## Werk

**Titel:** Offenheit der Versalität in der analytischen Geoemtrie.

**Autor:** Bingener, Jürgen

**Jahr:** 1980

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0173|log29


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 173, 241–281 (1980)

Mathematische Zeitschrift
© by Springer-Verlag 1980

# Offenheit der Versalität in der analytischen Geometrie

Jürgen Bingener

Fachbereich Mathematik der Universität, Universitätsstraße 31, D-8400 Regensburg, Bundesrepublik Deutschland

**Inhalt**

**Einleitung** . . . . . 241

Kapitel I. . . . . 243
§1. Gruppoide über komplexen Räumen . . . . . 243
§2. Über infinitesimale Erweiterungen . . . . . 248
§3. Versalität und formale Versalität . . . . . 251
§4. Offenheit der Versalität . . . . . 255

Kapitel II. Anwendungen . . . . . 261
§5. Vorbereitungen: Kotangentenkomplexe . . . . . 261
§6. Einige Hilfssätze über Kohomologiefunktoren . . . . . 269
§7. Deformationen von kompakten komplexen Räumen und isolierten Singularitäten . . . 272
§8. Deformationen kohärenter Moduln . . . . . 274
§9. Deformationen von Prinzipalbündeln . . . . . 276
§10. Anhang. Der Satz von Fischer-Grauert . . . . . 279

Literatur . . . . . 281

## Einleitung

In der komplex-analytischen Deformationstheorie stehen zur Konstruktion verseller Deformationen vor allem zwei mächtige Methoden zur Verfügung, nämlich die Technik der banachanalytischen Räume von Douady und die Potenzreihenmethode von Grauert. Die erstere liefert im Gegensatz zur zweiten üblicherweise die *Offenheit der Versalität* gleich mit, eine Tatsache, die beispielsweise bei der Konstruktion von Modulräumen von entscheidender Bedeutung ist.

Nun hat Artin in [3] ganz allgemein bewiesen, daß die (formale) Versalität in der algebraischen Geometrie für ein Gruppoid $F$ unter sehr schwachen Voraussetzungen an $F$ eine offene Eigenschaft ist.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß man dieses Resultat in die analytische Geometrie übertragen kann. Genauer zeigen wir (Satz (4.1)):

*Ist $F$ ein Gruppoid über der Kategorie* (An/S) *der komplexen Räume über einem komplexen Raum $S$, das die Schlessingerbedingungen erfüllt und eine „schö-*

0025-5878/80/0173/0241/$08.20

*ne" Obstruktionstheorie* O *besitzt, so ist für jedes Objekt* $a \in F(T)$ *die Menge der Punkte* $t \in T$, *in denen a formal versell ist, Zariski-offen in T.*

(Für eine präzise Formulierung vgl. man loc. cit.) Die Anregung zu diesem im Sommer 78 erhaltenen Resultat verdanke ich vor allem einer Frage von Knorr. Kurz darauf hat dann Flenner einen weiteren Beweis für diesen Satz gegeben, unter etwas schwächeren Voraussetzungen an die Tangential- und Obstruktionsmoduln, aber etwas stärkeren Voraussetzungen an $F$, die nicht in allen Anwendungen erfüllt sind.

Der Beweis des obigen Satzes ist rein algebraisch, man benötigt also keine Konvergenzüberlegungen. Die Voraussetzungen lassen sich in den meisten Fällen sehr einfach verifizieren. Wir zeigen ferner, *daß die formale Versalität unter geeigneten Voraussetzungen an F bereits die Versalität impliziert* (Satz (3.2)). Dies ist eine leichte Verallgemeinerung eines Resultates von Schuster aus [27]. Insgesamt ist also auch die Versalität für hinreichend „schöne" Gruppoide $F$ eine Zariski-offene Eigenschaft.

Im zweiten Kapitel wenden wir diese Resultate auf einige konkrete Fälle an. Für Deformationen von kompakten komplexen Räumen erhalten wir die folgende Aussage (vgl. (7.1)): *Ist* $X \to T$ *eine eigentliche flache holomorphe Abbildung, so ist die Menge der Punkte* $t \in T$, *für die* $(X, X_t) \to (T, t)$ *eine verselle Deformation von* $X_t$ *ist, Zariski-offen in T.* Ähnliche Sätze werden für Deformationen von isolierten Singularitäten, kohärenten Moduln und Prinzipalbündeln auf kompakten komplexen Räumen bewiesen.

Sowohl im Beweis des Hauptresultats als auch bei den Anwendungen spielt der *Kotangentenkomplex* eine wesentliche Rolle. Diese Theorie wurde im analytischen Kontext von Palamodov in voller Allgemeinheit entwickelt, vgl. [22]. In [9] hat dann Flenner eine umfassende Darstellung gegeben, und zwar gleich für den allgemeineren Fall von Deformationen von Abbildungen. In §5 haben wir die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse dieser Theorie für den Fall von Deformationen von Räumen zusammengestellt. Besonderer Wert wurde dabei auf eine möglichst explizite Angabe der wichtigen Abbildungen gelegt.

In einem Anhang (§10) zeigen wir, daß der Satz von Fischer-Grauert ([7, 25]) für jede „schöne" Deformationstheorie gilt. Als Korollar erhalten wir neben dem klassischen Resultat die folgende Aussage: *Ist* $\mathscr{F}$ *ein kohärenter Modul auf einem Produkt* $X \times T$ *komplexer Räume, der eigentlich und flach über T liegt, und dessen Fasern* $\mathscr{F}_t$, $t \in T$, *paarweise isomorph sind, so ist* $\mathscr{F}$ *lokaltrivial bezüglich T, falls T überdies reduziert ist.*

Es sei noch auf einige *Bezeichnungen* hingewiesen. Für einen komplexen Raum $S$ sei (An/S) die Kategorie der komplexen Räume über $S$. Ist $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ der reduzierte einpunktige Raum, so schreiben wir (An) anstelle von (An/S). Für einen komplexen Raum $X$ bezeichne $\mathrm{Coh}(X)$ wie üblich die Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln. Ist $\mathscr{F}$ ein solcher Modul, so sei $X[\mathscr{F}] := (X, \mathcal{O}_X \amalg \mathscr{F})$ die triviale Erweiterung von $X$ durch $\mathscr{F}$. Hat man eine beliebige infinitesimale Erweiterung $X \to X'$ durch $\mathscr{F}$ und einen $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus $\mathscr{F} \xrightarrow{u} \mathscr{G}$ gegeben, so sei $X' \amalg_u \mathscr{G}$ das Bild dieser Erweiterung bezüglich $u$. Für einen Punkt $x \in X$ ist $k(x)$ der Restkörper von $\mathcal{O}_{X,x}$, den wir auch als kohärenten Modul auffassen. Schließlich sei $\mathscr{C}_\Lambda$ für eine analytische $\mathbb{C}$-Algebra $\Lambda$ die Kategorie aller analytischen $\Lambda$-Algebren.

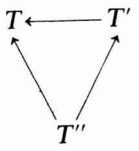
# Kapitel I

## §1. Gruppoide über komplexen Räumen

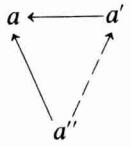
Sei $C$ eine Kategorie. Ein *Gruppoid über* $C$ besteht aus einer Kategorie $F$ zusammen mit einem kovarianten Funktor $p: F \to C$, so daß gilt:

(1) **(Existenz von Basiserweiterungen.)** *Zu jedem Morphismus* $T' \xrightarrow{\phi} T$ *in* $C$ *und jedem* $a \in F$ *mit* $p(a) = T$ *gibt es einen Pfeil* $a' \to a$ *in* $F$, *der* $\phi$ *liftet.*

(2) **(Eindeutigkeit.)** *Ist*




*ein kommutatives Diagramm in* $C$, *so kann jede partielle Liftung nach* $F$ *von durchgezogenen Pfeilen*



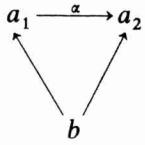

*durch einen eindeutig bestimmten gestrichelten Pfeil kommutativ ergänzt werden.*

Ist $T \in C$ und sind $a_1, a_2$ aus $F(T) := p^{-1}(T)$, so sei $\mathrm{Hom}_{F(T)}(a_1, a_2)$ die Menge aller $\psi$ aus $\mathrm{Hom}_F(a_1, a_2)$ mit $p(\psi) = \mathrm{id}_T$. Dann folgt aus (1), daß die Faser $F(T)$ von $p$ in $T$ mit den so definierten Morphismen ein Gruppoid im üblichen Sinne ist, d.h. eine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind. Jeder Morphismus $T' \xrightarrow{\phi} T$ in $C$ gibt wie folgt Anlaß zu einem Funktor „*inverses Bild*“

$$\phi^*: F(T) \to F(T'):$$

Für jedes $a \in F(T)$ wählen wir ein $a' \in F(T')$ aus, zu dem es eine Abbildung $a' \to a$ gibt, die über $T' \xrightarrow{\phi} T$ liegt, und bezeichnen dieses Element mit $\phi^*(a)$. Besteht über $\phi$ kein Zweifel, so schreiben wir auch $a_{T'}$ anstelle von $\phi^*(a)$. Wegen (2) erhält man so einen Funktor. Dieser ist „im wesentlichen“ unabhängig von der speziellen Wahl von $a' = \phi^*(a)$, da $a'$ bis auf einen eindeutigen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist. Bei einer anderen Wahl der inversen Bilder hat man also einen kanonischen Isomorphismus zwischen den erhaltenen Funktoren. Sind $T'' \xrightarrow{\phi'} T'$ und $T' \xrightarrow{\phi} T$ zwei Morphismen, so erhalten wir daher einen kanonischen Funktorisomorphismus $\phi'^* \phi^* \xrightarrow{\sim} (\phi\phi')^*$.

Zu vorgegebenem $b \in F(Z)$ und $Z \xrightarrow{\phi} T$ in $C$ bezeichne $F_b(T)$ das Gruppoid aller Abbildungen $b \to a$, die über $\phi$ liegen. Ein Morphismus in $F_b(T)$ sei dabei eine Abbildung $a_1 \xrightarrow{\alpha} a_2$, so daß




kommutiert und $p(\alpha)=\mathrm{id}_T$ ist. - Sei $\bar{F}(T)$ bzw. $\bar{F}_b(T)$ die Menge der Isomorphieklassen von $F(T)$ bzw. $F_b(T)$. Dann sind

$$\bar{F}\colon C\to(\text{Mengen}),\ T\mapsto\bar{F}(T),$$

bzw.

$$\bar{F}_b\colon Z\backslash C\to(\text{Mengen}),\ T\mapsto\bar{F}_b(T),$$

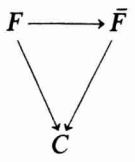
in natürlicher Weise Funktoren.

Sind $a, b$ Elemente aus $F(T)$, so bezeichne $\mathrm{Isom}(a, b)$ den Funktor auf $C/T$, der einem Objekt $Z$ über $T$ die Menge $\mathrm{Hom}_{F(Z)}(a_Z, b_Z)$ zuordnet. Ist $a=b$, so schreiben wir $\mathrm{Aut}(a)$ anstelle von $\mathrm{Isom}(a, b)$.

Dual erklärt man den Begriff des *Kogruppoids* über $C$. Genau dann ist $F\xrightarrow{p} C$ ein Kogruppoid, wenn $F^0\xrightarrow{p^0} C^0$ ein Gruppoid im obigen Sinne ist. Hierbei bezeichnet $F^0$ die zu $F$ duale Kategorie und analog für $C$. In einem Kogruppoid spricht man von „direktem Bild" anstelle von „inversem Bild" und verwendet die Bezeichnung $\phi_*$ anstelle von $\phi^*$.

(1.1) **Beispiele.** (1) Jeder kontravariante Funktor $G\colon C\to(\text{Mengen})$ gibt Anlaß zu einem Gruppoid über $C$, das wir wieder mit $G$ bezeichnen. Seine Objekte sind die Elemente $a\in G(T)$, $T\in C$. Ist $a'\in G(T')$ ein weiteres Objekt, so ist $\mathrm{Hom}_G(a', a)$ die Menge aller $\phi\in\mathrm{Hom}(T', T)$ mit $G(\phi)(a)=a'$. Es ist $p\colon G\to C$ der kanonische Funktor mit $p(a)=T$, falls $a\in G(T)$ ist. Analog definiert jeder kovariante Funktor ein Kogruppoid über $C$.

(2) Man hat einen kanonischen Funktor $F\to\bar{F}$, der




kommutativ macht und surjektiv ist. Dabei geht $a\in F$ auf die Isomorphieklasse $[a]$ von $a$. Für $a, a'\in F$ ist die Abbildung $\mathrm{Hom}(a', a)\to\mathrm{Hom}([a'], [a])$ surjektiv. Genau dann ist $F\to\bar{F}$ eine Äquivalenz von Kategorien, wenn für jedes $a\in F(T)$ die Identität von $a$ der einzige Isomorphismus ist, der über $\mathrm{id}_T$ liegt.

(3) Sei $C=(\mathrm{An})$ die Kategorie aller komplexen Räume und $F$ die folgende Kategorie über (An). Ein Objekt in $F$ ist eine flache holomorphe Abbildung $X\to T$. Ist $X'\to T'$ ein weiteres Objekt, so sei $\mathrm{Hom}_F(X', X)$ die Menge aller Paare von holomorphen Abbildungen $X'\to X$, $T'\to T$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ T' & \longrightarrow & T \end{array}$$

kartesisch ist, und es sei $p(X \to T) = T$. Dann ist $F \xrightarrow{p} (\mathrm{An})$ ein Gruppoid.

Es bezeichne (An/S) wie üblich die Kategorie der komplexen Räume über einem festen komplexen Raum $S$. Eine *Deformationssituation* in (An/S) ist ein Paar

$$T_0 \to T \to T'$$

von infinitesimalen Erweiterungen in (An/S) derart, daß $\mathrm{Kern}(\mathcal{O}_{T'} \to \mathcal{O}_T)$ ein Modul über $\mathcal{O}_{T_0}$ ist. Die Deformationssituationen bilden in naheliegender Weise eine Kategorie.

Sei nun $F$ ein Gruppoid über (An/S). Für $a \in F(T)$ und $U \subseteq T$ offen verwenden wir dann die Bezeichnung $a|U := a_U$. Wir listen im folgenden einige Bedingungen an $F$ auf.

(1.2) **Bedingung** (S1). (a) *Sei*

$$\begin{array}{ccccc} & & T'' & & \\ & & \uparrow & & \\ T_0 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & T' \end{array}$$

*ein Diagramm in* (An/S), *wobei die untere Zeile eine Deformationssituation und* $T_0 \to T''$ *eine abgeschlossene Einbettung ist. Dann ist für* $a \in F(T)$ *die kanonische Abbildung*

$$\bar{F}_a(T' \amalg_T T'') \to \bar{F}_a(T') \times \bar{F}_a(T'')$$

*surjektiv.*[1])

(b) *Seien* $T_0 \to T$ *eine abgeschlossene Einbettung von komplexen Räumen über* $S$, $\mathcal{M}$ *ein kohärenter* $\mathcal{O}_{T_0}$*-Modul und* $a \in F(T)$ *ein Element mit Urbild* $a_0 \in F(T_0)$. *Dann ist die Abbildung*

$$\bar{F}_a(T[\mathcal{M}]) \to \bar{F}_{a_0}(T_0[\mathcal{M}])$$

*bijektiv.*

Die Bedingung (S1) wird von dem folgenden stärkeren Axiom impliziert, das in vielen in der Praxis auftretenden Fällen erfüllt ist.

(1.3) **Bedingung** (S1′). *Mit den Bezeichnungen aus* (1.2) (a) *ist der Funktor*

$$F_a(T' \amalg_T T'') \to F_a(T') \times F_a(T'')$$

*eine Äquivalenz von Kategorien.*

[1] Die gefaserte Summe $T' \amalg_T T''$ ist unter den getroffenen Voraussetzungen wieder ein komplexer Raum, man vgl. hierzu etwa [20], (1.8)

Gilt (S1) (b), so beträgt $D_{a_0}(\mathscr{M}) = D^F_{a_0}(\mathscr{M}) := \bar{F}_{a_0}(T_0[\mathscr{M}])$ eine kanonische $\Gamma(T_0, \mathscr{O}_{T_0})$-Modulstruktur, die überdies funktoriell in $(T_0, \mathscr{M})$ ist. Ist darüber hinaus (S1) (a) erfüllt, so operiert die additive Gruppe $D_{a_0}(\mathscr{M})$ transitiv auf $\bar{F}_a(T')$. Die nächsten Bedingungen beziehen sich auf diesen Modul.

(1.4) **Bedingung** (S2). *Die durch die Prägarbe $U \mapsto D_{a_0|U}(\mathscr{M}|U)$ für $U \subseteq T_0$ offen definierte Garbe $\mathscr{D}_{a_0}(\mathscr{M})$ auf $T_0$ ist kohärent und die kanonische Abbildung*

$$D_{a_0|U}(\mathscr{M}|U) \to \Gamma(U, \mathscr{D}_{a_0}(\mathscr{M}))$$

*ist bijektiv, falls $U \subseteq T_0$ offen und Steinsch ist.*

(1.5) **Bedingung** (S3). (a) *Für jeden Punkt $t \in T_0$ ist der kanonische Homomorphismus*

$$\widehat{\mathscr{D}_{a_0}(\mathscr{M})}_t \to \varprojlim_n \mathscr{D}_{a_0}(\mathscr{M}/\mathfrak{m}_t^n \mathscr{M})$$

*bijektiv. Hierbei bezeichnet $\mathfrak{m}_t$ das maximale Ideal von $\mathscr{O}_{T_0,t}$, das wir auch als Idealgarbe auffassen, und $\hat{}$ das $\mathfrak{m}_t$-adische Komplettieren.*

(b) *Sei $T_0$ reduziert. Dann existiert eine dichte Zariski-offene Menge $U \subseteq T_0$ derart, daß die kanonische Abbildung*

$$\mathscr{D}_{a_0}(\mathscr{M}) \otimes k(t) \to \mathscr{D}_{a_0}(\mathscr{M} \otimes k(t))$$

*bijektiv ist für jeden Punkt $t \in U$.*

Hierbei ist $k(t)$ der Restekörper von $\mathscr{O}_{T_0,t}$, den wir auch als kohärenten Modul auffassen. – Von entscheidender Bedeutung für die späteren Betrachtungen ist die genaue Kenntnis der Hindernisse beim Erweitern von Deformationen. Dies führt auf folgende Begriffsbildung.

Eine *Obstruktionstheorie* $O = O^F$ für $F$ besteht aus folgenden Daten:

(1) *Für jedes $a \in F(T)$ ist ein Funktor*

$$O_a : \mathrm{Coh}(T) \to (\Gamma(T, \mathscr{O}_T)\text{-Moduln})$$

*gegeben. Die zugehörigen Abbildungen von $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_T}(\mathscr{M}, \mathscr{M}')$ in den Modul $\mathrm{Hom}_{\Gamma(T,\mathscr{O}_T)}(O_a(\mathscr{M}), O_a(\mathscr{M}'))$ seien dabei $\Gamma(T, \mathscr{O}_T)$-linear.*

(2) *Ist $T \to T'$ eine infinitesimale Erweiterung durch einen kohärenten $\mathscr{O}_T$-Modul $\mathscr{M}$ und $a \in F(T)$, so ist ein Element $o_a(T') \in O_a(\mathscr{M})$ gegeben, das genau dann Null ist, wenn $\bar{F}_a(T')$ nicht leer ist. Überdies ist $o_a(T')$ funktoriell in $T'$.*

(3) *Sei $a \in F(T)$ und $\mathscr{M}$ ein kohärenter $\mathscr{O}_T$-Modul. Für jede offene Menge $U \subseteq T$ sind dann $\Gamma(T, \mathscr{O}_T)$-Homomorphismen*

$$O_a(\mathscr{M}) \to O_{a|U}(\mathscr{M}|U)$$

*gegeben, welche funktoriell in $\mathscr{M}$ und transitiv sind sowie in der Situation von* (2) $o_a(T')$ *auf* $o_{a|U}(T'|U)$ *abbilden.*

Wir formulieren nun zwei Bedingungen an die Obstruktionstheorie O für $F$, die zu (S2) und (S3) (b) analog sind.

(1.6) **Bedingung** (O1). *Die durch die Prägarbe* $U \mapsto O_{a|U}(\mathcal{M}|U)$ *für* $U \subseteq T$ *offen definierte Garbe* $\mathcal{O}_a(\mathcal{M})$ *ist kohärent und die kanonische Abbildung* $O_{a|U}(M|U) \to \Gamma(U, \mathcal{O}_a(\mathcal{M}))$ *ist bijektiv, falls* $U \subseteq T$ *offen und Steinsch ist.*

(1.7) **Bedingung** (O2). *Ist* $T_0$ *ein reduzierter abgeschlossener Unterraum von* $T$ *und ist* $\mathcal{M}$ *ein* $\mathcal{O}_{T_0}$*-Modul, so gibt es eine dichte Zariski-offene Menge* $U$ *in* $T_0$ *derart, daß die kanonische Abbildung*

$$\mathcal{O}_a(\mathcal{M}) \otimes k(t) \to \mathcal{O}_a(\mathcal{M} \otimes k(t))$$

*injektiv ist für jeden Punkt* $t \in U$.

(1.8) **Bemerkungen.** (1) Mit $\mathscr{C}_S$ bezeichnen wir im folgenden die Kategorie der Schnittringe Steinscher Kompakta über dem komplexen Raum $S$ mit den $S$-Homomorphismen als Morphismen. Ein Objekt von $\mathscr{C}_S$ wird also gegeben durch ein Paar $(T, K)$ bestehend aus einem komplexen Raum $T$ über $S$ und einem Steinschen Kompaktum $K \subseteq T$. Die zugehörige Algebra ist dann $A_K = \Gamma(K, \mathcal{O}_T)$. Ist $(T', K')$ ein weiteres solches Paar, so ist ein Morphismus von $A_K$ in $A_{K'}$ ein $\mathbb{C}$-Homomorphismus $A_K \to A_{K'}$, für den das zugehörige Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (T', K') & \longrightarrow & (T, K) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & S & \end{array}$$

von Raumkeimen kommutiert, vgl. hierzu auch (2.1). – Ist $\Lambda$ eine (konvergente) analytische $\mathbb{C}$-Algebra, so sei $\mathscr{C}_\Lambda$ die Kategorie aller konvergenten analytischen $\Lambda$-Algebren.

(2) Sei $G$ ein Kogruppoid über $\mathscr{C}_S$ (bzw. über $\mathscr{C}_{\mathcal{O}_{S,s}}$, wobei $s \in S$ ein fester Punkt ist). Dann definiert man analog zu dem obigen die Bedingungen (S1) und (S1′): Ist

$$\begin{array}{ccccc} & & A'' & & \\ & & \downarrow & & \\ A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A_0 \end{array}$$

ein Diagramm in $\mathscr{C}_S$ (bzw. $\mathscr{C}_{\mathcal{O}_{S,s}}$), wobei die untere Zeile eine Deformationssituation und $A'' \to A_0$ surjektiv ist, so besagt (S1) (a), daß die Abbildung $\bar{G}_a(A' \times_A A'') \to \bar{G}_a(A') \times \bar{G}_a(A'')$ für $a \in G(A)$ surjektiv ist. (S1) (b) beinhaltet, daß für eine Surjektion $A \to A_0$ und einen endlichen $A_0$-Modul $M$ die Abbildung $\bar{G}_a(A[M]) \to \bar{G}_{a_0}(A_0[M])$ bijektiv ist; hierbei ist $a_0 \in G(A_0)$ das Bild von $a \in G(A)$. Bedingung (S1′) besagt, daß in der Situation von (S1) (a) der Funktor von $G_a(A' \times_A A'')$ in $G_a(A') \times G_a(A'')$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Ist $M$ ein endlicher $A_0$-Modul, so setzen wir $D_{a_0}(M) := D^G_{a_0}(M) := \bar{G}_{a_0}(A_0[M])$ für $a_0 \in G(A_0)$.

Wir sagen, daß $G$ die Bedingung (S2) erfüllt, wenn $D_{a_0}(M)$ ein endlicher $A_0$-Modul ist. Definitionsgemäß gilt (S3) für $G$, wenn die kanonische Abbildung von $D_{a_0}(M) \otimes_{A_0} \hat{A}_0$ in $\varprojlim_n D_{a_0}(M/\mathfrak{m}(t)^n M)$ bijektiv ist für jeden Punkt $t$ aus dem

Maximalspektrum $\mathrm{Spm}(A_0)$. Hierbei ist $\mathfrak{m}(t)$ das zu $t$ gehörige maximale Ideal und $\hat{A}_0$ die $\mathfrak{m}(t)$-adische Komplettierung von $A_0$. Ist die Basiskategorie $\mathscr{C}_S$, so fordern wir zusätzlich, daß bei reduziertem $A_0$ eine dichte Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathrm{Spm}(A_0)$ existiert derart, daß $\mathrm{D}_{a_0}(M) \otimes k(t) \to \mathrm{D}_{a_0}(M \otimes k(t))$ bijektiv ist für jeden Punkt $t \in U$, falls überdies das zu $A_0$ gehörige Steinsche Kompaktum einen nichtleeren offenen Kern hat.

(3) Sei $G$ wie in (2). Der Begriff der *Obstruktionstheorie* O für $G$ wird ähnlich zu obigem definiert. Für jedes $a \in G(A)$ ist also ein Funktor $\mathrm{O}_a$ der Kategorie der endlichen $A$-Moduln in die Kategorie der $A$-Moduln gegeben, so daß die zugehörigen Abbildungen von $\mathrm{Hom}_A(M, M')$ in $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{O}_a(M), \mathrm{O}_a(M'))$ $A$-linear sind. Ist $A' \to A$ eine infinitesimale Erweiterung in $\mathscr{C}_S$ (bzw. $\mathscr{C}_{\mathcal{O}_{S,s}}$) durch einen endlichen $A$-Modul $M$ und $a \in G(A)$, so ist ein Element $\mathrm{o}_a(A')$ aus $\mathrm{O}_a(M)$ gegeben, welches genau dann Null ist, wenn $\bar{G}_a(A')$ nicht leer ist.

Das Axiom (O1) besagt dann, daß $\mathrm{O}_a(M)$ ein endlicher $A$-Modul ist. (O2) definieren wir nur für den Fall $\mathscr{C}_S$. Die Forderung lautet: Ist $A_0$ ein reduzierter Quotient von $A$ und $M$ ein endlicher $A_0$-Modul, so existiert eine dichte Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathrm{Spm}(A_0)$ derart, daß $\mathrm{O}_a(M) \otimes k(t) \to \mathrm{O}_a(M \otimes k(t))$ injektiv ist für jeden Punkt $t \in U$, *falls überdies das zu* $A_0$ *gehörige Steinsche Kompaktum einen nichtleeren offenen Kern hat.*

(4) Es sei nun $F$ ein Gruppoid über (An/S). Ist $K \subseteq T$ ein Steinsches Kompaktum in dem komplexen Raum $T$ über $S$ mit Schnittring $A = A_K = \Gamma(K, \mathcal{O}_T)$, so setzen wir

$$G(A) := \varinjlim_U F(U)^0;$$

hierbei ist der induktive Limes über alle offenen Umgebungen $U$ von $K$ zu erstrecken. Man erhält so ein Kogruppoid $G$ über $\mathscr{C}_S$. Offenbar erfüllt mit $F$ auch $G$ die Bedingung (S1) bzw. (S1′) bzw. (S2) bzw. (S3).

Ist für $F$ eine Obstruktionstheorie O gegeben, so erhält man hieraus in kanonischer Weise eine Obstruktionstheorie für $G$: Ist $A \in \mathscr{C}_S$ und $K \subseteq T$ ein Steinsches Kompaktum mit $\Gamma(K, \mathcal{O}_T) = A$ sowie $M$ ein endlicher $A$-Modul, so setzen wir für $a \in G(A)$

$$\mathrm{O}_a(M) := \varinjlim_{U \supseteq K} \mathrm{O}_{\tilde{a}|U}(\mathcal{M}|U);$$

hierbei ist $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_T$-Modul mit $\Gamma(K, \mathcal{M}) = M$ und $\tilde{a} \in F(T)$ ein Repräsentant von $a$ (diese Daten existieren nach eventueller Verkleinerung von $T$ als Umgebung von $K$).

Die Eigenschaften (O1) und (O2) übertragen sich von $F$ auf $G$. Erfüllt die Obstruktionstheorie von $F$ die Bedingung (O1), so haben die Moduln $\mathrm{O}_a(M)$ überdies die folgende Eigenschaft: Ist $M \to M'$ ein Homomorphismus endlicher $A$-Moduln und $f \in A$ derart, daß $M_f \to M'_f$ ein Isomorphismus ist, so ist auch $\mathrm{O}_a(M)_f \to \mathrm{O}_a(M')_f$ bijektiv.

## §2. Über infinitesimale Erweiterungen

In diesem Paragraphen stellen wir einige Aussagen zur späteren Verwendung bereit.

(2.1) **Lemma.** *Seinen* $X \xrightarrow{p} S$ *und* $Y \xrightarrow{q} S$ *holomorphe Abbildungen und* $K \subseteq X$, $L \subseteq Y$, $Q \subseteq S$ *Steinsche Kompakta mit* $p(K) \subseteq Q$ *und* $q(L) \subseteq Q$. *Dann ist die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_S((X,K),(Y,L)) \to \mathrm{Hom}_{\Gamma(Q,\mathcal{O}_S)}(\Gamma(L,\mathcal{O}_Y),\Gamma(K,\mathcal{O}_X))$$

*bijektiv.*

*Beweis.* In der obigen Aussage bezeichnet $\mathrm{Hom}_S((X,K),(Y,L))$ die Menge der $S$-Morphismen des Keimes $(X,K)$ mit Werten in $Y$, die $K$ in $L$ abbilden. Zu jeder solchen Abbildung $f$ gehört ein $\Gamma(Q,\mathcal{O}_S)$-Algebrahomomorphismus $\Gamma(f^*)$ von $\Gamma(L,\mathcal{O}_Y)$ in $\Gamma(K,\mathcal{O}_X)$, und wir haben zu zeigen, daß die Abbildung $f \mapsto \Gamma(f^*)$ bijektiv ist. Wir dürfen dazu sofort annehmen, daß $Y$ ein abgeschlossener analytischer Unterraum von $S \times \mathbb{C}^n$ ist. Weil $L$, als Teilmenge von $S \times \mathbb{C}^n$ aufgefaßt, ebenfalls ein Steinsches Kompaktum ist, vgl. etwa [29], genügt es sogar, den Fall $Y = S \times \mathbb{C}^n$ zu behandeln.

Dann ist ein Morphismus $f$ wie oben gegeben durch ein $n$-Tupel $(f_1,\ldots,f_n)$ aus $\Gamma(K,\mathcal{O}_X)^n$ mit $(p,f_1,\ldots,f_n)(K) \subseteq L$. Wegen $f_i = \Gamma(f^*)(z_i)$ zeigt dies bereits die Injektivität; hierbei sind $z_i$, $1 \leqq i \leqq n$, die Koordinaten des $\mathbb{C}^n$. Seien umgekehrt $\phi$ ein $\Gamma(Q,\mathcal{O}_S)$-Homomorphismus von $\Gamma(L,\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n})$ in $\Gamma(K,\mathcal{O}_X)$, $f_i := \phi(z_i)$ für $1 \leqq i \leqq n$ und $f$ der durch $(f_1,\ldots,f_n)$ definierte $S$-Morphismus. Dann gilt offenbar $f(K) \subseteq L$. Aus dem Krullschen Durchschnittssatz folgt nun leicht, daß $\phi = \Gamma(f^*)$ ist. Daher ist die betrachtete Abbildung auch surjektiv.

Sei $X$ ein komplexer Raum und $K \subseteq X$ ein Steinsches Kompaktum mit Schnittring $A := \Gamma(K,\mathcal{O}_X)$. Wir wollen eine infinitesimale Erweiterung $A' \to A$ von $A$ kurz *analytisch* nennen, wenn es nach Verkleinerung von $X$ als Umgebung von $K$ eine infinitesimale Erweiterung $\mathcal{O}_{X'} \to \mathcal{O}_X$ von komplexen Strukturen gibt, so daß $\Gamma(K,\mathcal{O}_{X'}) \to \Gamma(K,\mathcal{O}_X)$ gerade die vorgegebene Erweiterung ergibt.

(2.2) **Lemma.** *Seien* $X \xrightarrow{f} S$ *eine holomorphe Abbildung,* $K \subseteq X$ *und* $L \subseteq S$ *Steinsche Kompakta mit* $f(K) \subseteq L$ *und* $\Lambda := \Gamma(L,\mathcal{O}_S) \to \Gamma(K,\mathcal{O}_X) =: A$ *der zugehörige* $\mathbb{C}$*-Homomorphismus. Es sei* $\mathfrak{p} \subseteq A$ *ein Primideal und* $B_0 := A/\mathfrak{p}$. *Dann gibt es ein Ideal* $\mathfrak{a}$ *von* $A$ *mit* $\mathfrak{r}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{p}$ *und eine analytische infinitesimale Erweiterung* $B'' \to B := A/\mathfrak{a}$ *von* $\Lambda$*-Algebren mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $\mathrm{Kern}(B'' \to B)$ *ist ein (endlicher)* $B_0$*-Modul.*

(2) *Ist* $A' \to A$ *eine auf* $V(\mathfrak{p})$ *konzentrierte analytische infinitesimale Erweiterung von* $\Lambda$*-Algebren der Länge* 1[2], *so existiert eine analytische infinitesimale Erweiterung* $B' \to B$ *der Länge* 1, *wobei* $B'$ *ein Quotient von* $B''$ *ist, und ein Isomorphismus* $A' \xrightarrow{\sim} A \times_B B'$ *von Erweiterungen von* $A$.

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, daß es eine abgeschlossene $S$-Einbettung $X \hookrightarrow S \times \mathbb{C}^n$ gibt, so daß $z_n$ in $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ auf Null geht. Hierbei sind $z_1,\ldots,z_n$ die Koordinaten des $\mathbb{C}^n$. Bezeichnet dann $P$ die Algebra $\Gamma(K,\mathcal{O}_{S\times\mathbb{C}^n})$, so gibt es eine Darstellung $A = P/J$, wobei $J$ ein Ideal in $P$ mit $z_n \in J$ ist.

Sind $A' \to A$ und $M = A'y$ wie in (2), so findet man eine Liftung

$$P \to A'$$

des kanonischen Homomorphismus $P \to A$ mit $z_n \mapsto y$, die dann automatisch surjektiv ist. Eine solche Erweiterung $A' \to A$ ist also durch ein Ideal $J' \subseteq J$

[2] d.h. $M := \mathrm{Kern}(A' \to A)$ ist ein auf $V(\mathfrak{p})$ konzentrierter Modul der Länge 1

gegeben, für das $\mathrm{Supp}(J/J')=\{\mathfrak{m}(x)\}$ mit einem Punkt $x$ aus $V(\mathfrak{p})\cap K$ und $l(J/J')=1$ ist. Ein derartiges $J'$ wiederum wird gegeben durch einen Punkt $x\in V(\mathfrak{p})\cap K$ und einen surjektiven Homomorphismus

$$J\to k(x)=\mathbb{C},$$

oder auch durch eine $\mathbb{C}$-lineare Surjektion

$$J/\mathfrak{m}(x)J\to k(x).$$

Nach dem Lemma von Artin-Rees gibt es ein $n$ mit $\mathfrak{p}^n\cap J\subseteq\mathfrak{p}J$. Wir setzen $\mathfrak{a}:=\mathfrak{p}^n+J$. Dann ist die kanonische Abbildung

$$J/\mathfrak{m}(x)J\to\mathfrak{a}/\mathfrak{m}(x)\mathfrak{a}$$

injektiv, wie man leicht sieht. Somit läßt sich der $\mathbb{C}$-Homomorphismus $J/\mathfrak{m}(x)J\to k(x)$ zu einem $\mathbb{C}$-Homomorphismus von $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}(x)\mathfrak{a}$ in $k(x)$ fortsetzen. Sei $\mathfrak{a}'\subseteq\mathfrak{a}$ ein $\mathfrak{m}(x)\mathfrak{a}$ umfassendes Ideal mit $\mathfrak{a}'/\mathfrak{m}(x)\mathfrak{a}=\mathrm{Kern}(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}(x)\mathfrak{a}\to k(x))$. Dann ist $B':=P/\mathfrak{a}'\to P/\mathfrak{a}=B$ eine analytische infinitesimale Erweiterung der Länge 1, und wegen $\mathfrak{a}'\cap J=J'$ und $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'+J$ ist

$$\begin{array}{ccc} A'=P/J' & \longrightarrow & P/\mathfrak{a}'=B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A=P/J & \longrightarrow & P/\mathfrak{a}=B \end{array}$$

kartesisch (Chinesischer Restesatz). Setzen wir also $B'':=P/\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}$, so ist $B'$ ein Quotient von $B''$ und $\mathrm{Kern}(B''\to B)=\mathfrak{a}/\mathfrak{p}\,\mathfrak{a}$ ist ein Modul über $B_0=A/\mathfrak{p}$.

(2.3) **Lemma.** *Seien $\Lambda$, $A$, $B$ Schnittringe Steinscher Kompakta, $B'\to B$ eine analytische infinitesimale Erweiterung von $\Lambda$-Algebren durch einen endlichen $B$-Modul $M$ und $A\to B$ ein endlicher $\Lambda$-Homomorphismus. Es sei $\mathfrak{m}\subseteq A$ ein maximales Ideal derart, daß sich $A\to B\to\hat{B}_{\mathfrak{m}}$ zu einem $\Lambda$-Homomorphismus $A\to\hat{B}'_{\mathfrak{m}}$ hochheben läßt.*

*Dann gibt es ein $f\in A\setminus\mathfrak{m}$ und eine Liftung $A\to B'\amalg_f M$ von $A\to B$*[3].

Dies ist wegen (2.1) eine direkte Folgerung aus (5.22). – Das folgende Offenheitskriterium benötigen wir in §4.

(2.4) **Lemma.** *Seien $K$ ein Steinsches Kompaktum in dem komplexen Raum $X$ mit Schnittring $A=\Gamma(K,\mathcal{O}_X)$ und $E\subseteq K$ eine Teilmenge von $K$. Dann sind äquivalent:*

(1) *$E$ ist Zariski-offen.*[4]

(2) *Ist $\mathfrak{p}\subseteq A$ ein Primideal mit $E\cap V(\mathfrak{p})\neq\varnothing$, so gibt es ein $f\in A\setminus\mathfrak{p}$ mit $D(f)\cap V(\mathfrak{p})\cap K\subseteq E$.*

*Beweis.* Wir setzen $Y:=\mathrm{Spec}(A)$ und $F:=K\setminus E$. Die Implikation (1)$\Rightarrow$(2) ist trivial. Sei umgekehrt (2) erfüllt. Nach dem Prinzip der noetherschen Induktion dürfen wir annehmen, daß $F\cap Z$ Zariski-abgeschlossen ist für jede von $Y$ verschiedene abgeschlossene Teilmenge $Z$ von $Y$. Ohne Einschränkung sei $Y$

[3] Hierbei bezeichnet $0\to M\to B'\amalg_f M\to B\to 0$ das Bild der gegebenen Erweiterung bezüglich der Homothetie $M\xrightarrow{f}M$

[4] d.h. es gibt ein Ideal $\mathfrak{a}\subseteq A$ mit $E=D(\mathfrak{a})\cap K$

integer und $E \neq \varnothing$. Nach (2) gibt es dann ein $f \in A \setminus \{0\}$ mit $F \subseteq V(f) \cap K$, und $F$ ist Zariski-abgeschlossen nach Induktionsvoraussetzung.

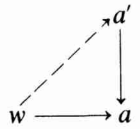
Für manche Anwendungen erweist sich das anschließende Lemma als nützlich. Auf den einfachen Beweis verzichten wir.

(2.5) **Lemma** (Kurventest). *Sei $E$ eine lokal konstruierbare Teilmenge eines komplexen Raumes $X$ mit folgender Eigenschaft: Ist $U \subseteq X$ offen und $T \xrightarrow{\phi} U$ eine injektive endliche Abbildung einer glatten Kurve $T$ in $U$, so ist $\phi^{-1}(E)$ abgeschlossen in $T$. Dann ist $E$ analytisch in $X$.*

## §3. Versalität und formale Versalität

Seien $\Lambda$ eine feste konvergente analytische $\mathbb{C}$-Algebra und $G \xrightarrow{p} \mathscr{C}_\Lambda$ ein Kogruppoid über $\mathscr{C}_\Lambda$ derart, daß $G(k_\Lambda)$ aus nur einem Objekt besteht, welches nur einen Automorphismus hat. Für ein Element $w \in G(R)$ betrachten wir die folgende Eigenschaft:

(3.1) *Ist ein Diagramm*




*von durchgezogenen Pfeilen in $G$ gegeben, wobei $p(a' \to a) = A' \to A$ surjektiv ist, so gibt es einen gestrichelten Pfeil, der dieses kommutativ ergänzt.*

**Definition.** Ein Element $w \in G(R)$ heißt *formal versell*, wenn (3.1) gilt, falls $A'$ artinsch ist. $w$ heißt *versell*, wenn (3.1) stets erfüllt ist. Man nennt $w$ *formal semiuniversell* (bzw. *semiuniversell*), wenn $w$ formal versell (bzw. versell) ist und der Homomorphismus $R \to A'$ modulo $\mathfrak{m}_{A'}^2 + \mathfrak{m}_\Lambda A'$ eindeutig bestimmt ist.

Der folgende Satz, der ein Resultat von Schuster aus [27] verallgemeinert, gibt ein Kriterium dafür an, daß aus der formalen Versalität bereits die Versalität folgt.

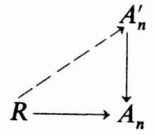
(3.2) **Satz.** *$G$ erfülle die Bedingungen* (S1), (S2) *und* (S3), *vgl.* (1.8) (2). *Sei $w \in G(R)$ ein formal verselles Element. Dann gilt:*

(1) *Die Liftungseigenschaft* (3.1) *ist erfüllt, falls $A' \to A$ infinitesimal ist.*

(2) *Sind die Funktoren* $\mathrm{Isom}(c_1, c_2): \mathscr{C}_C \to (\text{Mengen})$ *für $c_1, c_2 \in G(C)$ stets darstellbar, so ist $w$ sogar versell.*

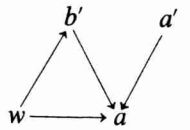
*Beweis.* Zu (1). Betrachten wir also (3.1) für den Fall, daß $A' \to A$ infinitesimal ist. Offenbar dürfen wir annehmen, daß $M := \mathrm{Kern}(A' \to A)$ ein endlicher Modul über $A_0 := A_{\mathrm{red}}$ ist. Es gibt einen surjektiven $R$-Homomorphismus $R' := R\langle\langle t_1, \ldots, t_r \rangle\rangle \to A$. Sei $w'$ das Bild von $w$ unter $R \to R'$. Dann ist $w'$ genau dann formal versell, wenn dies für $w$ gilt. Somit genügt es, den Fall zu behandeln, daß $R \to A$ surjektiv und $A$ mithin ein endlicher $R$-Modul ist.

Wir zeigen zunächst, daß eine Liftung $R \xrightarrow{\phi'} A'$ von $R \to A$ existiert. Wir setzen dazu $A'_n := A'/\mathfrak{m}_{A'}^{n+1}$, $A_n := A/\mathfrak{m}_A^{n+1}$ für $n \geqq 1$ und betrachten die Menge $K_n$ aller gestrichelten Pfeile in $\mathscr{C}_A$, die




kommutativ machen. Weil $w$ formal versell ist, ist diese nicht leer. Ferner operiert $\mathrm{Der}_A(R, M(n))$ transitiv und frei auf dieser Menge. Hierbei haben wir $M(n) := \mathrm{Kern}(A'_n \to A_n)$ gesetzt. Es ist $\mathrm{Der}_A(R, M(n))$ ein Modul endlicher Länge über $A_0$ und die Abbildungen $\mathrm{Der}_A(R, M(n+1)) \to \mathrm{Der}_A(R, M(n))$ sind $A_0$-linear. Hieraus folgt leicht, daß das projektive System $(K_n)_{n \geqq 1}$ von Mengen die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Es gibt also eine Liftung $R \to \hat{A}'$ von $R \to \hat{A}$. Nach dem Artinschen Approximationssatz ([1]) existiert dann auch eine konvergente Liftung $R \xrightarrow{\phi'} A'$ von $R \to A$.

Sei $b' := \phi'_*(w)$. Wir haben das folgende Diagramm in $G$:




Weil $\mathrm{D}_{a_0}(M)$ transitiv auf $\bar{G}_a(A')$ operiert, gibt es ein $d \in \mathrm{D}_{a_0}(M)$, so daß $a'$ und $db'$ in $G_a(A')$ isomorph sind. Können wir zeigen, daß der kanonische Homomorphismus

$$\mathrm{Der}_A(R, M) = \mathrm{Hom}_A(R, A_0[M]) \to \bar{G}_{a_0}(A_0[M]) = \mathrm{D}_{a_0}(M)$$

surjektiv ist, so können wir $\phi'$ durch eine Derivation so abändern, daß $a' = b'$ in $\bar{G}_a(A')$ gilt. Die Surjektivität dieses Homomorphismus bedeutet aber, da $\mathrm{D}_{a_0}(M) = \bar{G}_a(A[M])$ nach (S1) (b) ist, daß (3.1) in dem Spezialfall $A' = A[M]$ erfüllt ist.

Wir dürfen also von vornherein annehmen, daß $A' = A[M]$ ist. Hat $M$ die Länge 1, so ist $\bar{G}_a(A[M]) = \bar{G}(k_A[M])$ nach (S1) (b), und die Behauptung folgt daraus, daß $w$ formal versell ist. Durch Induktion sieht man, daß die Liftungseigenschaft erfüllt ist, wenn $M$ endliche Länge hat. Setzen wir im allgemeinen Fall $M_n := M/\mathfrak{m}_{A_0}^{n+1} M$, so folgt, daß

$$\mathrm{Der}_A(R, M_n) \to \mathrm{D}_{a_0}(M_n)$$

surjektiv ist für alle $n$. Weil $\mathrm{Der}_A(R, M_n)$ ein Modul endlicher Länge ist, liefert [15] (O 13.2.2), daß auch

$$\varprojlim_n \mathrm{Der}_A(R, M_n) \to \varprojlim_n \mathrm{D}_{a_0}(M_n)$$

eine Surjektion ist. Wegen $\varprojlim_n \mathrm{Der}_A(R, M_n) = \mathrm{Der}_A(R, M) \otimes_R \hat{R}$ und $\varprojlim_n \mathrm{D}_{a_0}(M_n)$

$= D_{a_0}(M) \otimes_R \hat{R}$ nach (S3) folgt, daß auch

$$\mathrm{Der}_A(R, M) \to D_{a_0}(M)$$

surjektiv ist, wie gewünscht.

Zu (2). Betrachten wir nun das Liftungsproblem (3.1) im allgemeinen Fall. Seien $\mathfrak{a} := \mathrm{Kern}(A' \to A)$, $A'_n := A'/\mathfrak{a}^{n+1}$ und $a'_n \in G(A'_n)$ das Bild von $a'$. Nach (1) gibt es ein verträgliches System $w \to a'_n$, $n \geqq 1$, von Liftungen von $w \to a$. Die Behauptung folgt nun aus dem anschließenden Lemma (3.3).

(3.3) **Lemma.** *Sei $G \xrightarrow{p} \mathscr{C}_A$ ein Kogruppoid, in dem die Funktoren* $\mathrm{Isom}(c_1, c_2)$ *für $c_1, c_2 \in G(C)$ stets darstellbar sind. Es seien $a \in G(A)$ und $b \in G(B)$ Elemente, $\mathfrak{b} \subseteq B$ ein echtes Ideal, $B_n := B/\mathfrak{b}^{n+1}$ sowie $b_n \in G(B_n)$ das Bild von $b$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann hat die kanonische Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_G(a, b) \to \varprojlim_n \mathrm{Hom}_G(a, b_n)$$

*dichtes Bild.*

*Beweis.* Es sei $\phi_n \colon a \to b_n$, $n \in \mathbb{N}$, ein verträgliches System von Morphismen und $m \in \mathbb{N}$ eine vorgegebene Zahl. Ferner sei $\hat{B}$ die $\mathfrak{b}$-adische Komplettierung von $B$ und $f \colon A \to \hat{B}$ der durch $p(\phi_n)$, $n \in \mathbb{N}$, gegebene $\Lambda$-Homomorphismus. Offenbar gibt es eine $B$ umfassende konvergente analytische $\mathbb{C}$-Algebra $\tilde{B} \subseteq \hat{B}$ mit $f(A) \subseteq \tilde{B}$.

Wir betrachten die beiden Elemente $\tilde{a} := a_{\tilde{B}}$ und $\tilde{b} := b_{\tilde{B}}$ aus $G(\tilde{B})$. Wegen $\tilde{a}_{B_n} = a_{B_n}$ und $\tilde{b}_{B_n} = b_n$ induziert $\phi_n$ einen Morphismus $\alpha_n : \tilde{a}_{B_n} \to \tilde{b}_{B_n}$ mit $p(\alpha_n) = \mathrm{id}_{B_n}$. Offenbar bilden die $\alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, sogar ein verträgliches System. Ist nun $C$ die analytische $\tilde{B}$-Algebra, die den Funktor $\mathrm{Hom}(\tilde{a}, \tilde{b})$ darstellt, so liefern die $\alpha_n$ ein projektives System $g_n \colon C \to B_n$ von $\tilde{B}$-Homomorphismen und damit einen $\tilde{B}$-Homomorphismus $g := \varprojlim g_n \colon C \to \hat{B}$.

Sei $B' \subseteq \hat{B}$ eine konvergente analytische $\mathbb{C}$-Algebra mit $g(C) \subseteq B'$ und $\tilde{B} \subseteq B'$. Der von $g$ induzierte Homomorphismus $C \to B'$ definiert einen Morphismus $\alpha : \tilde{a}_{B'} \to \tilde{b}_{B'}$ mit $p(\alpha) = \mathrm{id}_{B'}$. Die Inklusion $B' \xhookrightarrow{i} \hat{B}$ ist ein formaler Schnitt von $B \hookrightarrow B'$. Aus dem Approximationssatz von Artin ([1]) folgt, daß es einen konvergenten Schnitt $B' \xrightarrow{q} B$ von $B \hookrightarrow B'$ gibt mit $q \equiv i$ modulo $\mathfrak{b}^{m+1}$.

Ist $f'$ die Komposition $A \xrightarrow{f} B' \xrightarrow{q} B$, so gilt $f' \equiv f$ modulo $\mathfrak{b}^{m+1}$. Wegen $q_*(\tilde{a}_{B'}) = f'_*(a)$ und $q_*(\tilde{b}_{B'}) = b$ ist $q_*(\alpha) : f'_*(a) \to b$ ein Morphismus mit $p(q_*(\alpha)) = \mathrm{id}_B$. In der Komposition von $a \to f'_*(a)$ mit $q_*(\alpha)$ haben wir dann einen Morphismus $\phi' : a \to b$ gefunden, dessen Bild in $\varprojlim \mathrm{Hom}(a, b_n)$ bis zur Ordnung $m$ mit $(\phi_n)$ übereinstimmt.

(3.4) **Bemerkung.** In (3.2) (2) und (3.3) kann man die Voraussetzung, daß die Funktoren $\mathrm{I} := \mathrm{Isom}(c_1, c_2)$ für $c_1, c_2 \in G(C)$ stets darstellbar sind, abschwächen.

Es genügt zu fordern, daß für jede analytische $C$-Algebra $D \in \mathscr{C}_C$ und jedes echte Ideal $\mathfrak{d} \subseteq D$ die Abbildung

$$\varinjlim_{j \in J} \mathrm{I}(D^{(j)}) \to \varprojlim_{n} \mathrm{I}(D/\mathfrak{d}^{n+1})$$

dichtes Bild hat. Hierbei ist $D^{(j)}$, $j \in J$, ein induktives System von konvergenten analytischen $C$-Algebren mit $\varinjlim D^{(j)} = \varprojlim D/\mathfrak{d}^{n+1}$. Dies zeigt der Beweis von (3.3).

Für den Fall, daß $G$ ein Funktor ist, kann man (3.2) wie folgt variieren.

(3.5) **Satz.** *Sei* $G: \mathscr{C}_A \to$ (Mengen) *ein (kovarianter) Funktor mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *$G$ erfüllt* (S1) (a) *und* (S1) (b), *falls $M$ die Länge* 1 *hat* (*vgl.* (1.8) (2)).

(2) *$G$ erfüllt die Bedingung* (L2).[5]

*Dann ist jedes formal verselle Element $w \in G(R)$ bereits versell.*

*Beweis.* Betrachten wir das Liftungsproblem (3.1). Den Fall, daß $M := \mathrm{Kern}(A' \to A)$ endliche Länge hat, kann man aufgrund der Voraussetzung (1) wie im Beweis von (3.2) (1) behandeln. Im allgemeinen Fall sei $A'_n := A'/\mathfrak{m}_{A'}^{n+1}$, $A_n := A/\mathfrak{m}_A^{n+1}$ und $A_n^* := A'_n \times_{A_n} A$. In dem kanonischen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & A' & & \\ & & \downarrow & & \\ & & A_n^* & \longrightarrow & A'_n \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A_n \end{array}$$

ist $A' \to A_n^*$ surjektiv. Daher ist auch $A_{n+1}^* \to A_n^*$ surjektiv für jedes $n$. Weil der Kern des letzteren Homomorphismus endliche Länge hat, gibt es nach dem oben Bemerkten ein verträgliches System $w \to a_n^*$ von Morphismen in $G$; hierbei bezeichnet $a_n^*$ das Bild von $a'$ in $G(A_n^*)$. Diese Morphismen definieren einen Homomorphismus $\alpha: R \to \hat{A}' = \varprojlim \hat{A}_n^*$.

Für eine analytische $A'$-Algebra $B$ aus $\mathscr{C}_{A'}$ sei $H(B)$ die Menge aller $\phi \in \mathrm{Hom}_A(R, B)$, für die

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & A = A'/M \\ & \overset{\bar{\phi}}{\searrow} & \swarrow \\ & B/MB & \end{array}$$

[5] d.h. ist $A$ eine komplette analytische $\Lambda$-Algebra und $A = \varinjlim A^{(i)}$ mit $A^{(i)} \in \mathscr{C}_\Lambda$, so ist die Abbildung $\varinjlim G(A^{(i)}) \to \varprojlim G(A/\mathfrak{m}_A^{n+1})$ injektiv; vgl. hierzu [4], §2

kommutiert und $\phi_*(w)$ gleich dem Bild von $a'$ in $G(B)$ ist. Dann ist $H$ ein Funktor auf $\mathscr{C}_{A'}$, der wegen (2) die Bedingung (L1) aus [4], §2, erfüllt. Aus dem oben Gezeigten folgt, daß $\varprojlim H(A'_n)$ nicht leer ist. Wegen [4], (2.8), ist dann auch $H(A') \neq \varnothing$, was die Behauptung beweist.

## §4. Offenheit der Versalität

Seien $F$ ein Gruppoid über (An/S), $v \in F(T)$ und $t \in T$ ein Punkt mit Bildpunkt $s \in S$. Wir sagen, daß $v$ in $t$ *formal versell* (bzw. *versell*) ist, wenn das Bild von $v$ in $G_{v(t)}(\mathscr{O}_{T,t})$ formal versell (bzw. versell) ist; hierbei sei $G$ das durch $F$ definierte Kogruppoid über $\mathscr{C}_{\mathscr{O}_{S,s}}$, vgl. (1.8) (4), und $v(t) \in G(k(t))$ das Bild von $v$ in $G(k(t))$. Analoge Redeweise verwenden wir für die Semiuniversalität. Der folgende Satz ist das Hauptergebnis dieser Arbeit.

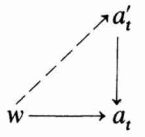
(4.1) **Satz.** *Sei $F$ ein Gruppoid über* (An/S) *mit einer Obstruktionstheorie* O, *das die Bedingungen* (S1), (S2), (S3) *und* (O1), (O2) *erfüllt. Für jedes Element $v \in F(T)$ ist dann die Menge der Punkte $t \in T$, in denen $v$ formal versell ist, Zariski-offen in $T$.*

*Beweis.* Mit $G$ wollen wir das durch $F$ definierte Kogruppoid über $\mathscr{C}_S$ bezeichnen, vgl. (1.8) (4). Es seien $K \subseteq T$ ein Steinsches Kompaktum mit nichtleerem offenem Kern, dessen Bild in $S$ in einem Steinschen Kompaktum $Q$ liege, $R := \Gamma(K, \mathscr{O}_T)$ der zugehörige Schnittring und $w \in G(R)$ das durch $v$ definierte Element. Weiter sei $E$ die Menge aller Punkte $t \in K$, in denen $w$ formal versell ist.[6] Es genügt zu zeigen, daß $E$ Zariski-offen in $K$ ist.

Nehmen wir an, dies sei nicht der Fall. Nach (2.4) gibt es dann ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $R$ mit $E \cap V(\mathfrak{p}) \neq \varnothing$ und $\complement E \cap V(\mathfrak{p}) \cap D(f) \neq \varnothing$ für alle $f \in R \setminus \mathfrak{p}$. Insbesondere existiert dann eine Zariski-dichte Menge

$$\mathscr{S} \subseteq V(\mathfrak{p})$$

von Punkten $t \in K$, in denen $w$ nicht formal versell ist (etwa $\mathscr{S} = \complement E \cap V(\mathfrak{p})$). Ist $t \in \mathscr{S}$, so gibt es ein Diagramm von durchgezogenen Pfeilen




in $G$, wobei $p(a'_t \to a_t) = A'_t \to A_t$ eine kleine Erweiterung des Restekörpers $k(t)$ ist, das *nicht* durch einen gestrichelten Pfeil vervollständigt werden kann. Weil $G$ die Bedingung (S1) (a) erfüllt, gibt es ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} w'_t & \longrightarrow & a'_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ w & \longrightarrow & a_t \end{array} \quad \text{über} \quad \begin{array}{ccc} R'_t := A'_t \times_{A_t} R & \longrightarrow & A'_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & A_t. \end{array}$$

[6] $w \in G(R)$ heißt natürlich formal versell (bzw. versell) in $t \in K$, wenn das Bild von $w$ in $G_{w(t)}(\mathscr{O}_{T,t})$ formal versell (bzw. versell) ist

Die infinitesimalen Erweiterungen $R'_t \to R_t$, $t \in \mathscr{S}$, kann man alle als Quotient einer großen infinitesimalen Erweiterung realisieren. Genauer gilt: Es gibt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & B' \\ & & \downarrow \\ R'_t & \longrightarrow & B'_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & B = R/I \end{array}$$

in $\mathscr{C}_S$, wobei $I \subseteq R$ ein Ideal mit $\mathfrak{r}(I) = \mathfrak{p}$ und $M := \mathrm{Kern}(B' \to B)$ ein endlicher Modul über $B_0 = R/\mathfrak{p}$ ist, so daß die unteren Quadrate kartesisch sind und $B'_t$ ein Quotient von $B'$ ist; man vgl. hierzu (2.2).

Sei $b \in G(B)$ das direkte Bild von $w$. Man wird das Element $b$ i.a. nicht nach $B'$ liften können. Wir wollen uns nun zunächst überlegen, daß man dies trotzdem erreichen kann, ohne die Situation wesentlich zu ändern.

Es gibt ein $f \in R \setminus \mathfrak{p}$ und einen Homomorphismus $M \to B'^r_0$, so daß die induzierte Abbildung $M_f \to B'^r_{0f}$ bijektiv ist. Indem wir zu dem Bild der Erweiterung $0 \to M \to B' \to B \to 0$ bezüglich des Homomorphismus $M \to B'^r_0$ übergehen und $\mathscr{S}$ durch $\mathscr{S} \cap \mathrm{D}(f)$ ersetzen, dürfen wir annehmen, daß $M = B'^r_0$ frei vom Rang $r$ ist. Sei $o := o_b(B') = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathrm{O}_b(B'^r_0) = \mathrm{O}_b(B_0)^r$ die zu $b$ gehörige Obstruktion. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm von Erweiterungen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \phi_t} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & k(t) & \longrightarrow & B'_t & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Weil $\bar{G}_b(B'_t)$ nichtleer ist (wegen $\mathrm{Bild}(w'_t) \in \bar{G}_b(B'_t)$), geht $o$ unter der Abbildung $\mathrm{O}_b(\phi_t) : \mathrm{O}_b(M) \to \mathrm{O}_b(k(t))$ auf Null. Sei $U \subseteq \mathrm{Spm}(B_0)$ die offene dichte Menge aus (O2), vgl. (1.7) und (1.8), (3) und (4). Dann ist $\mathscr{S} \cap U$ dicht in $\mathrm{Spm}(B_0)$. Indem wir $\mathscr{S}$ durch diese Menge ersetzen, dürfen wir annehmen, daß in dem kanonischen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{O}_b(M) \otimes k(t) & \xrightarrow{\overline{\mathrm{O}_b(\phi_t)}} & \mathrm{O}_b(k(t)) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_t} & \nearrow{\scriptstyle \beta_t} & \\ \mathrm{O}_b(M \otimes k(t)) & & \end{array}$$

die Abbildung $\alpha_t$ injektiv ist für jedes $t \in \mathscr{S}$. Trivialerweise ist $\beta_t$ surjektiv.

Daher sind die kanonischen Bilder von $\xi_1, \ldots, \xi_r$ in $\mathrm{O}_b(B_0) \otimes k(t)$ linear abhängig für jedes $t \in \mathscr{S}$. Weil $\mathscr{S}$ dicht in $\mathrm{Spec}(B_0)$ liegt, folgt, daß die $\xi_1, \ldots, \xi_r$

in $O_b(B_0)$ linear abhängig sind. Also gibt es Elemente $\alpha_i \in B_0$, die nicht alle Null sind, mit $\sum \alpha_i \xi_i = 0$. Es sei

$$M = B_0^r \xrightarrow{\psi} B_0$$

der $B_0$-Homomorphismus mit $\psi(e_i) = \alpha_i$ für $1 \leqq i \leqq r$, $\mathfrak{b} := \psi(M)$ und $B^* := B'/\mathrm{Kern}(\psi)$. Wir betrachten nun das folgende Diagramm von Erweiterungen:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{b} & \longrightarrow & B^* & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Der Homomorphismus $O_b(M) \to O_b(\mathfrak{b})$ wirft $o = (\xi_1, \ldots, \xi_r)$ auf $o_b(B^*)$, und $o_b(B^*)$ geht unter $O_b(\mathfrak{b}) \to O_b(B_0)$ auf $\sum \alpha_i \xi_i = 0$. Hieraus folgt, daß es ein $f \in R \setminus \mathfrak{p}$ gibt mit $f \cdot o_b(B^*) = 0$, vgl. (1.8) (4), letzter Absatz.

Indem wir zu den Bildern der Erweiterungen $0 \to M \to B' \to B \to 0$ und $0 \to \mathfrak{b} \to B^* \to B \to 0$ bezüglich der Homothetien $M \xrightarrow{f} M$ und $\mathfrak{b} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$ übergehen und $\mathscr{S}$ durch $\mathscr{S} \cap D(f)$ ersetzen, *können wir erreichen, daß das Bild von* $o = o_b(B')$ *in* $O_b(\mathfrak{b})$ *auf Null geht.* (Die Erweiterungen $0 \to k(t) \to B'_t \to B \to 0$ bleiben dabei wegen $f(t) \neq 0$ für $t \in \mathscr{S}$ unverändert.)

Wir dürfen also annehmen, daß es ein Ideal $\mathfrak{b} \subseteq B$, $\mathfrak{b} \neq 0$, und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{b} & \longrightarrow & B^* & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

von Erweiterungen gibt, wobei $\psi$ surjektiv ist, und ein Pfeil $b^* \to b$ aus $G_b(B^*)$ existiert. Wegen $E \cap V(\mathfrak{p}) \neq \emptyset$ können wir aufgrund von (4.2) sogar erreichen, daß ein gestrichelter Pfeil existiert, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} w & \dashrightarrow & b^* \\ & \searrow & \downarrow \\ & & b \end{array}$$

kommutativ macht. Dies liefert insbesondere eine Liftung $R \to B^*$ des Homomorphismus $R \to B$. Nun können zwei Fälle auftreten:

*Fall 1.* Es existiert eine Zariski-dichte Menge $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ derart, daß $B'_t$ *kein* Quotient von $B^*$ ist für $t \in \mathscr{S}'$.

In diesem Fall ersetzen wir $\mathscr{S}$ durch $\mathscr{S}'$. Dann ist für $t\in\mathscr{S}=\mathscr{S}'$.

$$B_t^* := B_t' \times_B B^* \to B^*$$

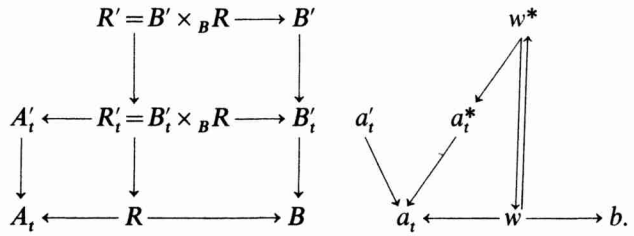
eine infinitesimale Erweiterung der Länge 1 derart, daß $B' \to B_t^*$ surjektiv ist. Ferner ist $B_t^* \times_{B^*} R = B_t' \times_B R = R_t'$. Wir dürfen daher $B$ durch $B^*$ ersetzen. Dann ist $M = \mathrm{Kern}(B' \to B)$ ein $B_0$-Modul vom Rang $r-1$! Es genügt also, den folgenden Fall zu behandeln:

*Fall 2.* Es gibt eine Zariski-dichte Menge $\mathscr{S}' \subseteq \mathscr{S}$ derart, daß $B_t'$ ein Quotient von $B^*$ ist für jedes $t\in\mathscr{S}'$.

Wir ersetzen dann $\mathscr{S}$ durch $\mathscr{S}'$ und $B' \to B$ durch $B^* \to B$. Damit ist die gewünschte Reduktion gezeigt. *Wir dürfen also annehmen, daß* $\mathrm{Rang}_{B_0}(M)=1$ *ist und daß ein Pfeil* $b^* \to b$ *aus* $G_b(B')$ *existiert.* Wie oben darf man außerdem wegen (4.2) gleich annehmen, daß es eine Liftung $w \to b^*$ von $w \to b$ und damit insbesondere eine Liftung $R \to B'$ von $R \to B$ gibt. In dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R' := B' \times_B R & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & B \end{array}$$

hat dann der linke vertikale Pfeil einen Schnitt $R \to R'$. Sei $w^* \in G(R')$ das Bild von $w$ bezüglich dieses Schnittes und $a_t^* \in G(A_t')$ das Bild von $w^*$ in $A_t'$. Wir fassen die relevanten Pfeile in dem folgenden Diagramm zusammen:




Die Elemente $a_t'$ und $a_t^*$ werden i.a. noch nicht $a_t$-isomorph sein. Unser Ziel ist es, den Schnitt $R \to R'$ durch eine Derivation so abzuändern, daß dies für mindestens einen Punkt $t\in\mathscr{S}$ doch der Fall ist. Dies liefert dann einen Widerspruch.

Sei $b_0 \in G(B_0)$ das Bild von $b$ und $a_{0t} \in G(k(t))$ das Bild von $a_t$. Nach (S1) (b) sind dann die kanonischen Homomorphismen $D_w(M) \to D_{b_0}(M)$ und $D_{b_0}(M \otimes k(t)) \to D_{a_{0t}}(M \otimes k(t))$ bijektiv. Weil $G$ die Bedingung (S2) erfüllt, gibt es eine offene dichte Menge $U \subseteq \mathrm{Spm}(B_0)$ derart, daß $D_{b_0}(M) \otimes k(t) \to D_{b_0}(M \otimes k(t))$ bijektiv ist für jedes $t\in U$; überdies können wir annehmen, daß $M$ auf $U$ frei (vom Rang 1) über $B_0$ ist, und daß $\mathscr{S}$ in $U$ liegt. Insgesamt erhalten wir dann kanonische Isomorphismen

$$D_w(M) \otimes k(t) \xrightarrow{\sim} D_{a_{0t}}(M \otimes k(t)) = D_{a_{0t}}(k(t))$$

für jedes $t\in\mathscr{S}$. Weil $R'$ bezüglich des Schnittes $R \to R'$ eine triviale Erweiterung

von $R$ durch $M$ ist, $R'=R[M]$, hat man eine natürliche Bijektion von $\mathrm{Der}_S(R,M)$ auf $\mathrm{Hom}_R(R,R')$ und damit einen kanonischen Homomorphismus

$$\mathrm{Der}_S(R,M)\to \mathrm{D}_w(M)=\bar{G}_w(R[M])=\bar{G}_w(R').$$

Wegen $E\cap \mathrm{V}(\mathfrak{p})\neq\varnothing$ gibt es ein $f\in R\setminus\mathfrak{p}$ mit

$$f\cdot \mathrm{D}_w(M)\subseteq \mathrm{Bild}(\mathrm{Der}_S(R,M)\to \mathrm{D}_w(M)),$$

vgl. Beweis von (4.2). Sei nun $t\in\mathscr{S}\cap \mathrm{D}(f)$ ein fester Punkt. Wegen obiger Isomorphie finden wir ein $d\in \mathrm{D}_w(M)$, dessen Bild $\bar{d}$ in $\mathrm{D}_{a_{0t}}(k(t))$ das Element $a_t^*$ in $a'_t$ überführt, für das also $\bar{d}\,a_t^*=a'_t$ in $\bar{G}_{a_t}(A'_t)$ ist. Nach Wahl von $t$ gibt es eine Derivation $\delta\in\mathrm{Der}_S(R,M)$, die unter obiger Abbildung auf $1/f(t)\cdot f\cdot d$ geht. Der durch $\delta$ gegebene Homomorphismus $\phi_\delta: R\to R'$ bildet $w$ auf $(1/f(t)\cdot f\cdot d)\,w^*$ ab. Die Komposition von $\phi_\delta$ mit $R'\to A'_t$ wirft dann $w$ auf $\bar{d}\,a_t^*\cong a'_t$, Widerspruch!

Im Beweis von (4.1) haben wir das anschließende Lemma verwendet.

(4.2) **Lemma.** *Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seine wie im Beweis von* (4.1). *Sei*

$$\begin{array}{ccc} & & a' \\ & & \downarrow \\ w & \longrightarrow & a \end{array}$$

*ein Diagramm in $\mathscr{C}_S$ derart, daß $p(a'\to a)=A'\to A$ eine infinitesimale Erweiterung durch einen $A$-Modul $N$ und $p(w\to a)=R\to A$ endlich ist. Ist dann $w$ formal versell in $t\in K=\mathrm{Spm}(R)$, so existiert ein $f\in R\setminus\mathfrak{m}(t)$ und eine Liftung $w\to a'_f$ von $w\to a$.*[7]

*Beweis.* Wir dürfen annehmen, daß $N$ sogar ein Modul über $A_{\mathrm{red}}$ ist. Wegen (3.2) (1) und (2.3) gibt es ein $f\in R\setminus\mathfrak{m}(t)$ derart, daß eine Liftung $R\to A'\amalg_f N$ von $R\to A$ in $\mathscr{C}_S$ existiert. Indem wir die gegebene Erweiterung durch ihr Bild bezüglich $f$ ersetzen, können wir also annehmen, daß eine Liftung $R\xrightarrow{\phi} A'$ von $R\to A$ existiert. Wie im Beweis von (3.2) zeigt man, daß der kanonische Homomorphismus

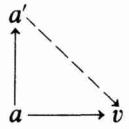
$$\mathrm{Der}_S(R,N)\otimes_R R_{\mathfrak{m}(t)}\to \mathrm{D}_a(N)\otimes_R R_{\mathfrak{m}(t)}$$

surjektiv ist. Mithin gibt es ein $f\in R\setminus\mathfrak{m}(t)$, so daß $f\cdot \mathrm{D}_a(N)$ im Bild von $\mathrm{Der}_S(R,N)\to \mathrm{D}_a(N)$ liegt. Sei $d\in \mathrm{D}_a(N)$ ein Element mit $d\cdot\phi_*(w)=a'$ und $\delta\in\mathrm{Der}_S(R,N)$ eine Derivation, die auf $fd$ geht. Bezeichnet dann $\chi: A'\to A'\amalg_f N$ den kanonischen Homomorphismus, so ist $(fd)(\chi\circ\phi)_*(w)=\chi_*(a')=a'_f$. Setzen wir $\phi':=\chi\circ\phi+\delta$, so gilt $\phi'_*(w)=a'_f$, wie gewünscht.

(4.3) **Bemerkungen.** (1) Sei $F$ wie in (4.1) und $v\in F(T)$ ein Element, das in jedem Punkt von $T$ formal versell ist. Dann hat $v$ die folgende allgemeinere Liftungsei-

[7] $a'_f$ bezeichnet das Bild von $a'$ unter dem kanonischen Homomorphismus $A'\to A'\amalg_f N$

genschaft: Ist $Y \overset{i}{\hookrightarrow} Y'$ eine infinitesimale Erweiterung von Steinschen Räumen über $S$ durch einen kohärenten $\mathcal{O}_Y$-Modul $\mathcal{M}$ und ist ein Diagramm




von durchgezogenen Pfeilen in $F$ gegeben, wobei $a \to a'$ über $Y \xrightarrow{i} Y'$ liegt, so existiert ein gestrichelter Pfeil, der dieses kommutativ ergänzt.

*Beweis.* Das Hindernis, die $a \to v$ zugrunde liegende holomorphe $S$-Abbildung $Y \xrightarrow{f} T$ zu einer $S$-Abbildung $Y' \to T$ zu liften, liegt in $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathrm{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{T/S}), \mathcal{M})$, vgl. (5.20). Weil $v$ in jedem Punkt von $T$ formal versell ist, verschwindet dieses Hindernis lokal und damit auch global. Es genügt nun zu zeigen, daß der $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$-Homomorphismus

$$\mathrm{Der}_S(f^{-1}(\mathcal{O}_T), \mathcal{M}) \to \mathrm{D}_a(\mathcal{M})$$

surjektiv ist. Das ist aber klar, weil das Entsprechende für die assoziierten Garben gilt.

(2) Sind in der Situation von (4.1) überdies die Funktoren $\mathrm{Isom}(a, b)$ darstellbar, so ist die formale Versalität nach (3.2) gleichwertig mit der Versalität, so daß dann die Versalität eine Zariski-offene Eigenschaft ist.

(3) Sei $F \to (\mathrm{An}/S)$ ein Gruppoid, das die Bedingungen (S1), (S2) für einpunktige Räume erfüllt, und $v_0 \in F(k(s))$. Gibt es dann eine verselle Deformation von $v_0$, so gibt es eine semiuniverselle Deformation von $v_0$, und jede formal verselle Deformation von $v_0$ ist bereits versell, vgl. [9], (8.1).

Existieren also in der Situation von (4.1) stets verselle Objekte, so ist die Versalität eine Zariski-offene Eigenschaft. Diese Tatsache ist besonders wichtig für „lokale" Gruppoide, in denen die Funktoren $\mathrm{Isom}(a, b)$ häufig nicht darstellbar sind.

(4) In Fällen, in denen man über keine schöne Obstruktionstheorie verfügt, erweist sich die folgende einfache Bemerkung als nützlich.

Seien $F$ ein Gruppoid über (An/S), das (S1), (S2) für nulldimensionale Räume erfüllt, $s \in S$ ein Punkt und $v_0 \in F(k(s))$. Es gebe einen punktierten Raum $(Z, z)$ über $S$ und ein Element $w \in F(Z)$ mit $w(z) = v_0$ derart, daß $w$ in jedem Punkt von $Z$ versell ist. Ist dann $(T, t)$ ein weiterer punktierter Raum über $S$ und $v \in F(T)$ ein Element mit $v(t) = v_0$, das in $t$ versell ist, so ist $v$ in einer vollen Umgebung von $t$ versell.

Man beweist dies leicht unter Verwendung von (4.3) (3).

(5) Gelegentlich tritt die Situation auf, daß man die Axiome (S1) usw. aus technischen Gründen nur für hinreichend „kleine" Basen $T$ verifizieren kann (etwa für parakompaktes oder Steinsches $T$), oder daß man nur eine „lokale" Obstruktionstheorie hat. Natürlich gelten (4.1) und die vorangegangenen Bemerkungen (2) und (3) unverändert in solchen „allgemeineren" Situationen.

## Kapitel II. Anwendungen

### §5. Vorbereitungen: Kotangentenkomplexe

(5.1) Ein *graduierter antikommutativer Ring* ist ein assoziativer Ring $A$ mit Eins, der mit einer Graduierung $A=\coprod_{i\leqq 0} A^i$ versehen ist, so daß $x\cdot y=(-1)^{ij}y\cdot x$ für $x\in A^i$, $y\in A^j$ gilt. Insbesondere ist dann $A^0$ ein kommutativer Unterring von $A$. Ein *graduierter $A$-Modul* ist ein graduierter $A$-Bimodul $M=\coprod_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ mit $x\cdot m=(-1)^{ij}m\cdot x$ für $x\in A^i$ und $m\in M^j$. Für ein homogenes Element $m$ aus $M$ bezeichne $g(m)$ im folgenden den Grad von $m$. Ist $N$ ein weiterer graduierter $A$-Modul und $n\in\mathbb{Z}$, so versteht man unter einem Homomorphismus $u: M\to N$ vom Grad $n$ einen Homomorphismus von $A$-*Rechts*moduln mit $u(M^i)\subseteq N^{i+n}$ für alle $i$. Bezeichnet $\mathrm{Hom}_A(M,N)^n$ die Menge dieser Homomorphismen, so ist $\mathrm{Hom}_A(M,N):=\coprod_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}_A(M,N)^n$ wieder ein graduierter $A$-Modul, wenn man $x\cdot\phi$ bzw. $\phi\cdot x$ für $x\in A$, $\phi\in\mathrm{Hom}(M,N)$ durch $(x\cdot\phi)(m):=x\cdot\phi(m)$ bzw. $(\phi\cdot x)(m):=\phi(x\cdot m)$ definiert.

Für einen graduierten $A$-Modul $M$ kann man ähnlich wie im kommutativen Fall eine „*symmetrische*" *Algebra* $S_A(M)$ definieren. Dies ist eine graduierte antikommutative $A$-Algebra, welche alle Homomorphismen vom Grade 0 von $M$ mit Werten in einer graduierten antikommutativen $A$-Algebra faktorisiert. Sei $A\to B$ ein Homomorphismus von graduierten antikommutativen Ringen und $M$ ein graduierter $B$-Modul. Eine *$A$-Derivation von $B$ in $M$* vom Grad $n$ ist eine $A$-lineare Abbildung $\delta: B\to M$ mit $\delta(xy)=\delta(x)\cdot y+(-1)^{g(x)g(y)}\delta(y)\cdot x$ für homogene Elemente $x, y$ aus $B$, für die überdies $\delta(B^i)\subseteq M^{i+n}$ gilt. Es sei $\mathrm{Der}^n_A(B,M)$ die Menge dieser Derivationen. Unter einer (DG)-*Algebra* versteht man einen graduierten antikommutativen Ring $A$ zusammen mit einer $A^0$-Derivation $s: A\to A$ vom Grad 1 mit $s^2=0$. In naheliegender Weise wird der Begriff des Morphismus von (DG)-Algebren definiert. Ein (DG)-*Modul* über einer (DG)-Algebra $A$ ist eine graduierter $A$-Modul $M$ zusammen mit einem Endomorphismus $s: M\to M$ vom Grad 1, für den $s(x\cdot m)=s(x)\cdot m+(-1)^{g(x)g(m)}s(m)\cdot x$ gilt für homogene Elemente $x\in A, m\in M$.

(5.2) Eine *graduierte antikommutative analytische Algebra* ist ein graduierter antikommutativer Ring $A$ derart, daß $A^0$ eine analytische $\mathbb{C}$-Algebra ist und alle $A^i$ endliche $A^0$-Moduln sind. Sei $M$ ein graduierter Modul über einer solchen Algebra $A$, so daß $M^i=0$ ist für $i>0$ und alle $M^i$ endliche $A^0$-Moduln sind. Man kann dann für $M$ eine symmetrische Algebra in der Kategorie der graduierten antikommutativen analytischen Algebren definieren, die wir mit $\tilde{S}_A(M)$ bezeichnen. Ist $S_{A^0}(M^0)^{an}$ die zu $S_{A^0}(M^0)$ gehörige analytische Algebra, so gilt

$$\tilde{S}_A(M)=S_A(M)\otimes_{S_{A^0}(M^0)}S_{A^0}(M^0)^{an}.$$

Eine graduierte antikommutative analytische $A$-Algebra $B$ heißt *frei*, wenn $B$ von der Form $\tilde{S}_A(M)$ mit einem freien graduierten $A$-Modul $M$ wie oben ist.

Sei $A\to B$ ein Homomorphismus graduierter antikommutativer analytischer Algebren. Dann gibt es einen graduierten $B$-Modul $\Omega_{B/A}$ mit über $B^0$ endlichen

homogenen Komponenten zusammen mit einer $A$-Derivation $d=d_{B/A}: B\to\Omega_{B/A}$ vom Grad 0, welche alle $A$-Derivationen von $B$ mit Werten in graduierten $B$-Moduln, deren homogene Komponenten als $B^0$-Moduln separiert sind, eindeutig faktorisiert.

Ein *analytische* (DG)-*Algebra* ist eine (DG)-Algebra $A$, für die $A^0$ eine analytische Algebra und $A^i$ ein endlicher $A^0$-Modul ist. Beispielsweise läßt sich jede analytische Algebra auf triviale Weise als analytische (DG)-Algebra auffassen. Sei $A\to B$ ein Homomorphismus analytischer (DG)-Algebren. Dann existiert auf dem Differentialmodul $\Omega_{B/A}$ genau eine (DG)-Modulstruktur über $B$ mit $s(x\cdot dy)=s(x)\cdot dy+(-1)^{g(x)}x\cdot d(s(y))$ für homogene $x, y\in B$.

Sei $A\to B$ ein Homomorphismus analytischer (DG)-Algebren. Eine (analytische) (DG)-Algebra $R$ über $A$ zusammen mit einem surjektiven Homomorphismus $R\to B$ von (DG)-Algebren heißt eine *Resolvente* für $B$ über $A$, wenn $R$ (als graduierte Algebra) frei über $A$ ist und $R\to B$ ein Quasiisomorphismus von Komplexen ist. Man zeigt mühelos, daß Resolventen stets existieren.

(5.3) Seien $A\to B$ ein Homomorphismus analytischer $\mathbb{C}$-Algebren und $R\to B$ eine Resolvente für $B$ über $A$. Dann heißt der Komplex

$$L^{\cdot}_{B/A}:=\Omega_{R/A}\otimes_R B\in D(B)$$

der *Kotangentenkomplex* für $B$ über $A$. Hierbei ist $D(A)$ die derivierte Kategorie der Kategorie der $A$-Moduln. Es ist $L^{\cdot}_{B/A}$ „unabhängig" von der Wahl der Resolvente und funktoriell in dem Paar $(A, B)$. Die nicht ganz einfachen Beweise hierfür findet man in [9], §1. Man hat einen kanonischen Homomorphismus $L^{\cdot}_{B/A}\to\Omega_{B/A}$, der ein Quasiisomorphismus ist, falls $B$ glatt über $A$ ist. Ist $M$ ein $B$-Modul und $i\in\mathbb{Z}$, so heißt

$$T^i(B/A, M):=\mathrm{Ext}^i_B(L^{\cdot}_{B/A}, M)$$

der $i$-te *Kohomologiemodul* von $B$ über $A$ mit Koeffizienten in $M$. Weil (der spezielle Repräsentant von) $L^{\cdot}_{B/A}$ ein Komplex aus endlichen freien $B$-Moduln mit $L^i_{B/A}=0$ für $i>0$ ist, gilt $T^i(B/A, M)=H^i(\mathrm{Hom}_B(L^{\cdot}_{B/A}, M))$ und somit $T^i(B/A, M)=0$ für $i<0$. $T^{\cdot}(B/A, M)$ ist ein kovarianter Kohomologiefunktor in $M$, welcher funktoriell von dem Paar $(A, B)$ abhängt. Ist $B\to C$ ein Homomorphismus analytischer $A$-Algebren, so ist die zugehörige Sequenz

$$0\to L^{\cdot}_{B/A}\otimes_B C\to L^{\cdot}_{C/A}\to L^{\cdot}_{C/B}\to 0$$

bei geeigneter Wahl der Repräsentanten exakt, vgl. [9], p. 13. Hieraus erhalten wir für jeden $C$-Modul $N$ eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\ldots\to T^i(C/B, N)\to T^i(C/A, N)\to T^i(B/A, N)\to T^{i+1}(C/B, N)\to\ldots.$$

Für separiertes $M$ ist $\mathrm{Hom}_B(L^{\cdot}_{B/A}, M)$ kanonisch isomorph zu dem Komplex $\mathrm{Der}^{\cdot}_A(R, M)$ mit dem Differential $\delta\mapsto\delta s$; hierbei ist $s$ die Derivation der Resolvente $R$. Insbesondere ist $T^0(B/A, M)=\mathrm{Der}_A(B, M)$.

Wir wollen nun den Zusammenhang von $T^1$ mit Erweiterungen beschreiben.

(5.4) **Satz.** *Seien $A \to B$ ein Homomorphismus analytischer Algebren und $M$ ein endlicher $B$-Modul. Dann hat man einen kanonischen $B$-Modulisomorphismus*

$$T^1(B/A, M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ex}(B/A, M).$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Ex}(B/A, M)$ den $B$-Modul aller analytischen $A$-Erweiterungen von $B$ durch $M$. Wir wollen diese Abbildung explizit angeben. Seien $R$ eine Resolvente für $B$ über $A$ und $\mathfrak{b}$ der Kern von $R^0 \to B$. Setzen wir $\bar{R}^0 := R^0/\mathfrak{b}^2$ und $E := R^{-1}/(\mathfrak{b}R^{-1} + s(R^{-2}))$, so ist

$$0 \to E \to \bar{R}^0 \to B \to 0$$

eine analytische $A$-Erweiterung von $B$ durch $E$. Ist nun $\delta \in \mathrm{Der}^1_A(R, M)$ eine Derivation mit $\delta s = 0$, so definiert $\delta$ eine $B$-lineare Abbildung $\bar{\delta}: E \to M$. Mithin ist

$$0 \to M \to \bar{R}^0 \amalg_{\bar{\delta}} M \to B \to 0$$

eine analytische $A$-Erweiterung von $B$ durch $M$ und definiert also ein Element aus $\mathrm{Ex}(B/A, M)$.

(5.5) Seien $B \xrightarrow{\phi} C$ ein Homomorphismus analytischer $A$-Algebren, $M$ bzw. $N$ ein endlicher Modul über $B$ bzw. $C, B'$ eine analytische $A$-Erweiterung von $B$ durch $M$ und $M \xrightarrow{u} N$ ein $B$-Homomorphismus. Wir wollen untersuchen, wann es eine analytische $A$-Erweiterung $C'$ von $C$ durch $N$ zusammen mit einem $A$-Homomorphismus $B' \xrightarrow{\phi'} C'$ gibt, der $\phi$ und $u$ induziert, für den also das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle u} & & \uparrow{\scriptstyle \phi'} & & \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutiert. Wenden wir die Kohomologiesequenz aus (5.3) auf die Homomorphismen $B' \to B \to C$ an, so erhalten wir die exakte Sequenz

$$T^1(C/B', N) \xrightarrow{\alpha} T^1(B/B', N) \xrightarrow{\partial} T^2(C/B, N).$$

Man sieht leicht, daß man einen kanonischen Isomorphismus von $T^1(B/B', N)$ auf $\mathrm{Hom}_B(M, N)$ hat. Die obige Abbildung $\alpha$ ordnet einer $B'$-Erweiterung $C'$ von $C$ durch $N$ den von $B' \to C'$ induzierten Homomorphismus von $M$ in $N$ zu. Ist nun $o(B', u) \in T^2(C/B, N)$ das Bild von $u$ unter $\partial$, so gilt daher offenbar:

(5.6) **Aussage.** *Das Element $o(B', u) \in T^2(C/B, N)$ verschwindet genau dann, wenn es eine analytische $A$-Erweiterung $C'$ von $C$ durch $N$ und einen $A$-Homomorphismus $B' \xrightarrow{\phi'} C'$ gibt, so daß das obige Diagramm kommutiert.*

(5.7) Ein *simpliziales Schema* ist eine Menge $A_0$ zusammen mit einem System $A$ von nichtleeren Teilmengen von $A_0$, Simplizes genannt, so daß $A$ alle einelementigen Mengen enthält und jede nichtleere Teilmenge eines Simplex wieder ein Simplex ist. Sind $A$ und $B$ simpliziale Schemata, so ist eine *simpliziale Abbildung* $A \to B$ eine Abbildung $A_0 \to B_0$, die Simplizes in Simplizes überführt.

Man kann ein simpliziales Schema $A$ als Kategorie auffassen, indem man für $\alpha, \beta \in A$ die Menge $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)$ als einelementig definiert, falls $\beta \subseteq \alpha$ ist, und als leer sonst. Ein *simpliziales Objekt* $S_*$ in einer Kategorie $\mathscr{C}$ ist ein simpliziales Schema $A$ zusammen mit einem kovarianten Funktor $A \to \mathscr{C}$. Ein solches Objekt $S_*$ besteht also aus einer Familie $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Objekten aus $\mathscr{C}$, und für $\alpha \subseteq \beta$ sind Morphismen $p_{\alpha\beta}: S_\beta \to S_\alpha$ gegeben, welche miteinander verträglich sind. In naheliegender Weise erklärt man den Begriff des Morphismus von simplizialen Objekten über demselben simplizialen Schema. Jedes Objekt aus $\mathscr{C}$ läßt sich trivial als simpliziales Objekt auffassen.

Seien $T_* = (T_\beta)_{\beta \in B}$ ein simpliziales Objekt in $\mathscr{C}$ und $A \xrightarrow{\phi} B$ ein Morphismus von Simplizialschemata. Dann wird durch $\phi^{-1}(T_*)_\alpha := T_{\phi(\alpha)}$ ein simpliziales Objekt $\phi^{-1}(T_*)$ in $\mathscr{C}$ über $A$ definiert. Sind $S_*$ bzw. $T_*$ simpliziale Objekte in $\mathscr{C}$ über $A$ bzw. $B$, so ist ein *Morphismus* $S_* \to T_*$ ein Paar bestehend aus einer simplizialen Abbildung $A \xrightarrow{\phi} B$ zusammen mit einem Morphismus von $S_*$ in $\phi^{-1}(T_*)$.

(5.8) Ein *simplizialer geringter Raum* $X_* = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist ein simpliziales Objekt in der Kategorie der geringten Räume. Ein solcher Raum heißt *glatt*, wenn alle Halmringe der $X_\alpha$, $\alpha \in A$, reguläre Ringe sind. Unter einem *abgeschlossenen Unterraum* von $X_*$ verstehen wir einen simplizialen geringten Raum $Y_* = (Y_\alpha)_{\alpha \in A}$, so daß $Y_\alpha$ ein abgeschlossener Unterraum von $X_\alpha$ für jedes $\alpha$ ist und alle entstehenden Diagramme kommutieren. Ein *Modul* $\mathscr{F}_*$ auf $X_*$ ist eine Familie von Moduln $\mathscr{F}_\alpha$ über $\mathscr{O}_{X_\alpha}$ zusammen mit verträglichen Homomorphismen $p_{\alpha\beta}^*(\mathscr{F}_\alpha) \to \mathscr{F}_\beta$. Beispielsweise ist $\mathscr{O}_{X_*} = (\mathscr{O}_{X_\alpha})$ ein solcher Modul. Die Moduln auf $X_*$ bilden eine abelsche Kategorie $\mathrm{Mod}(X_*)$.

(5.9) Unter einem Steinschen Kompaktum wollen wir hier einen $\mathbb{C}$-geringten Raum der Form $(K, \mathscr{O}_X | K)$ verstehen; hierbei ist $K$ ein Steinsches Kompaktum in einem komplexen Raum $X$. Der Begriff des *simplizialen Steinschen Kompaktums* ist nun wohldefiniert. Sei $X_* = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein solches Objekt. Man kann zeigen, daß es in $\mathrm{Mod}(X_*)$ genügend viele injektive Objekte gibt. Für jedes $\alpha$ hat man einen kanonischen Funktor $p_\alpha^*: \mathrm{Mod}(X_\alpha) \to \mathrm{Mod}(X_*)$, welcher einem $\mathscr{O}_{X_\alpha}$-Modul $\mathscr{F}$ den Modul $p_\alpha^*(\mathscr{F})$ auf $X_*$ mit $p_\alpha^*(\mathscr{F})_\beta = p_{\alpha\beta}^*(\mathscr{F})$ für $\alpha \subseteq \beta$ und 0 sonst zuordnet. Ist $\mathscr{F}$ ein projektiver $\mathscr{O}_{X_\alpha}$-Modul, so ist $p_\alpha^*(\mathscr{F})$ ein projektives Objekt in der Unterkategorie $\mathrm{Coh}(X_*)$ der kohärenten Moduln in $\mathrm{Mod}(X_*)$, und jedes projektive Objekt in $\mathrm{Coh}(X_*)$ ist Summe von Moduln dieser Form, vgl. [9], (2.3). Mit Theorem $A$ und $B$ zeigt man ferner leicht, daß es in $\mathrm{Coh}(X_*)$ genügend viele projektive Objekte gibt.

(5.10) Seien $X$ ein separierter komplexer Raum und $(X_i)_{i \in I}$ eine lokalendliche Überdeckung von $X$ durch Steinsche Kompakta. Sei $A_0 := I$ und $A$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen $\alpha \subseteq A_0$, für die $X_\alpha := \bigcap_{i \in \alpha} X_i$ nichtleer ist. Versehen wir $X_\alpha$ mit der Garbe $\mathscr{O}_X | X_\alpha$, so ist $X_* = (X_\alpha)_{\alpha \in A}$ in natürlicher Weise ein

simpliziales Steinsches Kompaktum. Für $\alpha\in A$ sei $j_\alpha: X_\alpha\to X$ die kanonische Inklusion. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{G}$ definiert in natürlicher Weise einen Modul $j^*(\mathcal{G})$ auf $X_*$ mit $j^*(\mathcal{G})_\alpha=\mathcal{G}|X_\alpha$.

Für einen Modul $\mathcal{F}_*$ auf $X_*$ sei $j_*(\mathcal{F}_*)$ der $\mathcal{O}_X$-Modul, dessen Schnitte über einer offenen Menge $U\subseteq X$ gerade die verträglichen Familien aus $\prod_{\alpha\in A}\Gamma(U\cap X_\alpha,\mathcal{F}_\alpha)$ sind. Dann ist $j_*:\mathrm{Mod}(X_*)\to\mathrm{Mod}(X)$ ein kovarianter linksexakter Funktor. Man kann für einen Modul $\mathcal{F}_*$ auf $X_*$ wie folgt einen *Čech-Komplex* $\mathrm{C}^\cdot(\mathcal{F}_*)$ definieren. Mit $I^n$ bezeichnen wir die Menge aller Tupel $i=(i_0,\ldots,i_n)\in A_0^{n+1}$, für die $|i|:=\{i_0,\ldots,i_n\}$ in $A$ liegt. Dann sei

$$\mathrm{C}^n(\mathcal{F}_*):=\prod_{i\in I^n} j_{|i|*}(\mathcal{F}_{|i|});$$

die Ableitungsoperatoren $\mathrm{C}^n(\mathcal{F}_*)\to\mathrm{C}^{n+1}(\mathcal{F}_*)$ sind dabei wie üblich definiert. Man hat einen kanonischen funktoriellen Homomorphismus $j_*(\mathcal{F}_*)\to\mathrm{C}^\cdot(\mathcal{F}_*)$. Ist $\mathcal{F}_*$ injektiv, so ist diese Abbildung ein Quasiisomorphismus. Sind $\mathcal{F},\mathcal{G}$ beliebige $\mathcal{O}_X$-Moduln, so gilt

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X_*}}(j^*(\mathcal{F}),j^*(\mathcal{G}))=\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{G}).$$

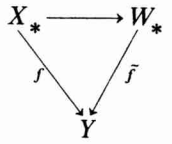
(5.11) Sei $X_*=(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ wieder ein beliebiges simpliziales Steinsches Kompaktum. Eine *graduierte antikommutative* $\mathcal{O}_{X_*}$-Algebra ist eine graduierte $\mathcal{O}_{X_*}$-Algebra $\mathcal{A}_*=\coprod_{i\leqq 0}\mathcal{A}^i$ mit antikommutativer Multiplikation und kohärenten homogenen Komponenten derart, daß $\mathcal{A}_*^0$ ein Quotient von $\mathcal{O}_{X_*}$ ist. Ebenso definiert man den Begriff des graduierten Moduls über einer solchen Algebra; die homogenen Komponenten seien dabei stets kohärent. Ein $\mathcal{A}_*$-Modul heißt *frei*, wenn er direkte Summe von Moduln der Form $p_\alpha^*(\mathcal{F})\otimes_{\mathcal{O}_{X_*}}\mathcal{A}_*$ mit freien $\mathcal{O}_{X_\alpha}$-Moduln $\mathcal{F}$ ist. Man nennt eine $\mathcal{A}_*$-Algebra $\mathcal{B}_*$ *frei*, wenn sie isomorph ist zu der symmetrischen Algebra $\mathrm{S}_{\mathcal{A}_*}(\mathcal{F}_*)$ eines freien $\mathcal{A}_*$-Moduls $\mathcal{F}_*$ mit $\mathcal{F}_*^i=0$ für $i\geqq 0$. $\mathcal{B}_*$ heißt *lokal-frei* über $\mathcal{A}_*$, wenn $\mathcal{B}_{\alpha,x}$ frei über $\mathcal{A}_{\alpha,x}$ ist für $x\in X_\alpha$ und $\alpha\in A$.

Auch die Begriffe der (DG)-Algebra und des (DG)-Moduls lassen sich sofort in den hier betrachteten Kontext übertragen. Sei $\mathcal{A}_*\to\mathcal{B}_*$ ein Homorphismus von (DG)-Algebren über $\mathcal{O}_{X_*}$. Eine *Resolvente* (bzw. *freie Resolvente*) für $\mathcal{B}_*$ über $\mathcal{A}_*$ ist eine lokal freie (bzw. freie) (DG)-Algebra $\mathcal{R}_*$ über $\mathcal{A}_*$ zusammen mit einem surjektiven Homomorphismus $\mathcal{R}_*\to\mathcal{B}_*$ von (DG)-Algebren, welcher als Komplexhomomorphismus ein Quasiisomorphismus ist. Mit Hilfe von Theorem A und B für Steinsche Kompakta zeigt man, daß es stets freie Resolventen gibt, vgl. [9], (2.7).

(5.12) Sei $X\xrightarrow{f}Y$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume.[8] Unter einer *Resolvente* für $f$ (oder für $X$ über $Y$) verstehen wir folgende Daten: Eine lokalendliche Überdeckung $(X_i)_{i\in I}$ von $X$ durch Steinsche Kompakta, eine abgeschlossene Einbettung $X_*\hookrightarrow W_*$ des zugehörigen simplizialen Steinschen

[8] Für den Rest dieses Paragraphen setzen wir voraus, daß alle betrachteten komplexen Räume separiert sind und eine abzählbare Topologie haben

Kompaktums $X_*$ (vgl. (5.10)) in ein weiteres simpliziales Steinsches Kompaktum $W_*$, einen glatten Morphismus $\tilde{f}: W_* \to Y$ derart, daß

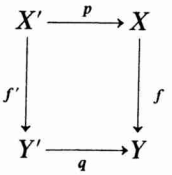


kommutiert, zusammen mit einer Resolvente $\mathscr{R}_*$ von $\mathcal{O}_{X_*}$ über $\mathcal{O}_{W_*}$. Dabei heißt $\tilde{f}$ glatt, wenn $\mathcal{O}_{W_{\alpha,w}}$ isomorph zu einem Potenzreihenring über $\mathcal{O}_{Y,\tilde{f}_\alpha(w)}$ ist für $w \in W_\alpha$ und alle $\alpha$.

Wir verwenden die Bezeichnung $\mathscr{R}_* = (X_* \to W_*, \tilde{f}, \mathscr{R}_*)$. Man kann zeigen, daß es zu vorgegebener Überdeckung $(X_i)$ stets Resolventen gibt, für die $\Omega_{\mathscr{R}_*/Y}$ ein projektiver $\mathscr{R}_*$-Modul ist. Der zu dem Doppelkomplex

$$C^\cdot(\Omega^\cdot_{\mathscr{R}_*/Y} \otimes_{\mathscr{R}_*} \mathcal{O}_{X_*})$$

gehörige Einfachkomplex $L^\cdot_{\mathscr{R}_*}$ ist ein Komplex aus flachen $\mathcal{O}_X$-Moduln. Man kann zeigen, daß dieser Komplex, aufgefaßt als Element der derivierten Kategorie $D(X)$, nicht von der Wahl von $\mathscr{R}_*$ abhängt, vgl. [9], (2.16). Man nennt $L^\cdot_{\mathscr{R}_*}$ den *Kotangentenkomplex* von $X \to Y$ oder von $f$ und bezeichnet ihn mit $L_{X/Y}$. Zu einem kommutativen Diagramm



gehört ein Morphismus $\mathbf{L}p^*(L^\cdot_{X/Y}) \to L^\cdot_{X'/Y'}$, welcher als Abbildung in $D(X')$ nur von dem Paar $(p,q)$ abhängt, vgl. [9], p. 43. Ist das obige Diagramm kartesisch und $f$ oder $q$ flach, so ist dieser Pfeil ein Quasiisomorphismus. Insbesondere ist $(L^\cdot_{X/Y})_x$ ein Kotangentenkomplex für $\mathcal{O}_{X,x}$ über $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ im Sinne von (5.3) für jedes $x \in X$. Hieraus folgt sofort, daß $L^\cdot_{X/Y}$ kohärente Kohomologie hat und daß $H^i(L^\cdot_{X/Y}) = 0$ ist für $i > 0$.

(5.13) Seien $X \xrightarrow{f} Y$ eine holomorphe Abbildung und $\mathscr{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Für $i \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$T^i(X/Y, \mathscr{F}) := \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(L^\cdot_{X/Y}, \mathscr{F})$$

und

$$\mathscr{T}^i(X/Y, \mathscr{F}) := \mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(L^\cdot_{X/Y}, \mathscr{F}).$$

Es ist $T^\cdot(X/Y, \mathscr{F})$ und $\mathscr{T}^\cdot(X/Y, \mathscr{F})$ ein kovarianter Kohomologiefunktor in $\mathscr{F}$, und man hat eine Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathscr{T}^q(X/Y, \mathscr{F})) \Rightarrow T^{p+q}(X/Y, \mathscr{F}).$$

Ferner sind mit $\mathscr{F}$ auch die $\mathscr{T}^i(X/Y, \mathscr{F})$ kohärent.

Seien $X \xrightarrow{f} Y$ und $Y \xrightarrow{g} Z$ zwei holomorphe Abbildungen. Dann gibt es bei geeigneter Wahl der Repräsentanten der Kotangentenkomplexe eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathbf{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Z}) \to \mathrm{L}^{\cdot}_{X/Z} \to \mathrm{L}^{\cdot}_{X/Y} \to 0.$$

Hieraus erhält man für jeden $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ eine lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \mathrm{T}^i(X/Y, \mathcal{F}) \to \mathrm{T}^i(X/Z, \mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Z}), \mathcal{F}) \to \mathrm{T}^{i+1}(X/Y), \mathcal{F}) \to \ldots$$

und analog für $\mathcal{T}^i$.

(5.14) Seien $X \to Y$ eine *flache* holomorphe Abbildung, $Y' \subseteq Y$ ein abgeschlossener Unterraum und $X' := X \times_Y Y'$ sowie $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_{X'}$-Modul. Dann gilt

$$\mathrm{T}^i(X/Y, \mathcal{G}) = \mathrm{T}^i(X'/Y', \mathcal{G})$$

für $i \in \mathbb{N}$. *Beweis.* Wegen $\mathrm{L}^{\cdot}_{X/Y} \otimes \mathcal{O}_{Y'} = \mathrm{L}^{\cdot}_{X'/Y'}$ ist $\mathcal{T}^i(X/Y, \mathcal{G})$ $\mathcal{T}^i(X'/Y', \mathcal{G})$. Die Behauptung folgt nun mit den Spektralsequenzen aus (5.13).

(5.15) Wir wollen noch eine weitere wichtige Interpretation der Gruppen $\mathrm{T}^i(X/Y, \mathcal{F})$ geben. Sei $\mathcal{R}_*$ eine Resolvente für $X$ über $Y$ derart, daß $\Omega_{\mathcal{R}_*/Y}$ ein projektiver $\mathcal{R}_*$-Modul ist. Für einen $\mathcal{O}_{X_*}$-Modul $\mathcal{G}_*$ sei $\mathrm{Der}^i_Y(\mathcal{R}_*, \mathcal{G}_*)$ der Modul der $Y$-Derivationen vom Grad $i$ von $\mathcal{R}_*$ in $\mathcal{G}_*$. Dann ist $\mathrm{Der}^{\cdot}_Y(\mathcal{R}_*, \mathcal{G}_*)$ versehen mit dem Differential $\delta \mapsto \delta s$ ein Komplex. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

(5.16) **Aussage.** *Ist $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul, so ist*

$$\mathrm{T}^i(X/Y, \mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(\mathrm{Der}_Y(\mathcal{R}_*, j^*(\mathcal{F}))).$$

*Beweisskizze.* Sei $\mathcal{I}^{\cdot}$ bzw. $\mathcal{J}^{\cdot}$ eine injektive Auflösung von $\mathcal{F}$ bzw. $j^*(\mathcal{F})$. Weil auch $\mathrm{C}^{\cdot}(\mathcal{J}^{\cdot}_*)$ eine Auflösung von $\mathcal{F}$ ist, findet man einen Komplexhomomorphismus $\mathrm{C}^{\cdot}(\mathcal{J}^{\cdot}_*) \to \mathcal{I}^{\cdot}$. Der Čech-Funktor $\mathrm{C}^{\cdot}$ induziert eine Abbildung von $\mathrm{Hom}(\Omega_{\mathcal{R}_*} \otimes \mathcal{O}_{X_*}, \mathcal{J}^{\cdot}_*)$ in $\mathrm{Hom}(\mathrm{C}^{\cdot}(\Omega_{\mathcal{R}_*} \otimes \mathcal{O}_{X_*}), \mathrm{C}^{\cdot}(\mathcal{J}^{\cdot}_*))$. Insgesamt erhalten wir daher einen Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_*}}(\Omega_{\mathcal{R}_*} \otimes \mathcal{O}_{X_*}, \mathcal{J}^{\cdot}_*) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{C}^{\cdot}(\Omega_{\mathcal{R}_*} \otimes \mathcal{O}_{X_*}), \mathcal{I}^{\cdot})$$

von Doppelkomplexen. Durch Betrachtung der zugehörigen Spektralsequenzen zeigt man nun mit Hilfe von (5.10), daß dies sogar ein Quasiisomorphismus von Komplexen ist. Andererseits ist auch

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_*}}(\Omega_{\mathcal{R}_*} \otimes \mathcal{O}_{X_*}, j^*(\mathcal{F})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_*}}(\Omega_{\mathcal{R}_*} \otimes \mathcal{O}_{X_*}, \mathcal{J}^{\cdot}_*)$$

ein Quasiisomorphismus, weil $\Omega_{\mathcal{R}_*} \otimes \mathcal{O}_{X_*}$ ein Komplex aus projektiven $\mathcal{O}_{X_*}$-Moduln ist. Hieraus folgt die Behauptung.

Aus (5.16) erhalten wir speziell, daß $\mathrm{T}^0(X/Y, \mathcal{F}) = \mathrm{Der}_Y(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ für kohärentes $\mathcal{F}$ ist. – Der folgende wichtige Satz beschreibt den Zusammenhang von $\mathrm{T}^1$ mit Erweiterungen.

(5.17) **Satz.** *Seien $X \to Y$ eine holomorphe Abbildung und $\mathcal{F}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann hat man einen kanonischen $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Modulisomorphismus*

$$\mathrm{T}^1(X/Y, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ex}(X/Y, \mathcal{F}).$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Ex}(X/Y,\mathscr{F})$ den Modul der analytischen $Y$-Erweiterungen von $X$ durch $\mathscr{F}$. Auch hier soll die Abbildung explizit angegeben werden. Sei $\mathscr{R}_*$ eine Resolvente für $X$ über $Y$ und $\mathscr{B}_*$ der Kern von $\mathscr{R}_*^0 \to \mathcal{O}_{X_*}$. Wir setzen $\bar{\mathscr{R}}_*^0 := \mathscr{R}_*/\mathscr{B}_*^2$ und $\mathscr{E} := \mathscr{R}_*^{-1}/(\mathscr{B}_*\mathscr{R}_*^{-1} + s(\mathscr{R}^{-2}))$. Dann ist

$$0 \to \mathscr{E} \to \bar{\mathscr{R}}_*^0 \to \mathcal{O}_{X_*} \to 0$$

eine Erweiterung von $\mathcal{O}_{X_*}$ durch $\mathscr{E}$. Ein Element aus $\mathrm{T}^1(X/Y,\mathscr{F})$ wird nach (5.16) durch eine Derivation $\delta \in \mathrm{Der}_Y^1(\mathscr{R}_*, j^*(\mathscr{F}))$ mit $\delta s = 0$ repräsentiert. Ein solches $\delta$ induziert eine $\mathcal{O}_{X_*}$-lineare Abbildung $\bar{\delta}: \mathscr{E} \to j^*(\mathscr{F})$. Man sieht nun leicht, daß

$$0 \to j^*(\mathscr{F}) \to \bar{\mathscr{R}}_*^0 \amalg_\delta j^*(\mathscr{F}) \to \mathcal{O}_{X_*} \to 0$$

ein Element aus $\mathrm{Ex}(X/Y,\mathscr{F})$ definiert.

(5.18) Seien nun $X \xrightarrow{f} Y$ eine holomorphe $Z$-Abbildung, $\mathscr{F}$ bzw. $\mathscr{G}$ kohärente Moduln auf $X$ bzw. $Y, Y \hookrightarrow Y'$ eine analytische $Z$-Erweiterung durch $\mathscr{G}$ sowie $\mathscr{G} \xrightarrow{u} \mathscr{F}$ ein $f$-Homomorphismus. Wir wollen wie in (5.6) untersuchen, wann es eine analytische $Z$-Erweiterung $X'$ von $X$ durch $\mathscr{F}$ zusammen mit einem $Z$-Morphismus $X' \xrightarrow{f'} Y'$ gibt, der $f$ und $u$ induziert, für den also das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{F} & \dashrightarrow & \mathcal{O}_{X'} & \dashrightarrow & \mathcal{O}_X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle u} & & \uparrow{\scriptstyle f'^*} & & \uparrow{\scriptstyle f^*} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{G} & \longrightarrow & f^{-1}(\mathcal{O}_{Y'}) & \longrightarrow & f^{-1}(\mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

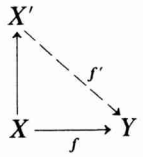
kommutiert. Wenden wir die Kohomologiesequenz aus (5.13) auf die Morphismen $X \to Y \to Y'$ an, so erhalten wir die exakte Sequenz

$$\mathrm{T}^1(X/Y',\mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathbf{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Y'}),\mathscr{F}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{T}^2(X/Y,\mathscr{F}).$$

Man sieht leicht, daß $\mathrm{H}^0(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Y'}) = 0$ und $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Y'}) = \mathscr{G}$ ist. Somit ist $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Y'}),\mathscr{F}) = \mathrm{Hom}_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)}(f^{-1}(\mathscr{G}),\mathscr{F})$. Es ist nun unschwer nachzuprüfen, daß die obige Abbildung $\alpha$ einer $Y'$-Erweiterung $X'$ von $X$ durch $\mathscr{F}$ den von $f^{-1}(\mathcal{O}_{Y'}) \to \mathcal{O}_{X'}$ induzierten Homomorphismus von $f^{-1}(\mathscr{G})$ in $\mathscr{F}$ zuordnet. Ist nun $\mathrm{o}(Y',u) \in \mathrm{T}^2(X/Y,\mathscr{F})$ das Bild von $u$ unter $\partial$, so gilt daher offenbar:

(5.19) **Aussage.** *Das Element* $\mathrm{o}(Y',u) \in \mathrm{T}^2(X/Y,\mathscr{F})$ *verschwindet genau dann, wenn es eine $Z$-Erweiterung $X'$ von $X$ durch $\mathscr{F}$ und einen $Z$-Morphismus $X' \xrightarrow{f'} Y'$ gibt, so daß obiges Diagramm kommutiert.*

(5.20) Seien $X \xrightarrow{f} Y$ eine holomorphe $Z$-Abbildung und $X \to X'$ eine infinitesimale $Z$-Erweiterung durch einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$. Wir wollen untersuchen, wann es einen $Z$-Morphismus $X' \xrightarrow{f'} Y$ gibt, der das Diagramm




kommutativ macht. Die Kohomologiesequenz aus (5.13), angewandt auf $X \to Y \to Z$, lautet

$$\ldots \to \mathrm{T}^1(X/Y, \mathscr{F}) \to \mathrm{T}^1(X/Z, \mathscr{F}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_X}(\mathbf{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Z}), \mathscr{F}).$$

Bezeichnet nun $o(f, X') \in \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_X}(\mathbf{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Z}), \mathscr{F})$ das Bild der Klasse von $X'$ unter $\alpha$, so läßt sich $f$ offenbar genau dann zu einem $Z$-Morphismus $f'\colon X' \to Y$ liften, wenn $o(f, X')$ verschwindet.

(5.21) Die (lokale) Theorie des Kotangentenkomplexes läßt sich völlig analog für *komplette* analytische Algebren durchführen. Es gilt der folgende Vergleichssatz: Ist $A \to B$ ein Homomorphismus konvergenter analytischer Algebren mit Kotangentenkomplex $\mathrm{L}^{\cdot}_{B/A}$, so ist $\mathrm{L}^{\cdot}_{B/A} \otimes_B \hat{B}$ ein Kotangentenkomplex für $\hat{B}$ über $\hat{A}$. Insbesondere hat man für jeden endlichen $B$-Modul $M$ einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{T}^i(B/A, M) \otimes_B \hat{B} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^i(\hat{B}/\hat{A}, \hat{M}), \qquad i \in \mathbb{N}.$$

(5.22) Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in (5.20). Darüber hinaus sei $Y$ Steinsch und $f$ endlich. Es sei $y \in Y$ ein Punkt derart, daß sich $\hat{f}$ zu einem $Z$-Morphismus $\bar{f}\colon \hat{X}' \to \hat{Y}$ hochheben läßt; hierbei bezeichne $\hat{}$ das Komplettieren längs $\{y\}$ bzw. $f^{-1}(y)$. Dann gibt es eine Funktion $\phi \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ mit $\phi(y) \neq 0$ und eine Liftung $f''\colon X' \amalg_{\phi} \mathscr{F} \to Y$ von $f$.

*Beweis.* Das Hindernis, $f$ zu einer holomorphen $Z$-Abbildung von $X'$ in $Y$ hochzuheben, ist nach (5.20) ein Element $o = o(f, X')$ aus dem Modul $\mathrm{E} := \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_X}(\mathbf{L}f^*(\mathrm{L}^{\cdot}_{Y/Z}), \mathscr{F})$. Die Voraussetzungen implizieren, daß das Bild von $o$ in $\hat{\mathrm{E}}$ verschwindet, vgl. auch (5.21). Somit gibt es ein $\phi \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$ mit $\phi(y) \neq o$ und $\phi \cdot o = 0$. Wegen $\phi \cdot o = o(f, X' \amalg_{\phi} \mathscr{F})$ folgt die Behauptung.

## §6. Einige Hilfssätze über Kohomologiefunktoren

In diesem Paragraphen stellen wir einige Aussagen über gewisse Kohomologiefunktoren zusammen, welche wir benötigen, um die Bedingungen (S2), (S3) und (O1), O2) aus §1 in den später auftretenden konkreten Situationen zu verifizieren.

(6.1) **Aussage.** *Seien $X \xrightarrow{f} S$ eine holomorphe Abbildung, $\mathscr{F}^{\cdot}$ ein Komplex von $\mathscr{O}_X$-Moduln mit nach rechts beschränkter, kohärenter Kohomologie derart, daß $\overline{\bigcup_i \mathrm{Supp}(\mathscr{H}^i(\mathscr{F}^{\cdot}))}$ eigentlich über $S$ liegt, und $\mathscr{G}$ ein kohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul. Für $i \in \mathbb{Z}$ und $\mathscr{M} \in \mathrm{Coh}(S)$ sei $\mathscr{E}^i_S(\mathscr{M})$ die zu der Prägarbe $V \mapsto \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{O}_{X|V}}(\mathscr{F}^{\cdot}|V, \mathscr{G} \otimes \mathscr{M}|V)$, $V \subseteq S$ offen, gehörige Garbe auf $S$. Dann gilt:*

(1) *$\mathscr{E}^i_S(\mathscr{M})$ ist ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul.*

(2) *Für jede offene Steinsche Teilmenge $V \subseteq S$ ist der kanonische Homomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{X|V}}(\mathscr{F}^\cdot|V, \mathscr{G} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathscr{M}|V) \to \Gamma(V, \mathscr{E}^i_S(\mathscr{M}))$$

*bijektiv.*

*Beweis.* Wir dürfen von vornherein annehmen, daß $\mathscr{F}^\cdot$ nach rechts beschränkt und $\mathscr{M} = \mathcal{O}_S$ ist. Es gibt eine gegen $\mathscr{E}^i := \mathscr{E}^i_S(\mathcal{O}_S)$ konvergierende Spektralsequenz mit den $E_2$-Termen

$$E_2^{p,q} = R^p f_*(\mathscr{E}xt^q_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}^\cdot, \mathscr{G})).$$

Wegen (6.2) und dem Bildgarbensatz sind die $E_2^{p,q}$ kohärente $\mathcal{O}_S$-Moduln. Hieraus folgt (1). Zum Nachweis von (2) dürfen wir $V = S$ annehmen. Sei $\mathscr{I}^\cdot$ eine injektive Auflösung von $\mathscr{G}$ und $\mathscr{L}^\cdot$ der Komplex $f_*(\mathscr{H}om^\cdot_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}^\cdot, \mathscr{I}^\cdot))$. Dann gilt $\mathscr{E}^i = \mathscr{H}^i(\mathscr{L}^\cdot)$ und $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}^\cdot, \mathscr{G}) = \mathrm{H}^i(\Gamma(S, \mathscr{L}^\cdot))$. Die Behauptung folgt nun aus (6.3), wenn man noch berücksichtigt, daß die $\mathscr{L}^i$ welk und die $\mathscr{H}^i(\mathscr{L}^\cdot)$ nach (1) kohärent sind.

Im Beweis von (6.1) haben wir die folgenden beiden Lemmata verwendet.

(6.2) **Lemma.** *Seien $X$ ein komplexer Raum, $\mathscr{F}^\cdot$ ein Komplex von $\mathcal{O}_X$-Moduln mit nach rechts beschränkter, kohärenter Kohomologie und $\mathscr{G}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul. Dann sind die $\mathcal{O}_X$-Moduln*

$$\mathscr{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}^\cdot, \mathscr{G}), \qquad i \in \mathbb{Z},$$

*kohärent und auf $\overline{\bigcup_i \mathrm{Supp}(\mathscr{H}^i(\mathscr{F}^\cdot)) \cap \mathrm{Supp}(\mathscr{G})}$ konzentriert.*

Der *Beweis* ergibt sich sofort aus der Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \mathscr{E}xt^p_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{H}^{-q}(\mathscr{F}^\cdot), \mathscr{G}) \Rightarrow \mathscr{E}xt^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{F}^\cdot, \mathscr{G}).$$

(6.3) **Lemma.** *Seien $S$ ein Steinscher Raum und $\mathscr{L}^\cdot$ ein nach links beschränkter Komplex aus $\Gamma(S, \cdot)$-azyklischen $\mathcal{O}_S$-Moduln mit kohärenter Kohomologie. Dann gilt*

$$\Gamma(S, \mathscr{H}^i(\mathscr{L}^\cdot)) = \mathrm{H}^i(\Gamma(S, \mathscr{L}^\cdot))$$

*für alle $i \in \mathbb{Z}$.*

*Beweis.* Durch aufsteigende Induktion zeigt man, daß die Zykel und Ränder von $\mathscr{L}^\cdot$ azyklisch bezüglich $\Gamma(S, \cdot)$ sind. Hieraus folgt dann die Behauptung.

(6.4) **Aussage.** *Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in* (6.1). *Ferner sei $\mathscr{G}$ flach über $S$. Dann gilt:*

(1) *Ist $S' \subseteq S$ ein abgeschlossener Unterraum und $S_n$ die $n$-te infinitesimale Umgebung von $S'$ in $S$, so sind die kanonischen Homomorphismen*

$$\widehat{\mathscr{E}^i_S}(\mathscr{M}) \to \varprojlim_n \mathscr{E}^i_S(\mathscr{M} \otimes \mathcal{O}_{S_n})$$

*für $\mathscr{M} \in \mathrm{Coh}(S)$ bijektiv; hierbei bezeichnet $\widehat{\ }$ das formale Komplettieren längs $S'$.*

(2) *Sei $S_0 \subseteq S$ ein reduzierter Unterraum und $i \in \mathbb{Z}$ fest. Dann gibt es eine dichte Zariski-offene Menge $U \subseteq S_0$, so daß für $V \subseteq U$ offen und $\mathcal{M} \in \mathrm{Coh}(V)$ der kanonische Homomorphismus*

$$\mathscr{E}^i_S(\mathcal{O}_S)|V \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{M} \to \mathscr{E}^i_V(\mathcal{M})$$

*bijektiv ist.*

*Beweis.* Zu (1). Sei $K \subseteq S$ ein Steinsches Kompaktum mit Schnittring $A = \Gamma(K, \mathcal{O}_S)$. Aus (6.1) (2) folgt, daß durch

$$M \mapsto \Gamma(K, \mathscr{E}^i_S(\mathcal{M})), \qquad i \in \mathbb{Z},$$

ein Kohomologiefunktor $F^\cdot$ von der Kategorie der endlichen $A$-Moduln in sich definiert wird; hierbei ist $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_S$-Modul mit $\Gamma(K, \mathcal{M}) = M$ (ein solcher existiert nach Verkleinerung von $S$). Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_S$ die zu $S'$ gehörige Idealgarbe und $\mathfrak{a} := \Gamma(K, \mathcal{I})$. Nach (6.5) sind die kanonischen Homomorphismen von $F^i(M)\hat{}$ in $\varprojlim F^i(M/\mathfrak{a}^{n+1}M)$ bijektiv. Durch Übergang zum induktiven Limes erhalten wir die Behauptung. (2) folgt wegen (6.1) aus (6.7) (1).

Nachzutragen bleibt die folgende von Flenner stammende Aussage.

(6.5) **Lemma.** *Seien $A$ ein noetherscher Ring endlicher Dimension und $F^\cdot$ ein Kohomologiefunktor von der Kategorie der endlichen $A$-Moduln in sich sowie $\mathfrak{a} \subseteq A$ ein Ideal. Für jeden endlichen $A$-Modul $M$ sind dann die kanonischen Abbildungen*

$$F^i(M)\hat{} \to \varprojlim_n F^i(M/\mathfrak{a}^{n+1}M), \qquad i \in \mathbb{Z},$$

*bijektiv. Hierbei ist $\hat{}$ das $\mathfrak{a}$-adische Komplettieren.*

Der *Beweis* von (6.5) verläuft ähnlich wie der Beweis von (2.5) aus [8].

(6.6) Wir betrachten nun die folgende Situation: Gegeben seien ein komplexer Raum $S$ und für jede offene Teilmenge $U$ von $S$ ein Kohomologiefunktor $(F^i(U, \cdot))_{i \in \mathbb{Z}}$ von $\mathrm{Coh}(U)$ in sich mit $F^i(V, \mathcal{M}|V) = F^i(U, \mathcal{M})|V$ für $V \subseteq U$ und $\mathcal{M} \in \mathrm{Coh}(U)$ derart, daß für $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ aus $\mathrm{Coh}(U)$ die kanonischen Abbildungen

$$\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \to \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_U}(F^i(U, \mathcal{M}), F^i(U, \mathcal{N}))$$

$\mathcal{O}_U$-linear sind.

(6.7) **Satz.** *Mit den Bezeichnungen von* (6.6) *gilt für $i \in \mathbb{Z}$:*

(1) *Sei $S_0 \subseteq S$ ein reduzierter Unterraum. Dann gibt es eine dichte Zariski-offene Teilmenge $U$ von $S_0$ derart, daß für $V \subseteq U$ offen und jedes $\mathcal{M} \in \mathrm{Coh}(V)$ der kanonische Homomorphismus*

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_V} F^i(V, \mathcal{O}_V) \to F^i(V, \mathcal{M})$$

*bijektiv ist.*

(2) *$F^i(S, \cdot)$ ist genau dann exakt, wenn die natürlichen Homomorphismen $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_S} F^i(S, \mathcal{O}_S) \to F^i(S, \mathcal{M})$ für $\mathcal{M} \in \mathrm{Coh}(S)$ bijektiv sind und $F^i(S, \mathcal{O}_S)$ lokalfrei ist.*

(3) *Die Funktion $f^i$ mit $f^i(s)=\dim_{\mathbb{C}} F^i(S,k(s))$ für $s\in S$ ist nach oben halbstetig bezüglich der Zariski-Topologie.*

(4) *Ist $F^i(S,\cdot)$ exakt, so ist $f^i$ lokalkonstant auf $S$. Ist $S$ eine glatte Kurve, so gilt hiervon auch die Umkehrung.*

*Beweis.* (1) ist [9], Satz (4.6). Aus (6.5) ergibt sich leicht, daß mit $F^i(S,\cdot)$ auch alle $F^i(U,\cdot)$ exakt sind. Hieraus folgt (2). Zu (3). Aus (1) erhalten wir, daß die Funktion $f^i$ lokal konstruierbar ist. Zum Nachweis von (3) dürfen wir daher aufgrund von (2.5) von vornherein annehmen, daß $S$ eine integre glatte Kurve ist. Sei $s\in S$ und $t\in\mathfrak{m}_s$ ein regulärer Parameter. Aus der exakten Sequenz $0\to\mathcal{O}_{S,s}\xrightarrow{t}\mathcal{O}_{S,s}\to k(s)\to 0$ erhalten wir die exakte Sequenz

$$F^i(S,\mathcal{O}_S)_s\xrightarrow{t}F^i(S,\mathcal{O}_S)_s\to F^i(S,k(s))_s.$$

Daher ist $\operatorname{Rang}(F^i(S,\mathcal{O}_S))\leqq\mu(F^i(S,\mathcal{O}_S)_s)\leqq f^i(s)$. Wegen (1) findet man andererseits in beliebiger Nähe von $s$ Punkte $s'$ mit $f^i(s')=\operatorname{Rang}(F^i(S,\mathcal{O}_S))$. Hieraus folgt die Behauptung.

Zu (4). Die erste Aussage ergibt sich unmittelbar aus (2). Umgekehrt werde vorausgesetzt, daß $S$ eine glatte Kurve ist und daß $f^i$ lokalkonstant ist. Um zu zeigen, daß $F^i(S,\cdot)$ exakt ist, dürfen wir $S$ als zusammenhängend voraussetzen. Ähnlich wie oben sieht man nun, daß

$$\operatorname{Rang}(F^i(S,\mathcal{O}_S))=\mu(F^i(S,\mathcal{O}_S)_s)=f^i(s)$$

für alle $s\in S$ ist. Somit ist $F^i(S,\mathcal{O}_S)$ lokalfrei und $F^i(S,\mathcal{O}_S)\otimes k(s)=F^i(S,k(s))$ für $s\in S$. Aus [15], IV (7.2.5) und (7.2.7) folgt, daß $F^i(S,\cdot)$ rechtsexakt ist auf der Kategorie der kohärenten Moduln mit nulldimensionalem Träger. (6.5) impliziert, daß $F^i(S,\cdot)$ rechtsexakt ist. Hieraus folgt die Bijektivität der Homomorphismen $\mathcal{M}\otimes F^i(S,\mathcal{O}_S)\to F^i(S,\mathcal{M})$. Weil $F^i(S,\mathcal{O}_S)$ lokalfrei ist, folgt die Behauptung aus (2).

## §7. Deformationen von kompakten komplexen Räumen und isolierten Singularitäten

Als erste Anwendung der in Kapitel I erhaltenen Resultate zeigen wir die folgende Aussage.

(7.1) **Satz.** *Sei $X\to T$ eine flache eigentliche holomorphe Abbildung. Dann gilt:*

(1) *Die Menge der Punkte $t\in T$, für die $(X,X_t)\to(T,t)$ eine verselle (bzw. universelle) Deformation von $X_t$ ist, ist Zariski-offen in $T$.*

(2) *Für $t\in T$ ist die Deformation $(X,X_t)\to(T,t)$ von $X_t$ genau dann versell, wenn sie formal versell ist.*

Bevor wir (7.1) beweisen, führen wir eine Vorüberlegung durch.

(7.2) Es sei $F\to(\mathrm{An})$ das Gruppoid aus (1.1) (3), dessen Objekte über einem komplexen Raum $T$ die flachen holomorphen Abbildungen $X\to T$ sind. Man sieht leicht, daß $F$ die Bedingung (S1′) erfüllt. Sei $a\in F(T)$ gegeben durch eine

flache holomorphe Abbildung $X \to T$ und $\mathscr{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_T$-Modul. Nach (5.17) hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$D_a(\mathscr{M}) = \bar{F}_a(T[\mathscr{M}]) \xrightarrow{\sim} T^1(X/T, \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_X)$$

von $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$-Moduln. Sei

$$O_a(\mathscr{M}) := T^2(X/T, \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_X)$$

und $o_a(T') \in O_a(\mathscr{M})$ für eine infinitesimale Erweiterung $T \hookrightarrow T'$ von $T$ durch $\mathscr{M}$ das Bild von $T'$ unter dem kanonischen Homomorphismus von $T^1(T, \mathscr{M})$ in $T^2(X/T, \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_X)$, vgl. (5.19). Dann ist O eine Obstruktionstheorie für $F$.

*Beweis von* (7.1). Es sei $G \subseteq F$ das volle Untergruppoid von $F$, dessen Objekte die eigentlichen flachen holomorphen Abbildungen sind. Unser Problem besteht gerade darin zu zeigen, daß für $G$ die Zariski-Offenheit der Versalität (bzw. Universalität) gilt, und daß die formale Versalität bereits die Versalität impliziert.

Sei $a \in G(T)$ gegeben durch $X \to T$. Aus (7.2) folgt, daß $G$ die Bedingung (S1′) erfüllt, daß $D_a(\mathscr{M}) = \bar{G}_a(T[\mathscr{M}]) = T^1(X/T, \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_X)$ gilt für jeden kohärenten $\mathcal{O}_T$-Modul $\mathscr{M}$ und daß die Moduln $O_a(\mathscr{M}) = T^2(X/T, \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{O}_X)$ eine Obstruktionstheorie für $G$ definieren. Hieraus erhalten wir nach (6.1) und (6.4), daß $G$ die Bedingungen (S2), (S3) und O die Bedingungen (O1) und (O2) erfüllt. Die Darstellbarkeit des Hilbertschen Funktors impliziert, daß für $a, b \in G(T)$ der Funktor $\mathrm{Isom}(a, b)$ repräsentierbar ist. Die Behauptungen (1) und (2) ergeben sich nun aus (4.3) (2) in Verbindung mit [4], (4.3).

Wir wenden uns nun den Deformationen von isolierten Singularitäten zu.

(7.3) **Satz.** *Sei $X \xrightarrow{f} T$ eine flache separierte holomorphe Abbildung, deren Singularitätenmenge $Z = \mathrm{Sing}(f)$ endlich über $T$ liegt. Dann gilt:*

(1) *Die Menge der Punkte $t \in T$, für die $(X, Z_t) \to (T, t)$ eine verselle Deformation des Keimes $(X_t, Z_t)$ ist, ist Zariski-offen in $T$.*

(2) *Für $t \in T$ ist die Deformation $(X, Z_t) \to (T, t)$ von $(X_t, Z_t)$ genau dann versell, wenn sie formal versell ist.*

*Beweis.* Wir betrachten das folgendermaßen definierte Gruppoid $H$ über (An). Ein Objekt von $H$ über $T$ ist eine flache separierte Abbildung $X \xrightarrow{f} T$, deren Singularitätenmenge $\mathrm{Sing}(f)$ endlich über $T$ liegt. Ist $X' \xrightarrow{f} T'$ ein weiteres Objekt, so ist ein Morphismus von $X' \to T'$ in $X \to T$ ein Paar bestehend aus einer holomorphen Abbildung $T' \to T$ und einer Abbildung des Keimes $(X', \mathrm{Sing}(f'))$ von $X'$ bezüglich $\mathrm{Sing}(f')$ in den Keim $(X, \mathrm{Sing}(f))$, so daß

$$\begin{array}{ccc} (X', \mathrm{Sing}(f')) & \longrightarrow & (X, \mathrm{Sing}(f)) \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ T' & \longrightarrow & T \end{array}$$

kartesisch ist. (7.3) besagt genau, daß die Versalität in $H$ eine Zariski-offene Eigenschaft ist und daß die formale Versalität bereits die Versalität impliziert.

Man sieht leicht, daß $H$ die Bedingung (S1′) erfüllt. Ist $a\in H(T)$ gegeben durch $X\xrightarrow{f} T$ und $\mathcal{M}$ ein kohärenter $\mathcal{O}_T$-Modul, so gilt

$$D_a(\mathcal{M})=\overline{H}_a(T[\mathcal{M}])=\varinjlim_W T^1(W/T,\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{O}_X),$$

und man hat eine kanonische Obstruktionstheorie mit

$$O_a(\mathcal{M})=\varinjlim_W T^2(W/T,\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{O}_X),$$

vgl. (7.2); hierbei durchläuft $W$ die offenen Umgebungen von $\mathrm{Sing}(f)$ in $X$. Es ist also $\mathcal{D}_a(\mathcal{M})=f_*(\mathcal{T}^1(X/T,\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{O}_X))$ und $\mathcal{O}_a(\mathcal{M})=f_*(\mathcal{T}^2(X/T,\mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{O}_X))$. Mithin erfüllen $H$ und O die Bedingungen (S2), (S3) und (O1), (O2). Weil in $H$ stets semiuniverselle Deformationen existieren, vgl. [5, 13, 23], ergeben sich die Behauptungen aus (4.3) (3).

(7.4) **Bemerkung.** Seien $X\to Y$ eine flache holomorphe Abbildung und $\mathcal{F}$ ein $Y$-flacher kohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul mit über $Y$ eigentlichem Träger sowie $i\in\mathbb{N}$. *Dann ist für jedes* $k\in\mathbb{N}$ *die Menge der Punkte* $y\in Y$ *mit* $\dim_{\mathbb{C}} T^i(X_y,\mathcal{F}_y)\geqq k$ *analytisch in* $Y$. Dies folgt wegen (5.14) sofort aus (6.7) (3). Eine etwas allgemeinere Aussage wurde von Palamodov mit erheblich größerem Aufwand bewiesen ([22], Theorem 4.4I).

## §8. Deformationen kohärenter Moduln

Wir wollen hier die folgende Aussage über globale Deformationen kohärenter Moduln beweisen.

(8.1) **Satz.** *Seien* $X\to S$ *eine flache separierte holomorphe Abbildung,* $T$ *ein komplexer Raum über* $S$ *und* $\mathcal{F}$ *ein kohärenter Modul auf* $X_T=X\times_S T$, *der* $T$*-flach ist und dessen Träger eigentlich über* $T$ *liegt. Dann gilt:*

(1) *Die Menge der Punkte* $t\in T$, *für die* $(\mathcal{F},(X_T)_t)$ *eine verselle (bzw. universelle) Deformation von* $\mathcal{F}_t$ *ist, ist Zariski-offen in* $T$.

(2) *Für* $t\in T$ *ist die Deformation* $(\mathcal{F},(X_T)_t)$ *von* $\mathcal{F}_t$ *genau dann formal versell, wenn sie versell ist.*

Dem Beweis von (8.1) stellen wir zwei Vorüberlegungen allgemeiner Natur voran.

(8.2) Gegeben seien eine infinitesimale Erweiterung $X\hookrightarrow X'$ komplexer Räume durch einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}^2=0$ sowie zwei kohärente $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{K}$.[9] Jede Erweiterung

$$\mathcal{F}'\colon 0\to\mathcal{K}\to\mathcal{F}'\to\mathcal{F}\to 0$$

von $\mathcal{O}_{X'}$-Moduln definiert einen kanonischen $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus

$$u(\mathcal{F}')\colon \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{I}\to\mathcal{K}$$

[9] $X$ sei separiert mit abzählbarer Topologie

mit $u(\mathscr{F}')(f\otimes a)=a\cdot f'$ für $a\in\mathscr{I}_x$, $f\in\mathscr{F}_x$; hierbei ist $f'\in\mathscr{F}'_x$ eine Liftung von $f$. Wir wollen nun untersuchen, wann es zu vorgegebenem Homomorphismus $u\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{I},\mathscr{K})$ eine Erweiterung $\mathscr{F}'$ wie oben mit $u(\mathscr{F}')=u$ gibt. Dabei stützen wir uns auf eine Idee von A. Grothendieck, vgl. [19], p. 252f.

Sei $(X'_i)$ eine lokalendliche Überdeckung von $X'$ durch Steinsche Kompakta und $X'_*$ das zugehörige simpliziale Steinsche Kompaktum (vgl. (5.10)) sowie $X_*=X'_*\times_{X'}X$. Wir haben dann das folgende kanonische kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \uparrow{\scriptstyle j} & & \uparrow{\scriptstyle j'} \\ X_* & \longrightarrow & X'_*. \end{array}$$

Es sei $\mathscr{P}^\bullet_*$ eine Auflösung von $j'^*(\mathscr{F})$ durch projektive Moduln in $\mathrm{Coh}(X'_*)$ und $\mathscr{J}^\bullet$ eine Auflösung von $j^*(\mathscr{F})$ durch injektive $\mathscr{O}_{X_*}$-Moduln, vgl. (5.9). Aus (5.10) folgt leicht, daß $\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{F},\mathscr{K})$ die $n$-te Kohomologie des Komplexes

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{X_*}}(\mathscr{P}^\bullet_*\otimes_{\mathscr{O}_{X'_*}}\mathscr{O}_{X_*},\mathscr{J}^\bullet_*)$$

ist. Wegen $\mathrm{H}^{-q}(\mathscr{P}^\bullet_*\otimes\mathscr{O}_{X_*})=j^*(\mathscr{T}or_q^{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{F},\mathscr{O}_X))$ und (5.10) erhalten wir hieraus eine Spektralsequenz

$$\mathrm{E}_2^{p,q}=\mathrm{Ext}^p_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{T}or_q^{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{F},\mathscr{O}_X),\mathscr{K})\Rightarrow\mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{F},\mathscr{K}).$$

Durch Betrachtung einer flachen Auflösung von $\mathscr{O}_X$ sieht man, daß ein kanonischer Isomorphismus

$$\mathscr{T}or_1^{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{F},\mathscr{O}_X)\xrightarrow{\sim}\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{I}$$

existiert. Die Sequenz der kleinen Terme für die obige Spektralsequenz hat also die Form

$$0\to\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{K})\xrightarrow{i}\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X'}}(\mathscr{F},\mathscr{K})\xrightarrow{\phi}\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{I},\mathscr{K})\xrightarrow{\partial}\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{K}).$$

Durch eine einfache Rechnung überzeugt man sich davon, daß $i$ die kanonische Inklusion und $\phi$ die oben betrachtete Abbildung $[\mathscr{F}']\mapsto u(\mathscr{F}')$ ist. Zusammenfassend gilt also:

(8.3) *Sei* $u\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}\otimes\mathscr{I},\mathscr{K})$. *Genau dann existiert eine* $\mathscr{O}_{X'}$*-Erweiterung* $\mathscr{F}'$ *von* $\mathscr{F}$ *durch* $\mathscr{K}$ *mit* $u(\mathscr{F}')=u$, *wenn das Element* $\partial(u)\in\mathrm{Ext}^2_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{K})$ *verschwindet.*

(8.4) Sei nun $X\xrightarrow{f}S$ eine flache separierte holomorphe Abbildung. Wir definieren wie folgt ein Gruppoid $G=G_f$ über (An/S). Die Objekte von $G(T)$ sind $T$-flache kohärente Moduln $\mathscr{F}$ auf $X_T=X\times_S T$. Ist $\mathscr{F}$ bzw. $\mathscr{F}'$ ein Objekt aus $G(T)$ bzw. $G(T')$, so ist ein Morphismus $\mathscr{F}'\to\mathscr{F}$ eine holomorphe $S$-Abbildung $T'\to T$ zusammen mit einem $\mathscr{O}_{X_{T'}}$-Isomorphismus von $\mathscr{F}'$ auf $\mathscr{F}_{T'}$.

Man sieht leicht, daß $G$ die Bedingung (S1′) erfüllt. Sei $a\in G(T)$ gegeben durch einen Modul $\mathscr{F}$ auf $X_T$. Man hat dann einen kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{D}_a(\mathscr{M})=\bar{G}_a(T[\mathscr{M}])\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_{X_T}}(\mathscr{F},\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_T}\mathscr{M})$$

von $\Gamma(T,\mathcal{O}_T)$-Moduln (vgl. (8.1), [30]). Ist

$$O_a(\mathcal{M}) := \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{X_T}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{M})$$

und $o_a(T')\in O_a(\mathcal{M})$ für eine infinitesimale Erweiterung $T\to T'$ von $T$ durch $\mathcal{M}$ das Bild von $\mathrm{id}\in\mathrm{Hom}(\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{M}, \mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_T}\mathcal{M})$ unter dem Homomorphismus $\partial$ aus der exakten Sequenz in (8.2), so ist O eine Obstruktionstheorie für $G$.

*Beweis von* (8.1). Es sei $F\subseteq G$ das volle Untergruppoid, dessen Objekte diejenigen kohärenten Moduln sind, deren Träger eigentlich über der Basis liegt. Wir haben zu zeigen, daß für $F$ die Zariski-Offenheit der Versalität (bzw. Universalität) gilt, und daß die formale Versalität die Versalität impliziert.

Aus (8.4) folgt wegen (6.1) und (6.4), daß $F$ die Bedingungen (S1'), (S2), (S3) erfüllt und daß $F$ eine Obstruktionstheorie O besitzt, die den Axiomen (O1), (O2) genügt. Nach [4], (9.2), sind für $a,b\in F(T)$ die Funktoren $\mathrm{Isom}(a,b)$ darstellbar. Die Behauptungen (1) und (2) ergeben sich nun aus (3.2) und (4.1) in Verbindung mit [4], Beweis von (4.3).

Wir formulieren noch ein zu (8.1) analoges Resultat für den lokalen Fall.

(8.5) **Satz.** *Seien $X$ und $T$ separierte komplexe Räume und $\mathcal{F}$ ein $T$-flacher kohärenter Modul auf $X\times T$, dessen Singularitätenmenge $Z=\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ endlich über $T$ liegt. Dann gilt:*

(1) *Die Menge der Punkte $t\in T$, für die $(\mathcal{F},Z_t)$ eine verselle Deformation von $(\mathcal{F}_t,Z_t)$ über $(T,t)$ ist, ist Zariski-offen in $T$.*

(2) *Für $t\in T$ ist die Deformation $(\mathcal{F},Z_t)$ von $(\mathcal{F}_t,Z_t)$ über $(T,t)$ genau dann versell, wenn sie formal versell ist.*

Der *Beweis* verläuft analog zu dem Beweis von (8.1), vgl. auch den Beweis von (7.3) und [31].

## §9. Deformationen von Prinzipalbündeln

(9.1) Sei $G$ eine komplexe Lie-Gruppe und $X$ ein komplexer Raum. Ein *$G$-Prinzipalbündel* über $X$ ist ein komplexer Raum $P\to X$ über $X$ zusammen mit einer $X$-Operation $G\times P\xrightarrow{\mu} P$ von $G$ derart, daß $(pr_2,\mu): G\times P\to P\times_X P$ ein Isomorphismus und $P\to X$ treuflach ist. Bezeichnet $\mathcal{O}_X(G)$ die Garbe der Morphismen von $X$ in $G$, so wird $P$ gegeben durch einen Kozyklus aus $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X(G))$ bezüglich einer hinreichend feinen offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ von $X$, und es ist $H^1(X,\mathcal{O}_X(G))$ die Menge der Isomorphieklassen von $G$-Prinzipalbündeln über $X$.

(9.2) **Lemma.** *Seien $X\hookrightarrow X'$ eine infinitesimale Erweiterung von $X$ durch einen kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ und $\mathcal{K}$ der Kern des kanonischen surjektiven Homomorphismus $\mathcal{O}_{X'}(G)\xrightarrow{p}\mathcal{O}_X(G)$. Dann ist $\mathcal{K}$ isomorph zu* $\mathrm{Lie}(G)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{F}$.

*Beweis.* Sei $1: X'\to G$ der konstante Morphismus mit Wert 1. Die Abbildung $f\mapsto f^*-1^*$ definiert eine Bijektion von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{D}er_{\mathbb{C}}(1^{-1}(\mathcal{O}_G),\mathcal{F}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(1^*(\Omega_G),\mathcal{F}) = \mathrm{Lie}(G)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{F}$. Sei $t_1,\dots,t_n$ ein reguläres Parametersystem für $\mathcal{O}_{G,1}$. Bekanntlich hat dann die Komultiplikation

$$\mathcal{O}_{G,1}\xrightarrow{m^*}\mathcal{O}_{G,1}\overline{\otimes}\mathcal{O}_{G,1}$$

die Form $m^*(t_\nu)=t_\nu\otimes 1+1\otimes t_\nu+f_\nu$, wobei $f_\nu$ im Quadrat des maximalen Ideals liegt. Hieraus folgt sofort, daß die obige Bijektion mit den Gruppenstrukturen verträglich ist.

Um die Erweiterungen von Prinzipalbündeln zu untersuchen, führen wir zunächst eine allgemeine Vorüberlegung durch.

(9.3) Seien $X$ ein parakompakter topologischer Raum und

$$1\to\mathscr{A}\to\mathscr{B}\xrightarrow{p}\mathscr{C}\to 1$$

eine exakte Sequenz von Garben von Gruppen auf $X$ mit abelschem $\mathscr{A}$. Die Garbe $\mathscr{C}$ operiert dann auf $\mathscr{A}$ durch innere Automorphismen. Sei $z=(z_{ij})\in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{C})$ ein 1-Kozyklus von $\mathscr{C}$ bezüglich einer offenen Überdeckung $\mathscr{U}=(U_i)$ von $X$, der Bild einer 1-Kokette $b=(b_{ij})$ aus $C^1(\mathscr{U},\mathscr{B})$ mit $b_{ij}=b_{ji}^{-1}$ ist. (Die letzteren beiden Bedingungen kann man nach Verfeinerung von $\mathscr{U}$ stets erreichen, vgl. [28].) Wir fassen $b_{ij}$ als Isomorphismus von $\mathscr{A}|U_{ji}$ auf $\mathscr{A}|U_{ij}$ auf. Es sei $\mathscr{A}^z$ die Garbe von abelschen Gruppen auf $X$, die durch Zusammenkleben der $\mathscr{A}|U_i$ vermöge der $b_{ij}$ entsteht. Nach Frenkel [11] hat man eine *kanonische Kohomologieklasse*

$$\Delta(z)\in H^2(X,\mathscr{A}^z),$$

*welche genau dann verschwindet, wenn die Klasse von* $z$ *in* $H^1(X,\mathscr{C})$ *Bild einer Klasse aus* $H^1(X,\mathscr{B})$ *unter der von* $p$ *induzierten Abbildung* $H^1(X,\mathscr{B})\to H^1(X,\mathscr{C})$ *ist.* Wir erinnern an die Definition von $\Delta(z)$: Durch $a_{ijk}=b_{ij}b_{jk}b_{ik}^{-1}$ wird ein Element aus $\Gamma(U_{ijk},\mathscr{A})$ definiert. Bezeichnet $\alpha_{ijk}$ das Bild von $a_{ijk}$ in $\Gamma(U_{ijk},\mathscr{A}^z)$ unter dem Isomorphismus $\mathscr{A}|U_i\xrightarrow{\sim}\mathscr{A}^z|U_i$, so ist $(\alpha_{ijk})$ ein 2-Zyklus, der $\Delta(z)$ repräsentiert.

(9.4) Sei nun $P\to X$ ein $G$-Prinzipalbündel über dem komplexen Raum $X$, gegeben durch einen Kozyklus $z=(z_{ij})\in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O}_X(G))$ bezüglich einer offenen Steinschen Überdeckung $\mathscr{U}=(U_i)$ von $X$, und sei $X\hookrightarrow X'$ eine infinitesimale Erweiterung von $X$ durch einen kohärenten $\mathscr{O}_X$-Modul $\mathscr{F}$. Wir wollen (9.3) auf die nach (9.2) exakte Sequenz

$$0\to \mathrm{Lie}(G)\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{F}\to\mathscr{O}_{X'}(G)\to\mathscr{O}_X(G)\to 1$$

von Garben von Gruppen auf $X$ anwenden. Die Operation von $\mathscr{O}_X(G)$ auf $\mathrm{Lie}(G)\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{F}$ wird dabei durch die adjungierte Operation von $G$ auf $\mathrm{Lie}(G)$ induziert. Es ist also

$$(\mathrm{Lie}(G)\otimes_{\mathbb{C}}\mathscr{F})^z=\mathscr{A}d(z)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}=\mathscr{A}d(P)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}$$

in den üblichen Bezeichnungen. (9.3) liefert eine Obstruktion

$$o_P(X'):=\Delta(z)\in H^2(X,\mathscr{A}d(P)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{F}),$$

die genau dann verschwindet, wenn es ein $G$-Prinzipalbündel $P'\to X'$ über $X'$ gibt, für das $P'\times_{X'}X$ zu $P$ isomorph ist.

(9.5) Es bezeichne $F=F^G$ das Gruppoid über (An), dessen Objekte über einem komplexen Raum $X$ gerade die $G$-Prinzipalbündel $P\to X$ sind. Ein Morphismus

von $P' \to X'$ in $P \to X$ ist dabei eine holomorphe Abbildung $X' \to X$ zusammen mit einem $G$-Isomorphismus $P' \xrightarrow{\sim} P \times_X X'$. Man sieht leicht, daß $F$ die Bedingung (S1′) erfüllt, vgl. auch [26], (5.4).

Sei $P \in F(X)$ und $\mathscr{F}$ ein kohärenter $\mathscr{O}_X$-Modul. In der exakten Sequenz $1 \to \mathscr{K} \to \mathscr{O}_{X[\mathscr{F}]}(G) \to \mathscr{O}_X(G) \to 1$ operiert $\mathscr{O}_X$ auf $\mathscr{K}$ durch $a \cdot g := a^*(g)$ für $a \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ und $g \in \Gamma(U, \mathscr{K})$; hierbei ist $a$ als Automorphismus von $X[\mathscr{F}]|U$ aufzufassen. Bezüglich dieser Operation ist $\mathscr{K}$ ein zu $\mathrm{Lie}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{F}$ isomorpher $\mathscr{O}_X$-Modul, vgl. (9.2). Sei $\mathscr{U} = (U_i)$ eine Steinsche offene Überdeckung von $X$, so daß $P$ durch einen Kozyklus $z = (z_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_X(G))$ gegeben wird. Es bezeichne $(\tilde{z}_{ij}) \in Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{X[\mathscr{F}]}(G))$ die Liftung von $z$ bezüglich des kanonischen Morphismus $X[\mathscr{F}] \to X$.

Sei $(\alpha_{ij})$ ein Kozyklus aus $Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{K}^z)$ und $(a_{ij}) \in C^1(\mathscr{U}, \mathscr{K})$ die zugehörige 1-Kette, vgl. (9.3). Dann ist $(a_{ij}\tilde{z}_{ij})$ ein Kozyklus aus $Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}_{X[\mathscr{F}]}(G))$, welcher durch Zusammenkleben ein Prinzipalbündel $P'$ über $X[\mathscr{F}]$ zusammen mit einem Morphismus $P \to P'$ in $F$ definiert. Man rechnet leicht nach, daß die Abbildung $(\alpha_{ij}) \mapsto [P \to P']$ einen $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$-Modulisomorphismus von $H^1(X, \mathscr{K}^z)$ auf $\bar{F}_P(X[\mathscr{F}])$ liefert. Es ist also

$$\bar{F}_p(X[\mathscr{F}]) = H^1(X, \mathscr{A}d(P) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{F})$$

als $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$-Moduln.

(9.6) Wir wollen nun Prinzipalbündel über einem festen komplexen Raum $X$ deformieren. Dazu betrachten wir für eine feste komplexe Lie-Gruppe $G$ das folgende Gruppoid $H = H^G$ über (An), dessen Objekte über einem komplexen Raum $T$ gerade die $G$-Prinzipalbündel über $X \times T$ sind. Ein Morphismus von $P' \to X \times T'$ in $P \to X \times T$ ist dabei eine holomorphe Abbildung $T' \to T$ zusammen mit einem $G$-Isomorphismus $P' \xrightarrow{\sim} P \times_T T'$. Offenbar erfüllt $H$ die Bedingung (S1′). Sind ferner $P$ und $Q$ zwei Elemente aus $H(T)$, so ist der Funktor $\mathrm{Isom}(P, Q)$ darstellbar, vgl. [26]. Ist $a \in H(T)$ gegeben durch $P \to X \times T$ und ist $\mathscr{M}$ ein kohärenter $\mathscr{O}_T$-Modul, so gilt

$$D_a(\mathscr{M}) = \bar{H}_a(T[\mathscr{M}]) = H^1(X \times T, \mathscr{A}d(P) \otimes_{\mathscr{O}_T} \mathscr{M})$$

als $\Gamma(T, \mathscr{O}_T)$-Moduln nach (8.6). Setzen wir

$$O_a(\mathscr{M}) := H^2(X \times T, \mathscr{A}d(P) \otimes_{\mathscr{O}_T} \mathscr{M})$$

und $o_a(T') := o_P(X \times T') \in O_a(\mathscr{M})$ für eine infinitesimale Erweiterung $T \hookrightarrow T'$ durch $\mathscr{M}$, so ist O eine Obstruktionstheorie für $H$. Ist $X$ kompakt, so erfüllt $H$ die Bedingungen (S2), (S3) und (O1), (O2). Aus (4.3) (2) und [4], (4.3), folgt nun:

(9.7) **Satz.** *Seien $X$ ein kompakter komplexer Raum und $P \to X \times T$ ein $G$-Prinzipalbündel über dem Produkt von $X$ mit einem komplexen Raum $T$. Dann gilt:*

(1) *Die Menge der Punkte $t \in T$, für die $(P, P_t) \to (T, t)$ eine verselle (bzw. universelle) Deformation von $P_t$ ist, ist Zariski-offen in $T$.*

(2) *Für $t \in T$ ist die Deformation $(P, P_t) \to (T, t)$ von $P_t$ genau dann versell, wenn sie formal versell ist.*

## §10. Anhang. Der Satz von Fischer-Grauert

In diesem Paragraphen zeigen wir, daß der Satz von Fischer-Grauert (vgl. [7], [25]) in allen „schönen" globalen Deformationstheorien richtig bleibt. Genauer gilt:

(10.1) **Satz.** *Sei* $F \to (\mathrm{An})$ *ein Gruppoid mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Jedes Element* $v_0 \in F(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$ *besitzt eine semiuniverselle Deformation.*

(2) *Die Versalität ist eine offene Eigenschaft in* $F$.

(3) *Für* $c \in F(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$ *und* $b \in F(U)$, *wobei* $U$ *abzählbare Topologie hat, ist der Funktor* $\mathrm{Isom}(b, c_U)$ *durch einen komplexen Raum mit abzählbarer Topologie darstellbar.*

*Ist dann* $a \in F(T)$ *ein Element, dessen „Fasern"* $a(t) \in F(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$, $t \in T$, *paarweise isomorph sind, und ist* $T$ *reduziert, so ist* $a$ *lokaltrivial bezüglich* $T$.

Bevor wir (10.1) beweisen, geben wir folgende Korollare.

(10.2) **Korollar** (Fischer-Grauert). *Sei* $X \xrightarrow{f} T$ *eine eigentliche flache holomorphe Abbildung. Sind die Fasern* $X_t$, $t \in T$, *paarweise isomorph und ist* $T$ *reduziert, so ist* $f$ *lokaltrivial bezüglich* $T$.

*Beweis.* Es sei $G \to (\mathrm{An})$ das Gruppoid der eigentlichen flachen holomorphen Abbildungen und $a \in G(T)$ das durch $f$ definierte Element. Weil $G$ bekanntlich die Voraussetzungen von (10.3) erfüllt, vgl. [6, 10, 14, 22] und [25], (4.4), folgt die Behauptung aus (10.1).

(10.3) **Korollar.** *Seien* $X$ *und* $T$ *separierte komplexe Räume und* $\mathscr{F}$ *ein* $T$*-flacher kohärenter Modul auf* $X \times T$, *dessen Träger eigentlich über* $T$ *liegt. Sind die Moduln* $\mathscr{F}_t$, $t \in T$, *auf* $X$ *paarweise isomorph und ist* $T$ *reduziert, so ist* $\mathscr{F}$ *lokaltrivial bezüglich* $T$.

Dies ergibt sich aus (10.1), angewandt auf das Gruppoid $G$ über (An), dessen Objekte über einem Raum $T$ gerade die kohärenten Moduln auf $X \times T$ sind, die flach und eigentlich über $T$ liegen. Die Voraussetzungen (1), (2) und (3) sind dabei nach (8.1), [30] und [4], (9.2), erfüllt.

*Beweis von* (10.1). Wir haben zu zeigen, daß es zu jedem Punkt $t_0 \in T$ eine offene Umgebung $W$ in $T$ gibt, so daß $a_W$ zu $a(t_0)_W$ isomorph ist. Wegen der getroffenen Voraussetzungen findet man ein Element $v \in F(S)$ und einen Punkt $s_0 \in S$ mit $v(s_0) = a(t_0)$ derart, daß $v$ in $s_0$ semiuniversell und in jedem Punkt von $S$ versell ist. Überdies können wir annehmen, daß $\dim(\mathfrak{m}_{s_0}/\mathfrak{m}_{s_0}^2)$ die Einbettungsdimension von $S$ ist.

Ist $T$ als Umgebung von $t_0$ klein genug, so gibt es einen Pfeil $a \to v$ in $F$. Es sei $T \xrightarrow{f} S$ die zugrunde liegende holomorphe Abbildung mit $f(t_0) = s_0$. Die Dimension von $D_{v(f(t))}(\mathbb{C}) \cong D_{a(t)}(\mathbb{C})$ ist wegen der Voraussetzung über $a$ unabhängig von $t \in T$. Somit ist $v$ in den Punkten von $f(T)$ sogar semiuniversell.

Es genügt zu zeigen, daß $f$ in einer Umgebung von $s_0$ konstant ist. Dazu dürfen wir $S$ als integer annehmen. Nach (10.4) gibt es eine nichtleere offene Menge $V \subseteq T$ derart, daß $a_V$ trivial ist. Dies impliziert, daß die Tangentialabbildung von $f$ in den Punkten von $V$ verschwindet. Es folgt, daß $f | \mathrm{Reg}(T)$ und damit auch $f$ konstant ist.

Das folgende Lemma bleibt nachzutragen.

(10.4) **Lemma.** *Seien* $F \to (\mathrm{An})$ *ein Gruppoid und* $a, b$ *zwei Elemente aus* $F(S)$ *derart, daß* $a(s)$ *isomorph zu* $b(s)$ *ist für jeden Punkt* $s \in S$ *und* $\mathrm{Isom}(a, b)$ *durch einen komplexen Raum mit abzählbarer Topologie darstellbar ist. Ist* $S$ *reduziert, so gibt es eine nichtleere offene Menge* $V$ *in* $S$*, so daß* $a_V$ *und* $b_V$ *isomorph sind.*

*Beweis.* Sei $\mathrm{I} := \mathrm{Isom}(a, b)$. Die Voraussetzung impliziert, daß die Strukturabbildung $\mathrm{I} \to S$ surjektiv ist. Nach [12], (IV.13), besitzt diese Abbildung daher über einer nichtleeren offenen Teilmenge $V$ von $S$ einen holomorphen Schnitt, dem ein Isomorphismus von $a_V$ in $b_V$ entspricht.

(10.5) Wir wollen nun noch einen *elementaren* Beweis für (10.2) angeben, der ohne die Existenz verseller Deformationen und im Gegensatz zu dem in [25] angegebenen Beweis auch ohne Singularitätenauflösung auskommt.

$G$ und $a \in G(T)$ seien wie im Beweis von (10.2). Sei $t_0 \in T$ und $c := a(t_0) \in G(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$ sowie $b := c_T \in G(T)$ die Basiserweiterung von $c$. Unser Problem besteht darin zu beweisen, daß $a$ und $b$ lokal isomorph sind. Wegen (10.6) dürfen wir dazu von vornherein annehmen, daß $T$ eine integre glatte Kurve ist.

Für $U \subseteq T$ offen und $\mathscr{M} \in \mathrm{Coh}(U)$ sei $F^i(U, \mathscr{M})$ die zu der Prägarbe $V \mapsto \mathrm{T}^i(X|V/V, \mathscr{M} \otimes \mathscr{O}_{X|V})$, $V \subseteq U$ offen, gehörige Garbe auf $U$. Dann ist $(F^i(U, \cdot))_{i \in \mathbb{N}}$, $U \subseteq T$ offen, ein System von Kohomologiefunktoren, das den Voraussetzungen von (6.7) genügt, vgl. auch (6.1). Für $t \in T$ gilt

$$F^i(T, k(t)) = \mathrm{T}^i(X/T, \mathscr{O}_{X_t}) = \mathrm{T}^i(X_t, \mathscr{O}_{X_t})$$

nach (5.14). Die Voraussetzung impliziert daher mit (6.7) (4), daß die $F^i(T, \mathscr{O}_T)$ lokalfreie $\mathscr{O}_T$-Moduln sind. Aus (5.13) erhalten wir die exakte Sequenz

$$f_*(\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X)) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{D}er(\mathscr{O}_T, f_*(\mathscr{O}_X)) \to F^1(T, \mathscr{O}_T).$$

Nach (10.4) gibt es eine nichtleere offene Menge $V \subseteq T$, so daß $X|V$ trivial ist. Somit ist $\alpha|V$ surjektiv und $\mathrm{Kokern}(\alpha)$ hat den Rang 0. Andererseits ist $\mathrm{Kokern}(\alpha)$ als Untermodul von $F^1(T, \mathscr{O}_T)$ torsionsfrei. Also ist $\mathrm{Kokern}(\alpha) = 0$ und $\alpha$ surjektiv. Aus [21] folgt nun, daß $f$ lokaltrivial ist.

In (10.5) haben wir die folgende Aussage verwendet.

(10.6) **Lemma** (Kurventest). *Seien* $F$ *ein Gruppoid über* (An) *und* $a, b \in F(S)$ *Elemente derart, daß* $\mathrm{Isom}(a, b)$ *und* $\mathrm{Aut}(b)$ *darstellbar sind und* $\mathrm{Aut}(b)$ *glatt über* $S$ *liegt. Für jede Abbildung* $T \to S$ *einer glatten Kurve* $T$ *in* $S$ *seien die Elemente* $a_T, b_T$ *lokal isomorph. Dann sind* $a$ *und* $b$ *lokal isomorph, falls* $S$ *überdies reduziert ist.*

*Beweis.* Wir setzen wieder $\mathrm{I} := \mathrm{Isom}(a, b)$. Für jede holomorphe Abbildung $T \to S$ gilt $\mathrm{I}_T = \mathrm{Isom}(a_T, b_T)$. Sind $a_T$ und $b_T$ isomorph, so definiert jeder Isomorphismus $\phi: b_T \to a_T$ einen Isomorphismus von $\mathrm{Isom}(a_T, b_T)$ auf $\mathrm{Aut}(b_T) = \mathrm{Aut}(b) \times_S T$. Insbesondere ist $\mathrm{I}_T$ dann glatt über $T$.

Aus der Voraussetzung folgt somit, daß $\mathrm{I}_T$ glatt über $T$ liegt für jede Abbildung $T \to S$, wobei $T$ eine glatte Kurve ist. Das Flachheitskriterium [17], Theorem 2, impliziert nun, daß $\mathrm{I} \to S$ glatt ist und mithin lokal Schnitte besitzt. Hieraus folgt die Behauptung. –

Wir bemerken noch, daß in der Situation von (10.6) $\mathrm{Aut}(b)$ sicher dann glatt über $S$ liegt, wenn $b = c_S$ Basiserweiterung eines Elementes $c \in F(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$ ist.

## Literatur


1. Artin, M.: On the Solutions of Analytic Equations. Invent. Math. **5**, 277–291 (1968)
2. Artin, M.: Algebraization of formal moduli: I. In: Global Analysis. A Collection of Papers in Honor of K. Kodaira, pp. 21–71. Tokyo: University of Tokyo Press 1969
3. Artin, M.: Versal Deformations and Algebraic Stacks. Invent. Math. **27**, 165–189 (1974)
4. Bingener, J.: Darstellbarkeitskriterien für analytische Funktoren. Ann. Sci. École Norm. Sup. (erscheint demnächst)
5. Donin, I.F.: Complete Families of Deformations of Germs of Complex Spaces. Mat. Sb. **89**, 390–393 (1972) [Russ.]. Engl. Transl.: Math. USSR. Sb. **18**, 397–406 (1972)
6. Douady, A.: Le problème des modules locaux pour les espaces $\mathbb{C}$-analytiques compactes. Ann. Sci. École Norm. Sup. Sér. 4. **7**, 569–602 (1974)
7. Fischer, W., Grauert, H.: Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse II **6**, 89–94 (1965)
8. Flenner, H.: Über die de Rham-Kohomologie analytischer Algebren. J. Reine Angew. Math. **301**, 116–131 (1978)
9. Flenner, H.: Über Deformationen holomorpher Abbildungen. Habilitationsschrift, Osnabrück 1978
10. Forster, O., Knorr, K.: Konstruktion verseller Deformationen kompakter komplexer Räume. Lecture Notes in Mathematics **705**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1979
11. Frenkel, J.: Cohomologie non abélienne et espaces fibres. Bull. Soc. Math. France **85**, 135–220 (1957)
12. Frisch, J.: Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes. Invent. Math. **4**, 118–138 (1967)
13. Grauert, H.: Über die Deformationen isolierter Singularitäten analytischer Mengen. Invent. Math. **15**, 171–198 (1972)
14. Grauert, H.: Der Satz von Kuranishi für kompakte komplexe Räume. Invent. Math. **25**, 107–142 (1974)
15. Grothendieck, A., Dieudonné, J.: Éléments de géométrie algébrique. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32** (1960–1967)
16. Hartshorne, R.: Residues and Duality. Lecture Notes in Mathematics **20**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
17. Hironaka, H.: Stratification and flatness. In: Real and complex singularities. Proceedings of the Nordic Summer School. Symposium in Mathematics (Oslo 1976), pp. 199–265. Alphen a.d. Rijn: Sijthoff & Noordhoff 1977
18. Houzel, C.: Deformation des fibres principaux, d'après Pierre Deligne. Astérisque **16**, 255–276 (1974)
19. Illusie, L.: Complexe Cotangent et Déformations I. Lecture Notes in Mathematics **239**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
20. Kaup, B.: Über Kokerne und Pushouts in der Kategorie der komplex-analytischen Räume. Math. Ann. **189**, 60–76 (1970)
21. Kerner, H.: Familien kompakter und holomorph-vollständiger komplexer Räume. Math. Z. **92**, 225–233 (1966)
22. Palamodov, V.P.: Deformations of complex spaces. Uspekhi Mat. Nauk **31**, 3, 129–194 (1976) [Russ.]. Engl. Transl.: Russian Math. Surveys **31**, 3, 129–197 (1976)
23. Pourcin, G.: Deformation de singularites isolees. Astérisque **16**, 161–173 (1974)
24. Rim, D.S.: Formal deformation theory. In: Groupes des Monodromie en Géométrie Algébrique. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969. SGA7I. Exp. VI. Lecture Notes in Mathematics **288**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1972
25. Schuster, H.-W.: Zur Theorie der Deformationen kompakter komplexer Räume. Invent. Math. **9**, 284–294 (1970)
26. Schuster, H.-W.: Über den trivialen Ort von Deformationen komplexer Strukturen. Math. Ann. **194**, 135–146 (1971)
27. Schuster, H.-W.: Formale Deformationstheorien. Habilitationsschrift, München 1971
28. Serre, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. **61**, 197–278 (1955)
29. Siu, Y.-T.: Every Stein Subvariety Admits a Stein Neighbourhood. Invent. Math. **38**, 89–100 (1976)
30. Siu, Y.-T., Trautmann, G.: Deformations of coherent analytic sheaves with compact supports. Preprint
31. Trautmann, G.: Deformationen von isolierten Singularitäten kohärenter analytischer Garben. Math. Ann. **223**, 71–89 (1976)


Eingegangen am 18. Oktober 1979