sq_0: $\Phi F(n) \to F(n)$, $F(n)$ désignant le A-module $D(\Sigma^n A)$ ($F(n)$ est le A-module instable librement engendré par un générateur de degré n).

En passant en homologie, on obtient la suite exacte naturelle:

$$\ldots \to \Phi D_s(M) \xrightarrow{Sq_0} D_s(M) \to \Sigma D_s(\Sigma^{-1} M) \to \Phi D_{s-1}(M) \xrightarrow{Sq_0} \ldots .$$

Les foncteurs D_s et $D_s\Sigma^{-1}$ sont donc reliés par la suite exacte courte suivante:

$$0 \to \Omega D_s M \to D_s \Sigma^{-1} M \xrightarrow{\partial} \Omega_1 D_{s-1} M \to 0 .$$

Le lemme ci-dessous, dont la démonstration est «routine», montre que le connectant ∂ est compatible avec le cap-produit de 2.1.

Lemme 4.1. *Soient M_1 et M_2 deux A-modules et e un élément de* $\mathrm{Ext}^{s'}_{\mathcal{A}}(M_1, M_2)$. *Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} D_s\Sigma^{-1} M_1 & \xrightarrow{\partial} & \Omega_1 D_{s-1} M_1 \\ {\scriptstyle \cap e}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_1(\cap e)} \\ D_{s-s'}(\Sigma^{-1} M_2) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_1 D_{s-s'-1} M_2 . \end{array}$$

4.2. Le cas $s=1$

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème 2.5 pour $s=1$. L'isomorphisme $D_1(M) \simeq \Sigma R_1(M)$ semble appartenir au folklore, cependant la méthode de démonstration que nous adoptons est la même que celle que nous utiliserons pour l'induction de $s-1$ à s dans le cas général, aussi allons-nous détailler quelque peu.

4.2.1. Soit M un A-module instable. Considérons l'extension

$$0 \to \Sigma P \otimes M \to \Sigma \hat{P} \otimes M \to M \to 0 .$$

Remarquons tout d'abord que puisque M est instable le sous-A-module $B(\Sigma \hat{P} \otimes M)$ de $\Sigma \hat{P} \otimes M$ (voir la définition 1.3) est en fait un sous A-module de $\Sigma P \otimes M$. Ensuite déstabilisons. On obtient la longue suite exacte:

$$\ldots \to D_1 M \to D(\Sigma P \otimes M) \to D(\Sigma \hat{P} \otimes M) \to DM \to 0 .$$

Par définition, l'application $\alpha_1^{\Sigma M}$ est le connectant de $D_1 M$ vers $D(\Sigma P \otimes M) = \Sigma P \otimes M$; on en déduit que l'image de $\alpha_1^{\Sigma M}$ est le sous A-module $B(\Sigma \hat{P} \otimes M)$ de $\Sigma P \otimes M$.

En tant que $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel, $B(\Sigma \hat{P} \otimes M)$ est engendré par les éléments de la forme $Sq^{|x|+1+i}(\Sigma u^{-1} \otimes x)$, $i \geqq 0$, x appartenant à M. D'après la formule

de Cartan, on a:

$$\begin{aligned} Sq^{|x|+1+i}(u^{-1}\otimes x) &= \sum_{j=0}^{|x|+1+i} Sq^{|x|+1+i-j}(u^{-1})\otimes Sq^j x \\ &= \sum_{j=0}^{|x|} Sq^{|x|+1+i-j}(u^{-1})\otimes Sq^j x \\ &= \sum_{j=0}^{|x|} u^{|x|+i-j}\otimes Sq^j x \\ &= u^i \cdot St_1 x. \end{aligned}$$

Le module $\Sigma^{-1}B(\Sigma\hat{P}\otimes M)$ s'identifie donc au sous-P-module de $P\otimes M$ engendré par les éléments $St_1 x$, x parcourant M, que l'on a noté $R_1 M$. On a obtenu:

Proposition 4.2.1.

(i) *L'image de $\alpha_1^{\Sigma M}$ est égale a $\Sigma R_1 M$.*

(ii) *Le module $R_1 M$ est un sous-A-module de $P\otimes M$.*

4.2.2. Avant d'énoncer la proposition suivante revenons un instant sur la définition même des foncteurs D_s.

Soient M un A-module (pas nécéssairement instable), C_* une $\mathcal{M}$-résolution libre de M, et $\tilde{C}_*$ le complexe augmenté correspondant; on a par définition $D_s M\simeq H_s D C_*$, $s\geqq 0$, ou encore $D_s M\simeq H_s D\tilde{C}_*$, $s\geqq 1$. La suite exacte de complexes:

$$0\to B\tilde{C}_*\to\tilde{C}_*\to D\tilde{C}_*\to 0,$$

où $\tilde{C}_*$ est acyclique, donne en homologie les isomorphismes $D_s M\simeq H_{s-1}B\tilde{C}_*$, $s\geqq 1$; on a en particulier $D_s M\simeq H_{s-1}B\tilde{W}_* M$, $s\geqq 1$, $W_* M$ désignant la bar-résolution de M.

Rappelons que la bar-résolution de M est définie comme suit:

$$W_s M = A\otimes I\otimes\ldots\otimes I\otimes M,\qquad I\ s\text{-fois};$$

dans cette formule, le produit tensoriel est celui des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels et I désigne l'idéal d'augmentation de A. La structure de A-module de $W_s(M)$ est donnée par

$$a.(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_s\otimes x) = a a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_s\otimes x;$$

le bord d_s: $W_s M\to W_{s-1}M$ est donné par

$$\begin{aligned} d_s(a_0\otimes\ldots\otimes x) = a_0 a_1\otimes a_2\otimes\ldots\otimes x + a_0\otimes a_1 a_2\otimes a_3\otimes\ldots\otimes x \\ +\ldots+ a_0\otimes\ldots\otimes a_{s-1}\otimes a_s x, \end{aligned}$$

et l'augmentation d_0: $W_0 M\to M$ est donnée par $d_0(a_0\otimes x)=a_0 x$.

Si $s=1$ et si M est instable on a la formule $D_1 M\simeq H_0 B\tilde{W}_* M = H_0 B W_* M$. On observera incidemment que le A-module $\Sigma^{-1}H_0 B W_* M$ est le A-module instable RM décrit par W.M. Singer [16].

Le calcul du point 4.2.1 nous donne:

Proposition 4.2.2. *Soient M un A-module instable et x un élément de M, alors $\Sigma u^i \cdot St_1 x$ est l'image par $\alpha_1^{\Sigma M}$ de l'élément de $D_1 M \simeq H_0 BW_* M$ représenté par le 0-cycle $Sq^{|x|+1+i} \otimes x$.*

Proposition 4.2.3. *Soit $\{x\}$ une $\mathbb{Z}/2$-base de M, alors $\{St_1 x\}$ est une P-base de $R_1 M$.*

Démonstration. Considérons une relation de dépendance $\sum_{x \in J} \lambda_x \cdot St_1 x = 0$, λ_x appartenant à P. Soit J_0 le sous-ensemble de J formé des éléments x de degré n_0 minimum. En projetant la somme précédente dans $P \otimes M^{n_0}$, on obtient $\sum_{x \in J_0} \lambda_x \cdot u^{n_0} \otimes x = 0$, ce qui montre que $\lambda_x = 0$ pour tout x de J_0. De proche en proche, $\lambda_x = 0$ pour tout x de J.

Corollaire 4.2.4. *Le foncteur R_1 est exact et commute aux limites inductives et projectives.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, l'application de $R_1 M$ dans $P \otimes \Phi M$ qui associe a $u^i \cdot St_1 x$ l'élément $u^i \otimes \Phi x$, est un isomorphisme de $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels.

Corollaire 4.2.5. *Soient M un A-module instable et M' un sous-A-module de M, alors on a:*

$$(R_1 M) \cap (P \otimes M') = R_1 M'.$$

Démonstration. Considérons la suite exacte $0 \to M' \to M \to M/M' \to 0$. D'après 4.2.4 et la définition du foncteur R_1, on a le diagramme commutatif où les lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R_1 M' & \longrightarrow & R_1 M & \longrightarrow & R_1(M/M') & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P \otimes M' & \longrightarrow & P \otimes M & \longrightarrow & P \otimes (M/M') & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

d'où le corollaire.

Définition-Proposition 4.2.6 (comparer avec [16] p. 55). *Soient M un A-module instable et x un élément de M; on note ρ_1^M ou simplement ρ_1 l'application $R_1 M \to \Phi M$ définie par:*

$$\rho_1(u^i St_1 x) = \begin{cases} \Phi x, & \text{si } i = 0 \\ 0; & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Cette application est A-linéaire et la suite suivante

$$0 \to u \cdot R_1 M \hookrightarrow R_1 M \xrightarrow{\rho_1} \Phi M \to 0$$

est exacte. La transformation naturelle $\rho_1 : R_1 \to \Phi$, définie ci-dessus, est l'unique qui fait commuter le diagramme suivant:

(*)
$$\begin{array}{ccccc} R_1 M & \xrightarrow{\rho_1^M} & \Phi M & \xrightarrow{Sq_0} & M \\ \downarrow & & & & \| \\ P \otimes M & & \xrightarrow{\varepsilon \otimes \mathrm{Id}} & & M \end{array}$$

ε: $P \to \mathbb{Z}/2$ *désignant l'augmentation.*

Démonstration. L'exactitude de la suite, la naturalité de ρ_1 et la commutativité du diagramme sont claires, il reste à montrer que ρ_1^M est A-linéaire et que la transformation naturelle ρ_1 est caractérisée par la commutativité du diagramme (*). Pour cela, on introduit le A-module instable $F(n) = D(\Sigma^n A)$ librement engendré par un générateur ι_n de degré n et le $\mathscr{U}$-morphisme f: $F(n) \to M$ tel que $x = f(\iota_n)$. Puisque Sq_0: $\Phi F(n) \to F(n)$ est injectif, $\rho_1^{F(n)}$ est A-linéaire; de même $\rho_1^{F(n)}$ est déterminé par la commutativité du diagramme (*). On achève par naturalité. On peut également montrer que ρ_1^M est A-linéaire en utilisant la surjectivité de $\alpha_1^{\Sigma M}$: $D_1 M \to \Sigma R_1 M$ (voir 4.2.1 (i)) et la commutativité du carré de droite dans le diagramme du lemme 4.2.8 ci-dessous.

Remarque 4.2.7. Soient M un A-module instable et x un élément de M. On a par définition: $St_1(\Sigma x) = \Sigma u \cdot St_1 x$, $R_1(\Sigma M) = \Sigma u \cdot R_1 M$.

4.2.8. Les suites exactes

$$0 \to u R_1 M \to R_1 M \xrightarrow{\rho_1} \Phi M \to 0$$

et

$$0 \to \Omega D_1 \Sigma M \to D_1 M \xrightarrow{\partial} \Omega_1 \Sigma M = \Sigma \Phi M \to 0,$$

introduites respectivement en 4.2.6 et 4.1, sont compatibles. Plus précisément

Lemme 4.2.8. *Le diagramme suivant, où les lignes sont exactes, est commutatif.*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega D_1 \Sigma M & \longrightarrow & D_1 M & \xrightarrow{\partial} & \Sigma \Phi M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \Omega \alpha_1^{\Sigma^2 M}} & & & & & & \\ & & \Omega \Sigma R_1 \Sigma M & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1^{\Sigma M}} & & \| & & \\ & & \| & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma u R_1 M & \longrightarrow & \Sigma R_1 M & \xrightarrow{\Sigma \rho_1} & \Sigma \Phi M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Démonstration. La commutativité du carré de gauche est claire. Soient x un élément de M et $\gamma_1 x$ l'élément de $D_1 M$ représenté par le 0-cycle $Sq^{|x|+1} \otimes x$ du complexe $BW_* M$, on vérifie la formule $\partial \gamma_1 x = \Sigma \Phi x$. Ceci montre que les $\gamma_1 x$ engendrent le conoyau de $\Omega D_1 \Sigma M \to D_1 M$. La commutativité du carré de droite résulte de la formule $\alpha_1^{\Sigma M} \gamma_1 x = \Sigma St_1 x$ (voir 4.2.2).

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.5 pour $s = 1$.

Théorème 4.2.9. *Soit M un A-module instable, l'application $\alpha_1^{\Sigma M}$ induit un isomorphisme de $D_1 M$ sur $\Sigma R_1 M$.*

Démonstration. On note F_1: $\mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ la restriction de D_1: $\mathscr{M} \rightsquigarrow \mathscr{U}$ à $\mathscr{U}$, et on pose $G_1 = \Sigma R_1$. On a vu en 4.2.1 (i) que l'application naturelle $\alpha_1^{\Sigma M}$: $D_1 M \to \Sigma P \otimes M$ induit une transformation naturelle, toujours notée α_1: $F_1 \to G_1$. Les points 4.2.7 et 4.2.8 montrent que F_1 et G_1 sont des Σ-foncteurs sans torsion et que les foncteurs induits $\bar{F}_1$ et $\bar{G}_1$ s'identifient à $\Sigma\Phi$ (les définitions relatives aux Σ-foncteurs sont données au paragraphe 3). Le lemme 4.2.8 dit que α_1 est une transformation naturelle de Σ-foncteurs et que la transformation naturelle induite $\bar{\alpha}_1$ est l'identité. Pour pouvoir appliquer le lemme de Nakayama pour les Σ-foncteurs (voir 3.2.1), il nous reste à vérifier que les foncteurs F_1 et G_1 sont à décroissance rapide. C'est clair pour G_1 puisque $|R_1 M| = 2|M|$, pour F_1 cela résulte du lemme suivant:

Lemme 4.2.10. *Soient M un A-module et $s \geqq 1$ un entier, alors*

$$|D_s M| \geqq 2|M| + 2s - 1.$$

Démonstration. Soient, comme en 4.2.2, C_* une $\mathscr{M}$-résolution libre de M et $\tilde{C}_*$ le complexe augmenté correspondant; pour tout $s \geqq 1$ $D_s M$ est isomorphe au groupe d'homologie $H_{s-1} B \tilde{C}_*$.

Par définition de la valuation et du foncteur B, on a:

(i) $|H_{s-1} B C_*| \geqq |B C_{s-1}|$.

(ii) $|B C_{s-1}| \geqq 2|C_{s-1}| + 1$.

En choisissant pour C une résolution minimale, on a $|C_{s-1}| \geqq |M| + s - 1$. On en déduit:

$$|D_s M| \geqq 2|M| + 2s - 1, \quad \text{pour tout } s \geqq 1.$$

Corollaire 4.2.11. *Soit M un A-module instable et $\{x\}$ une $\mathbb{Z}/2$-base de M, alors $\{Sq^{|x|+1+i} \otimes x,\ i \geqq 0\}$ est une $\mathbb{Z}/2$-base de $D_1 M$.*

Ce corollaire montre que le foncteur R_1 coïncide avec le foncteur R de W.M. Singer [16].

4.3. $GL_s(\mathbb{Z}/2)$-invariance de la classe de l'extension e^s

On démontre le lemme 2.2.2. On considère le groupe symétrique $\mathfrak{S}_s$ comme un sous-groupe de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ en le faisant agir sur $(\mathbb{Z}/2)^s$ par permutation des coordonnées. Soient ε_i, $1 \leqq i \leqq s$, la base canonique de $(\mathbb{Z}/2)^s$ et T l'automorphisme de $(\mathbb{Z}/2)^s$ défini par $T\varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $T\varepsilon_i = \varepsilon_i$ pour $i \geqq 2$. Le groupe $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ est engendré par $\mathfrak{S}_s$ et T. Il est clair que l'extension e^s est invariante par $\mathfrak{S}_s$; il reste à montrer qu'elle est invariante par T.

Pour faciliter l'exposition, nous précisions ci-dessous les notations P_s et e^s de 2.2 en $P_s(u_1, u_2, \ldots, u_s)$ et $e^s(u_1, u_2, \ldots, u_s)$. La classe de l'extension $e^s(u_1, u_2, \ldots, u_s)$ dans $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2, P_s(u_1, u_2, \ldots, u_s))$ est le produit de Yoneda des deux classes d'extensions suivantes:

– $\Sigma^{-1} e^{s-1}(u_2, \ldots, u_s)$ appartenant à $\mathrm{Ext}^{s-1}_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-s}\mathbb{Z}/2, \Sigma^{-1} P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s))$.

– $e^1(u_1) \otimes \mathrm{Id}_{P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s)}$ appartenant à $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-1} P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s), P_s(u_1, u_2, \ldots, u_s))$.

Il suffit donc de montrer que la classe de l'extension $e^1(u_1)\otimes \mathrm{Id}_{P_{s-1}(u_2,\ldots,u_s)}$ est invariante par T (Attention: $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ s'identifie à la base duale de $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_s\}$ si bien que l'on a $T^*u_2 = u_2 + u_1$ et $T^*u_i = u_i$ pour $i \geqq 2$); ceci résulte du lemme suivant:

Lemme 4.3. *Soient M un A-module et θ: $P\otimes M \to P\otimes M$ une application A-linéaire qui vérifie:*

(i) *θ est P-linéaire;*

(ii) *l'application $M\to M$ induite par θ est l'identité (M s'identifie au quotient $(P\otimes M)/u\cdot(P\otimes M)$).*

Alors, la classe de l'extension $e\otimes \mathrm{Id}_M$ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(\Sigma^{-1}M, P\otimes M)$ est invariante par θ.

Démonstration. Le point essentiel est que l'application $\hat{\mu}$: $\hat{P}\otimes P\to\hat{P}$, $u^k\otimes u^l \to u^{k+l}$ est A-linéaire. L'application $\hat{\theta}$: $\hat{P}\otimes M\to\hat{P}\otimes M$, définie par la composition

$$\hat{P}\otimes M \xrightarrow{\mathrm{Id}\hat{P}\otimes i} \hat{P}\otimes(P\otimes M) \xrightarrow{\mathrm{Id}\hat{P}\otimes\theta} \hat{P}\otimes(P\otimes M)\simeq(\hat{P}\otimes P)\otimes M \xrightarrow{\hat{\mu}\otimes \mathrm{Id}_M} \hat{P}\otimes M$$

où i désigne l'inclusion naturelle de M dans $P\otimes M$, fait commuter le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P\otimes M & \longrightarrow & \hat{P}\otimes M & \longrightarrow & \Sigma^{-1}M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\hat{\theta}} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & P\otimes M & \longrightarrow & \hat{P}\otimes M & \longrightarrow & \Sigma^{-1}M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

4.4. Retour sur les foncteurs R_s

4.4.1. Nous avons vu en 4.2.2 que si x est un élément d'un A-module instable M, alors $\Sigma St_1 x$ est l'image par $\alpha_1^{\Sigma M}$ de l'élément de $D_1 M \simeq H_0 B W_* M$ représenté par le 0-cycle $Sq^{|x|+1}\otimes x$. Plus généralement, on a:

Proposition 4.4.1. *Soit x un élément de degré n dans M, alors $\Sigma St_s x$ est l'image par $\alpha_s^{\Sigma M}$ de l'élément de $D_s\Sigma^{1-s}M$ représenté par le $(s-1)$-cycle de $B\tilde{W}_*(\Sigma^{1-s}M)$:*

$$Sq^{2^{s-1}n+1}\otimes\ldots\otimes Sq^{2^1 n+1}\otimes\ldots\otimes Sq^{n+1}\otimes\Sigma^{1-s}x.$$

Démonstration. Soit $e(\Sigma^{2-s}M)$ l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{M}}(\Sigma^{1-s}M, \Sigma^{2-s}P\otimes M)$ produit tensoriel de la classe e^e de 2.2 et de l'identité de $\Sigma^{2-s}M$. Cet élément est représenté par l'extension:

$$0\to\Sigma^{2-s}P\otimes M\to\Sigma^{2-s}\hat{P}\otimes M\to\Sigma^{1-s}M\to 0;$$

ou encore par l'application de complexes de degré -1: $W_*(\Sigma^{1-s}M)\to W_*(\Sigma^{2-s}P\otimes M)$ définie par:

$$A\otimes I^{k\otimes}\otimes\Sigma^{1-s}M\to A\otimes I^{(k-1)\otimes}\otimes\Sigma^{2-s}P\otimes M,$$
$$\theta\otimes\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_k\otimes\Sigma^{1-s}x\mapsto\theta\otimes\alpha_1\otimes\ldots\otimes\alpha_{k-1}\otimes[\sigma\alpha_k(\Sigma^{1-s}x)+\alpha_k(\sigma\Sigma^{1-s}x)]$$

σ: $\Sigma^{1-s}M\to\Sigma^{2-s}\hat{P}\otimes M$ désignant la section ensembliste: $\Sigma^{1-s}x\to\Sigma^{2-s}u^{-1}\otimes x$.

A partir de maintenant, pour faciliter l'exposition, on précise les notations $e(\Sigma^{2-s}M)$ et P utilisées ci-dessus en $e(u;\Sigma^{2-s}M)$ et $P(u)$, et la notation α_s^M de 2.3.1 en $\alpha_s^M(u_1,\ldots,u_s)$.

Notons $\gamma_s x$ le $(s-1)$-cycle de $B\tilde{W}_*\Sigma^{1-s}M$ qui apparaît dans la proposition 4.4.1. De ce qui précède, on déduit que le cap-produit par $e(u_s;\Sigma^{2-s}M)$ de $D_s(\Sigma^{1-s}M)$ vers $D_{s-1}(\Sigma^{2-s}P(u_s)\otimes M)$ envoie l'élément représenté par $\gamma_s x$ sur l'élément représenté par le $(s-2)$-cycle $\gamma_{s-1}(St_1(u_s;x))$ de $B\tilde{W}_*(\Sigma^{2-s}P(u_s)\otimes M)$. La démonstration de la proposition 4.4.1 se fait par récurrence à partir de la formule:

$$\alpha_s^{\Sigma M}(u_1,\ldots,u_s)=\alpha_{s-1}^{\Sigma P(u_s)\otimes M}(u_1,\ldots,u_{s-1})\circ(\text{cap-produit par } e(u_s;\Sigma^{2-s}M))$$

qui résulte de l'associativité du cap-produit (voir 2.1).

D'après 4.4.1 et 2.2.2, on a:

Corollaire 4.4.2. *Soit M un A-module instable. Les sous-espaces St_sM et R_sM sont contenus dans $L_s\otimes M$.*

4.4.3. *Formule de Cartan.*

Lemme 4.4.3. *Soient M_1 et M_2 deux A-modules instables, on note par un . le produit: $(P_s\otimes M_1)\otimes(P_s\otimes M_2)\to P_s\otimes(M_1\otimes M_2)$ induit par le produit de P_s. Soient x_1 dans M_1 et x_2 dans M_2, alors:*

$$St_s(x_1\otimes x_2)=St_sx_1\cdot St_sx_2.$$

Démonstration. Par récurrence sur s. Pour $s=1$, c'est la formule de Cartan.

Ce lemme montre que le produit . se restreint en un produit

$$R_sM_1\otimes R_sM_2\to R_s(M_1\otimes M_2).$$

4.4.4. *Foncteur R_s et suspension*

Rappelons que l'on note w_{2^s-1} l'élément de L_s produit de toutes les formes linéaires non nulles en $u_1,\ldots,u_s$ (voir en 2.4.2 une justification de cette notation).

Lemme 4.4.4. *Soient M un A-module instable et x un élément de M, alors $St_s(\Sigma x)=\Sigma w_{2^s-1}\cdot St_sx$; $R_s(\Sigma M)$ coïncide avec $\Sigma w_{2^s-1}R_sM$.*

Démonstration. D'après la formule de Cartan, il suffit de prouver $St_s(\Sigma\iota)=\Sigma w_{2^s-1}$, ι désignant le générateur de $\mathbb{Z}/2$.

On a vu en 4.2.7 que si x est un élément d'un A-module instable M, alors $St_1(\Sigma x)=\Sigma u\cdot St_1x$. Il en résulte que $\Sigma^{-1}St_s(\Sigma\iota)$ est un élément de P_s, de degré

2^s-1, divisible par u_1. D'autre part, d'après 4.4.2, cet élément est invariant sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$, il coïncide donc avec w_{2^s-1}.

Proposition 4.4.5. *Soit $\{x\}$ une $\mathbb{Z}/2$-base de M, alors $\{St_s x\}$ est un système P_s-libre de $P_s \otimes M$.*

Démonstration. Considérons une relation de dépendance $\sum_{x\in J} \lambda_x \cdot St_s x = 0$, λ_x appartenant à P_s. Soit J_0 le sous-ensemble de J formé des éléments x de degré n_0 minimum. Soit $M_{>n_0}$ (resp. $M_{\geqq n_0}$) le sous-A-module de M formé des éléments de degré $>n_0$ (resp. $\geqq n_0$). On a $\sum_{x\in J_0} \lambda_x \cdot St_s(\bar{x}) = 0$, $\bar{x}$ désignant la projection de x dans $M/M_{>n_0}$ qui appartient en fait au sous-module $M_{\geqq n_0}/M_{>n_0}$. Le A-module $\Sigma^{-n_0} M_{\geqq n_0}/M_{>n_0}$ est un A-module instable concentré en degré zéro; on a donc:

$$\begin{aligned} St_s(\bar{x}) &= \Sigma^{n_0} w_{2^s-1}^{n_0} St_s(\Sigma^{-n_0}\bar{x}) \quad \text{(d'après 4.4.4)} \\ &= w_{2^s-1}^{n_0} \otimes \bar{x}. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lambda_x = 0$ pour tout x de J_0 et, de proche en proche, $\lambda_x = 0$ pour tout x de J.

Une conséquence de cette proposition est que si $\{x\}$ est une $\mathbb{Z}/2$-base d'un A-module instable M, alors $\{St_s x\}$ est une L_s-base de $R_s M$: c'est le point (ii) de 2.4.1.

4.4.6. *Comparaison des foncteurs R_s et $R_1 R_{s-1}$.*

Dans ce sous-paragraphe, on précisera, si nécessaire, les notations P, P_s, L_s, $R_s M$ en $P(u)$, $P_s(u_1, u_2, \ldots, u_s)$, $L_s(u_1, u_2, \ldots, u_s)$, $R_s(u_1, u_2, \ldots, u_s; M)$.

Proposition 4.4.6.1 (comparer avec [17] prop. 3.1). *Soit M un A-module instable. Pour tout $s \geqq 1$, $R_s M$ est un sous-A-module de $P_s \otimes M$, et on a:*

$$(*) \qquad R_s M = (L_s \otimes M) \cap R_1(u_1; R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M)).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur s. On a vu en 4.2.1 (ii) que $R_1 M$ est un sous-A-module de $P \otimes M$ (la formule $(*)$ est triviale pour $s=1$). L'induction de $s-1$ à s se fait de la façon suivante. On suppose que l'on sait que $R_{s-1} M$ est un sous-A-module de $P_{s-1} \otimes M$; on montre alors la formule $(*)$ au rang s, et de cette formule on déduit que $R_s M$ est un sous-A-module de $P_s \otimes M$. Voici les détails. On suppose donc que $R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M)$ est un sous-A-module de $P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M)$. D'après la définition des foncteurs R_1 et R_{s-1} et la formule de Cartan pour St_1, on a: $R_1(u_1; R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M) \subset P_s \cdot St_s(M)$. Or, 4.4.2 et 4.4.5 montrent que:

$$\begin{aligned} (L_s \otimes M) \cap (P_s \cdot St_s(M)) &= L_s \cdot St_s(M) \\ &= R_s M \quad \text{par définition;} \end{aligned}$$

d'où l'inclusion $R_s M \supset (L_s \otimes M) \cap R_1(u_1; R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M))$. Inversement, on a vu en 4.4.2 l'inclusion $R_s M \subset L_s \otimes M$ et, pour montrer $R_s M$

$\subset R_1(u_1; R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M)$ il suffit de prouver $L_s \subset R_1(u_1; L_{s-1}(u_2, \ldots, u_s))$. Ceci résulte de la formule 4.4.6.4 ci-dessous.

Lemme 4.4.6.2. *Soit T le sous-groupe de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ formé des automorphismes de $(\mathbb{Z}/2)^s$ fixant les $s-1$ derniers vecteurs de la base canonique; $R_1(u_1; P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s))$ est le sous-module de P_s^T de P_s formé des éléments invariants par T.*

Démonstration. L'inclusion $R_1(u_1; P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s)) \subset P_s^T$ est claire puisque les éléments u_1 et $St_1(u_1; u_i) = u_i(u_1 + u_i)$, $2 \leqq i \leqq s$, qui engendrent $R_1(u_1; P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s))$ en tant qu'algèbre, sont invariants par T (rappelons que $\{u_1, u_2, \ldots, u_s\}$ s'identifie à la base duale de la base canonique de $(\mathbb{Z}/2)^s$).

On note $\pi: P_s \to P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s)$ l'application: $F \mapsto F(0, u_2, \ldots, u_s)$. L'image par π de P_s^T est contenue dans les carrés. En effet, pour tout F de P_s, on a la congruence:

$$F(u_1, \ldots, u_i + u_1, \ldots, u_s) - F(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_s) \equiv u_1 \frac{\partial F}{\partial u_i} \pmod{u_1^2}.$$

Il en résulte que si F est invariant par T, alors u_1 divise $\dfrac{\partial F}{\partial u_i}$, $2 \leqq i \leqq s$, et que par conséquent $F(0, u_2, \ldots, u_s)$ est un carré.

D'après 4.2.6, on a le diagramme commutatif suivant où les lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & u_1 R_1 P_{s-1} & \hookrightarrow & R_1 P_{s-1} & \xrightarrow{\rho_1} & \Phi P_{s-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & u_1 \cdot P_s^T & \hookrightarrow & P_s^T & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \Phi P_{s-1} & &
\end{array}$$

$\tilde{\pi}$ désignant l'unique application $P_s^T \to \Phi P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s)$ telle que $\pi = Sq_0 \circ \tilde{\pi}$. On conclut à l'aide du lemme ci-dessous, analogue au lemme de Nakayama, dont la démonstration ne présente pas de difficultés.

Lemme 4.4.6.3 (lemme de Nakayama gradué). *Soit U une indéterminée a laquelle on attribue un degré strictement positif. Soient M_1, M_2 deux $\mathbb{Z}/2[U]$-modules gradués et $f: M_1 \to M_2$ une application $\mathbb{Z}/2[U]$-linéaire de degré 0. On suppose que M_1 et M_2 sont bornés inférieurement* (i.e. *$M_1^n = 0$ et $M_2^n = 0$ pour n assez négatif*) *et que M_2 est sans torsion (i.e. la multiplication par U dans M_2 est injective); alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathbb{Z}/2 \underset{\mathbb{Z}/2[U]}{\otimes} f$ en est un.*

Le lemme 4.4.6.2 se généralise de la façon suivante. On note V le sous-espace de $(\mathbb{Z}/2)^s$ engendré par les $s-1$ derniers vecteurs de la base canonique. Soient Γ un sous-groupe de $GL(V)$ et $T(\Gamma)$ le sous-groupe de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ formés des automorphismes de $(\mathbb{Z}/2)^s$ qui préservent V et dont la restriction à V appartient à Γ. Rappelons que Γ opère sur $P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s)$ via l'identification $P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s) \simeq H^*(V; \mathbb{Z}/2)$. La formule ci-dessous est une conséquence du lemme 4.4.6.2 et du corollaire 4.2.4 (le foncteur R_1 commute aux limites projectives et donc en particulier aux invariants pour l'action d'un groupe).

Scholie 4.4.6.4. *En notant* $(\ )^G$ *les invariants par un groupe* G, *on a la formule:*

$$R_1(u_1; (P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s))^\Gamma) \simeq P_s^{T(\Gamma)}.$$

4.4.7. *Comparaison des foncteurs* R_s *et* ΦR_{s-1}.

On va généraliser 4.2.6.

Définition-Proposition 4.4.7. *Il existe une unique transformation naturelle* $\rho_s: R_s \to \Phi R_{s-1}$ *qui vérifie les propriétés suivantes:*

(i) *Soient* i *une injection de* $(\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ *dans* $(\mathbb{Z}/2)^s$ *et* $i^*: P_s \to P_{s-1}$ *l'application induite en cohomologie modulo 2. Pour tout* A*-module instable* M, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccccc} R_sM & \xrightarrow{\rho_s} & \Phi R_{s-1}M & \xrightarrow{Sq_0} & R_{s-1}M \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ P_s \otimes M & & \xrightarrow{i^* \otimes \mathrm{Id}} & & P_{s-1} \otimes M. \end{array}$$

(ii) *Pour tous* A*-modules instables* M_1 *et* M_2, *le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} R_sM_1 \otimes R_sM_2 & \xrightarrow{\rho_s^{M_1} \otimes \rho_s^{M_2}} & (\Phi R_{s-1}M_1) \otimes (\Phi R_{s-1}M_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R_s(M_1 \otimes M_2) & \xrightarrow{\rho_s^{M_1 \otimes M_2}} & \Phi R_{s-1}(M_1 \otimes M_2), \end{array}$$

les flèches verticales correspondant au produit considéré en 4.4.3.

(iii) *Soit* M *un* A*-module instable,* $\Phi R_{s-1}M$ *est un* L_s*-module via l'homomorphisme d'algèbre* $\rho_s^{\mathbb{Z}/2}: L_s \simeq R_s\mathbb{Z}/2 \to \Phi R_{s-1}\mathbb{Z}/2 \simeq \Phi L_{s-1}$. *L'application* ρ_s^M *est* L_s*-linéaire et* $\rho_s(St_s x) = \Phi St_{s-1} x$ *pour tout* x *de* M.

(iv) *Pour tout* A*-module instable* M, *la suite suivante est exacte:*

$$0 \to w_{2^{s-1}} R_sM \to R_sM \xrightarrow{\rho_s} \Phi R_{s-1}M \to 0.$$

Démonstration. On prend pour $\rho_s^M: R_sM \to \Phi R_{s-1}M$ la restriction de l'application $\rho_1^{R_{s-1}M}: R_1R_{s-1}M \to \Phi R_{s-1}M$ définie en 4.2.6 (on a vu précédemment que R_sM est un sous-A-module de $R_1R_{s-1}M$).

Pour vérifier (i), on peut supposer que i envoie la base canonique de $(\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ sur les $s-1$ derniers vecteurs de la base canonique de $(\mathbb{Z}/2)^s$ puisque l'action naturelle de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ sur les injections de $(\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ dans $(\mathbb{Z}/2)^s$ est transitive et que R_sM est contenu dans $L_s \otimes M$. On applique alors 4.2.6. De même, il suffit de vérifier (ii) pour $s=1$, ce qui est immédiat. La formule $\rho_s(St_s x) = \Phi St_{s-1} x$ est également immédiate et la L_s-linéarité de ρ_s^M est un cas particulier de (ii).

On observe que $\rho_s^{\mathbb{Z}/2}$ est bien déterminé par (i) puisque $Sq_0: \Phi L_{s-1} \to L_{s-1}$ est injectif. Comme R_sM est engendré par les $St_s x$, l'application ρ_s^M est

caractérisée par (iii). En fait, la transformation naturelle ρ_s est caractérisée par (i); pour s'en convaincre, il suffit, comme en 4.2.6, de prendre pour M le A-module instable libre $F(n)$, dans ce cas $Sq_0\colon \Phi R_{s-1}F(n)\to R_{s-1}F(n)$ est injectif (voir 4.6).

Vérification de (iv). On vient de voir qu'en tant qu'application L_s-linéaire ρ_s^M s'identifie au produit tensoriel de $\rho_s^{\mathbb{Z}/2}$ et de l'identité de $\Phi^s M$ (Φ^s désigne le s-ème itéré de Φ); il suffit donc de démontrer (iv) pour $M=\mathbb{Z}/2$. D'après 4.2.6, on a $\ker \rho_s^{\mathbb{Z}/2}=u_1 R_1(u_1; L_{s-1}(u_2,\ldots,u_s))\cap L_s$; or un élément de L_s est divisible par u_1 si et seulement s'il est divisible par $w_{2^{s-1}}$, d'où $\ker \rho_s = w_{2^{s-1}}L_s$. Il reste à prouver que $\rho_s^{\mathbb{Z}/2}$ est surjective. La méthode de démonstration que nous allons employer va du même coup nous permettre de retrouver le résultat de L.E. Dickson cité en 2.4.2.

Comme on va parler simultanément de L_s et L_{s-1}, on précise ci-dessous la notation w_j de 2.4.2 en $w_{j,s}$. On vérifie:

$$i^* w_{j,s}=\begin{cases} w_{j/2,s-1}^2, & \text{si } j\equiv 0\ (2)\\ 0, & \text{si } j\equiv 1\ (2)\end{cases}$$

formule qui, d'après (i), implique la suivante:

$$\rho_s(w_{j,s})=\begin{cases} \Phi w_{j/2,s-1}, & \text{si } j\equiv 0\ (2)\\ 0, & \text{si } j\equiv 1\ (2).\end{cases}$$

Soit $w'_{2^s-2^k,s}$, $0\leqq k<s$, une indéterminée à laquelle on attribue le degré 2^s-2^k; on pose $L'_s=\mathbb{Z}/2[w'_{2^s-1,s},\ldots,w'_{2^s-2^k,s},\ldots,w'_{2^{s-1},s}]$ et on note $\lambda_s\colon L'_s\to L_s$ l'application d'algèbres définie par $\lambda_s(w'_{2^s-2^k,s})=w_{2^s-2^k,s}$. On note $\rho'_s\colon L'_s\to \Phi L'_{s-1}$ l'application d'algèbres définie par:

$$\rho'_s(w'_{2^s-2^k,s})=\begin{cases} \Phi w'_{2^{s-1}-2^{k-1}}, & \text{si } k>0\\ 0, & \text{si } k=0.\end{cases}$$

Par construction, le diagramme suivant, où les lignes sont exactes, est commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & w'_{2^s-1,s}L'_s & \longrightarrow & L'_s & \xrightarrow{\rho'_s} & \Phi L'_{s-1} & \longrightarrow & 0\\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_s} & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_s} & & \downarrow{\scriptstyle \Phi\lambda_{s-1}} & & \\ 0 & \longrightarrow & w_{2^s-1,s}L_s & \longrightarrow & L_s & \xrightarrow{\rho_s} & \Phi L_{s-1}. & & \end{array}$$

On raisonne par récurrence sur s. L'hypothèse de récurrence est que λ_{s-1} est un isomorphisme; on en déduit que ρ_s est surjective et que λ_s est un isomorphisme d'après le lemme de Nakayama gradué (4.4.6.3).

4.5. Démonstration du théorème 2.5

La démonstration se fait en deux parties. Dans la première, on montre que l'image de $\alpha_s^{\Sigma M}$ est contenue dans $\Sigma R_s M$, et dans la seconde que $\alpha_s^{\Sigma M}$ est un isomorphisme sur $\Sigma R_s M$.

4.5.1. *L'image de $\alpha_s^{\Sigma M}$ est contenue dans $\Sigma R_s M$.*

On procède par récurrence sur s. Pour $s=0$, le résultat est évident; pour $s=1$, il s'agit du point (i) de 4.2.1. On note $e(u_1; \Sigma^{2-s}M)$ l'élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(\Sigma^{1-s}M, \Sigma^{2-s}P(u_1)\otimes M)$ produit tensoriel de l'élément $e(u_1)$ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{M}}(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2; P(u_1))$ et de l'identité de $\Sigma^{2-s}M$; on note $e^{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M)$ l'élément de $\mathrm{Ext}^{s-1}_{\mathscr{M}}(\Sigma^{1-s}M; P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s)\otimes M)$ produit tensoriel de l'élément $e^{s-1}(u_2, \ldots, u_s)$ de $\mathrm{Ext}^{s-1}_{\mathscr{M}}(\Sigma^{1-s}\mathbb{Z}/2, P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s))$ et de l'identité de M. L'associativité du cap-produit (voir 2.1) montre que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} D_s\Sigma^{1-s}M & \xrightarrow{\cap e^{s-1}(u_2,\ldots,u_s;M)} & D_1(P_{s-1}(u_2,\ldots,u_s)\otimes M) \\ \downarrow{\scriptstyle \cap e(u_1;\Sigma^{2-s}M)} & \searrow^{\alpha_s^{\Sigma M}} & \downarrow{\scriptstyle \alpha_1^{\Sigma P_{s-1}(u_2,\ldots,u_s)\otimes M}(u_1)} \\ D_{s-1}(\Sigma^{2-s}P(u_1)\otimes M) & \xrightarrow[\alpha_{s-1}^{\Sigma P(u_1)\otimes M}(u_2,\ldots,u_3)]{} & \Sigma P_s(u_1,u_2,\ldots,u_s)\otimes M. \end{array}$$

La factorisation de $\alpha_s^{\Sigma M}$ correspondant au triangle supérieur donne l'inclusion $\mathrm{Im}\,\alpha_s^{\Sigma M} \subset \Sigma R_1(u_1; P_{s-1}(u_2, \ldots, u_s)\otimes M)$. La factorisation correspondant au triangle inférieur et l'hypothèse de récurrence donnent $\mathrm{Im}\,\alpha_s^{\Sigma M} \subset \Sigma R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; P(u_1)\otimes M)$; la définition du foncteur R_s et la formule de Cartan montrent l'inclusion

$$R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; P(u_1)\otimes M) \subset P(u_1)\otimes R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M).$$

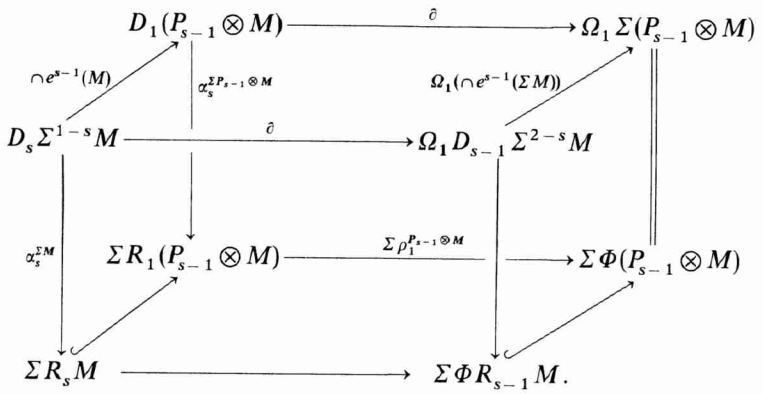
A l'aide de 4.2.5, on obtient $\mathrm{Im}\,\alpha_s^{\Sigma M} \subset \Sigma R_1(u_1; R_{s-1}(u_2, \ldots, u_s; M))$. Enfin, le lemme 2.2.2 montre l'inclusion $\mathrm{Im}\,\alpha_s^{\Sigma M} \subset \Sigma L_s \otimes M$. On conclut, grâce à la formule (*) de 4.4.6.1.

4.5.2. *L'application $\alpha_s^{\Sigma M}$ est un isomorphisme sur $\Sigma R_s M$*

On commence par montrer que les suites exactes introduites respectivement en 4.1 et 4.4.7(iv) sont compatibles, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif:

$$(*)\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega D_s\Sigma^{2-s}M & \longrightarrow & D_s\Sigma^{1-s}M & \xrightarrow{\partial} & \Omega_1 D_{s-1}\Sigma^{2-s}M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_s^{\Sigma^2 M}} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_s^{\Sigma M}} & & \downarrow{\scriptstyle \Omega_1\alpha_{s-1}^{\Sigma M}} & & \\ & & \Omega\Sigma R_s M & = & \Omega_1\Sigma R_{s-1}M & = & & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma w_{2^s-1}R_s M & \longrightarrow & \Sigma R_s M & \xrightarrow{\Sigma\rho_s} & \Sigma\Phi R_{s-1}M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

La commutativité du carré de gauche est «routine». Pour démontrer celle du carré de droite, on introduit le «cube» suivant:



La commutativité de la face avant du cube est conséquence de celle des cinq autres faces. Les faces supérieure et arrière commutent respectivement d'après les lemmes 4.1 et 4.2.8; la commutativité des trois autres faces est claire.

On achève la démonstration du théorème 2.5 comme en 4.2.9. On note F_s: $\mathscr{U}\rightsquigarrow\mathscr{U}$ la restriction de $D_s\Sigma^{1-s}$: $\mathscr{M}\rightsquigarrow\mathscr{U}$ à $\mathscr{U}$ et on pose $G_s=\Sigma R_s$. On a vu en 4.5.1 que l'application naturelle $\alpha_s^{\Sigma M}$: $D_s\Sigma^{1-s}M\to\Sigma P_s\otimes M$ induit une transformation naturelle, toujours notée α_s: $F_s\to G_s$. Les points 4.1, 4.4.4 et 4.4.7(iv) montrent que F_s et G_s sont des Σ-foncteurs sans torsion et que, pour $s\geqq 1$, les foncteurs induits $\bar{F}_s$ et $\bar{G}_s$ s'identifient respectivement à $\Omega_1 F_{s-1}$ et $\Omega_1 G_{s-1}$ (les définitions relatives aux Σ-foncteurs sont données au paragraphe 3). La commutativité du diagramme (*) ci-dessus signifie que α_s est une transformation naturelle de Σ-foncteurs et que la transformation naturelle induite $\bar{\alpha}_s$ s'identifie à $\Omega_1\alpha_{s-1}$. Enfin les foncteurs F_s et G_s sont à décroissance rapide si $s\geqq 1$; pour F_s cela résulte du lemme 4.2.10, et pour G_s de la formule $|R_sM|=2^s\cdot|M|$.

Ces points acquis, on procède par récurrence sur s: il est trivial que α_0 est une équivalence et l'induction de $s-1$ à s se fait par le lemme de Nakayama pour les Σ-foncteurs (voir 3.2.1).

4.6. Calcul de $D_s\Sigma^{-s}M$, M instable

Définition 4.6.1. On dit qu'un A-module instable M est Sq_0-projectif si l'application Sq_0 de ΦM dans M est injective, autrement dit si $\Omega_1 M=0$.

On vérifie que si M_1 et M_2 sont deux A-modules instables et Sq_0-projectifs, alors le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}/2$, $M_1\otimes M_2$, muni de l'action «diagonale» de A est Sq_0-projectif. On vérifie également qu'un sous-A-module d'un Sq_0-projectif est Sq_0-projectif. Il en résulte que si M est un A-module instable Sq_0-projectif, alors R_sM est Sq_0-projectif.

La suite exacte courte naturelle définie dans 4.1 s'écrit compte tenu du théorème 2.5:

$$0\to R_sM\to D_s\Sigma^{-s}M\to\Omega_1 D_{s-1}\Sigma^{1-s}M\to 0.$$

On vérifie que la composition $R_sM \to D_s\Sigma^{-s}M \xrightarrow{\alpha_s^M} P_s\otimes M$ est l'inclusion naturelle. Cette suite permet d'avoir, par récurrence sur s, le résultat suivant:

Proposition 4.6.2. *Soit M un A-module instable Sq_0-projectif, alors l'application α_s^M induit un isomorphisme de $D_s\Sigma^{-s}M$ sur R_sM pour tout $s\geqq 0$.*

Plus généralement, soit $\hat{R}_sM$ le sous-A-module de $P_s\otimes M$ défini par $w_{2^s-1}\cdot\hat{R}_sM=(R_sM)\cap w_{2^s-1}(P_s\otimes M)$, on montre par une démonstration analogue à celle du théorème 2.5:

Proposition 4.6.3. *Soit M un A-module instable, alors l'application α_s^M induit un isomorphisme de $D_s\Sigma^{-s}M$ sur $\hat{R}_sM$ pour tout $s\geqq 0$.*

5. Exemples et applications

5.1. $D_2\Sigma^t\mathbb{Z}/2$, $t\geqq -1$

L'isomorphisme $D_2\Sigma^t\mathbb{Z}/2\simeq H_1BW_*(\Sigma^t\mathbb{Z}/2)$ montre que $D_2\Sigma^t\mathbb{Z}/2$ s'identifie au quotient $\mathscr{Z}/\mathscr{B}$, $\mathscr{Z}$ et $\mathscr{B}$ désignant les sous-A-modules de $I\otimes I$ (ici l'action de A sur $I\otimes I$ est donnée par $\theta\cdot(\theta'\otimes\theta'')=\theta\cdot\theta'\otimes\theta''$) définis ci-dessous; $\mathscr{Z}$ est constitué des éléments $\sum_i\theta_i'\otimes\theta_i''$ tels que:

(i) $\sum_i\theta_i'\theta_i''=0$;

(ii) $\theta_i'\in B(|\theta_i''|+t)$, $B(n)$ désignant pour tout entier naturel n l'idéal $\Sigma^{-n}B(\Sigma^nA)$ de A (notation de [18]);

$\mathscr{B}$ quant à lui est le $\mathbb{Z}/2$-sous-espace engendré par les éléments de la forme:

$$\theta'\alpha\otimes\theta''-\theta'\otimes\alpha\theta'' \quad \text{avec } \theta'\in B(|\alpha|+|\theta''|+t).$$

Soit (a,b) un couple d'entiers naturels avec $a<2b$; on considère la relation d'Adem $Sq^aSq^b+\sum_i C_{b-1-i}^{a-2i}Sq^{a+b-i}Sq^i=0$ et on pose:

$$R(a,b)=Sq^a\otimes Sq^b+\sum_i C_{b-1-i}^{a-2i}Sq^{a+b-i}\otimes Sq^i.$$

Si a et b satisfont en outre l'inégalité $b\leqq a$, alors $R(a,b)$ est un 1-cycle du complexe $BW_*(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2)$ et représente donc un élément, noté encore $R(a,b)$, de $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$. Soit α_2 l'isomorphisme de $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$ sur ΣL_2. On vérifie:

(i) $\Sigma^{-1}\alpha_2(R(a,b))\equiv w_3^{a-b}w_2^{2b-a-1}\pmod{w_3^{a-b+1}L_2}$, $b\leqq a<2b$;

(ii) $\Sigma^{-1}\alpha_2(R(2^k,2^k))=\dfrac{u_1^{2^{k+1}-1}+u_2^{2^{k+1}-1}}{u_1+u_2}$

formules qui ont pour conséquence:

Proposition 5.1. (i) *Les éléments $R(a,b)$, $b\leqq a\leqq 2b$, constituent une $\mathbb{Z}/2$-base de $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$.*

(ii) *Les éléments $R(2^k,2^k)$, $k\geqq 0$, constituent un A-système générateur minimal de $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$.*

5.2. Les relations de Browder

Quand on étudie l'invariant de Kervaire de certaines données de chirurgie, on est amené à considérer les relations $\sum_{i=1}^{n+1} C^{n+1}_{2n+2-i} Sq^i \chi Sq^{2n+2-i} = 0$, $n \geqq 0$, où $\chi: A \to A$ est la conjugaison canonique. En conjugant ces relations par χ, on obtient les relations:

$$\sum_{i=1}^{n+1} C^{n+1}_{2n+2-i} Sq^{2n+2-i} \chi Sq^i = 0,$$

qui sont de la forme considérée en 5.1.

On note b_{2n} le 1-cycle $\sum_{i=1}^{n+1} C^{n+1}_{2n+2-i} Sq^{2n+2-i} \otimes \chi Sq^i$ de $BW_*(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2)$. On vérifie la formule:

$$\Sigma^{-1}\alpha_2(b_{2n}) = \begin{cases} \dfrac{u_1^{2^{k+1}-1} + u_2^{2^{k+1}-1}}{u_1 + u_2}, & \text{si } n+1 = 2^k,\ k \geqq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Grâce au théorème 2.5, on obtient donc le résultat suivant que l'on peut considérer comme un analogue algébrique du résultat de Brumfiel-Madsen-Milgram concernant l'image réciproque des classes de Kervaire par l'application $G \to G/\mathrm{TOP}$ [3].

Proposition 5.2. *La classe de b_{2n} dans $D_2\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2$ est non triviale si et seulement si $n+1$ est une puissance de 2; dans ce cas, cette classe est égale à celle de la «relation d'Adem» $R(n+1, n+1)$.*

5.3. Comparaison entre les groupes $\mathbb{Z}/2 \otimes_A L_s$ et $\mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$

Si M est A-module tel que $M^n = 0$, pour $n \leqq 0$, alors $B(M)$ est contenu dans IM et on a une application naturelle de $D(M)$ vers $\mathbb{Z}/2 \otimes_A M$, ou encore de $\mathbb{Z}/2 \otimes_A D(M)$ vers $\mathbb{Z}/2 \otimes_A M$. On en déduit plus généralement que, sous les mêmes hypothèses, il existe une application naturelle $\mathbb{Z}/2 \otimes_A D_s \Sigma^{-s} M \to \mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbb{Z}/2, M)$. En particulier, si l'on prend $M = \Sigma\mathbb{Z}/2$, on obtient, compte tenu du théorème 2.5, une application de degré $-s$: $\mathbb{Z}/2 \otimes_A L_s \to \mathrm{Tor}^A_{s,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ (comparer avec [6]). Cette application est intimement reliée à l'homomorphisme d'Hurewicz modulo 2: $\pi^S_* = \pi_* \Omega^\infty S^\infty \to H_*(\Omega^\infty S^\infty; \mathbb{Z}/2)$ ([9, 10]). On vérifie par inspection:

Proposition 5.3. (i) *L'application naturelle $\mathbb{Z}/2 \otimes_A L_1 \to \mathrm{Tor}^A_{1,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

(ii) *L'application naturelle $\mathbb{Z}/2 \otimes_A L_2 \to \mathrm{Tor}^A_{2,*}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ est injective et son image est l'orthogonal du sous-espace de $\mathrm{Ext}^{2,*}_A(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$ engendré par les $h_i h_j$, avec $j \geqq i+2$.*

5.4. Calcul des $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{M}}(\ , K)$ lorsque K est $\mathscr{U}$-injectif

5.4.1. Soient M un A-module et K un A-module instable. Lorsque K est un injectif de la catégorie $\mathscr{U}$, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^s_{\mathscr{M}}(M, K) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s M, K)$

est un isomorphisme. Cet isomorphisme est en fait l'une des motivations de l'étude des $D_s M$. Plus généralement, il existe une suite spectrale de terme $E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{\mathscr{U}}^p(D_q M, K)$ convergeant vers $\mathrm{Ext}_{\mathscr{M}}^{p+q}(M, K)$ [8].

Notons $c^s(M, K)$ (ou tout simplement c^s s'il n'y a pas de doute quant au choix de M et K) la composition:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{M}}^s(\Sigma^{-s} M, K) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathscr{M}}^s(\Sigma^{1-s} M, \Sigma K)$$
$$\to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s \Sigma^{1-s} M, \Sigma K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma R_s M, \Sigma K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_s M, K),$$

qui est aussi la composition:

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{M}}^s(\Sigma^{-s} M, K) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s \Sigma^{-s} M, K) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_s M, K),$$

où la deuxième flèche est celle induite par l'inclusion de $R_s M$ dans $D_s \Sigma^{-s} M$ (voir 4.6).

Proposition 5.4.1. *Soient M et K deux A-modules instables. Pour tout $s \geqq 0$, l'application $c^s(M, K)$: $\mathrm{Ext}_A^{s,s}(M, K) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_s M, K)$ est un isomorphisme dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

(i) *ΣK $\mathscr{U}$-injectif;*

(ii) *M Sq_0-projectif et K $\mathscr{U}$-injectif.*

(Rappelons que $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, K)$ est la notation usuelle pour $\mathrm{Ext}_{\mathscr{M}}^s(\Sigma^{-t} M, K)$.)

Démonstration. Le point (i) est clair; (ii) résulte du fait que l'inclusion de $R_s M$ dans $D_s \Sigma^{-s} M$ est un isomorphisme si M est Sq_0-projectif (voir 4.6.2).

Voici des exemples de $\mathscr{U}$-injectifs et d'applications de ce qui précède.

5.4.2. Le A-module $\mathbb{Z}/2$ est $\mathscr{U}$-injectif; en effet, pour tout A-module instable M, on a: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, \mathbb{Z}/2) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2}(M^0, \mathbb{Z}/2)$.

Plus généralement, considérons le foncteur H_n de $\mathscr{U}$ vers la catégorie des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels défini par $H_n M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2}(M^n, \mathbb{Z}/2)$. Ce foncteur H_n est exact à droite et transforme somme directe en produit, il est donc représentable: il existe un unique A-module instable $J(n)$ tel que: $H_n M = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, J(n))$.

Le foncteur H_n est aussi exact à gauche, ce qui montre que $J(n)$ est $\mathscr{U}$-injectif.

Pour décrire la relation qui existe entre $J(n)$ et la cohomologie modulo 2 du n-ème spectre de Brown-Gitler [1], on a besoin d'introduire la définition du dual d'un A-module.

Définition 5.4.3. Soit M un A-module. On appelle dual de M et on note M^* le A-module défini par:

$$\begin{cases} (M^*)^{-p} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}/2}(M^p, \mathbb{Z}/2), & p \in \mathbb{Z} \\ \theta \cdot f = f \circ (\chi\theta), & f \in M^* \text{ et } \theta \in A, \end{cases}$$

χ: $A \to A$ désignant la conjugaison canonique.

Proposition 5.4.4 (H. Miller [14]). *Pour tout entier n, $\Sigma^{-n} J(n)$ est le dual du quotient de A par l'idéal à gauche engendré par les $\chi(Sq^i)$, $2i > n$.*

Démonstration. Soit M un A-module instable, on a les isomorphismes:

$$H_n M \simeq (M^*)^{-n} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(A, \Sigma^n M^*).$$

Notons $L(n)$ le quotient de A par l'idéal à gauche engendré par les $\chi(Sq^i)$, $2i > n$. L'application naturelle de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(L(n), \Sigma^n M^*)$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(A, \Sigma^n M^*)$ est un isomorphisme à cause de l'instabilité de M. On a donc:

$$H_n M \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(L(n), \Sigma^n M^*) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(M, \Sigma^n L^*(n)).$$

On vérifie que le A-module $\Sigma^n L^*(n)$ est instable, ce qui montre $J(n) = \Sigma L^*(n)$.

Revenons à nos calculs de groupes $\mathrm{Ext}_A^{s,t}$.

Puisque $J(2n)$ est $\mathscr{U}$-injectif, on a l'isomorphisme:

$$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{Z}/2, J(2n)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/2, J(2n)) = H_{2n}(D_s \Sigma^{-t} \mathbb{Z}/2).$$

Par dualité, on obtient que $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(L(2n), \mathbb{Z}/2)$ est isomorphe à $(D_s \Sigma^{-t+2n} \mathbb{Z}/2)^{2n}$ sous-espace des éléments de degré $2n$ de $D_s \Sigma^{-t+2n} \mathbb{Z}/2$. Pour $t - s \leqq 2n$, on retrouve des résultats de Brown-Gitler [1, 2, 12].

5.4.5. Passons à des exemples plus sophistiqués de $\mathscr{U}$-injectifs. Le A-module P se décompose en la somme directe $\mathbb{Z}/2 \oplus \bar{P}$, $\bar{P}$ désignant le sous-A-module de P formé des éléments de degré positif. Dans [4], G. Carlsson introduit un module X_1 limite projective des $J(2^q)$, $q \geqq 0$, et montre que $\bar{P}$ est facteur direct dans X_1.

Soit $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ une suite exacte dans $\mathscr{U}$. Par définition de X_1, on a la suite exacte:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M'', X_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, X_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M', X_1) \to \varprojlim_q{}^1 \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M'', J(2^q)).$$

Lorsque M'' est graduellement fini (c'est-à-dire $\dim_{\mathbb{Z}/2}(M'')^n < +\infty$ pour tout n) on a $\varprojlim_q{}^1 \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M'', J(2^q)) = 0$, par conséquent $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{U}}(M'', X_1) = 0$. Tout A-module M'' monogène est graduellement fini puisqu'il est ainsi pour $F(n)$; donc, dans ce cas, $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{U}}(M'', X_1) = 0$. Une démonstration analogue à celle de [5] page 8, montre que X_1 est $\mathscr{U}$-injectif (cette démonstration de la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{U}}(M'', X_1)$ sans restriction sur M'' est due à O. Gabber). Il en résulte que $\bar{P}$ et P sont $\mathscr{U}$-injectifs.

Plus généralement, G. Carlsson montre que $X_1 \otimes \ldots \otimes X_1$ (k-fois) est limite projective de modules $J(n)$ convenablement choisis, ce qui montre que $X_1 \otimes \ldots \otimes X_1$ (k-fois) est $\mathscr{U}$-injectif. Il en résulte que si V est un 2-groupe abélien élémentaire (V de la forme $(\mathbb{Z}/2)^k$), alors la cohomologie modulo 2 de V, notée H^*V, est un $\mathscr{U}$-injectif. Cette observation est due à H. Miller [14].

Le module $\Sigma H^* V$ est également $\mathscr{U}$-injectif. Ceci résulte par exemple du lemme suivant dont la démonstration est immédiate.

Lemme 5.4.6. *Soit K un A-module $\mathscr{U}$-injectif, on a:*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{U}}(M, \Sigma K) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Omega_1 M, K).$$

En particulier, si K est Sq_0-projectif, alors ΣK est $\mathscr{U}$-injectif.

5.4.7. *La conjecture de G. Segal pour les 2-groupes abéliens élémentaires (forme faible).*

La $\mathscr{U}$-injectivité de ΣH^*V et notre théorie permettent d'avoir une solution de la conjecture de G. Segal pour les 2-groupes abéliens élémentaires (forme faible) dont on va donner les points algébriques essentiels. La terminologie, forme faible, forme forte, est introduite dans le premier paragraphe; les références sont, pour la forme faible [11] (dim $V=1$) et [4] (cas général), pour la forme forte [20] (le cas dim $V=1$ de la forme forte est également implicite dans [11]). Plus généralement, le rapport entre le théorème 2.5 et la suite spectrale d'Adams est analysé dans [9] et [10].

Proposition 5.4.7.1. *Soit M un A-module instable, V un 2-groupe abélien élémentaire, et t et s deux entiers vérifiant $t-s<0$; alors*

$$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, H^*V)=0.$$

Démonstration. Comme H^*V est $\mathscr{U}$-injectif, on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, H^*V)=\mathrm{Ext}_{\mathscr{U}}^{s}(\Sigma^{-t}M, H^*V)&\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s\Sigma^{-t}M, H^*V)\\ &\wr\\ &\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s\Sigma^{1-s}(\Sigma^{s-t-1}M), H^*V)\\ &\wr\\ &\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma R_s(\Sigma^{s-t-1}M), H^*V).\end{aligned}$$

Pour tout A-module instable N, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Sigma N, H^*V)=0$ puisque les applications Sq^n: $H^nV\to H^{2n}V$ et Sq^n: $(\Sigma N)^n\to(\Sigma N)^{2n}$ sont respectivement injective et triviale.

Proposition 5.4.7.2. *Soient V un 2-groupe abélien élémentaire, s un entier $\geqq 0$ et $\mathscr{E}^s(V)$ l'ensemble des sous-espaces de V de codimension inférieure ou égale à s. Le groupe $\mathrm{Ext}_A^{s,s}(\mathbb{Z}/2, H^*V)$ s'identifie au $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de base $\mathscr{E}^s(V)$, noté $\mathbb{Z}/2[\mathscr{E}^s(V)]$.*

Démonstration. D'après la proposition 5.4.1 (i) ou (ii), on a:

$$\mathrm{Ext}_A^{s,s}(\mathbb{Z}/2, H^*V)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_s\mathbb{Z}/2, H^*V).$$

Puisque H^*V est $\mathscr{U}$-injectif et que $R_s\mathbb{Z}/2=L_s$ est le sous-module de P_s formé des invariants sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_s\mathbb{Z}/2, H^*V)$ s'identifie aux co-invariants de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(P_s, H^*V)$ sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$. D'après le corollaire A.2.3 de l'appendice, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(P_s, H^*V)$ est isomorphe au $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel $\mathbb{Z}/2[\mathscr{L}(V, (\mathbb{Z}/2)^s)]$ de base l'ensemble $\mathscr{L}(V, (\mathbb{Z}/2)^s)$ des applications linéaire de V dans $(\mathbb{Z}/2)^s$. Or, le quotient de l'ensemble $\mathscr{L}(V, (\mathbb{Z}/2)^s)$ par l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ est $\mathscr{E}^s(V)$.

Soit V un 2-groupe abélien élémentaire. On note B_+V la réunion disjointe d'un classifiant de V et d'un point base, et $\{B_+V, S^0\}$ le groupe des classes d'homotopie d'applications stable de B_+V dans S^0.

Proposition 5.4.7.3. *La suite spectrale d'Adams en cohomologie modulo 2 pour le groupe* $\{B_+ V, S^0\}$ *dégénère:* $E_r^{s,s} \simeq E_2^{s,s}$ *pour tout* $r \geqq 2$ *et tout* $s \geqq 0$.

La démonstration de la proposition ci-dessus est fondées sur le lemme suivant:

Lemme 5.4.7.4. *Soient* M *et* N *deux* A*-modules instables et* h_0 *le générateur de* $\mathrm{Ext}_A^{1,1}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2)$. *Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_A^{s,s}(M,N) & \xrightarrow{c^s} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_s M, N) \\ \downarrow{\scriptstyle h_0 \cdot} & & \downarrow{\scriptstyle \mu^*} \\ \mathrm{Ext}_A^{s+1,s+1}(M,N) & \xrightarrow{c^{s+1}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_{s+1} M, N), \end{array}$$

où μ désigne la composition $R_{s+1}M \xrightarrow{\rho_s} \Phi R_s M \xrightarrow{Sq_0} R_s M$, et $h_0 \cdot$ le produit externe par h_0.

Démonstration de la proposition 5.4.7.3 en assumant le lemme 5.4.7.4

Observons tout d'abord que si N est Sq_0-projectif (resp. N est une suspension) alors l'application μ^* est injective (resp. triviale). On prend $M = \mathbb{Z}/2$ et $N = H^*V$ d'après la proposition 5.4.1 (i) ou (ii), les applications c^s et c^{s+1} sont des isomorphismes. Comme H^*V est Sq_0-projectif, on en déduit que le produit par h_0 est injectif sur la colonne $t-s=0$ au niveau E_2. En prenant $M = \mathbb{Z}/2$ et $N = \Sigma H^* V$, on a, toujours d'après la proposition 5.4.1 (i), que les applications c^s et c^{s+1} sont des isomorphismes. Dans ce cas, l'application μ^* est triviale et par conséquent le produit par h_0 est trivial sur la colonne $t-s=1$ au niveau E_2. Il en résulte que ce produit est encore trivial sur la colonne $t-s=1$ au niveau E_r, $r \geqq 2$. Ce qui précède et la proposition 5.4.7.1 montrent que $E_r^{s,s} \simeq E_2^{s,s}$ pour tout $r \geqq 2$ et tout $s \geqq 0$.

Démonstration du lemme 5.4.7.4. Soit $\varepsilon: P \to \mathbb{Z}/2$ l'augmentation. L'élément h_0 est relié à l'élément e de 2.2 par la formule $h_0 = \varepsilon_*(e)$. On désigne par $h_0(M)$ l'élément de $\mathrm{Ext}_{\mathscr{U}}^1(\Sigma^{-(s+1)}M, \Sigma^{-s}M)$ produit tensoriel de h_0 et de l'identité de $\Sigma^{-s}M$. L'associativité du cap-produit (voir 2.1) montre que le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}_A^{s,s}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_s \Sigma^{-s} M, N) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\cap h_0(M))^*} \\ \mathrm{Ext}_A^{s+1,s+1}(M,N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(D_{s+1} \Sigma^{-(s+1)} M, N), \end{array}$$

$\cap h_0(M)$: $D_{s+1}\Sigma^{-(s+1)}M \to D_s \Sigma^{-s} M$ désignant le cap-produit par $h_0(M)$. Il suffit donc de montrer que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} R_{s+1} M & \longrightarrow & D_{s+1} \Sigma^{-(s+1)} M \\ \downarrow{\scriptstyle \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \cap h_0(M)} \\ R_s M & \longrightarrow & D_s \Sigma^{-s} M. \end{array}$$

Ceci résulte du point (i) de 4.4.7 et de la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc} D_{s+1}\Sigma^{-(s+1)}M & \xrightarrow{\alpha_{s+1}^{M}} & P_{s+1}\otimes M = P\otimes(P_s\otimes M) \\ \downarrow{\scriptstyle \cap h_0(M)} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\otimes 1} \\ D_s\Sigma^{-s}M & \xrightarrow{\alpha_s^{M}} & P_s\otimes M = \mathbb{Z}/2\otimes(P_s\otimes M) \end{array}$$

qui est la conséquence de la définition de α_s en termes de cap-produit (voir 2.3.1), de l'associativité de ce cap-produit (voir 2.1), et de la formule:

$$h_0(M)\cup e^s(M) = (\varepsilon\otimes 1)_* e^{s+1}(M).$$

5.4.7.5. *Remarque.* Soient V et W deux 2-groupes abéliens élémentaires. Pour calculer $\{B_+V, S^nB_+W\}$, $n\geqq 0$, on est amené à calculer les $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*W, H^*V)$, $t-s\leqq 0$. D'après la proposition 5.4.7.1, le groupe $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(H^*W, H^*V)$ est trivial si $t-s<0$. D'après la proposition 5.4.1 (i) ou (ii), on a l'isomorphisme:

$$\mathrm{Ext}_A^{s,s}(H^*W, H^*V)\simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(R_sH^*W, H^*V).$$

D'autre part, le lemme 5.4.7.4 montre comme précédemment que la suite spectrale d'Adams en cohomologie modulo 2 pour le groupe $\{B_+V, B_+W\}$ dégénère: $E_r^{s,s}\simeq E_2^{s,s}$ pour tout $r\geqq 2$ et tout $s\geqq 0$.

Le calcul de R_sH^*W se fait par récurrence sur s à l'aide de 4.4.6.1. et 4.4.6.4. On obtient que R_sH^*W est le sous-module de $H^*((\mathbb{Z}/2)^s\oplus W)$ des invariants sous l'action du sous-groupe de $GL((\mathbb{Z}/2)^s\oplus W)$ formé des automorphismes qui induisent l'identité sur W. On en déduit la valeur des $\mathrm{Ext}_A^{s,s}(H^*W, H^*V)$.

Appendice

Cohomologie modulo 2 des 2-groupes abeliens élémentaires et produits tensoriels

Jean Lannes

Soient V un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de dimension finie et M un A-module instable; on note H^*V la cohomologie modulo 2 du groupe V. L'objet de cet appendice est de montrer que le foncteur: $M\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^*V)$ est compatible, en un sens à préciser, avec les produits tensoriels de A-modules instables.

A.1. Détermination de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1\otimes M_2, H^*V)$

Si M est engendré, en tant que A-module, par un nombre fini d'éléments, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^*V)$ est un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de dimension finie. Plus généralement, puisque tout M est limite inductive de ses sous-modules engendrés par un nombre fini d'éléments, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^*V)$ est un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel profini c'est-à-dire une limite projective de $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels de

dimension finie. Nous notons $\mathscr{I}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels profinis et les morphismes les applications linéaires continues pour la topologie profinie; $M \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, H^*V)$ est donc un foncteur contravariant de $\mathscr{U}$ vers $\mathscr{I}$.

A.1.1. Quelques remarques et définitions relatives à la catégorie des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels profinis

La catégorie $\mathscr{I}$ n'est pas autre chose que la catégorie opposée, noté $\mathscr{E}^0$, de la catégorie $\mathscr{E}$ des $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels. En effet, les foncteurs $\mathscr{I} \rightsquigarrow \mathscr{E}^0$ et $\mathscr{E} \rightsquigarrow \mathscr{I}^0$, qui associent respectivement à un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel profini E son dual topologique $E' = \mathrm{Hom}_{\mathscr{I}}(E, \mathbb{Z}/2)$ et à un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel F son dual algébrique $F^* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(F, \mathbb{Z}/2)$ (F^* est profini puisque F est limite inductive de ses sous-espaces de dimension finie) sont inverses l'un de l'autre.

Définition A.1.1. Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels profinis, on note $E_1 \hat{\otimes} E_2$ le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel profini $(E'_1 \otimes E'_2)^*$. L'espace $E_1 \hat{\otimes} E_2$ possède la propriété universelle suivante: l'application bilinéaire naturelle $\beta: E_1 \times E_2 \to E_1 \hat{\otimes} E_2$ est continue et toute application bilinéaire continue b de $E_1 \times E_2$ dans un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel profini E_3 se factorise de façon unique en $b = b' \circ \beta$ avec b' linéaire continue: $E_1 \hat{\otimes} E_2 \to E_3$.

A.1.2. Soient M_1, M_2 deux A-modules instables. L'application bilinéaire:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1, H^*V) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_2, H^*V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, H^*V)$$

induite par le produit $H^*V \otimes H^*V \to H^*V$ est continue, elle définit donc une application naturelle, linéaire continue, notée μ_{M_1, M_2}:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1, H^*V) \hat{\otimes} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_2, H^*V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, H^*V).$$

Théorème A.1.2. *Pour tous A-modules instables M_1, M_2, l'application naturelle μ_{M_1, M_2}: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1, H^*V) \hat{\otimes} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_2, H^*V) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M_1 \otimes M_2, H^*V)$ est un isomorphisme.*

La démonstration de ce théorème va nous occuper jusqu'a la fin du paragraphe A.1. Introduisons tout d'abord la définition classique suivante:

Définition A.1.3. On appelle A-algèbre instable un objet K qui possède les propriétés suivantes:

($\mathscr{K}$.1) K est une algèbre graduée ($K = \{K^n\}_{n \in \mathbb{N}}$) sur le corps $\mathbb{Z}/2$ qui est associative commutative et unitaire.

($\mathscr{K}$.2) K est un A-module instable et le produit: $K \otimes K \to K$ est A-linéaire.

($\mathscr{K}$.3) Le «cup-carré» dans K coïncide avec l'opération Sq_0.

Les A-algèbres instables sont les objets d'une catégorie, notée $\mathscr{K}$, dont les morphismes sont les applications de degré zéro, A-linéaires, compatibles avec produit et unité.

Soit K une A-algèbre instable graduellement finie (i.e. $\dim K^n < \infty$ pour tout n), on pose $T(M) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, K)$. Comme dans le cas où $K = H^*V$:

– $T(M)$ est un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel profini;

– Le produit: $K \otimes K \to K$ induit une application linéaire continue: $T(M_1) \hat{\otimes} T(M_2) \to T(M_1 \otimes M_2)$ toujours notée μ_{M_1, M_2}.

Nous notons $T'(M)$ le dual topologique de $T(M)$; T' est un foncteur covariant de $\mathscr{U}$ vers $\mathscr{E}$. D'après ce qu'on a rappelé en A.1.1, $T(M)$ est le dual algébrique de $T'(M)$ et il revient au même de considérer T ou T', d'étudier μ_{M_1, M_2} ou l'application «duale» notée μ'_{M_1, M_2}: $T'(M_1 \otimes M_2) \to T'(M_1) \otimes T'(M_2)$.

Nous notons $\mathscr{C}_K$ la classe des A-modules instables C tels que $\mu'_{C, M}$ (ou $\mu_{C, M}$) est un isomorphisme pour tout A-module instable M. Il nous faut donc démontrer que la classe $\mathscr{C}_{H^* V}$ contient tous les A-modules instables.

On vérifie sans difficultés que la classe $\mathscr{C}_K$ possède les propriétés suivantes:

(i) $\mathbb{Z}/2$ appartient à $\mathscr{C}_K$.

(ii) Si C_1 et C_2 appartiennent à $\mathscr{C}_K$, alors il en est de même pour $C_1 \otimes C_2$.

(iii) Soit $\{C_i\}_{i \in I}$ une famille dans $\mathscr{C}_K$, alors $\bigoplus_{i \in I} C_i$ est encore dans $\mathscr{C}_K$.

(iv) Soit $C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ une suite exacte dans $\mathscr{U}$; si C_1 et C_2 sont dans $\mathscr{C}_K$, alors il en est de même pour C_3.

(v) Soit $0 \to C_1 \to C_2 \to C_3 \to 0$ une suite exacte dans $\mathscr{U}$; si C_1 et C_3 sont dans $\mathscr{C}_K$ et si de plus l'application $T' C_1 \to T' C_2$ est injective, alors C_2 est aussi dans $\mathscr{C}_K$.

Lemme A.1.4. *On suppose que K possède la propriété suivante:*

($\mathscr{P}_1$) Pour tout A-module instable M, l'application Sq_0: $\Phi M \to M$ induit un isomorphisme: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi M, K)$.

Alors, la classe $\mathscr{C}_K$ vérifie en outre:

(vi) *Si C appartient à $\mathscr{C}_K$, alors il en est de même pour ΦC.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si ($\mathscr{P}_1$) est vérifiée, alors l'application $T'(Sq_0 \otimes 1)$: $T'(\Phi C \otimes M) \to T'(C \otimes M)$ est un isomorphisme. Pour cela on considère l'application Sq_0: $\Phi(C \otimes M) \to C \otimes M$ comme la composition:

$$\Phi C \otimes \Phi M \xrightarrow{1 \otimes Sq_0} \Phi C \otimes M \xrightarrow{Sq_0 \otimes 1} C \otimes M.$$

Puisque l'application $T'(Sq_0)$ est bijective, les applications $T'(1 \otimes Sq_0)$ et $T'(Sq_0 \otimes 1)$ sont respectivement injective et surjective; en remplaçant C par M et M par ΦC on voit que $T'(1 \otimes Sq_0)$ est également surjective d'où le résultat.

Scholie A.1.5. *Si K possède la propriété ($\mathscr{P}_1$), alors $\mathscr{C}_K$ vérifie également:*

(vii) *Si C appartient à $\mathscr{C}_K$, alors il en est de même pour $(C^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}$, $C^{n\otimes}$ désignant le produit tensoriel de n exemplaires de $C (n \geqq 1)$ et $(C^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}$ le sous-A-module de $C^{n\otimes}$ formé des éléments invariants sous l'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opérant par permutation des facteurs.*

De plus, l'isomorphisme $T'(C^{n\otimes}) \simeq (T' C)^{n\otimes}$ induit un isomorphisme $T'(C^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n} \simeq ((T'(C)^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}$.

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas $n=2$. Soit C un élément de $\mathscr{C}_K$; d'après (ii) et (iv), le module $(C \otimes C)_{\mathfrak{S}_2}$ des coïnvariants de l'action de $\mathfrak{S}_2$ sur $C \otimes C$ est aussi dans $\mathscr{C}_K$. En outre l'isomorphisme $T'(C \otimes C) \simeq T' C \otimes T' C$ induit

un isomorphisme $T'(C\otimes C)_{\mathfrak{S}_2}\simeq(T'C\otimes T'C)_{\mathfrak{S}_2}$. La deuxième puissance extérieure de C, notée $\Lambda^2 C$, appartient également à $\mathscr{C}_K$. En effet, $\Lambda^2 C$ est le conoyau de l'injection A-linéaire, notée i: $\Phi C\to(C\otimes C)_{\mathfrak{S}_2}$, $\Phi x\mapsto x\otimes x$. D'autre part, la condition ($\mathscr{K}$.3) vérifiée par K implique la commutativité du diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} T'\Phi C & \xrightarrow{T'i} & T'(C\otimes C)_{\mathfrak{S}_2} \\ \downarrow{\scriptstyle T'Sq_0} & & \downarrow \wr \\ T'C & \xrightarrow{j} & (T'C\otimes T'C)_{\mathfrak{S}_2} \end{array}$$

j désignant l'injection: $u\mapsto u\otimes u$. Ce diagramme montre que $T'\Lambda^2 C$ est naturellement isomorphe au conoyau de j, c'est-à-dire $\Lambda^2 T'C$. On applique ensuite (v) à la suite exacte naturelle:

$$0\to\Lambda^2 C\xrightarrow{\text{Norme}}(C\otimes C)^{\mathfrak{S}_2}\to\Phi C\to 0,$$

l'injectivité T'(Norme) résultat de celle de la norme: $\Lambda^2 T'C\to(T'C\otimes T'C)^{\mathfrak{S}_2}$. On en déduit que $(C\otimes C)^{\mathfrak{S}_2}$ appartient à $\mathscr{C}_K$. Cette suite exacte montre par ailleurs que $T'(C\otimes C)^{\mathfrak{S}_2}$ est naturellement isomorphe à $(T'C\otimes T'C)^{\mathfrak{S}_2}$.

Venons-en maintenant au cas général. Si C appartient à $\mathscr{C}_K$, alors il en est de même pour $(C^{n\otimes})^{\mathfrak{D}_n}$, $\mathfrak{D}_n$ désignant un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathfrak{S}_n$. En effet, quand n est une puissance de 2, $\mathfrak{D}_n$ est un produit en couronne itéré $\mathfrak{S}_2\int\mathfrak{S}_2\int\ldots\int\mathfrak{S}_2$ n fois et on «itère» le cas $n=2$; en général, si n s'écrit $2^{p_1}+2^{p_2}+\ldots+2^{p_r}$ avec $p_1<p_2<\ldots<p_r$, $\mathfrak{D}_n$ est un produit $\mathfrak{D}_{2p_1}\times\mathfrak{D}_{2p_2}\times\ldots\times\mathfrak{D}_{2p_r}$, et on utilise (ii).

On termine en remarquant que $(C^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}$ est facteur direct dans $(C^{n\otimes})^{\mathfrak{D}_n}$. On montre l'isomorphisme $T'(C^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}\simeq((T'C)^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}$ par la même méthode.

A.1.6. Soient M_1, M_2 deux A-modules instables; on note ν_{M_1,M_2}: $\Omega M_1\otimes\Phi M_2\to\Omega(M_1\otimes M_2)$ l'application naturelle induite par $1\otimes Sq_0$: $M_1\otimes\Phi M_2\to M_1\otimes M_2$.

On considère l'espace vectoriel K^1 formé des éléments de degré 1 de K comme un A-module concentré en degré zéro, K^1 s'identifie au sous A-module de ΩK formé des éléments de degré zéro. On note enfin η: $K^1\otimes\Phi K\to\Omega K$ la composition suivante:

$$K^1\otimes\Phi K\to\Omega K\otimes\Phi K\xrightarrow{\nu_{K,K}}\Omega(K\otimes K)\xrightarrow{\Omega\varphi}\Omega K,$$

φ désignant le produit de K.

Lemme A.1.6. *On suppose qu'en plus de* ($\mathscr{P}_1$) K *possède en outre la propriété suivante:*

($\mathscr{P}_2$) *Pour tout* A*-module instable* M, *l'application:*

$$K^1\otimes\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(M,K)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi M,K^1\otimes\Phi K)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi M,\Omega K)$$

induite par η *est un isomorphisme.*

Alors, la classe $\mathscr{C}_K$ *vérifie:*

(viii) $F(1)$ *appartient à* $\mathscr{C}_K$.

(Rappelons que $F(n)$ désigne le A-module instable librement engendré par un générateur ι_n de degré n.)

Démonstration. L'espace $T(F(1))$ est par définition K^1 qui est de dimension finie, on peut donc considérer $\mu_{F(1),M}$ comme une application $K^1 \otimes T(M) \to T(F(1)\otimes M)$. On se propose de construire une application naturelle ρ: $T(F(1)\otimes M)\to K^1\otimes T(M)$ qui soit une rétraction injective de $\mu_{F(1),M}$. On prend pour ρ la composition suivante (on abrège la notation $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\ ,\ )$ en $[\ ,\ ]$):

$$[F(1)\otimes M, K] \xrightarrow{\Omega} [\Omega(F(1)\otimes M), \Omega K] \xrightarrow{\nu^*_{F(1),M}} [\Phi M, \Omega K] \simeq K^1 \otimes [M, K]$$

($\Omega F(1) = F(0) = \mathbb{Z}/2$ et $\nu_{F(1),M}$ est bien une application $\Phi M \to \Omega(F(1)\otimes M)$).

Il est clair que $\rho \circ \mu_{F(1),M}$ est l'identité de $K^1\otimes T(M)$. D'autre part, si K possède $(\mathscr{P}_1)$, on peut montrer que ρ est injective de la façon suivante. Soit f un élément du noyau de ρ et g: $F(1)\otimes \Phi M \to K$ la composition $f\circ(1\otimes Sq_0)$, alors, par définition de ρ, $g(\iota_1\otimes\Phi M)=0$; or $\iota_1\otimes\Phi M$ engendre $F(1)\otimes\Phi M$ comme A-module, donc g est nulle et il en est de même pour f puisque, comme on l'a vu en A.1.4, $T(1\otimes Sq_0)$ est injective.

Lemme A.1.7. *Une classe de A-modules instables qui possède les propriétés* (i), (iii), (iv), (vii) *et* (viii) *contient tous les A-modules instables.*

Démonstration. Soit $n\geqq 1$ un entier, l'application $F(n)\to F(1)^{n\otimes}$ qui envoie ι_n sur $\iota_1\otimes\iota_1\otimes\ldots\otimes\iota_1$ induit un isomorphisme de $F(n)$ sur $(F(1)^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}$. Ce résultat, classique, se démontre aisément par récurrence sur n. Précisons un peu. Posons $F'(n)=(F(1)^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n}$ et notons γ_n: $F(n)\to F'(n)$ l'application définie ci-dessus; l'induction de $n-1$ à n se fait en contemplant le diagramme commutatif ci-dessous dont les lignes sont exactes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Phi F(n) & \xrightarrow{Sq_0} & F(n) & \longrightarrow & \Sigma F(n-1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \Phi\gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_n} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma\gamma_{n-1}} & & \\
0 & \longrightarrow & \Phi F'(n) & \xrightarrow{Sq_0} & F'(n) & \longrightarrow & \Sigma F'(n-1) & &
\end{array}$$

Ceci montre qu'une classe qui vérifie (i), (vii) et (viii) contient $F(n)$ pour tout $n\geqq 0$. Si de plus, elle vérifie (iii), elle contient tout A-module instable libre. Si enfin elle vérifie (iv), alors elle contient tout A-module instable.

A.1.8. Pour que la démonstration du théorème A.1.2 soit complète, il suffit de montrer:

Lemme A.1.8. *L'algèbre H^*V possède les propriétés $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.*

Démonstration. En associant à un élément F de H^nV, qui est un polynôme homogène de degré n sur V, sa différentielle dF, qui est un élément de $V^*\otimes H^{n-1}V$, on définit une application de degré 0, notée d: $H^*V\to \Sigma V^*\otimes H^*V$. Cette application est A-linéaire. On vérifie en effet que d n'est pas autre chose que la composition:

$$H^*V \xrightarrow{\psi} H^*V\otimes H^*V \xrightarrow{k\otimes 1} \Sigma V^*\otimes H^*V,$$

où ψ désigne le coproduit induit par l'addition de V et k: $H^*V \to \Sigma V^*$ l'application A-linéaire de degré 0 qui en degré 1 coïncide avec l'isomorphisme $H^1 V \simeq V^*$. Un polynôme F est un carré si et seulement si $dF=0$, autrement dit, la suite:

$$(1) \qquad 0 \to \Phi H^*V \xrightarrow{Sq_0} H^*V \xrightarrow{d} \Sigma V^* \otimes H^*V$$

est exacte, ou encore l'application $\tilde{d}$: $\Omega H^*V \to V^* \otimes H^*V$ adjointe de d est injective.

De même, soit d_2 la composition suivante:

$$H^*V \xrightarrow{d} (\Sigma V^*) \otimes H^*V \xrightarrow{1 \otimes d} (\Sigma V^*) \otimes (\Sigma V^* \otimes H^*V) = \Sigma^2 V^* \otimes V^* \otimes H^*V$$

(d_2 est la différentielle seconde, son image est en fait contenue dans $\Sigma^2 \Lambda^2 V^* \otimes H^*V$).

Soit $\tilde{d}_2$: $\Omega H^*V \to \Sigma V^* \otimes V^* \otimes H^*V$ l'adjointe de d_2; on a $\tilde{d}_2 = (1 \otimes d) \circ \tilde{d}$ et puisque $\tilde{d}$ est injective, la détermination du noyau de d implique celle du noyau de $\tilde{d}_2$. On vérifie que la suite suivante est exacte:

$$(2) \qquad 0 \to V^* \otimes \Phi H^*V \xrightarrow{\eta} \Omega H^*V \xrightarrow{d_2} \Sigma V^* \otimes V^* \otimes H^*V.$$

Pour conclure, on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi M,)$ aux suites exactes (1) et (2) ci-dessus. Or (même notation qu'en A.1.6):

$$\begin{aligned}[\Phi M, \Sigma V^* \otimes H^*V] &= V^* \otimes [\Phi M, \Sigma H^*V] = V^* \otimes [\Omega \Phi M, H^*V] \\ &= V^* \otimes [\Sigma \Phi \Omega M, H^*V] = 0;\end{aligned}$$

donc $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi M, Sq_0)$ est un isomorphisme, ce qui implique $(\mathscr{P}_1)$ (on utilise l'isomorphisme $[\Phi M, \Phi H^*V] \simeq [M, H^*V]$). De même, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\Phi M, \eta)$ est un isomorphisme: $(\mathscr{P}_2)$ est vérifiée.

A.1.9. Remarques sur la démonstration du théorème A.1.2

A.1.9.1. Si l'on suppose que le A-module instable K est injectif, comme c'est le cas pour H^*V, alors il est immédiat que $\mathscr{C}_K$ vérifie (vii).

A.1.9.2. On note δ_i, $i \geqq 1$, les générateurs des primitifs de $A(|\delta_i| = 2^i - 1)$; alors les propriétés $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ sont respectivement équivalentes à l'exactitude des suites suivantes:

$$0 \to K^n \xrightarrow{Sq_0} K^{2n} \xrightarrow{\prod_i \delta_i} \prod_i K^{2n+2^i-1} \qquad (Sq_0 y = y^2)$$

$$0 \to K^1 \otimes K^n \xrightarrow{\eta} K^{2n+1} \xrightarrow{\prod_{i<j} \delta_i \delta_j} \prod_{i<j} K^{2n+2^i+2^j-1} \qquad (\eta(x \otimes y) = xy^2)$$

A.1.9.3. Disons qu'une A-algèbre instable graduellement finie K possède la propriété $(\mathscr{P}_3)$ si μ_{M_1, M_2} est un isomorphisme pour tous M_1, M_2. La propriété $(\mathscr{P}_3)$ implique que le A-module instable K est Sq_0-projectif. Pour s'en convain-

cre, il suffit de considérer le diagramme commutatif ci-dessous (voir A.1.5):

$$\begin{array}{ccc} T'\Phi\Sigma\mathbb{Z}/2 & \xrightarrow{\sim} & T'(\Sigma\mathbb{Z}/2\otimes\Sigma\mathbb{Z}/2)_{\mathfrak{S}_2} \\ \downarrow{\scriptstyle T'Sq_0=0} & & \downarrow{\scriptstyle \wr} \\ T'\Sigma\mathbb{Z}/2 & \hookrightarrow & (T'\Sigma\mathbb{Z}/2\otimes T'\Sigma\mathbb{Z}/2)_{\mathfrak{S}_2} \end{array}$$

qui montre $T'\Sigma\mathbb{Z}/2=0$.

A.1.9.4. On note comme en 5.4.2, H_1K le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel dual de K^1 et γ: $H^*H_1K\to K$ l'unique application d'algèbre prolongeant l'isomorphisme $H^1H_1K\simeq K^1$; γ est A-linéaire. L'application γ est un isomorphisme dans les cas suivants:

- K vérifie $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$;
- K vérifie $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_3)$;
- K est $\mathscr{U}$-injectif et vérifie $(\mathscr{P}_3)$.

En effet, dans ces cas là: $K^n=[F(n),K]=[(F(1)^{n\otimes})^{\mathfrak{S}_n},K]=((K^1)^{n\otimes})_{\mathfrak{S}_n}$.

A.1.9.5. On peut montrer que ΦH^*V vérifie $(\mathscr{P}_3)$, il existe donc des A-algèbres instables qui vérifient $(\mathscr{P}_3)$ mais ni $(\mathscr{P}_1)$ ni $(\mathscr{P}_2)$ et qui ne sont pas $\mathscr{U}$-injectives.

A.2. Foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\ ,H^*V)$ *et A-algèbres instables*

Soit K une A-algèbre instable; si K est engendré, en tant que A-algèbre, par un nombre fini d'éléments, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K,H^*V)$ est un ensemble fini. Plus généralement, puisque K est limite inductive de ses sous-A-algèbres engendrées par un nombre fini d'éléments, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K,H^*V)$ est un ensemble profini.

Definition A.2.1. Soit X un ensemble profini; on note $\mathbb{Z}/2[X]$ le $\mathbb{Z}/2$ espace vectoriel profini dual algébrique de l'espace des fonctions continues sur X (muni de sa topologie profinie) à valeurs dans $\mathbb{Z}/2$ (muni de sa topologie discrète). L'application naturelle: $X\to\mathbb{Z}/2[X]$ est un plongement et toute application continue de X dans un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel profini E se prolonge de façon unique en une application linéaire continue: $\mathbb{Z}/2[X]\to E$. Si X est fini, $\mathbb{Z}/2[X]$ n'est pas autre chose que le $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de base X; plus généralement, si $X=\varprojlim X_\alpha$ avec X_α fini, alors $\mathbb{Z}/2[X]=\varprojlim \mathbb{Z}/2[X_\alpha]$.

Théorème A.2.2. *Pour tout A-algèbre instable K, le prolongement linéaire continu:*

$$\mathbb{Z}/2[\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K,H^*V)]\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(K,H^*V)$$

du plongement: $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K,H^*V)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(K,H^*V)$ *est un isomorphisme. En particulier si* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K,H^*V)$ *est fini, alors* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(K,H^*V)$ *s'identifie au* $\mathbb{Z}/2$*-espace vectoriel de base* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K,H^*V)$.

Démonstration. On note comme précédemment $T'(\ )$ le dual topologique de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(\ ,H^*V)$. D'après A.1, $T'(K\otimes K)$ est naturellement isomorphe à $T'(K)\otimes T'(K)$ si bien que $T'(K)$ est une algèbre associative commutative et unitaire.

On vérifie que l'axiome ($\mathscr{K}$.3) des A-algèbres instables implique que $T'K$ est booléenne c'est-à-dire que $u^2=u$ pour tout u dans $T'K$. En effet, l'application: $u\mapsto u^2$ est la composition (voir A.1.5):

$$T'K \simeq T'\Phi K \xrightarrow{T'_i} T'(K\otimes K)_{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{T'_\varphi} T'K$$

$\varphi\colon (K\otimes K)_{\mathfrak{S}_2}\to K$ désignant le produit de K et l'axiome ($\mathscr{K}$.3) dit que la composition $\Phi K \xrightarrow{i} (K\otimes K)_{\mathfrak{S}_2} \xrightarrow{\varphi} K$ est Sq_0.

On vérifie également que le spectre de $T'K$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^*V)$. En effet, une forme linéaire: $T'K\to\mathbb{Z}/2$, c'est-à-dire un élément f de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(K, H^*V)$, est un caractère de $T'K$ si et seulement si f appartient à $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^*V)$.

L'algèbre $T'(K)$ est donc l'algèbre des fonctions continues sur $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(K, H^*V)$ (muni de sa topologie profinie) à valeurs dans $\mathbb{Z}/2$ (muni de sa topologie discrète). Le théorème est juste l'énoncé algébriquement dual.

Corollaire A.2.3. *Soient V et W deux $\mathbb{Z}/2$-espaces vectoriels de dimension finie et $\mathscr{L}(V,W)$ l'ensemble des applications linéaires de V dans W; alors le prolongement linéaire:*

$$\mathbb{Z}/2[\mathscr{L}(V,W)]\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*W, H^*V)$$

de l'application (ensembliste) naturelle: $\mathscr{L}(V,W)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{U}}(H^*W, H^*V)$ est un isomorphisme.

On observera que ce corollaire est aussi un cas particulier du théorème 1.1 de [10].

Corollaire A.2.4. *Soient K une A-algèbre instable et K' une sous A-algèbre de K; alors toute application de A-algèbres de K' dans H^*V se prolonge en un application de A-algèbres de K dans H^*V (H^*V est $\mathscr{K}$-injective).*

Démonstration. Puisque H^*V est $\mathscr{U}$-injectif, l'application d'algèbres booléennes: $T'(K')\to T'(K)$ est injective. L'application induite entre spectres est donc surjective.

A.2.5. *Remarque.* Il existe des A-algèbres instables K qui ne sont pas $\mathscr{K}$-injectives bien que le A-module instable sous-jacent soit injectif. En voici un exemple. Soient V un $\mathbb{Z}/2$-espace vectoriel de dimensions 2, S le sous-groupe à 3 éléments de $GL(V)$ et K la sous-algèbre de H^*V des invariants par S ($K\simeq H^*(\mathfrak{A}_4;\mathbb{Z}/2)$); en tant que A-module instable, K est facteur direct de H^*V, donc injectif; par contre, il n'existe pas de rétraction de A-algèbres de H^*V sur K puisque $K^1=0$.

Références

1. Brown, E.H., Jr., Gitler, S.: A spectrum whose cohomology is a certain cyclic module over the Steenrod algebra. Topology **12**, 283–295 (1973)
2. Brown, E.H., Jr., Peterson, F.P.: The Brown-Gitler spectrum, Ω^2S^3, and $\eta_j\in\pi^s_{2^j}$. Preprint
3. Brumfiel, G., Madsen, I., Milgram, R.J.: PL characteristic classes and cobordism. Ann. Math. **97**, 82–159 (1972)

4. Carlsson, G.B.: Segal Burnside ring conjecture for $(\mathbb{Z}/2)^k$. Topology. **22**, 83–103 (1983)
5. Cartan, H., Eilenberg, S.: Homological algebra. Princeton: Princeton Univ. Press 1956
6. Curtis, E.B.: The Dyer-Lashof algebra and the Λ-algebra. Ill. J. Math. **19**, 231–246 (1975)
7. Dickson, L.D.: A fundamental system of invariants of the general modular linear group with a solution of the form problem. Trans. Am. Math. Soc. **12**, 75–98 (1911)
8. Grothendieck, A.: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. J. **9**, 119–221 (1957)
9. Lannes, J., Zarati, S.: Invariants de Hopf d'ordre supérieur et suite spectrale d'Adams. Note aux C.R.A.S., t. **296**, 695–698 (1983)
10. Lannes, J., Zarati, S.: Invariants de Hopf d'ordre supérieur et suite spectrale d'Adams. A paraître
11. Lin, W.H.: On conjecture of Mahowald, Segal and Sullivan. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **87**, 449–458 (1980)
12. Mahowald, M.: A new infinite family in ${}_2\pi_*^S$. Topology **16**, 249–254 (1977)
13. Massey, W.S., Peterson, F.P.: On the mod 2 cohomology structure of certain fiber spaces. Mem. Am. Math. Soc. **74** (1967)
14. Miller, H.: The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces. Ann. Math. **120**, 39–87 (1984)
15. Singer, W.M.: Iterated loop functors and the homology of the Steenrod algebra. J. Pure Appl. Algebra **11**, 83–101 (1977)
16. Singer, W.M.: The construction of certain algebras over the Steenrod algebra. J. Pure Appl. Algebra **11**, 53–59 (1977)
17. Singer, W.M.: Iterated loop functors and the homology of the Steenrod algebra II, A chain complex for $\Omega_s^k M$. J. Pure Appl. Algebra **16**, 85–97 (1980)
18. Steenrod, N., Epstein, D.B.A.: Cohomology operations. Princeton: Princeton University Press 1962
19. Zarati, S.: Dérivés du foncteur de déstabilisation en caractéristique impaire et applications. Thèse de doctorat d'Etat, Orsay 1984
20. Adams, J.F., Gunawardena, J., Miller, H.: The Segal conjecture for elementary abelian p-groups. Topology **24**, 435–460 (1985)
21. Lannes, J., Zarati, S.: Foncteurs dérivés de la déstabilisation. Note aux C.R.A.S., t. **296**, 573–576 (1983)
22. Lannes, J., Zarati, S.: Sur les $\mathscr{U}$-injectifs. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 19, 1986, p. 303 à 333
23. Singer, W.M.: Invariant theory and the lambda algebra. Trans. A.M.S., **280**, 673–693 (1983)

Reçu Septembre 20, 1985