Werk

Titel: Zur Perron-Frobenius-Theorie stark stetiger Halbgruppen.

Autor: Greiner, Günther

Jahr: 1981

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0177|log44

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 177, 401–423 (1981)

Mathematische Zeitschrift
© Springer-Verlag 1981

Zur Perron-Frobenius-Theorie stark stetiger Halbgruppen

Günther Greiner

Mathematisches Institut der Universität, Auf der Morgenstelle 10, D-7400 Tübingen, Bundesrepublik Deutschland

In den sechziger Jahren wurden die inzwischen klassischen Resultate von Perron und Frobenius über die Zyklizität des peripheren Spektrums positiver Matrizen auf positive Operatoren auf Banachverbänden übertragen. Diese nichttrivialen Verallgemeinerungen stammen in erster Linie von Lotz, Niiro, Sawashima und Schaefer (vgl. [12], §§4,5 und die dort angegebenen Quellenhinweise). In der vorliegenden Arbeit werden analoge Aussagen über das Spektrum stark stetiger Halbgruppen positiver Operatoren bewiesen. Anstelle des peripheren Spektrums tritt dabei das „Randspektrum" der Halbgruppe. Das ist die Menge derjenigen Spektralwerte des infinitesimalen Generators, die maximalen Realteil haben. Im ersten Hauptsatz (2.4) wird gezeigt, daß eine große Klasse von positiven Halbgruppen zyklisches Randspektrum haben. Dabei bezieht sich der Begriff „zyklisch" jetzt auf die additive Verknüpfung der Imaginärteile der Spektralwerte. Der zweite Hauptsatz (2.5) zeigt, daß das Randspektrum positiver Halbgruppen ausschließlich aus Polen der Resolvente besteht, sofern der größte reelle Spektralwert ein Pol mit endlichdimensionalem Residuum ist.

Die eben erwähnten Resultate wurden in Schaefers Übersichtsvortrag [13] angekündigt. Wichtige Vorarbeit wurde von Derndinger und Nagel geleistet [1, 2, 8].

1. Methoden und Hilfsmittel für die Spektraltheorie stark stetiger Halbgruppen

Die Grundlagen dieser Arbeit sind die allgemeine Theorie stark stetiger Halbgruppen und die Spektraltheorie positiver Operatoren in Banachverbänden. Darüberhinaus müssen einfache Tatsachen aus der Spektraltheorie unbeschränkter, linearer Operatoren berücksichtigt werden. In den drei Abschnitten dieses Kapitels werden die benötigten Fakten aus diesen Gebieten zusammengestellt. Viele Behauptungen sind ohne Beweis angegeben. Ausführliche Begründungen findet man in den einschlägigen Lehrbüchern. Für den ersten Abschnitt sind dies beispielsweise die Bücher von Dunford/Schwartz [3] und Yo-

0025-5874/81/0177/0401/$04.60

sida [15]. Das Wichtigste über stark stetige Halbgruppen findet man in dem Buch von Hille/Phillips [6] oder in der Arbeit von Pazy [10]. Die beste Grundlage für den Abschnitt über Banachverbände und positive Operatoren liefert Schaefers Monographie [12].

1a. Resolventen und Pseudoresolventen

In diesem Abschnitt steht G stets für einen Banachraum und A für einen abgeschlossenen, dicht definierten, linearen Operator auf G mit Definitionsbereich $D(A)\subseteq G$.

Die Menge

$$\rho(A):=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \lambda-A \text{ ist eine Bijektion von } D(A) \text{ auf } G\}$$

heißt *Resolventenmenge von* A und das Komplement

$$\sigma(A):=\mathbb{C}\setminus\rho(A) \qquad \text{das } \textit{Spektrum von } A.$$

Bekanntlich ist $\sigma(A)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Diese ist kompakt und nicht leer, falls A ein beschränkter Operator ist. Die folgenden Teilmengen des Spektrums sind im weiteren von Interesse:

das *Residualspektrum*

$$R\sigma(A):=\{\lambda\in\sigma(A)\colon \text{es gibt ein } \gamma>0, \text{ mit } \|(\lambda-A)x\|\geqq\gamma\,\|x\| \text{ für alle } x\in D(A)\},$$

das *Punktspektrum*

$$P\sigma(A):=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \text{es gibt ein } x\in D(A),\ x\neq 0 \text{ mit } Ax=\lambda x\}$$

das *approximative Punktspektrum*

$$AP\sigma(A):=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \text{es gibt eine normierte Folge } (x_n)\subseteq D(A), \text{ so daß } ((\lambda-A)x_n) \text{ eine Nullfolge ist}\}.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt: $P\sigma(A)\subseteq AP\sigma(A)$, $\sigma(A)=R\sigma(A)\cup AP\sigma(A)$ und $R\sigma(A)\cap AP\sigma(A)=\varnothing$. Darüberhinaus ist der topologische Rand von $\sigma(A)$ stets im approximativen Punktspektrum enthalten. Für $\lambda\in\rho(A)$ ist $R(\lambda,A):=(\lambda-A)^{-1}$ ein stetiger, linearer Operator auf G. Die Funktion

$$R(\cdot,A)\colon\ \rho(A)\to\mathscr{L}(G), \qquad \lambda\mapsto R(\lambda,A)=(\lambda-A)^{-1}$$

ist lokal holomorph auf $\rho(A)$ und heißt *Resolvente von* A. Sie erfüllt die *Resolventengleichung:*

$$R(\lambda,A)-R(\mu,A)=-(\lambda-\mu)\,R(\lambda,A)\,R(\mu,A).$$

Eine äquivalente, oft nützlichere Form dieser Gleichung ist die Beziehung:

$$(\mathrm{Id}-(\lambda-\mu)R(\lambda,A))(\mathrm{Id}-(\mu-\lambda)R(\mu,A))=\mathrm{Id}.$$

Bei Untersuchungen des Spektrums unbeschränkter Operatoren kann man sich häufig mittels der Resolvente auf den Fall beschränkter Operatoren zurückziehen. Die Grundlage dafür liefert der folgende Satz:

(1.1) **Proposition.** *G sei ein Banachraum, $A\colon D(A)\to G$ ein abgeschlossener, dicht definierter, linearer Operator auf G, $\lambda_0\in\rho(A)$, $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq\lambda_0$.*

(a) *Ist $\alpha\in\rho(A)$, so gilt $(\lambda_0-\alpha)^{-1}\in\rho(R(\lambda_0,A))$ und*

$$R((\lambda_0-\alpha)^{-1},R(\lambda_0,A))=(\lambda_0-\alpha)+(\lambda_0-\alpha)^2R(\alpha,A).$$

Ist umgekehrt $(\lambda_0-\alpha)^{-1}\in\rho(R(\lambda_0,A))$, so folgt $\alpha\in\rho(A)$ und

$$R(\alpha,A)=(\lambda_0-\alpha)^{-2}R((\lambda_0-\alpha)^{-1},R(\lambda_0,A))-(\lambda_0-\alpha)^{-1}.$$

(b) *Die Beziehung $\alpha\leftrightarrow(\lambda_0-\alpha)^{-1}$ vermittelt eine Bijektion zwischen den Spektren von A und $R(\lambda_0,A)$. Gleiches gilt für die Residual-, die Punkt- und die approximativen Punktspektren.*

(c) *α ist genau dann ein isolierter Punkt von $\sigma(A)$, wenn $(\lambda_0-\alpha)^{-1}$ isolierter Punkt von $\sigma(R(\lambda_0,A))$ ist. In diesem Fall sind die Residuen der holomorphen Funktionen $R(\cdot,A)$ und $R(\cdot,R(\lambda_0,A))$ in den Stellen α bzw. $(\lambda_0-\alpha)^{-1}$ identisch. Weiter gilt: α ist dann und nur dann ein Pol k-ter Ordnung von $R(\cdot,A)$, wenn $(\lambda_0-\alpha)^{-1}$ ein Pol k-ter Ordnung von $R(\cdot,R(\lambda_0,A))$ ist.*

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $R(\lambda):=R(\lambda,A)$ $(\lambda\in\rho(A))$. Die Gültigkeit der in (a) angegebenen Formeln folgt aus der Resolventengleichung.

(b) Zunächst sei bemerkt, daß die Funktion $\alpha\mapsto(\lambda_0-\alpha)^{-1}$ eine Bijektion zwischen $\mathbb{C}\setminus\{\lambda_0\}$ und $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ vermittelt. Damit folgt die Aussage über das gesamte Spektrum aus (a). Die Behauptung für das Punktspektrum erhält man wie folgt: Ist $x\in D(A)$, $Ax=\alpha x$, so folgt $(\lambda_0-A)x=(\lambda_0-\alpha)x$ und man erhält $R(\lambda_0)x=(\lambda_0-\alpha)^{-1}x$. Gilt umgekehrt $R(\lambda_0)x=(\lambda_0-\alpha)^{-1}x$, so folgt $x\in R(\lambda_0)G=D(A)$ und

$$Ax=(\lambda_0-\alpha)AR(\lambda_0)x=(\lambda_0-\alpha)(\lambda_0R(\lambda_0)-\mathrm{Id})x=\alpha x.$$

Ist (x_n) ein approximativer Eigenvektor von A zum Spektralwert α, so folgt aus

$$\begin{aligned}&((\lambda_0-\alpha)^{-1}-R(\lambda_0))x_n\\&\quad=(\lambda_0-\alpha)^{-1}R(\lambda_0)((\lambda_0-A)x_n-(\lambda_0-\alpha)x_n)\\&\quad=(\lambda_0-\alpha)^{-1}R(\lambda_0)\cdot(\alpha-A)x_n\end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\|((\lambda_0-\alpha)^{-1}-R(\lambda_0))x_n\|\leqq|\lambda_0-\alpha|^{-1}\,\|R(\lambda_0)\|\,\|(\alpha-A)x_n\|.$$

Dies zeigt, daß (x_n) ein approximativer Eigenvektor von $R(\lambda_0)$ zum Spektralwert $(\lambda_0-\alpha)^{-1}$ ist.

Nun sei (x_n) ein approximativer Eigenvektor von $R(\lambda_0)$ zum Spektralwert $\mu := (\lambda_0 - \alpha)^{-1}$. Wegen $\|(\mu - R(\lambda_0))x_n\| \to 0$ und $\|\mu x_n\| = |\mu|$, können wir o.B.d.A. annehmen, daß für ein geeignetes $c > 0$ die Abschätzung $\|R(\lambda_0)x_n\| \geqq c$ gilt. Definiert man $y_n := \|R(\lambda_0)x_n\|^{-1} R(\lambda_0)x_n$, dann liegt y_n im Definitionsbereich von A und es gilt:

$$\begin{aligned}(\alpha - A)y_n &= \|R(\lambda_0)x_n\|^{-1}((\lambda_0 - A) - (\lambda_0 - \alpha))R(\lambda_0)x_n \\ &= \|R(\lambda_0)x_n\|^{-1}(\lambda_0 - \alpha)(\mu - R(\lambda_0))x_n.\end{aligned}$$

Hieraus folgt $\|(\alpha - A)y_n\| \leqq c^{-1}|\lambda_0 - \alpha|\,\|(\mu - R(\lambda_0))x_n\|$ und man erhält, daß (y_n) ein approximativer Eigenvektor von A zum Spektralwert α ist.

Die Behauptung für das Residualspektrum folgt aus der eindeutigen Beziehung $\alpha \leftrightarrow (\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ und dem soeben Bewiesenen.

(c) Zunächst ist klar, daß mit α auch $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ ein isolierter Punkt ist und umgekehrt. Die Behauptung über die Residuen ergibt sich mit Hilfe der zweiten Gleichung von Teil (a) wie folgt:

Ist Γ ein Kreis von hinreichend kleinem Radius um α, so gilt für das Residuum P von $R(\cdot, A)$ in α:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(z, A)\,dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda_0 - z)^{-2} R((\lambda_0 - z)^{-1}, R(\lambda_0))\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda_0 - z)^{-1}\,dz.\end{aligned}$$

Ist der Kreis Γ so gewählt, daß λ_0 nicht im Innern liegt, dann ist das zweite Integral Null. Die Substitution $\tilde{z} := (\lambda_0 - z)^{-1}$ liefert einen einfach geschlossenen Weg $\tilde{\Gamma}$, der außer $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ keine Spektralwerte von $R(\lambda_0)$ umläuft. Aus $d\tilde{z} = (\lambda_0 - z)^{-2}\,dz$ folgt $P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\Gamma}} R(\tilde{z}, R(\lambda_0))\,d\tilde{z}$. Dies zeigt, daß P mit dem Residuum von $R(\cdot, R(\lambda_0))$ im Punkt $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ übereinstimmt.

Die letzte Aussage ergibt sich aus folgender Behauptung:

Für die n-ten Koeffizienten A_n und B_n der Laurentreihe von $R(\cdot, A)$ bzw. $R(\cdot, R(\lambda_0))$ im Punkt α bzw. $(\lambda_0 - \alpha)^{-1}$ gilt:

$$B_{-n} = ((\lambda_0 - \alpha)^{-1} R(\lambda_0))^{n-1} A_{-n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Der Beweis wird mit Induktion geführt.

Für $n = 1$ wurde die Behauptung bereits bewiesen.

Für $n \geqq 1$ gilt:

$$A_{-(n+1)} = (A - \alpha)A_{-n},$$

$$B_{-(n+1)} = (R(\lambda_0) - (\lambda_0 - \alpha)^{-1})B_{-n}.$$

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung erhält man

$$\begin{aligned}B_{-(n+1)} &= (R(\lambda_0) - (\lambda_0 - \alpha)^{-1})(\lambda_0 - \alpha)(\lambda_0 - A)((\lambda_0 - \alpha)^{-1} R(\lambda_0))^n A_{-n} \\ &= (A - \alpha)((\lambda_0 - \alpha)^{-1} R(\lambda_0))^n A_{-n} = ((\lambda_0 - \alpha)^{-1} R(\lambda_0))^n A_{-(n+1)}.\end{aligned}$$

Bekanntlich ist das $\mathscr{F}$-Produkt ein nützliches Hilfsmittel bei spektraltheoretischen Untersuchungen beschränkter, linearer Operatoren ([12], Chapt. V). Im Falle unbeschränkter Operatoren treten bei der Verwendung des $\mathscr{F}$-Produktes Schwierigkeiten auf. Das sieht man an folgender Überlegung: Ist A: $D(A)\to G$ unbeschränkt und $\hat{G}$ ein $\mathscr{F}$-Produkt von G, dann ist $0\in AP\sigma(R(\lambda,A))$ für alle $\lambda\in\rho(A)$. Damit ist 0 ein Eigenwert der Operatoren $R(\lambda,A)\hat{}$. Das heißt, die Operatoren $\{R(\lambda,A)\hat{}\}$ sind nicht injektiv, insbesondere sind sie nicht die Resolventen eines geeigneten Operators auf $\hat{G}$. Dennoch erfüllen sie die Resolventengleichung und somit ist die Funktion $\lambda\mapsto R(\lambda,A)\hat{}$ eine *Pseudoresolvente* (vgl. [15], VIII.4).

Jede auf einer offenen Teilmenge $D\subseteq\mathbb{C}$ definierte Pseudoresolvente R: $D\to\mathscr{L}(G)$ hat folgende Eigenschaften:

(a) *R ist eine holomorphe Funktion.*

(b) *Ist $\lambda_0\in D$ und $\mu\in\mathbb{C}$, dann gibt es höchstens einen Operator $S\in\mathscr{L}(G)$, der die folgende Gleichung erfüllt:*

$$R(\lambda_0)-S=-(\lambda_0-\mu)R(\lambda_0)S=-(\lambda_0-\mu)SR(\lambda_0).$$

Gibt es einen solchen Operator, dann erfüllt dieser die obige Gleichung für alle $\lambda\in D$. In diesem Fall sagt man: Die Pseudoresolvente läßt sich in μ fortsetzen.

(c) *Ist $\lambda\in D$, dann gilt für alle μ mit*

$$|\mu-\lambda|\leqq\|R(\lambda)\|^{-1}\colon\ R(\mu)=\sum R(\lambda)^{n+1}(\lambda-\mu)^n.$$

Aufgrund dieser Eigenschaften besitzt jede Pseudoresolvente eine eindeutig bestimmte größte Fortsetzung und diese ist auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}$ definiert. Ist R: $D\to\mathscr{L}(G)$ ein Pseudoresolvente und G_0 ein abgeschlossener, linearer Teilraum, der unter allen Operatoren $R(\lambda)(\lambda\in D)$ invariant ist, dann bilden die Einschränkungen der Operatoren $R(\lambda)$ eine Pseudoresolvente $R_|$ auf G_0. Ebenso bilden die von $R(\lambda)$ auf G/G_0 induzierten Operatoren eine Pseudoresolvente $R_/$ auf G/G_0. Auf diesen Fall beziehen sich die zweite und dritte Aussage des folgenden Satzes.

(1.2) **Proposition.** *G sei ein Banachraum, R: $D\to\mathscr{L}(G)$ eine Pseudoresolvente auf G.*

(a) *Ist $\alpha\in\mathbb{C}$, $x\in G$, dann erfüllen entweder alle $\lambda\in D$ oder kein $\lambda\in D$ die Gleichung $(\lambda-\alpha)R(\lambda)x=x$.*

Im weiteren sei G_0 ein abgeschlossener, linearer Teilraum von G, $\mu\in\bar{D}\setminus D$ und es gelte $R(\lambda)G_0\subseteq G_0$ für alle $\lambda\in D$.

(b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Pseudoresolvente R: $D\to\mathscr{L}(G)$ läßt sich in μ fortsetzen.*

(ii) *Die Pseudoresolventen $R_|$: $D\to\mathscr{L}(G_0)$ und $R_/$: $D\to\mathscr{L}(G/G_0)$ lassen sich in μ fortsetzen.*

(iii) *Für ein (alle) $\lambda\in D$ ist $(\lambda-\mu)^{-1}\in\rho(R(\lambda))$.*

(c) *R hat dann und nur dann einen Pol in μ, wenn sowohl $R_|$ als auch $R_/$ in μ einen Pol haben. Für die entsprechenden Polordnungen k, $k_|$, bzw. $k_/$ gilt:*

$$\max\{k_|,k_/\}\leqq k\leqq k_|+k_/.$$

Bevor wir den Satz beweisen bemerken wir, daß es für zusammenhängende Gebiete D genügt zu fordern, daß G_0 unter einem Operator $R(\lambda)$ invariant ist.

Beweis. Behauptung (a) folgt unmittelbar aus der Resolventengleichung.

(b) „(i) $\Rightarrow$ (ii)": Läßt sich R in μ fortsetzen, und ist $S\in\mathscr{L}(G)$ diese Fortsetzung, dann folgt aus Stetigkeitsgründen ($\mu\in\bar{D}$!) $S(G_0)\subseteq G_0$. Die Einschränkung von S auf G_0 bzw. der von S auf G/G_0 induzierte Operator liefern die gewünschte Fortsetzung von $R_|$ bzw. $R_/$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Es sei $\lambda\in D$. Nach Voraussetzung existieren Operatoren $S_1\in\mathscr{L}(G_0)$, $S_2\in\mathscr{L}(G/G_0)$ mit

$$(\mathrm{Id}-(\lambda-\mu)R_|(\lambda))(\mathrm{Id}-(\mu-\lambda)S_1)=(\mathrm{Id}-(\mu-\lambda)S_1)(\mathrm{Id}-(\lambda-\mu)R_|(\lambda))=\mathrm{Id}$$

$$(\mathrm{Id}-(\lambda-\mu)R_/(\lambda))(\mathrm{Id}-(\mu-\lambda)S_2)=(\mathrm{Id}-(\mu-\lambda)S_2)(\mathrm{Id}-(\lambda-\mu)R_/(\lambda))=\mathrm{Id}.$$

Dies bedeutet $(\lambda-\mu)^{-1}\in\rho(R(\lambda)_|)\cap\rho(R(\lambda)_/)$ und daraus folgt $(\lambda-\mu)^{-1}\in\rho(R(\lambda))$.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)": Setzt man $S:=(\lambda-\mu)^{-2}((\lambda-\mu)^{-1}-R(\lambda))^{-1}-(\lambda-\mu)^{-1}$, dann gilt $(\mathrm{Id}-(\mu-\lambda)S)=(\mathrm{Id}-(\lambda-\mu)R(\lambda))^{-1}$ und man erkennt, daß die Pseudoresolvente im Punkt μ durch $R(\mu):=S$ fortgesetzt werden kann.

(c) Aufgrund von Aussage (b) können wir annehmen, daß für geeignetes $\delta>0$ die Menge $\{\lambda\in D\colon 0<|\lambda-\mu|<\delta\}$ in D enthalten ist. Dann haben die Funktionen R, $R_|$ und $R_/$ Laurententwicklungen im Punkt μ. Sind A_n die Koeffizienten der Laurentreihe von R, dann folgt aus der Voraussetzung $R(\lambda)G_0\subseteq G_0$ ($\lambda\in D$), daß G_0 unter allen Operatoren A_n invariant ist. Bezeichnet man die Einschränkung von A_n auf G_0 mit $A_{n|}$ und den von A_n auf G/G_0 induzierten Operator mit $A_{n/}$, dann gilt:

$$R(\lambda)=\sum A_n(\lambda-\mu)^n,$$
$$R_|(\lambda)=\sum A_{n|}(\lambda-\mu)^n,$$
$$R_/(\lambda)=\sum A_{n/}(\lambda-\mu)^n.$$

Nun ist klar, daß mit R auch $R_|$ und $R_/$ Pole in haben, und daß für die Polordnungen $\max\{k_|,k_/\}\leqq k$ gilt.

Hat $R_|$ in μ einen Pol s-ter Ordnung, dann gilt $A_{-(s+1)|}=0$ oder $A_{-(s+1)}(G_0)=\{0\}$. Und falls $R_/$ in μ einen Pol r-ter Ordnung besitzt, gilt $A_{-(r+1)/}=0$ oder $A_{-(r+1)}(G)\subseteq G_0$. Man erhält $A_{-(s+1)}A_{-(r+1)}=0$ und aus der für alle r, $s\geqq 0$ gültigen Beziehung

$$(*)\qquad A_{-(r+1)}A_{-(s+1)}=A_{-(s+1)}A_{-(r+1)}=A_{-(r+s+1)}$$

folgt $A_{-(r+s+1)}=0$, das heißt R hat in μ einen Pol der Ordnung $\leqq r+s$. Die Beziehung (*) folgt aus der Darstellung

$$A_{-(n+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-\mu)^n R(\lambda)\,d\lambda\qquad(n\geqq 0),$$

wenn man berücksichtigt, daß R die Resolventengleichung erfüllt.

1b. Banachverbände und positive Operatoren

In dieser Arbeit wird unter einem Banachverband E stets ein komplexer Banachverband im Sinne von ([12], II. §11) verstanden. Ist $x\in E$, so besitzt x eine eindeutige Darstellung $x=x_1+ix_2$, wobei x_1, x_2 in dem zugrundeliegenden reellen Banachverband $E_{\mathbb{R}}$ enthalten sind. Das Element x_1-ix_2 heißt der zu x *konjugierte Vektor*, es wird mit $\bar{x}$ bezeichnet. Ist $x\in E$, dann ist das von $|x|$ erzeugte Hauptideal $E_{|x|}=\{y\in E\colon |y|\leqq n|x| \text{ für ein } n\in\mathbb{N}\}$ ein AM-Raum mit Einheit $|x|$ und als solcher isomorph zu einem Raum $C(K)$ ([12], II.7.2 Cor., II.7.4). Dem Element $x\in E_{|x|}$ entspricht eine stetige, unimodulare Funktion $\hat{x}$ auf dem Kompaktum K. Die Multiplikation mit $\hat{x}$ definiert eine lineare Bijektion $M_{\hat{x}}$ auf $C(K)$. Man hat $(M_{\hat{x}}f)(s)=\hat{x}(s)f(s)\,(f\in C(K),\ s\in K)$ und es folgt $|M_{\hat{x}}f|=|f|$ für alle $f\in C(K)$. Damit ist $M_{\hat{x}}$ für jede Verbandsnorm auf $C(K)$ stetig, insbesondere für die von E induzierte Norm. Die $M_{\hat{x}}$ entsprechende Abbildung auf $E_{|x|}$, bzw. deren stetige Fortsetzung auf $\overline{E_{|x|}}$ wird mit M_x bezeichnet. Ist $y\in\overline{E_{|x|}}$, dann setzen wir $\operatorname{sign} x\cdot y:=M_x(y)$.

(1.3) **Definition.** Es sei E ein Banachverband, $x\in E$, $\bar{x}$ der zu x konjugierte Vektor. Für $n\in\mathbb{Z}$ wird $x^{(n)}$ wie folgt rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} x^{(0)} &:= |x|, \\ x^{(n)} &:= \operatorname{sign} x\cdot x^{(n-1)} \quad \text{falls } n>0, \\ x^{(n)} &:= \operatorname{sign}\bar{x}\cdot x^{(n+1)} \quad \text{falls } n<0. \end{aligned}$$

Ist E ein Verband von Funktionen (etwa $E=L^p(\mu)$), dann gilt

$$(\operatorname{sign} f\cdot g)(s)=(\operatorname{sign} f(s))(g(s))=\frac{f(s)}{|f(s)|}\cdot g(s)$$

und

$$f^{(n)}(s)=\left(\frac{f(s)}{|f(s)|}\right)^{n-1}\cdot f(s).$$

Im Folgenden werden ein paar einfache Eigenschaften der eben eingeführten Begriffe aufgelistet.

Ist E ein Banachverband, $x\in E$, $y\in\overline{E_{|x|}}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, dann gilt:

(a) $\operatorname{sign}(\lambda x)\cdot y=\dfrac{\lambda}{|\lambda|}\operatorname{sign} x\cdot y$.

(b) $|\operatorname{sign} x\cdot y|=|y|$.

(c) *Ist $|x|$ ein quasiinnerer Punkt von E_+ (d.h.: $\overline{E_{|x|}}=E$), dann ist $M_x\colon E\to E$, $y\mapsto\operatorname{sign} x\cdot y$ eine lineare Bijektion. Es gilt $M_x^{-1}=M_{\bar{x}}$ und $|M_x y|=|y|$ für alle $y\in E$.*

(d) $x^{(0)}=|x|$, $x^{(1)}=x$, $x^{(-1)}=\bar{x}$ *und für alle $n\in\mathbb{Z}$ gilt*

$$x^{(n)}=\operatorname{sign} x\cdot x^{(n-1)}=\operatorname{sign}\bar{x}\cdot x^{(n+1)}.$$

(e) $(\lambda x)^{(n)}=\lambda\left(\dfrac{\lambda}{|\lambda|}\right)^{n-1}\cdot x^{(n)}$.

Der folgende Satz und die beiden Korollare sind in der Spektraltheorie positiver Operatoren von grundlegender Bedeutung. Er ist in etwas anderer Form in ([12], V. §§4,5) zu finden. Zunächst beweisen wir einen Hilfssatz.

(1.4) **Lemma.** *Es seien K, L kompakte Räume, $T\colon C(K)\to C(L)$ ein linearer Operator mit $Te_K=e_L$. Dann sind die beiden Aussagen „$T\geqq 0$" und „$\|T\|\leqq 1$" äquivalent.*

Beweis. Da für positive Operatoren T auf $C(K)$ stets $\|T\|=\|Te_K\|$ gilt, folgt die eine Implikation aus der Voraussetzung $Te_K=e_L$.

Der Beweis der anderen Implikation beruht auf folgender Beobachtung: Für (komplexwertige) Funktionen h sind die beiden Aussagen „$-e\leqq h\leqq e$" und „für alle $r\in\mathbb{R}$ gilt $\|h-ire\|\leqq\rho_r:=(1+r^2)^{\frac{1}{2}}$" äquivalent. Diese Tatsache wird im Beweis zweimal verwendet.

Es sei $f\in C(K)_+$ und o.B.d.A. $0\leqq f\leqq 2e_K$. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit $-e_K\leqq f-e_K\leqq e_K$, also gilt für alle $r\in\mathbb{R}$ $\|f-e_K-ire_K\|\leqq\rho_r$. Aus $\|T\|\leqq 1$ und $Te_K=e_L$ folgt dann $\|Tf-e_L-ire_L\|\leqq\rho_r$ für alle $r\in\mathbb{R}$, was wiederum mit $-e_L\leqq Tf-e_L\leqq e_L$ oder $0\leqq Tf\leqq 2e_L$ gleichwertig ist.

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz. Seine Bedeutung für die Spektraltheorie liegt darin, daß man mit seiner Hilfe auf die Identität der Spektren der Operatoren S und T schließen kann.

(1.5) **Proposition.** *Es seien E ein Banachverband, $u\in E$, $|u|$ ein quasiinnerer Punkt von E_+, S, $T\in\mathscr{L}(E)$. Es gelte $Su=u$, $T|u|=|u|$ und $|Sx|\leqq T|x|$ für alle $x\in E$. Dann ist $T=M_u^{-1}SM_u$.*

Beweis. Setzt man $R:=M_u^{-1}SM_u$, dann gilt für alle $x\in E$

$$(*)\qquad |Rx|=|M_u^{-1}SM_ux|=|SM_ux|\leqq T|M_ux|=T|x|.$$

Wegen $T|u|=|u|$ und $T\geqq 0$ gilt $T(E_{|u|})\subseteq E_{|u|}$ und aus $(*)$ folgt $R(E_{|u|})\subseteq E_{|u|}$. Bezeichnet man die von T bzw. R auf $E_{|u|}\cong C(K)$ induzierten Operatoren mit T_0 bzw. R_0, so gilt $\|T_0\|\leqq 1$ und wegen $(*)$ auch $\|R_0\|\leqq 1$. Da $R_0e=M_u^{-1}SM_u|u|=M_u^{-1}Su=M_u^{-1}u=|u|=e$, folgt aus dem Lemma $R_0\geqq 0$. Die Ungleichung $(*)$ impliziert nun $R_0\leqq T_0$ und man erhält $\|T_0-R_0\|=\|(T_0-R_0)e\|=0$. Da $E_{|u|}$ in E dicht liegt, folgt $T=R=M_u^{-1}SM_u$.

(1.6) **Korollar.** *E sei ein Banachverband, $0\leqq T\in\mathscr{L}(E)$, $x\in E$, $\alpha\in\mathbb{C}$ und $|\alpha|=1$.*
Ist $Tx=\alpha x$ und $T|x|=|x|$, dann gilt $T(x^{(n)})=\alpha^n x^{(n)}$ für alle $n\in\mathbb{Z}$.

Beweis. Die Voraussetzungen implizieren, daß T das Ideal $\overline{E_{|x|}}$ invariant läßt. Bezeichnet man den von T auf $\overline{E_{|x|}}$ induzierten Operator mit T_1 und setzt $S_1:=\alpha^{-1}T_1$, dann erfüllen $\overline{E_{|x|}}$, T_1, S_1, x die Voraussetzungen der Proposition. Somit gilt $T_1=M_x^{-1}S_1M_x=\alpha^{-1}M_x^{-1}T_1M_x$. Iteriert man diese Gleichung, so folgt $T_1=\alpha^{-n}M_x^{-n}T_1M_x^n$ $(n\in\mathbb{Z})$ und wird $|x|$ eingesetzt, erhält man $\alpha^nM_x^n|x|=T_1M_x^n|x|$ $(n\in\mathbb{Z})$. Aus $x^{(n)}=M_x^n|x|$ folgt dann die Behauptung.

Das zweite Korollar ist auf den Fall stark stetiger Halbgruppen positiver Operatoren zugeschnitten. Wir werden im weiteren mehrfach darauf zurückkommen.

(1.7) **Korollar.** *E sei ein Banachverband,* $u\in E$, $D:=\{\lambda\in\mathbb{C}: \operatorname{Re}\lambda>0\}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ *und R eine Pseudoresolvente auf E, die die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$|R(\lambda)x|\leqq R(\operatorname{Re}\lambda)|x| \quad \text{für } x\in E,\ \lambda\in D,$$
$$\lambda R(\lambda+i\alpha)u=u \quad \text{für ein (alle) } \lambda\in D,$$
$$\lambda R(\lambda)|u|=|u| \quad \text{für ein (alle) } \lambda\in D.$$

Es gilt: (a) $\lambda R(\lambda+ik\alpha)u^{(k)}=u^{(k)}$ $(k\in\mathbb{Z},\ \lambda\in D)$.

(b) *Falls* $|u|$ *ein quasiinnerer Punkt von* E_+ *ist, folgt*

$$R(\lambda)=M_{\ddot{u}}R(\lambda+i\alpha)M_u \qquad (\lambda\in D).$$

Beweis. Das Hauptideal $E_0:=\overline{E_{|u|}}$ ist unter den Operatoren $R(\lambda)$ $(\lambda\in D)$ invariant. Die Einschränkungen $\mu R_0(\mu)$ und $\mu R_0(\mu+i\alpha)$ von $\mu R(\mu)$ bzw. $\mu R(\mu+i\alpha)$ $(\mu>0)$ erfüllen die Voraussetzungen von Prop. 1.5, also gilt: $\mu R_0(\mu)=M_{\ddot{u}}\mu R_0(\mu+i\alpha)M_u$. Dabei ist der Operator M_u von μ unabhängig. Da die holomorphen Funktionen $\lambda\mapsto\lambda R_0(\lambda)$ und $\lambda\mapsto M_{\ddot{u}}\lambda R_0(\lambda+i\alpha)M_u$ auf den positiven reellen Zahlen übereinstimmen, folgt aus dem Identitätssatz der Funktionentheorie:

$$\lambda R_0(\lambda)=M_{\ddot{u}}\lambda R_0(\lambda+i\alpha)M_u \qquad \text{für alle } \lambda\in\mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}\lambda>0.$$

Iteriert man diese Gleichung und setzt anschließend $|u|$ ein:

$$\lambda R_0(\lambda)=(M_{\ddot{u}})^k\lambda R_0(\lambda+ik\alpha)M_u^k \qquad (k\in\mathbb{Z},\ \lambda\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda>0)$$
$$\lambda R(\lambda+ik\alpha)u^{(k)}=\lambda R_0(\lambda+ik\alpha)u^{(k)}=u^{(k)} \qquad (k\in\mathbb{Z}),$$

dann folgt Behauptung (a). Ist $|u|$ ein quasiinnerer Punkt, dann gilt $R(\lambda)=R_0(\lambda)$ $(\lambda\in D)$ und (b) ergibt sich aus der Gleichung $\lambda R(\lambda)=M_{\ddot{u}}\lambda R(\lambda+i\alpha)M_u$.

1c. Stark stetige Operatorhalbgruppen

In diesem Abschnitt stellen wir die für diese Arbeit notwendigen Ergebnisse aus der Theorie der stark stetigen Operatorhalbgruppen zusammen. Einführungen in diese Theorie finden sich in [6] und [10].

Ist $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf dem Banachraum G – d.h., eine Familie $\{T(t): t\in\mathbb{R}_+\}\subseteq\mathscr{L}(G)$ mit $T(0)=\mathrm{Id}$, $T(s+t)=T(s)T(t)$ für alle $s,\ t\in\mathbb{R}_+$ und $t\mapsto T(t)$ stetig für die starke Operatortopologie –, dann heißt der durch

$$Ax:=\lim_{t\to 0}t^{-1}(T(t)x-x) \qquad (x\in D(A):=\{x\in G:\lim_{t\to 0}t^{-1}(T(t)x-x)\ \text{existiert}\}),$$

definierte Operator A der *Generator der Halbgruppe* $\{T(t)\}$.

(1.8) *Bemerkungen.* (i) A ist ein abgeschlossener, dicht definierter, linearer Operator auf G und es gilt:

$$(\mathrm{Id}-e^{-\lambda t}T(t))x=(\lambda-A)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)x\,ds \quad \text{für alle } x\in E,\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

$$(\mathrm{Id}-e^{-\lambda t}T(t))x=\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(\lambda-A)x\,ds \quad \text{für alle } x\in D(A),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Insbesondere gilt für alle λ aus der Resolventenmenge $\rho(A)$:

$$(\mathrm{Id}-e^{-\lambda t}T(t))R(\lambda,A)=R(\lambda,A)(\mathrm{Id}-e^{-\lambda t}T(t))=\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)\,ds.$$

Dabei ist das rechtsstehende Integral punktweise erklärt.

(ii) Es gibt reelle Zahlen $\omega\in\mathbb{R}$, $M\geqq 1$, so daß $\|T(t)\|\leqq M e^{\omega t}$ für alle $t\in\mathbb{R}_+$. Wir bezeichnen mit ω_0 das Infimum all dieser Zahlen $\omega\in\mathbb{R}$ und nennen diese Größe *Wachstumsschranke*. Für diese gilt:

$$\omega_0=\inf_{t>0}\{t^{-1}\log\|T(t)\|\}=\lim_{t\to\infty}t^{-1}\log\|T(t)\| \quad \text{sowie} \quad r(T(t))=e^{\omega_0 t}.$$

(iii) Das Spektrum $\sigma(A)$ des Generators ist in der linken Halbebene $\{\lambda\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,\lambda\leqq\omega_0\}$ enthalten. Die Größe $s(A):=\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda:\lambda\in\sigma(A)\}$ heißt *Spektralschranke*, es gilt dann $-\infty\leqq s(A)\leqq\omega_0<\infty$. In vielen Fällen sind Spektral- und Wachstumsschranke identisch, doch gibt es Beispiele von Halbgruppen mit $s(A)<\omega_0$ (siehe [5]).

(iv) In der rechten Halbebene $\{\lambda\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0\}$ besitzt die Resolvente des Generators die folgende Integraldarstellung:

$$R(\lambda,A)x=\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds \quad (\mathrm{Re}\,\lambda>\omega_0,\quad x\in G).$$

Dabei ist der Integrand für jedes $x\in G$ Bochner-integrierbar.

Wenn wir im weiteren vom *Spektrum der Halbgruppe* reden, so ist damit das Spektrum des zugehörigen Generators gemeint. Im Falle beschränkter, stark stetiger Gruppen stimmt dies mit dem von Arveson eingeführten Spektrum von Darstellungen lokalkompakter Gruppen überein (vgl.: [4, 9]).

Die nun folgende Beschreibung der periodischen Halbgruppen erlaubt es, die Zusammenhänge zwischen den Eigenvektoren des Generators A und denen der Operatoren $T(t)$ herzustellen (siehe Prop. 1.10).

(1.9) *Beispiel (Periodische Halbgruppen).* Eine stark stetige Halbgruppe $\{T(t)\}$ heißt *periodisch*, falls $T(t_0)=\mathrm{Id}$ für ein $t_0>0$. Gibt es wenigstens ein $t_1>0$ mit $T(t_1)\neq\mathrm{Id}$, dann sagen wir, die Halbgruppe sei nicht trivial. Die kleinste Zahl $t>0$, für die $T(t)=\mathrm{Id}$ gilt, heißt *Periode der Halbgruppe*. Sie soll im folgenden mit τ bezeichnet werden. Periodische Halbgruppen sind stets Gruppen, denn für $0\leqq t\leqq n\tau$ gilt $T(t)^{-1}=T(n\tau-t)$, außerdem gilt stets $\omega_0=0$.

Aus der Gleichung 1.8(i) folgt für die Resolvente:

$$R(\mu, A)=(1-e^{-\mu\tau})^{-1}\int_0^\tau e^{-\mu s}T(s)\,ds \qquad (\mu\in\rho(A)).$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Resolvente eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ ist, die nur in den Punkten $\mu_n:=\dfrac{2\pi n i}{\tau}$ $(n\in\mathbb{Z})$ Pole der Ordnung kleiner gleich eins besitzt. Für das Residuum P_n in μ_n gilt:

$$P_n=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau e^{-\mu_n s}T(s)\,ds \qquad (n\in\mathbb{Z}),$$

das heißt, P_n ist der n-te Fourierkoeffizient der periodischen Funktion $s\mapsto T(s)$. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
&P_nP_m=0, && \text{falls } n\neq m;\\
&\operatorname{lin}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}P_nG && \text{ist dicht in } G;\\
&x=\sum_{-\infty}^{\infty}P_nx, && \text{falls } x\in D(A);\\
&T(t)x=\sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{2\pi n i}{\tau}t\right)P_nx, && \text{falls } x\in D(A);\\
&Ax=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi n i}{\tau}P_nx, && \text{falls } x\in D(A^2).
\end{aligned}$$

Wir wollen nur die dritte Aussage beweisen, da die zweite, vierte und fünfte einfache Folgerungen daraus sind.

O.B.d.A. sei $\tau=2\pi$. Zunächst zeigen wir, daß für $x\in D(A)$ die Reihe $\sum P_nx$ summierbar ist. Setzt man $y:=Ax$, so gilt $P_ny=P_nAx=inP_nx$ oder $-P_nx=\dfrac{1}{in}P_ny$. Für jede endliche Teilmenge $H\subseteq\mathbb{Z}$ und jede stetige Linearform $x'\in E'$ gilt dann:

$$|\sum_{n\in H}\langle P_nx,x'\rangle|=\left|\sum_{n\in H}\frac{1}{in}\langle P_ny,x'\rangle\right|\leqq\left(\sum_{n\in H}n^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}(\sum_{n\in H}|\langle P_ny,x'\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Den zweiten Faktor kann man mit Hilfe der Besselschen Ungleichung abschätzen:

$$\sum_{n\in H}|\langle P_ny,x'\rangle|^2\leqq(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|\langle T(s)\,y,x'\rangle|^2\,ds\leqq\|x'\|^2(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\|T(s)\,y\|^2\,ds.$$

Setzt man $C:=\left((2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\|T(s)\,y\|^2\,ds\right)^{\frac{1}{2}}$, dann erhält man für alle endlichen Teilmengen $H\subseteq\mathbb{Z}$: $\|\sum_{n\in H}P_nx\|\leqq C(\sum_{n\in H}n^{-2})^{\frac{1}{2}}$. Damit ist gezeigt, daß die Reihe summierbar ist.

Setzen wir $y := \sum P_n x$, dann stimmen für alle $x' \in E'$ die Fourierkoeffizienten der stetigen Funktionen $s \mapsto \langle T(s)y, x' \rangle$ einerseits und $s \mapsto \langle T(s)x, x' \rangle$ andererseits überein. Damit sind die Funktionen identisch, insbesondere gilt

$$\langle y, x' \rangle = \langle T(0)y, x' \rangle = \langle T(0)x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle.$$

Da $x' \in E'$ beliebig ist, folgt schließlich aus dem Satz von Hahn-Banach $x = y = \sum P_n x$.

Die obigen Eigenschaften erlauben es, die periodischen, normstetigen Halbgruppen zu charakterisieren und zwar wie folgt:

Es gibt eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ und eine Familie paarweise orthogonaler Projektionen $\{P_n: -m < n < m\}$ mit

$$\sum_{|n|<m} P_n = \mathrm{Id}, \qquad T(t) = \sum_{|n|<m} \exp\left(\frac{2\pi n i}{\tau} t\right) P_n, \qquad A = \sum_{|n|<m} \frac{2\pi n i}{\tau} P_n.$$

Ist darüberhinaus der zugrundeliegende Banachraum ein Banachverband und sind die Operatoren der Halbgruppe positiv, dann folgt $m = 1$, das heißt $A = 0$ und $T(t) = \mathrm{Id}$. Letzteres folgt aus dem von Derndinger bewiesenen Resultat, daß das Spektrum von Verbandshalbgruppen imaginär additiv zyklisch ist ([1], 2.4; siehe auch Def. 2.1(b)).

Konkrete Beispiele periodischer Halbgruppen sind die Rotationen auf $\Gamma := \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$. Dabei sei $G = C(\Gamma)$ oder $G = L^p(\Gamma, m)$ $(1 \leqq p < \infty$, m das Haarsche Maß auf $\Gamma)$. Ist $\tau > 0$ und definiert man für $t \in \mathbb{R}_+$

$$R_\tau(t) f(z) := f\left(z \exp\left(\frac{2\pi i}{\tau} t\right)\right) \qquad (f \in G, z \in \Gamma),$$

dann ist $\{R_\tau(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe auf G mit Periode τ. Für den Generator dieser sogenannten *Rotationshalbgruppe auf* Γ gilt:

$$D(A) = \{f \in G: f \text{ absolut stetig}, f' \in G\},$$

$$Af(z) = \frac{2\pi i}{\tau} z f'(z) \qquad (z \in \Gamma),$$

$$\sigma(A) = \left\{\frac{2\pi n i}{\tau}: n \in \mathbb{Z}\right\},$$

das Residuum in $\dfrac{2\pi n i}{\tau}$ ist der Operator $P_n = z^{-n} \otimes z^n$.

Bekanntlich ist der für normstetige Halbgruppen stets gültige spektrale Abbildungssatz „$\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(A)}$“ für beliebige stark stetige Halbgruppen falsch. Das sieht man beispielsweise an der Rotationshalbgruppe. In diesem Fall ist $\sigma(A)$ abzählbar, während für gewisse $t > 0$ $\sigma(T(t)) = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ überzählbar ist. Zwar gilt in diesem Fall $(e^{t\sigma(A)})^- = \sigma(T(t))$, doch auch diese Relation ist im allgemeinen nicht erfüllt (siehe [5]). Welche Beziehungen zwischen dem Spektrum der Halbgruppe und den Spektren der einzelnen Operatoren bestehen, zeigt der folgende Satz.

(1.10) **Proposition.** *Es sei* $\{T(t)\}$ *eine stark stetige Halbgruppe auf* G, $\sigma(A)$ *das Spektrum,* $\mu\in\mathbb{C}$ *und* $s>0$.

(a) $e^{s\sigma(A)}\subseteq\sigma(T(s))$, $e^{sA P\sigma(A)}\subseteq AP\sigma(T(s))$, $e^{sP\sigma(A)}=P\sigma(T(s))\setminus\{0\}$

(b) $\ker(\mu-A)=\bigcap_{t\geqq 0}\ker(e^{\mu t}-T(t))$,

$$\ker(e^{\mu s}-T(s))=\overline{\operatorname{lin}}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\ker\left(\mu+i\frac{2\pi n}{s}-A\right).$$

(c) *Ist* $e^{\mu s}$ *ein Pol k-ter Ordnung von* $R(\cdot,T(s))$, P *das Residuum,* Q *der k-te Koeffizient der Laurentreihe von* $R(\cdot,T(s))$ *in* $e^{\mu s}$, *dann gilt:*

$\left\{\mu+i\frac{2\pi n}{s}: n\in\mathbb{Z}\right\}$ *besteht ausschließlich aus Polen von* $R(\cdot,A)$ *der Ordnung* $\leqq k$ *und für die Residuen* P_n *bzw. k-ten Koeffizienten* Q_n *in* $\mu+i\frac{2\pi n}{s}$ *gilt:*

$$PG=\overline{\operatorname{lin}}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}P_nG,$$

$$Q_n=(se^{\mu s})^{1-k}Q\frac{1}{s}\cdot\int_0^s\exp\left(-\left(\mu+i\frac{2\pi n}{s}\right)t\right)T(t)\,dt.$$

Beweis. Wir können o.B.d.A. $\mu=0$ und $s=2\pi$ annehmen. (a) Die ersten beiden Relationen folgen aus 1.8(i), die dritte ergibt sich aus (b).

(b) Aus 1.8(i) folgt zunächst $\ker A\subseteq\ker(1-T(t))$. Ist andererseits $T(t)x=x$ für alle $t\geqq 0$, so folgt $Ax=\lim\frac{1}{t}(x-x)=0$. Damit ist die erste Gleichung bewiesen, welche ihrerseits $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}\ker(in-A)\subseteq\ker(1-T(2\pi))$ nach sich zieht. Die Einschränkung $\{T_|(t)\}$ von $\{T(t)\}$ auf den $\{T(t)\}$-invarianten Teilraum $G_0:=\ker(1-T(2\pi))$ is periodisch, folglich gilt $\overline{\operatorname{lin}}\cup\ker(in-A_|)=G_0$ (1.9) und man erhält $\overline{\operatorname{lin}}\cup\ker(in-A)\supseteq G_0=\ker(1-T(2\pi))$.

(c) Zunächst folgt aus (a), daß für ein geeignetes $\varepsilon>0$, die Menge $V:=\{\lambda\in\mathbb{C}: 0<|e^{\lambda 2\pi}-1|<\varepsilon\}$ in der Resolventenmenge von A liegt. Aus 1.8(i) folgt

$$R(\lambda,A)=R(e^{-\lambda 2\pi},T(2\pi))\,e^{\lambda 2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\lambda t}T(t)\,dt,$$

falls $\lambda\in V$. Da die Funktionen $\lambda\mapsto e^{-\lambda 2\pi}$ und $\lambda\mapsto e^{\lambda 2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\lambda t}T(t)\,dt$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind und $R(\cdot,T(2\pi))$ in 1 einen Pol k-ter Ordnung hat, folgt dann, daß $R(\cdot,A)$ in $\{\lambda\in\mathbb{C}: e^{\lambda 2\pi}=1\}=\{in: n\in\mathbb{Z}\}$ nur Pole gleicher oder kleinerer Ordnung haben kann.

Das Residuum P von $R(\cdot,T(2\pi))$ im Punkt 1 kommutiert mit jedem Operator $T(t)$. Es gilt $1\in\sigma(T_2(2\pi))$, wobei $T_2(t):=T(t)_{|\ker P}$ und aus $e^{2\pi\sigma(A_2)}\subseteq\sigma(T_2(2\pi))$ folgt, daß $R(\cdot,A_2)$ in $\{in: n\in\mathbb{Z}\}$ holomorph ist. Diese Überlegung zeigt, daß man o.B.d.A. $G=PG$ oder $P=\mathrm{Id}$ annehmen kann. Nun sei P_n das Residuum von $R(\cdot,A)$ in $in\,(n\in\mathbb{Z})$, $G_0:=\overline{\operatorname{lin}}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}P_nG$. Wäre $G_0\subsetneqq G$, dann folgt für die auf G/G_0 induzierte Halbgruppe $\{T_/(t)\}$: $\sigma(A_/)=\varnothing$ und $P\sigma(T_/(2\pi))=\{1\}$. Dies steht im Widerspruch zu (a).

Die Formeln für die k-ten Koeffizienten ergeben sich, wenn man in die Formel $Q_n = \lim_{\mu \to 0} \mu^k R(in+\mu, A)$ die Gleichung

$$R(\lambda, A) = R(e^{-\lambda 2\pi}, T(2\pi))\, e^{\lambda 2\pi} \int_0^s e^{-\lambda t} T(t)\, dt$$

einsetzt.

Wir wollen einen Spezialfall des eben bewiesenen Satzes festhalten:

(1.11) **Korollar.** *Ist* 1 *ein Pol erster Ordnung der Resolvente eines Operators* $T(s)$ $(s>0)$ *und* P *das Residuum, dann gilt:*

(a) P *reduziert die Halbgruppe (d.h., jeder Operator* $T(t)$ *kommutiert mit* P*) und* $\{T(t)\}_{|PG}$ *ist periodisch.*

(b) *Die Resolvente hat in* $\left\{ i\frac{2\pi n}{s} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ *nur Pole der Ordnung* $\leqq 1$. *Für das Residuum* P_n *in* $i\frac{2\pi n}{s}$ *gilt:* $P_n = \frac{1}{s} \int_0^s \exp\left(-i\frac{2\pi n}{s} t\right) T(t)\, dt \cdot P$.

Im weiteren sei $E=G$ ein Banachverband und $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe positiver Operatoren auf E, kurz: eine *positive Halbgruppe*. Wie der folgende Satz zeigt, gilt in diesem Fall die Integraldarstellung 1.8(iv) der Resolvente in der eventuell größeren Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > s(A)\}$. Einen Beweis dieses Resultates findet man in [5].

(1.12) **Proposition.** *Es sei* E *ein Banachverband,* $\{T(t)\}$ *eine positive Halbgruppe auf* E *und* $s(A)$ *die Spektralschranke der Halbgruppe.*

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ *und* $\operatorname{Re}\lambda > s(A)$, *dann existiert* $\lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\lambda s} T(s)\, x\, ds$ *für jedes* $x \in E$ *und es gilt:*

$$R(\lambda, A)\, x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)\, x\, ds := \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-\lambda s} T(s)\, x\, ds.$$

Die Integraldarstellung der Resolvente liefert die folgende, für alles weitere grundlegende Abschätzung der Resolvente:

(1.13) **Korollar.** *Ist* $\{T(t)\}$ *eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband* E, A *der Generator und* $s(A)$ *die Spektralschranke, dann gilt:*

$$|R(\lambda, A)\, x| \leqq R(\operatorname{Re}\lambda, A)\, |x| \quad \text{für alle } x \in E,\ \operatorname{Re}\lambda > s(A).$$

Diese Ungleichung erlaubt es Korollar 1.7 anzuwenden und man erhält:

(1.14) **Korollar.** $\{T(t)\}$ *sei eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband* E *mit* $s(A)=0$ *und für ein* $u \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *gelte* $Au = i\alpha u$ *sowie* $A|u| = 0$.

Es gelten die folgenden Aussagen:

(a) $Au^{(k)} = ik\alpha u^{(k)}$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$.

(b) *Ist* $|u|$ *ein quasiinnerer Punkt von* E_+, *so gilt* $M_u(D(A)) \subseteq D(A)$ *und* $A = M_{\bar{u}}(A + i\alpha) M_u$.

Beweis. Aus der Voraussetzung und Korollar 1.13 folgt:

$$|R(\lambda, A)x| \leqq R(\operatorname{Re}\lambda, A)|x| \quad \text{für } x \in E,\ \lambda \in D := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\},$$
$$\lambda R(\lambda + i\alpha, A)u = u \quad \text{für } \lambda \in D,$$
$$\lambda R(\lambda, A)|u| = |u| \quad \text{für } \lambda \in D.$$

Wendet man nun Korollar 1.7 an, dann folgt die Behauptung unmittelbar.

2. Die Zyklizität des Randspektrums

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns ausschließlich mit stark stetigen Halbgruppen positiver Operatoren auf Banachverbänden (kurz: *positiven Halbgruppen*). Die beiden Hauptsätze machen Aussagen über die „Zyklizität" des „Randspektrums" solcher Halbgruppen. Der verwendete Zyklizitätsbegriff geht auf Derndinger zurück ([1], 2.1). Er wird im Anschluß an die Definition näher erläutert.

(2.1) **Definition.** Es sei $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe, $\sigma(A)$ das Spektrum und $s(A)$ die Spektralschranke.

(a) Ist $s(A) > -\infty$, dann heißt die Menge $\sigma_+(A) := \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re}\lambda = s(A)\}$ das *Randspektrum* der Halbgruppe. Es sei $\sigma_+(A) := \varnothing$, falls $s(A) = -\infty$.

(b) Das Randspektrum heißt *additiv zyklisch*, falls mit $\lambda = s(A) + iv$ $(v \in \mathbb{R})$ auch alle Punkte $s(A) + ikv$ $(k \in \mathbb{Z})$ im Randspektrum liegen.

Ist $\sigma(A) \neq \varnothing$, dann enthält das Randspektrum die Spektralschranke ([1], 3.4). Ist $\sigma_+(A)$ additiv zyklisch, dann enthält es entweder unendlich viele Punkte oder nur einen einzigen. Da das Randspektrum im topologischen Rand des Spektrums liegt, ist es eine Teilmenge des approximativen Punktspektrums. Weiter sieht man, daß A dann und nur dann zyklisches Randspektrum besitzt, wenn $A + \mu$ $(\mu \in \mathbb{R})$ ein solches hat. Aus diesem Grund kann man sich im wesentlichen auf den Fall $s(A) = 0$ beschränken, sofern das Spektrum nicht leer ist. In diesem Fall ist $\sigma_+(A) \subseteq i\mathbb{R}$ und *additiv zyklisch* ist gleichbedeutend mit:

$\sigma_+(A)$ ist die Vereinigung (additiver) Untergruppen von $i\mathbb{R}$.

Die folgende Überlegung soll zeigen, wie man auf den oben definierten Zyklizitätsbegriff kommt. Dazu sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe, A der Generator und es gelte $s(A) = 0$. Nimmt man an daß $T(t)$ ausschließlich Punktspektrum besitzt, dann gilt nach 1.10 $\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}$. Für die Randspektren $\sigma_+(A)$ und $\sigma_0(T(t)) := \{\lambda \in \sigma(T(t)) : |\lambda| = 1\}$ folgt daraus $\sigma_0(T(t)) = e^{t\sigma_+(A)}$. Da (unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen) $\sigma_0(T(t))$ multiplikativ zyklisch ist, und da die Abbildung $\lambda \mapsto e^{t\lambda}$ ein Homomorphismus von der additiven Gruppe $i\mathbb{R}$ auf die multiplikative Gruppe $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ ist, wird man erwarten, daß $\sigma_+(A)$ additiv zyklisch im Sinne von 2.1(b) ist.

Diese Überlegung ist rein heuristischer Natur. Tatsächlich ist es nicht möglich aus der multiplikativen Zyklizität von $\sigma_0(T(t))$ auf die additive Zyklizität von $\sigma_+(A)$ zu schließen, da die Exponentialfunktion $\lambda \mapsto e^{t\lambda}$ nicht injektiv ist

(ganz abgesehen davon, daß der „spektrale Abbildungssatz" $\sigma(T(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}$ im allgemeinen nicht gilt). Vielmehr zeigt es sich in den Beweisen, daß die Zyklizität des peripheren Spektrums der Operatoren $T(t)$ gar nicht verwendet wird. Mehr noch, selbst die Halbgruppe $\{T(t)\}$ spielt in den Beweisen keine Rolle. Entscheidend ist die in 1.13 bewiesene Ungleichung der Resolvente.

Derndinger hat gezeigt, daß bei Verbandshalbgruppen das gesamte Spektrum additiv zyklisch ist ([1], 2.4). Insbesondere haben diese speziellen positiven Halbgruppen zyklisches Randspektrum. Es ist unbekannt, ob Letzteres für beliebige positive Halbgruppen gilt. Wir können die Zyklizität nur unter Zusatzvoraussetzungen beweisen. Diese Voraussetzungen beinhalten gewisse Wachstumsbedingungen an die Resolvente.

(2.2) **Definition.** Es sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E mit Generator A und es gelte $s(A) > -\infty$.

(a) Die Halbgruppe erfüllt die *(w)-Bedingung*, falls die Menge

$$\{(\mu - s(A))R(\mu, A) : \mu \in \mathbb{R}, \mu > s(A)\}$$

in $\mathscr{L}(E)$ gleichmäßig beschränkt ist.

(b) Die Halbgruppe heißt *(w)-auflösbar*, falls es eine Kette $\{0\} = I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_{n-1} \subseteq I_n = E$ $\{T(t)\}$-invarianter Ideale gibt, so daß für jedes $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ die von $\{T(t)\}$ auf $E_k := I_k / I_{k-1}$ induzierte Halbgruppe $\{T_k(t)\}$ die (w)-Bedingung erfüllt.

Da das Netz $\{(\mu - s(A))R(\mu, A)\}_{\mu > s(A)}$ für $\mu \to \infty$ stark gegen die Identität konvergiert ([15], IX.4), kann man die Wachstumsbedingung in Teil (a) wie folgt definieren:

Die Menge $\{(\mu - s(A))R(\mu, A) : s(A) < \mu < s(A) + 1\}$ *ist in* $\mathscr{L}(E)$ *beschränkt.*

In (b) könnte man anstelle von $\{T(t)\}$-*invariante Ideale* auch $\{R(\lambda, A)\}$-*invariante Ideale* setzen. Dabei genügt es, daß die Ideale unter einem Operator $R(\lambda, A)$ $(\mathrm{Re}\,\lambda > s(A))$ invariant sind.

Der folgende Satz behandelt einige Eigenschaften der eben eingeführten Begriffe. Es werden hinreichende, sowie äquivalente Bedingungen für die (w)-Bedingung und für (w)-Auflösbarkeit angegeben.

(2.3) **Proposition.** *$\{T(t)\}$ sei eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E, A der Generator und es gelte $s(A) > -\infty$.*

(a) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Halbgruppe erfüllt die (w)-Bedingung (bzw. ist (w)-auflösbar).*

(ii) *Für ein $\lambda_0 > s(A)$ erfüllt der positive Operator $R(\lambda_0, A)$ die (G)-Bedingung (bzw. ist (G)-auflösbar) im Sinne von* ([12], V.4.7).

(b) *Jede der folgenden Bedingungen ist hinreichend für die (w)-Auflösbarkeit der Halbgruppe.*

(i) *$s(A)$ ist ein Pol der Resolvente.*

(ii) *Der Generator hat kompakte Resolvente.*

(c) *Ist $s(A) = 0$, dann ist jede der folgenden Bedingung hinreichend für die (w)-Bedingung der Halbgruppe.*

(i) *Die Césaro-Mittel* $\left\{\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,ds : t>0\right\}$ *sind in* $\mathscr{L}(E)$ *gleichmäßig (punktweise) beschränkt.*

(ii) *Die Halbgruppe* $\{T(t)\}$ *ist in* $\mathscr{L}(E)$ *gleichmäßig (punktweise) beschränkt.*

(iii) *Es gilt* $\omega_0=0$ *und für ein* $t_0>0$ *erfüllt* $T(t_0)$ *die (G)-Bedingung im Sinne von* ([12], V.4.7).

Beweis. (a) folgt aus den Gleichungen in 1.1(a).

(b) Nach 1.1(c) ist $s(A)$ genau dann ein Pol der Resolvente, wenn $(\lambda_0-s(A))^{-1}$ ein Pol der Resolvente von $R(\lambda_0, A)$ ist. Die Behauptung (i) folgt dann unter Verwendung von (a) aus ([12], V.4 Ex. 4). Bedingung (ii) impliziert (i).

(c) (i): Es sei $M:=\sup\left\{\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)\,ds\right\| : t>0\right\}$. Ist $x\in E$, $\lambda>0$, $r>0$, dann folgt unter Verwendung partieller Integration:

$$\lambda\int_0^r e^{-\lambda s}T(s)x\,ds = r\lambda e^{-\lambda r}\frac{1}{r}\int_0^r T(\sigma)x\,d\sigma + \lambda^2\int_0^r s e^{-\lambda s}\left[\frac{1}{s}\int_0^s T(\sigma)x\,d\sigma\right]ds.$$

Schätzt man die beiden Césaro-Mittel durch $M\|x\|$ ab, erhält man

$$\left\|\lambda\cdot\int_0^r e^{-\lambda s}T(s)x\,ds\right\| \leqq \left(r\lambda e^{-\lambda r}+\lambda^2\int_0^r s e^{-\lambda s}ds\right)\cdot M\|x\| = (1-e^{-\lambda r})M\|x\|.$$

Für $r\to\infty$ konvergiert $\lambda\int_0^r e^{-\lambda s}T(s)x\,ds$ gegen $R(\lambda,A)x$ und man erhält $\|R(\lambda,A)x\|\leqq M\|x\|$.

Die Bedingung (ii) impliziert (i), und (iii) ergibt sich folgendermaßen:

Aus 1.8(i) folgt: $\mu R(\mu,A)=\mu e^{\mu t_0}R(e^{\mu t_0}, T(t_0))\cdot\int_0^{t_0} e^{-\mu s}T(s)\,ds$, falls $\mu>0$. Nun ist $\left\{e^{\mu t_0}\int_0^{t_0} e^{-\mu s}T(s)\,ds : 0<\mu<1\right\}$ stets beschränkt, und die Beschränktheit von $\{\mu R(e^{\mu t_0}, T(t_0)) : 0<\mu<1\}$ folgt aus der Voraussetzung (iii).

Die in Teil (b) bzw. (c) angegebenen Bedingungen sind sicher nicht notwendig. So folgt beispielsweise aus (c)(ii) und (iii), daß die Spektralschranke und die Abszisse der absoluten Konvergenz der Halbgruppe zusammenfallen. Dies ist keineswegs notwendig, es gibt Halbgruppen mit $s(A)<\omega_0$, die die (w)-Bedingung erfüllen.

Nun wollen wir den ersten Hauptsatz beweisen. Dabei handelt es sich um das Analogon eines Satzes von Lotz [7]. Einen Spezialfall hat Derndinger ([1], 3.7) bewiesen.

(2.4) **Theorem.** *Jede positive,* (w)*-auflösbare Halbgruppe hat additiv zyklisches Randspektrum.*

Beweis. Ist das Randspektrum leer, dann ist nichts zu beweisen. Wir können demnach o.B.d.A. $s(A)=0$ annehmen, das heißt, $\sigma_+(A)\subseteq i\mathbb{R}$.

Nach Voraussetzung gibt es eine $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda\in\rho(A)}$-invariante Idealkette $\{0\}=I_0\subseteq I_1\subseteq\ldots\subseteq I_n=E$, so daß die Familien $\{\mu R_r(\mu, A)\colon 0<\mu<1\}$ $(r=1,2,\ldots,n)$ gleichstetig sind. Dabei ist $R_r(\lambda, A)$ der von $R(\lambda, A)$ auf $E_r:=I_r/I_{r-1}$ induzierte Operator. Ist nun $i\alpha\in\sigma_+(A)$ $(\alpha\in\mathbb{R})$, dann existiert nach 1.1(b) und 1.2(b) ein r, so daß $(\lambda-i\alpha)^{-1}\in\sigma(R_r(\lambda, A))$ $(\mathrm{Re}\,\lambda>0)$. Können wir daraus folgern, daß $(\lambda-ik\alpha)^{-1}\in\sigma(R_r(\lambda, A))$ für alle $k\in\mathbb{Z}$, dann folgt wiederum mit 1.1(b) und 1.2(b) $ik\alpha\in\sigma_+(A)$ $(k\in\mathbb{Z})$, und damit wäre der Beweis der Zyklizität von $\sigma_+(A)$ erbracht.

Zur Abkürzung setzen wir nun $F:=E_r$, $R(\lambda):=R_r(\lambda, A)$, $D:=\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,\lambda>0\}$. Dann ist $\{R(\lambda)\}_{\lambda\in D}$ eine Pseudoresolvente auf F und $\{\mu R(\mu)\colon 0<\mu<1\}$ in $\mathscr{L}(F)$ beschränkt. Da sich die Ungleichung 1.13 auf Teilräume und Quotienten vererbt, gilt $|R(\lambda)x|\leqq R(\mathrm{Re}\,\lambda)|x|$, falls $\lambda\in D$, $x\in F$. Weiter gilt $(\lambda-i\alpha)^{-1}\in\sigma(R(\lambda))$, sogar $(\lambda-i\alpha)^{-1}\in AP\,\sigma(R(\lambda))$, denn $(\lambda-i\alpha)^{-1}$ liegt im Abschluß der Resolventenmenge. Ist nun $\hat{F}$ ein $\mathscr{F}$-Produkt von F und bezeichnet man die von $\{R(\lambda)\}_{\lambda\in D}$ auf $\hat{F}$ induzierte Pseudoresolvente mit $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda\in D}$, dann gilt:

(i) $|\hat{R}(\lambda)\hat{x}|\leqq\hat{R}(\mathrm{Re}\,\lambda)|\hat{x}|$ $(\lambda\in D,\ \hat{x}\in\hat{F})$.

(ii) Es gibt ein $\hat{x}_0\neq 0$, so daß

$$\lambda\hat{R}(\lambda+i\alpha)\hat{x}_0=\hat{x}_0 \qquad (\lambda\in D)$$
$$\mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_0|\geqq|\hat{x}_0| \qquad (\mu>0).$$

(iii) Es gibt ein $\varphi\in\hat{F}'_+$ mit $\langle|x_0|,\varphi\rangle>0$ und $\lambda\hat{R}(\lambda)'\varphi=\varphi$ $(\lambda\in D)$.

Bedingung (i) folgt unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft von $R(\lambda)$, und da $(\lambda-i\alpha)^{-1}$ im approximativen Punktspektrum von $R(\lambda)$ liegt, gibt es für ein festes $\lambda\in D$ ein $\hat{x}_0\neq 0$ mit $\hat{R}(\lambda)\hat{x}_0=(\lambda-i\alpha)^{-1}\hat{x}_0$. Aus 1.2(a) folgt dann $(\lambda-i\alpha)\hat{R}(\lambda)\hat{x}_0=\hat{x}_0$ für alle $\lambda\in D$, was gleichbedeutend mit $\lambda\hat{R}(\lambda+i\alpha)\hat{x}_0=\hat{x}_0$ ist. Verwendet man nun (i), dann gilt für $\mu>0$

$$|\hat{x}_0|=|\mu\hat{R}(\mu+i\alpha)\hat{x}_0|\leqq\mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_0|.$$

Nun zur Bedingung (iii): Zunächst existiert ein $\psi\in\hat{F}'_+$ mit $\langle|\hat{x}_0|,\psi\rangle>0$. Da $\{\mu\hat{R}(\mu)'\psi\colon 0<\mu<1\}$ beschränkt ist, und beschränkte Mengen in $\hat{F}'$ $\sigma(\hat{F}',\hat{F})$-relativkompakt sind, existiert für einen gegen 0 konvergenten Ultrafilter $\mathscr{U}$ auf dem Intervall $(0,1)$ $\varphi:=\lim\mu\hat{R}(\mu)'\psi$. Nun folgt aus der Resolventengleichung und der $\sigma(\hat{F}',\hat{F})$-Stetigkeit von $\hat{R}(\lambda)'$:

$$\lambda\hat{R}(\lambda)'\varphi=\lim\lambda\mu\hat{R}(\lambda)'\hat{R}(\mu)'\psi=\lim\frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda-\mu}\hat{R}(\mu)'\psi-\lim\frac{\lambda\cdot\mu}{\lambda-\mu}\hat{R}(\lambda)'\psi=\varphi.$$

Des weiteren gilt für alle $\mu>0$:

$$0<\langle|\hat{x}_0|,\psi\rangle\leqq\langle\mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}_0|,\psi\rangle=\langle|\hat{x}_0|,\mu\hat{R}(\mu)'\psi\rangle,$$

woraus $\langle|\hat{x}_0|,\varphi\rangle>0$ folgt. Damit sind die Eigenschaften (i)–(iii) nachgewiesen.

Das Ideal $I:=\{\hat{x}\in\hat{F}\colon\langle|\hat{x}|,\varphi\rangle=0\}$ ist wegen (ii) und (iii) $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda\in D}$-invariant. Für die von $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda\in D}$ auf $\tilde{F}:=\hat{F}/I$ induzierte Pseudoresolvente $\{\tilde{R}(\lambda)\}_{\lambda\in D}$ gilt dann:

(i)′ $|\tilde{R}(\lambda)\tilde{x}| \leqq \tilde{R}(\operatorname{Re}\lambda)|\tilde{x}|$ $(\lambda \in D,\ \tilde{x} \in \tilde{F})$.

(ii)′ Es gibt ein $\tilde{x}_0 \neq 0$, so daß

$$\lambda \tilde{R}(\lambda + i\alpha)\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \qquad (\lambda \in D)$$
$$\mu \tilde{R}(\mu)|\tilde{x}_0| = |\tilde{x}_0| \qquad (\mu > 0).$$

(i)′ ist sofort klar, und bezeichnet man das kanonische Bild von $\hat{x}_0$ in $\tilde{F}$ mit $\tilde{x}_0$, dann gilt $\lambda \tilde{R}(\lambda + i\alpha)\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0$, falls $\lambda \in D$. Aus $\langle |\hat{x}_0|, \varphi\rangle > 0$ folgt $\hat{x}_0 \notin I$ oder $\tilde{x}_0 \neq 0$. Bedingung (iii) impliziert $\langle \mu \hat{R}(\mu)|\hat{x}_0| - |\hat{x}_0|, \varphi\rangle = 0$ und wegen (ii) bedeutet dies $\mu \hat{R}(\mu)|\hat{x}_0| - |\hat{x}_0| \in I$ oder $\mu \tilde{R}(\mu)|\hat{x}_0| = |\tilde{x}_0|$. Damit ist (i)′ und (ii)′ bewiesen.

Aus 1.7 folgt nun $\lambda \tilde{R}(\lambda + ik\alpha)\tilde{x}_0^{(k)} = \tilde{x}_0^{(k)}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in D$. Insbesondere gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$ $(\lambda - ik\alpha)^{-1} \in \sigma(\tilde{R}(\lambda))$. Um zurück auf $R(\lambda)$ zu schließen, wendet man zunächst 1.2(b) an und erhält $(\lambda - ik\alpha)^{-1} \in \sigma(\hat{R}(\lambda))$. Aus $\sigma(R(\lambda)) = \sigma(\hat{R}(\lambda))$ folgt schließlich $(\lambda - ik\alpha)^{-1} \in \sigma(R(\lambda))$, und dies war wie eingangs erwähnt wurde nachzuweisen.

Beim zweiten Hauptsatz handelt es sich um das Analogon eines Resultates von Niiro und Sawashima ([12], V.5.5).

(2.5) **Theorem.** *Es sei $\{T(t)\}$ eine positive Halbgruppe auf dem Banachverband E mit Spektralschranke $s(A) = 0$.*

(a) *Ist $s(A)$ ein Pol der Resolvente und hat das zugehörige Residuum endlichen Rang, dann ist $\sigma_+(A)$ eine endliche Vereinigung additiver Untergruppen von $i\mathbb{R}$ und besteht ausschließlich aus Polen.*

(b) *Ist $s(A)$ ein Pol erster Ordnung und* $\ker A$ *eindimensional, dann ist $\sigma_+(A)$ eine Untergruppe und besteht aus Polen erster Ordnung der geometrischen Vielfachheit* 1.

Wir wollen zunächst ein paar Anmerkungen machen: Da 0 ein isolierter Punkt von $\sigma_+(A)$ ist, sind die in $\sigma_+(A)$ enthaltenen Untergruppen von $i\mathbb{R}$ diskret, das heißt von der Form $i\alpha\mathbb{Z}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Die Voraussetzungen von (a) sind erfüllt, falls der Generator kompakte Resolvente hat.

Ist $s(A)$ ein Pol und ist die Halbgruppe $\{T(t)\}$ irreduzibel, dann sind die Voraussetzungen von (b) erfüllt.

Hat die Resolvente eines Operators $T(t_0)$ $(t_0 > 0)$ einen Pol in 1, dann hat die Resolvente der Halbgruppe einen Pol in 0 (vgl. 1.10). Ist darüber hinaus $\ker(1 - T(t_0))$ endlichdimensional, dann sind die Voraussetzungen von (a) erfüllt. Aufgrund von 1.10(b) gilt dann $\sigma_+(A) = \{0\}$.

Beweis von 2.5. Wir werden zunächst die zweite Aussage beweisen und anschließend die erste darauf zurückführen.

(b) Nach Voraussetzung existiert $P := \lim_{\lambda \to 0} \lambda R(\lambda, A)$. P ist eine positive Projektion vom Rang 1, also $P = \varphi \oplus u$ für ein $\varphi \in E'_+$, $u \in E_+$. Betrachten wir ein Ultraprodukt $\hat{E}$ von E, dann hat die von $\{R(\lambda, A)\}_{\lambda \in D}$ $(D := \rho_+(A))$ auf $\hat{E}$ induzierte Pseudoresolvente $\{\hat{R}(\lambda)\}_{\lambda \in D}$ im Punkt 0 ebenfalls einen Pol erster Ordnung. Das Residuum $\hat{P}$ ist die kanonische Fortsetzung von P auf $\hat{E}$. Da $\hat{E}$ ein

Ultraprodukt ist, hat $\hat{P}$ ebenfalls Rang 1, also $\hat{P}=\hat{\varphi}\otimes\hat{u}$ für geeignete $\hat{\varphi}\in\hat{E}'_+$, $\hat{u}\in\hat{E}_+$.

Das Ideal $\hat{I}:=\{\hat{x}\in\hat{E}\colon \hat{P}|\hat{x}|=0\}$ ist $\{\hat{R}(\lambda)\}$-invariant und die von $\{\hat{R}(\lambda)\}$ auf $\tilde{E}:=\hat{E}/\hat{I}$ induzierte Pseudoresolvente $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ hat in 0 einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\tilde{P}=\tilde{\varphi}\otimes\tilde{u}$. Dabei ist $\tilde{u}\neq 0$ und $\tilde{\varphi}$ eine strikt positive Linearform.

Schränkt man $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ auf $\check{E}:=\tilde{\tilde{E}}_{\tilde{u}}$ ein, dann erhält man eine Pseudoresolvente $\{\check{R}(\lambda)\}$ auf $\check{E}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $|\check{R}(\lambda)\check{x}|\leqq\check{R}(\mathrm{Re}\,\lambda)|\check{x}|$ $(\mathrm{Re}\,\lambda>0,\ \check{x}\in\check{E})$.

(ii) $\{\check{R}(\lambda)\}$ hat in 0 einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\check{P}=\check{\varphi}\otimes\check{u}$, dabei ist $\check{\varphi}$ eine strikt positive Linearform und $\check{u}$ ein quasiinnerer Punkt.

Ist nun $i\alpha\in\sigma_+(A)$, dann gilt $(\lambda-i\alpha)^{-1}\in AP\sigma(R(\lambda,A))$ $(\lambda\in\rho(A))$, und damit existiert ein $\hat{z}\in\hat{E}$ mit $(\lambda-i\alpha)\hat{R}(\lambda)\hat{z}=\hat{z}$ $(\lambda\in\rho(A))$. Da sich die Ungleichung 1.13 auf das $\mathscr{F}$-Produkt vererbt, gilt für alle $\mu>0$: $|\hat{z}|=|\mu\hat{R}(\mu+i\alpha)\hat{z}|\leqq\hat{R}(\mu)|\hat{z}|$ und somit $\hat{P}|\hat{z}|\geqq|\hat{z}|>0$. Das heißt $\hat{z}\notin\hat{I}$ und damit ist das kanonische Bild $\tilde{z}$ von $\hat{z}$ in $\tilde{E}$ ungleich 0. Weiter gilt $\tilde{P}|\tilde{z}|\geqq|\tilde{z}|$, und da $\tilde{P}$ strikt positiv ist, folgt $0<|\tilde{z}|=\tilde{P}|\tilde{z}|=\langle|\tilde{z}|,\tilde{\varphi}\rangle\tilde{u}$. Damit erfüllen $\check{E}$, $\{\check{R}(\lambda)\}$, $\check{z}$ die Voraussetzungen von 1.7, also folgt $\check{R}(\lambda)=M_{\check{z}}^{-1}\check{R}(\lambda+i\alpha)M_{\check{z}}$ $(\lambda\in D)$.

Wegen (ii) hat dann $\{\check{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ einen Pol erster Ordnung mit Residuum $\check{Q}=M_{\check{z}}^{-1}\check{P}M_{\check{z}}$, insbesondere gilt $\dim\check{Q}\check{E}=1$.

Um zurück auf $\{R(\lambda,A)\}$ zu schließen, wenden wir 1.2 (c) an: Wegen $\tilde{P}\tilde{E}\subseteq\check{E}$ ist die von $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ auf $\tilde{E}/\check{E}$ induzierte Pseudoresolvente holomorph in 0, und damit auf $\{\lambda\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\,\lambda>0\}$ gleichmäßig beschränkt. Das heißt, sie ist in jedem Punkt von $i\mathbb{R}$ holomorph fortsetzbar. Aus 1.2 (c) folgt, daß $\{\tilde{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Für das Residuum $\tilde{Q}$ gilt $\tilde{Q}_{|\check{E}}=\check{Q}$ und aus $\tilde{Q}(\tilde{E})\subseteq\check{E}$ folgt $\dim\tilde{Q}\tilde{E}=\dim\check{Q}\check{E}=1$.

Das gleiche Argument zeigt, daß $\{\hat{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ einen Pol erster Ordnung besitzt. Nennt man das Residuum $\hat{Q}$, dann gilt für alle $\hat{x}\in\hat{E}$:

$$|\hat{Q}\hat{x}|=\lim_{\mu\to 0}|\mu\hat{R}(\mu+i\alpha)\hat{x}|\leqq\lim_{\mu\to 0}\mu\hat{R}(\mu)|\hat{x}|=\hat{P}|\hat{x}|.$$

Daraus folgt $\hat{I}\subseteq\ker\hat{Q}$ und deshalb haben $\hat{Q}\hat{E}$ und $\tilde{Q}\tilde{E}$ die gleiche Dimension, denn $\tilde{Q}$ ist der von $\hat{Q}$ auf $\hat{E}/\hat{I}$ induzierte Operator.

Da die Vorschrift $T\mapsto\hat{T}$ einen isometrischen Algebrenhomomorphismus von $\mathscr{L}(E)$ in $\mathscr{L}(\hat{E})$ definiert, hat $\{\hat{R}(\lambda)\}$ in $i\alpha$ genau dann einen Pol erster Ordnung, wenn $\{R(\lambda,A)\}$ dies erfüllt. Da $\hat{E}$ ein Ultraprodukt ist, sind die Residuuen $\hat{Q}$ und Q von gleichem Rang. Damit haben wir gezeigt, daß jeder Punkt in $\sigma_+(A)$ ein Pol erster Ordnung mit geometrischer Vielfachheit 1 ist.

Beim Nachweis, daß $\sigma_+(A)$ eine Gruppe ist, verwenden wir bereits Bewiesenes. Ist nämlich $i\alpha$, $i\beta\in\sigma_+(A)$, dann gibt es $\check{z}$, $\check{w}\in\check{E}$, so daß

$$\check{R}(\lambda)=M_{\check{z}}^{-1}\check{R}(\lambda+i\alpha)M_{\check{z}}=M_{\check{w}}^{-1}\check{R}(\lambda+i\beta)M_{\check{w}}.$$

Daraus folgt

$$\check{R}(\lambda)=(M_{\check{w}}^{-1}M_{\check{z}})^{-1}\check{R}(\lambda+i\alpha-i\beta)M_{\check{w}}^{-1}M_{\check{z}}\qquad(\lambda\in D)$$

und somit hat $\{\check{R}(\lambda)\}$ auch in $i\alpha-i\beta$ einen Pol erster Ordnung. Man kann nun wie oben zurück auf $\{R(\lambda,A)\}$ schließen.

(a) Hat die Resolvente in 0 einen Pol beliebiger Ordnung, dann ist die Halbgruppe nach 2.3 (w)-auflösbar, das heißt es gibt eine $\{R(\lambda, A)\}$-invariante Idealkette $\{0\}=I_0\subseteq I_1\subseteq\ldots\subseteq I_n=E$. Die von $\{R(\lambda, A)\}$ auf $E_r:=I_r/I_{r-1}$ induzierte Pseudoresolvente $\{R_r(\lambda)\}$ hat in 0 einen Pol erster Ordnung, denn $\{\mu R_r(\mu)\colon \mu>0\}$ ist gleichmäßig beschränkt. Wegen 1.2 (c) genügt es zu zeigen, daß die Pseudoresolventen $\{R_r(\lambda)\}$ in $i\mathbb{R}$ nur Pole besitzen, und daß die Menge dieser Pole jeweils aus einer endlichen Vereinigung von Untergruppen besteht. Mit anderen Worten: Wir können annehmen, daß $\{R(\lambda, A)\}$ in 0 einen Pol erster Ordnung besitzt.

Das Residuum P ist dann eine positive Projektion, wir können sogar annehmen, daß P strikt positiv ist. Andernfalls sind die auf I und E/I induzierten Pseudoresolventen zu betrachten, wobei $I:=\{x\in E\colon P|x|=0\}$. Die strikte Positivität impliziert, daß PE ein Unterverband ([12], III.11.5) und damit isomorph zu $\mathbb{C}^n$ ([12], II.3.9 Cor. 1) ist. Es gibt dann eine Basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ von PE mit $e_i\wedge e_j=0$ $(i\neq j)$. Setzt man $e:=\sum e_i$, dann gilt $\overline{E_e}=\oplus\overline{E_{e_i}}$ ([12], III.1.2). Wegen $PE\subseteq\overline{E_e}$ ist die von $R(\lambda, A)$ auf $E/\overline{E_e}$ induzierte Pseudoresolvente holomorph in 0, und für die Einschränkungen von $R(\lambda, A)$ auf $\overline{E_{e_i}}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ sind die Voraussetzungen von Teil (b) erfüllt. Wendet man ein letztes Mal 1.2(c) an, dann folgt, daß $R(\cdot, A)$ in $i\mathbb{R}$ ausschließlich Pole hat und diese eine endliche Vereinigung von Untergruppen von $i\mathbb{R}$ bilden.

Ehe wir anhand eines Beispiels zeigen, daß man in der Voraussetzung des Satzes auf die Endlichdimensionalität des Residuums nicht verzichten kann, wollen wir zwei Bemerkungen machen: Eine genaue Analyse des Beweises von Teil (a) zeigt, daß die Anzahl der Untergruppen, aus denen sich das Randspektrum zusammensetzt, durch den Rang des Residuums beschränkt ist. Des weiteren kann man folgern, daß die Ordnungen der Pole des Randspektrums durch die Polordnung der Resolvente im Punkt $s(A)$ beschränkt sind (siehe auch [5]).

(2.6) *Beispiel.* Es sei (τ_n) eine Folge positiver, reeller Zahlen. Nun betrachte man für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Rotationshalbgruppe mit Periode τ_n auf Γ, das heißt $E_n:=C(\Gamma)$, $T_n(t):=R_{\tau_n}(t)$ $(t\geqq 0)$ (vgl. 1.9). Setzt man $E:=c_0-\oplus E_n=\{(f_n)\in\prod E_n\colon \lim_{n\to\infty}\|f_n\|=0\}$, $T(t)((f_n)):=(T_n(t)f_n)$, falls $(f_n)\in E$, $t\geqq 0$, dann ist $\{T(t)\}$ eine stark stetige Halbgruppe positiver Operatoren auf dem AM-Raum E. Der Fixraum der Halbgruppe (bzw. der Kern des Generators) ist unendlichdimensional. Ist 0 kein Häufungspunkt der Folge (τ_n), dann ist 0 ein Pol der Resolvente. Die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} i\frac{2\pi}{\tau_n}\mathbb{Z}$ liegt im Randspektrum der Halbgruppe. Wählt man die Folge so, daß $\{\tau_n\colon n\in\mathbb{N}\}$ im Intervall $[\pi, 2\pi]$ dicht liegt, dann gilt für das Randspektrum $\sigma_+(A)=\{i\alpha\colon \alpha\in\mathbb{R}, |\alpha|\geqq 1\}\cup\{0\}$. In diesem Fall ist 0 der einzige Pol im Randspektrum.

Während der eben geschilderte Fall nur von theoretischem Interesse ist, liegt die im folgenden Beispiel behandelte Situation manchen Anwendungen zugrunde, beispielsweise in der Transporttheorie.

(2.7) *Beispiel.* A sei der Generator einer positiven Halbgruppe $\{T(t)\}$ auf dem Banachverband E und $K\in\mathscr{L}(E)$ ein positiver, kompakter Operator. Dann ist

$A+K$ der Generator einer positiven Halbgruppe $\{S(t)\}$ und es gilt $T(t) \leqq S(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$ ([3], VIII.1.19).

Aus der Integraldarstellung der Resolvente (1.12) ergibt sich $R(\mu, A+K) \geqq R(\mu, A)$, falls $\mu \in \mathbb{R}$ groß ist, und daraus kann man $s(A) \leqq s(A+K)$ folgern. Gilt sogar $s(A) < s(A+K)$, dann erfüllt die Halbgruppe $\{S(t)\}$ die Voraussetzung von Theorem 2.5.

Wir beweisen dies in zwei Schritten: Zunächst wird gezeigt, daß $s(A+K)$ ein isolierter Punkt in $\sigma(A+K)$ ist. Dann zeigen wir, daß das Residuum der Laurentreihe von $R(\cdot, A+K)$ in $s(A+K)$ endlichen Rang hat.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > s(A)$ gilt $(\lambda-(A+K)) = (\lambda-A)(1-R(\lambda, A)K)$. Damit liegt λ in der Resolventenmenge von $A+K$, sofern $1-R(\lambda, A)K$ invertierbar ist. Da dies für hinreichend große λ der Fall ist, folgt aus ([3], VII.6.13), daß $\sigma(A+K) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}: \operatorname{Re}\lambda > s(A)\}$ aus isolierten Punkten besteht, insbesondere ist die Spektralschranke $s(A+K)$ ein solcher. Wählt man nun einen kleinen Kreis Γ um $s(A+K)$, dann ergibt sich das Residuum als

$$P = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma R(z, A+K)\,dz = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (1-R(z, A)K)^{-1} R(z, A)\,dz.$$

Wenn man nun die Identität $(1-R(z, A)K)^{-1} = 1 + (1-R(z, A)K)^{-1} R(z, A)K$ einsetzt und den Cauchyschen Integralsatz anwendet, dann folgt

$$P = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (1-R(z, A)K)^{-1} R(z, A)KR(z, A)\,dz.$$

Da der Integrand für jedes $z \in \Gamma$ ein kompakter Operator ist, ist P eine kompakte Projektion und als solche von endlichem Rang.

Setzen wir weiterhin $s(A) < s(A+K)$ voraus, dann folgt aus Theorem 2.5, daß das Randspektrum der Halbgruppe $\{S(t)\}$ ausschließlich aus Polen besteht, und zwar aus unendlich vielen oder einem einzigen. Tatsächlich liegt der zweite Fall vor. Andernfalls gäbe es Folgen $(v_n) \subseteq \mathbb{R}$, $(x_n) \subseteq D(A)$ mit $|v_n| \to \infty$, $\|x_n\| = 1$ und $[(s(A+K)+iv_n)-(A+K)]x_n = 0$ oder $R(\lambda_n, A)Kx_n = x_n$, wobei $\lambda_n := s(A+K)+iv_n$. Da K kompakt ist, können wir annehmen, daß die Folge (Kx_n) gegen ein Element $y \in E$ konvergiert und aus

$$\|R(\lambda_n, A)y - x_n\| = \|R(\lambda_n, A)(y - Kx_n)\| \leqq \|R(s(A+K), A)\| \cdot \|y - Kx_n\|$$

folgt $\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda_n, A)y\| = 1$. Dies steht im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\lim_{|v|\to\infty} R(s(A+K)+iv, A)x = 0$ für alle $x \in E$. Letzteres folgt aus der Gleichstetigkeit der Familie $\{R(s(A+K)+iv, A): v \in \mathbb{R}\}$ und der für alle $x \in D(A)$ gültigen Beziehungen $R(\lambda, A)x = \lambda^{-1}(R(\lambda, A)Ax + x)$.

Literatur

1. Derndinger, R.: Über das Spektrum positiver Generatoren. Math. Z. **172**, 281–293 (1980)
2. Derndinger, R., Nagel, R.: Der Generator stark stetiger Verbandshalbgruppen auf $C(X)$ und dessen Spektrum. Math. Ann. **245**, 159–177 (1979)

3. Dunford, N., Schwartz, J.T.: Linear Operators, Part I. New York: Wiley 1958
4. Evans, D.E.: On the Spectrum of a One-Parameter Strongly Continuous Representation. Math. Scand. **39**, 80–82 (1976)
5. Greiner, G., Voigt, J., Wolff, M.: On the Spectral Bound of the Generator of Semigroups of Positive Operators. J. Operator Theory **5**, 245–256 (1981)
6. Hille, E., Phillips, R.S.: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **31**. Providence, R.I.: American Mathematical Society 1957
7. Lotz, H.P.: Über das Spektrum positiver Operatoren. Math. Z. **108**, 15–32 (1968)
8. Nagel, R.: Unbeschränkte Operatoren auf Banachverbänden und C^*-Algebren. Skriptum zur Vorlesung. Tübingen 1978/79
9. Olesen, D.: On Spectral Subspaces and their Applications to Automorphism Groups. Symposia Mathematica **20**, 253–296 (1976)
10. Pazy, A.: Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. University of Maryland Lecture Notes **10**, 1974
11. Rudin, W.: Real and Complex Analysis. London-New York: McGraw-Hill 1970
12. Schaefer, H.H.: Banach Lattices and Positive Operators. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
13. Schaefer, H.H.: Ordnungsstrukturen in der Operatorentheorie. Jber. Deutsch. Math-Ver. **82**, 33–50 (1980)
14. Uhlig, H.: Derivationen und Verbandshalbgruppen. Dissertation. Tübingen 1979
15. Yosida, K.: Funktional Analysis (5^{th} ed.). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1978

Eingegangen am 12. Februar 1981