

Werk

Titel: Sur les conditions de petite simplification qui permettent d'utiliser l'algorithm...

Autor: Perraud, Jean

Jahr: 1978

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0163|log18

Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Sur les conditions de petite simplification qui permettent d'utiliser l'algorithme de Dehn

Jean Perraud

Université de Nantes, Institut de Mathématiques et d'Informatique,
2, chemin de la Houssinière, F-44072 Nantes Cedex, France

Nous proposons une condition sur la présentation d'un groupe qui permet de résoudre le problème des mots par l'algorithme de Dehn. La classe des groupes vérifiant cette condition contient tous les groupes «à petite simplification» dont le problème des mots est résoluble par l'algorithme de Dehn. Elle contient également des groupes ne vérifiant aucune condition de petite simplification conduisant à l'algorithme de Dehn, ni aucune condition de petite simplification conduisant à l'algorithme proposé par Lyndon [1].

1. Préliminaires, définitions, théorèmes

Soit F un groupe libre de base finie A , soit R un A -mot de valeur x dans F . On note $|R|$ ou $|x|$ la longueur du mot irréductible représentant x dans la base A et $l(R)$ la longueur du mot R . Soit $X \leq F$ fini et symétrisé (tout A -mot réduit représentant un élément de X dans la base A , appelé *relateur*, est cycliquement réduit et X contient ses permutations circulaires et leurs inverses). S'il existe deux relateurs R_1 et R_2 distincts tels que $R_1 \equiv ST_1$ et $R_2 \equiv ST_2$, on dit que S est une *pièce*. On note $\langle X^F \rangle$ la clôture normale de X dans F .

Nous prenons pour $C(p)$ et $T(q)$ les définitions de Schupp [2] et nous retenons que le problème des mots de $G = F/\langle X^F \rangle$ est résoluble si X vérifie $C(6)$, ou $C(4)$ et $T(4)$, ou $C(3)$ et $T(6)$, et que $T(6) \Rightarrow T(4)$, avec:

$C(p)$: si $R \equiv S_1 S_2 \dots S_n$ est un relateur, si S_1, S_2, \dots, S_n sont des pièces, alors $n \geq p$

$T(4)$: Si R_1, R_2, R_3 sont des relateurs, au moins un des mots $R_1 R_2, R_2 R_3, R_3 R_1$ est réduit.

Ces conditions conduisent à un algorithme proposé par Lyndon [1].

Le problème des mots est résoluble par l'algorithme de Dehn si X vérifie $C'(\frac{1}{6})$, ou $C'(\frac{1}{4})$ et $T(4)$, ou $C''(\frac{1}{2})$ et $T(4)$, ou $C'(\frac{1}{4})$ et $T^*(4)$, avec:

$C'(\lambda)$: $R \equiv ST$; R relateur; S pièce $\Rightarrow |S| < \lambda |R|$

$C''(\frac{1}{2})$: $C'(\frac{1}{2})$ et

$R \equiv S_1 S_2 T$; R relateur; S_1, S_2 pièces $\Rightarrow |S_1 S_2| < \frac{1}{2} |R|$.

$T^*(4)$: Si R_1, R_2, R_3 sont des relateurs et si aucun des mots R_1R_2, R_2R_3, R_3R_1 n'est réduit, les réductions font moins de $\frac{1}{4}$ de chacun des mots R_1, R_2, R_3 [4].

Un mot T est appelé un j -reste [3] s'il existe un relateur $R \equiv TS_1S_2 \dots S_j$ où S_1, S_2, \dots, S_j sont des pièces. Pour un j -reste T , on note T_1, \dots, T_j des mots tels que $S_1T_1^{-1}$ est un relateur distinct de $S_1 \dots S_jT, S_2T_2^{-1}$ un relateur distinct de $S_2 \dots S_jTS_1$, etc....

Quand $R \equiv USV$, on dit que S est un *segment* de R , strictement majeur si $l(S) > \frac{1}{2}l(R)$.

Condition D. X vérifie D si et seulement si:

X vérifie $C'(\frac{1}{2})$ et

Pour tout j -reste T avec $j \geq 2$ et tous T_1, \dots, T_j comme ci-dessus, dans tout mot obtenu par des simplifications dans une permutation circulaire de $TT_1 \dots T_j$, il reste un segment strictement majeur de 3 des mots T, T_1, \dots, T_j .

X est fini, il n'existe qu'un nombre fini de façons d'écrire $R \equiv TS_1 \dots S_j$ avec $R \in X$ et S_1, S_2, \dots, S_j des pièces. Pour $R \equiv TS_1 \dots S_j$, il n'existe qu'un nombre fini de T_1 tels que $S_1T_1^{-1} \in X \dots$; il n'y a qu'un nombre fini de vérifications à faire pour décider si X satisfait D .

Theoreme 1. *La condition D est décidable.*

Dans les paragraphes 2 et 3, nous démontrons respectivement:

Theoreme 2. *Si X vérifie l'une des conditions $C'(\frac{1}{6}), C'(\frac{1}{4})$ et $T(4), C''(\frac{1}{2})$ et $T(4), C'(\frac{1}{4})$ et $T^*(4)$, X vérifie la condition D.*

Theoreme 3. *Si X vérifie D, le problème des mots de $F/\langle X^F \rangle$ est résoluble par l'algorithme de Dehn.*

La condition D élargit la classe des groupes dont le problème des mots est résoluble:

Exemple: $A = \{a, b, c, x, y, z\}; R_1 \equiv (xcy^{-1})^3, R_2 \equiv (yaz^{-1})^3, R_3 \equiv (zbx^{-1})^3, S_1 \equiv axayb^{-1}, S_2 \equiv bybzc^{-1}, S_3 \equiv czcxa^{-1}, G = \langle A; R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3 \rangle$.

Cette présentation ne vérifie ni $T(6)$, ni $T(4)$, ni $T^*(4)$, ni $C(6)$. On ne voit pas de transformation de Tietze simple en une présentation de G qui permettrait de résoudre le problème des mots. Mais cette présentation vérifie D (§2) et permet (théorème 3) d'appliquer l'algorithme de Dehn.

2. Diagrammes en éventail

2.1. Un *graphe* M dans le plan euclidien est une réunion finie de sommets, de côtés et de régions [2] deux à deux disjoints et tels que:

- (1) Un côté e de M est borné et homéomorphe à un intervalle ouvert et il existe deux sommets a et b tels que $\bar{e} = a \cup e \cup b$.

- (2) Une *région* K de M est bornée et homéomorphe à un disque ouvert et sa frontière \bar{K} est une réunion finie de côtés fermés et est connexe (un côté fermé est la fermeture d'un côté).

La frontière d'un graphe M est une réunion de sommets et de côtés appelés *côtés et sommets frontières*. K est une *région frontière* si $\bar{K} \cap \bar{M}$ contient au moins un côté.

Chaque côté comporte deux orientations. Un *chemin* est une suite finie de côtés orientés $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ telle que l'origine de \bar{e}_2 est l'extrémité de \bar{e}_1 , etc... L'origine du chemin est celle de \bar{e}_1 , l'extrémité celle de \bar{e}_n . Si elles sont égales, on a un *cycle*.

Pour une orientation donnée du plan euclidien, un *cycle frontière* d'une région K (resp. du graphe M) est un cycle d'un nombre minimum de côtés, décrivant la frontière de K (resp. de M) dans le sens positif autour de K (resp. de M).

Le *degré d'un sommet* est le nombre de côtés orientés dont l'origine est ce sommet. Un *bout* est un sommet frontière de degré 1.

Le *degré d'un graphe* M est le nombre de régions de M .

2.2. On reprend les notations du § 1:

Un *X-diagramme* [2] est un graphe M muni d'une application associant à chaque côté orienté \bar{e} un label $\varphi(\bar{e}) \in F$ tel que:

- (1) $\varphi(\bar{e}) \neq 1$
- (2) $\varphi(\bar{e}^{-1}) = \varphi(\bar{e})^{-1}$
- (3) Si $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ est un cycle frontière d'une région K , le produit des labels $\varphi(\bar{e}_1) \varphi(\bar{e}_2) \dots \varphi(\bar{e}_n)$ est réduit *sans simplifications* et est un élément de X .

Le *X-diagramme* est *réduit* s'il vérifie en outre la condition suivante: si e est un côté commun à deux régions K_1 et K_2 de cycles frontières $(\bar{e}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ et $(\bar{e}^{-1}, \bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_p)$ le produit des labels le long de $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n, \bar{e}'_1, \dots, \bar{e}'_p)$ ne se réduit pas à 1.

2.3. Pour une base donnée A de F , la *longueur du chemin* $\gamma = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ est $l(\gamma)$

$= \sum_{i=1}^n |\varphi(\bar{e}_i)|$ [2]. La *longueur* $l(K)$ d'une région K est la longueur d'un cycle

frontière de K et ne dépend pas du cycle choisi. La *partie frontière* de K est $\bar{K} \cap \bar{M}$ et si e_1, e_2, \dots, e_n sont les côtés contenus dans $\bar{K} \cap \bar{M}$, la *longueur de la*

partie frontière de K est $l(\bar{K} \cap \bar{M}) = \sum_{i=1}^n |\varphi(e_i)|$, elle est *strictement majeure* si

$l(\bar{K} \cap \bar{M}) > \frac{1}{2} l(K)$. K est une région à *partie frontière consécutive* si $\bar{K} \cap \bar{M}$ est soit un sommet, soit $\bar{e}_1 \cup \bar{e}_2 \cup \dots \cup \bar{e}_n$ où $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ est une partie consécutive d'un cycle frontière de K et d'un cycle frontière de M .

2.4. Un graphe M de régions K, K_1, \dots, K_n est un *éventail autour de* K par définition s'il vérifie les conditions suivantes:

- M est un *lobe* (graphe homéomorphe au disque fermé)
- K_1, K_2, \dots, K_n sont des régions frontières
- il existe une partie consécutive $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n)$ dans un cycle frontière de K telle que pour $1 \leq i \leq n$ $\bar{K}_i \cap \bar{K} = \bar{e}_i$.

Soit par exemple:

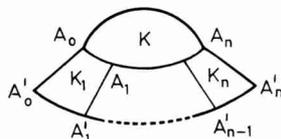


Fig. 1

avec éventuellement: $A_0 = A'_0, A_1 = A'_1, \dots, A_n = A'_n, A_0 = A_n$.

Notons encore:

δ : le cycle frontière de K d'origine A_0 ,

$\widehat{A_n A_0}$: le point A_0 si $A_n = A_0$; la partie consécutive de δ d'origine A_n et d'extrémité A_0 si $A_n \neq A_0$,

δ_i : le cycle frontière de K_i commençant par \tilde{e}_i^{-1} ; δ'_i la partie consécutive de δ_i obtenue en supprimant \tilde{e}_i^{-1} ; δ''_i la partie frontière de K_i .

2.5. Si de plus M est un X -diagramme réduit, on définit les mots irréductibles suivants, représentant respectivement:

T : 1 si $A_n = A_0$; le produit des labels le long de $\widehat{A_n A_0}$ si $A_n \neq A_0$

S_i : le label de \tilde{e}_i ($1 \leq i \leq n$)

T_i : le produit des labels le long de δ'_i

T'_i : le produit des labels le long de δ''_i ,

on a alors:

$TS_1 S_2 \dots S_n$ est réduit et est un relateur.

$S_i^{-1} T_i$ et $S_i T_i^{-1}$ ($1 \leq i \leq n$) sont réduits et sont des relateurs.

Le relateur $S_1 T_1^{-1}$ est distinct du relateur $S_1 \dots S_n T$ parce que le diagramme est réduit. De même pour $S_2 T_2^{-1} \dots$ et $S_n T_n^{-1}$.

T'_1, \dots, T'_n sont des segments de T_1, \dots, T_n respectivement et le mot $TT'_1 \dots T'_n$ s'obtient à partir de $TT_1 \dots T_n$ en faisant des simplifications.

Ainsi:

2.6. Proposition. Si M est un X -diagramme réduit de degré $n+1$, en éventail autour de K , si T est le mot réduit représentant le produit des labels le long de la partie frontière de K (ou $T=1$ si K n'est pas région frontière), T est un n -reste.

Corollaire. Si X vérifie la condition D , tout X -diagramme réduit, en éventail, de degré ≥ 3 , contient trois régions à partie frontière strictement majeure.

Nous utiliserons ce corollaire dans la démonstration du théorème 3.

2.7. Dans les conditions de 2.5, si le mot $TT'_1 \dots T'_n$ n'est pas cycliquement réduit, soit $T' T''_1 \dots T''_n$ le mot obtenu après une simplification. Si T''_1, \dots, T''_n sont non vides, on peut construire à partir de M un nouveau X -diagramme réduit et en éventail avec T', T''_1, \dots, T''_n à la place de T, T'_1, \dots, T'_n :

1) on ajoute dans M des sommets frontières de degré 2 pour que le label de chaque côté frontière soit un élément de $A \cup A^{-1}$,

2) correspondant à la simplification ci-dessus, il y a en l'un des sommets $A_0, A'_1, \dots, A'_{n-1}, A_n$ deux côtés frontières consécutifs de labels inverses, on les recolle comme Lyndon [1] (démonstration du lemme 3.1).

Si l'un des mots T'_1, \dots, T'_n est vide, le diagramme construit ci-dessus n'est pas un diagramme en éventail, l'une des régions K_i avait un côté unique sur la frontière de M et n'est plus une région frontière dans le nouveau diagramme, et le produit des labels le long de δ_i est un relateur produit de deux ou trois pièces. On en déduit:

2.8. Proposition. *Si X vérifie $C(4)$, si W est un j -reste, plus précisément si $WV_1 \dots V_j$ est un relateur et $V_1W_1^{-1}, \dots, V_jW_j^{-1}$ des relateurs distincts de $V_1 \dots V_jW$, $V_2 \dots V_jWV_1, \dots, V_jWV_1 \dots V_{j-1}$ respectivement, pour tout mot W' obtenu à partir de $WW_1 \dots W_j$ par des simplifications, il existe un diagramme en éventail de degré $j+1$ tel que avec les notations de 2.5: $W' \equiv TT'_1 \dots T'_j$, T, T'_1, \dots, T'_j étant des segments de W, W_1, \dots, W_j respectivement, invariants par la réduction effectuée.*

Démonstration. Le résultat est évident pour $W' \equiv WW_1 \dots W_j$. On passe de $WW_1 \dots W_j$ à W' en répétant un nombre fini de fois l'opération décrite en 2.7 qui conserve un diagramme en éventail en raison de $C(4)$.

Corollaire. *Si X vérifie $C'(\frac{1}{2})$ et $C(4)$ et si tout X -diagramme réduit et en éventail de degré ≥ 3 a trois régions à partie frontière strictement majeure, X vérifie D .*

2.9. Theoreme 2. *Si X vérifie l'une des conditions $C'(\frac{1}{6})$, $C'(\frac{1}{4})$ et $T(4)$, $C''(\frac{1}{2})$ et $T(4)$, $C'(\frac{1}{4})$ et $T^*(4)$, X vérifie la condition D .*

Démonstration. Chacune des conditions $C'(\frac{1}{6})$, $C'(\frac{1}{4})$ et $C''(\frac{1}{2})$ implique $C'(\frac{1}{2})$ et $C(4)$. Il suffit donc de démontrer que tout X -diagramme réduit en éventail de degré ≥ 3 a trois régions à partie frontière strictement majeure. Soit M un tel diagramme, pour lequel on reprend les notations de 2.5. $n \geq 2$.

Si $n=2$, T est un 2-reste, T_1 et T_2 des 1 des 1 ou 2-restes, alors, que X vérifie $C'(\frac{1}{6})$, $C'(\frac{1}{4})$ ou $C''(\frac{1}{2})$, K, K_1 et K_2 sont à partie frontière strictement majeure.

Si $n \geq 3$ et si X vérifie $C'(\frac{1}{6})$, T_1, T_2 et T_3 sont des 1, 2 ou 3-restes et K_1, K_2, K_3 sont à partie frontière strictement majeure.

Si $n \geq 3$ et si X vérifie $T(4)$, un X -diagramme réduit n'a pas de sommet intérieur de degré 3, donc nécessairement $A_1 = A'_1, \dots, A_{n-1} = A'_{n-1}$. T_1, T_2, T_3 sont des 1-restes et, que X vérifie $C'(\frac{1}{4})$ ou $C''(\frac{1}{2})$, K_1, K_2, K_3 sont à partie frontière strictement majeure.

Si $n \geq 3$ et si X vérifie $T^*(4)$, un X -diagramme réduit est tel que: si A est un sommet intérieur de degré 3 et si $A''A$ et AA' sont deux côtés consécutifs dans un cycle frontière d'une région K , $l(A''AA') < \frac{1}{4}l(K)$. Ceci appliqué aux sommets A_1, A_2, \dots, A_{n-1} montre que $K_1, K_2, K_3 \dots$ sont encore à partie frontière strictement majeure.

2.10. Nous reprenons l'exemple du § 1.

Les pièces sont les générateurs donc $C'(\frac{1}{2})$ et $C(4)$ sont vérifiées. De plus, un générateur apparaît de quatre façons différentes, donc, dans un diagramme réduit, sur chaque côté d'une région peuvent être recollées trois régions au choix.

Si un diagramme est en éventail autour d'une région à 5 côtés, K , on observera que si une région K' recollée à K est également recollée à deux autres

régions, K' est nécessairement une région à 9 côtés: modulo les permutations de A qui ne modifient pas la présentation, le seul cas possible est illustré ici:

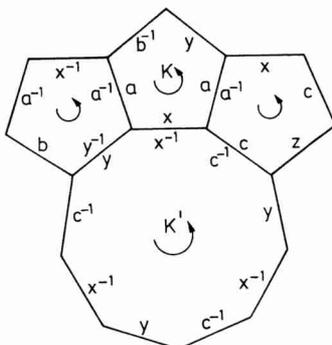


Fig. 2

Alors toute région autre que K est une région à partie frontière strictement majeure. Donc si le diagramme est de degré au moins 4 il y a au moins 3 régions à partie frontière strictement majeure. S'il est de degré 3, K est aussi une région à partie frontière strictement majeure et il y en a encore 3.

Si un diagramme est en éventail autour d'une région à 9 côtés L , on remarquera que 3 des sommets de la frontière de L sont nécessairement sur la frontière du diagramme: ci-dessous une région recollée sur un côté de label c et une région recollée sur un côté de label y^{-1} ne peuvent pas être recollées l'une à l'autre (on le vérifie en 9 essais).

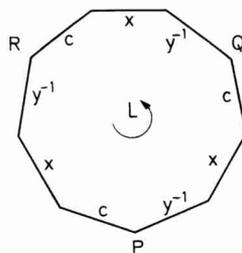


Fig. 3

Il en résulte que si plus de 3 régions sont recollées à L , 3 au moins sont des régions à partie frontière strictement majeure. Si 2 ou 3 régions sont recollées à L , 2 au moins sont à partie frontière strictement majeure, et L également. Donc si le diagramme est de degré au moins 3, il a au moins 3 régions à partie frontière strictement majeure.

La condition D est donc vérifiée (corollaire 2.8).

3. Diagrammes singuliers de degré minimal

3.1. Appelons *diagramme propre* un X -diagramme connexe, simplement connexe, réduit et sans bout.

Lemme. *Si tout diagramme propre de degré ≥ 2 contient au moins deux régions à partie frontière consécutives strictement majeure, le problème des mots de $F/\langle X^F \rangle$ est résoluble par l'algorithme de Dehn.*

Démonstration. Si R est réduit et si $R \in \langle X^F \rangle$, il existe un X -diagramme connexe simplement connexe et réduit, M , et un cycle frontière $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ de M tel que si U_1, U_2, \dots, U_n sont les mots réduits représentant les labels de $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n$ respectivement, $R \equiv U_1 U_2 \dots U_n$. C'est une conséquence du lemme 3.1 et de la définition d'un diagramme de Lyndon [1]. En particulier si R est cycliquement réduit, M est un diagramme propre.

Si $d^0 M = 1$, $R \in X$. Si $d^0 M \geq 2$, M a deux régions K_1 et K_2 à partie frontière consécutives strictement majeure. K_1 ou K_2 est telle que l'origine de \tilde{e}_1 n'est pas un sommet intermédiaire de $\dot{K}_1 \cap \dot{M}$ (resp. $\dot{K}_2 \cap \dot{M}$). Soit K_1 . On a :

$$\begin{aligned} \dot{K}_1 \cap \dot{M} &= \tilde{e}_i \cup \tilde{e}_{i+1} \cup \dots \cup \tilde{e}_j \quad \text{avec } 1 \leq i \leq j \leq n \\ l(U_i U_{i+1} \dots U_j) &= \sum_{k=i}^j l(U_k) = \sum_{k=i}^j |\varphi(e_k)| = l(\dot{K}_1 \cap \dot{M}) > \frac{1}{2} l(K_1). \end{aligned}$$

Le segment $U_i U_{i+1} \dots U_j$ de R est un *segment strictement majeur d'un relateur* R_1 .

3.2. **Theoreme 3.** *Si X vérifie D , le problème des mots de $F/\langle X^F \rangle$ est résoluble par l'algorithme de Dehn.*

La suite du paragraphe 3 est la démonstration du théorème 3.

Appelons *diagramme singulier* un diagramme propre de degré ≥ 2 ne contenant pas 2 régions à partie frontière consécutives strictement majeure. Si X ne vérifie pas les hypothèses du lemme, il existe un diagramme singulier de degré minimal M . Nous allons en tirer une contradiction avec le corollaire de 2.6. Remarquons que X qui vérifie D vérifie $C'(\frac{1}{2})$ et $C''(\frac{1}{2})$ (considérer un 2-reste).

3.3. $d^0 M \geq 3$. En effet, un diagramme propre de degré 2 est de l'une des formes ci-dessous, où dans le cas (3) $\varphi(\gamma)$ est une pièce. Dans les 3 cas, les 2 régions sont à partie frontière consécutives strictement majeure.



Fig. 4

3.4. Si K est une région de M , si δ est un cycle frontière de K , δ est un cycle sans point double. Sinon, on peut trouver une partie consécutive γ d'un cycle frontière

de K qui est un cycle sans point double et qui délimite un lobe L ne contenant pas K . $1 \leq d^0 L < d^0 M$.

Si $d^0 L = 1$, $\varphi(\gamma)$ est un relateur et une pièce, ce qui contredit $C'(\frac{1}{2})$.

Si $2 \leq d^0 L < d^0 M$, L a deux régions à partie frontière consécutive strictement majeure, l'une au moins de ces deux parties frontières a pour label une pièce qui contredit $C'(\frac{1}{2})$.

3.5. M est un lobe. Sinon M contient 2 lobes extrémaux (ayant un cycle frontière qui est une partie consécutive d'un cycle frontière de M) L_1 et L_2 . Si $d^0 L_i = 1$, l'intérieur de L_i est une région de M à partie frontière consécutive strictement majeure. Si $2 \leq d^0 L_i < d^0 M$, L_i a deux régions à partie frontière consécutive strictement majeure. L'une au moins l'est encore dans M . M ne serait pas singulier.

3.6. Si $\hat{K} \cap \hat{M} \neq \emptyset$, K est une région à partie frontière consécutive. En raison de 3.4 et 3.5, si $\hat{K} \cap \hat{M}$ n'est pas une partie consécutive d'un cycle frontière de K , elle n'est pas non plus une partie consécutive d'un cycle frontière de M et réciproquement. On peut trouver des sommets A, B, C, D rencontrés dans cet ordre par un cycle frontière γ de M et tels que: A, D et \widehat{BC} sont contenus dans \hat{K} ; $A \neq B, C \neq D$; \widehat{AB} et \widehat{CD} ne rencontrent pas d'autre sommet de \hat{K} .

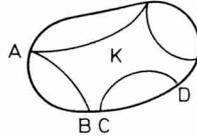


Fig. 5

Alors la partie consécutive \widehat{ABC} de γ et la partie consécutive \widehat{CA} d'un cycle frontière δ de K forment dans M un cycle sans point double. Le lobe délimité L contient au moins deux régions et au moins une de moins que M . Il contient deux régions à partie frontière consécutive strictement majeure. L'une est peut-être K , l'autre au moins a sa partie frontière contenue dans \widehat{AB} . Le même raisonnement appliqué à \widehat{BCD} fournit une deuxième région de M à partie frontière consécutive strictement majeure (contenue dans \widehat{CD})-contradiction.

3.7. Dans la suite on suppose que M n'a pas de sommet de degré 2 (on remplace au besoin un sommet de degré 2 et les côtés adjacents par un côté unique). Soit M_0 obtenu en supprimant dans M les côtés et les régions frontières (dont la partie frontière contient au moins un côté), les sommets frontières de degré 3 et les côtés adjacents à ces sommets.

M_0 est réduit comme M . M_0 est connexe et simplement connexe (on conserve cette propriété quand on supprime une région frontière et un côté contenu dans sa partie frontière). M_0 est non vide, sinon M n'a que des sommets frontière de

Si $K'_j \neq K_{j+1}$ soit B'_j le sommet précédant P_{j+1} dans un cycle frontière de K'_j . Si $B'_j P_{j+1}$ était dans M_0 , \mathcal{E}_j et \mathcal{E}_{j+1} ne seraient pas consécutifs dans un cycle frontière de M_0 . Donc $B'_j P_{j+1}$ est dans \dot{M} ou adjacent à \dot{M} .

$B_j \neq P_{j+1} \Rightarrow P_{j+1} \notin \dot{M} \Rightarrow B'_j \in \dot{M}$. Alors la partie frontière de K'_j est $B_j B'_j$ (3.6) strictement majeure ($C''(\frac{1}{2})$). K'_j est l'unique région de M à partie frontière strictement majeure. Il suffit de remplacer le cycle frontière ci-dessus par celui d'origine P_{j+1} et 3.10 est démontré.

En particulier si K_{j_0} est une région à partie frontière strictement majeure, $B_j P_{j+1}$ et $A_{j+1} P_{j+1}$ sont toujours confondus. On passera dans ce cas au cycle frontière d'origine P_{j_0+1} .

3.11. M_0 a au plus un bout. Si M_0 a un bout S , le cycle frontière de M_0 d'origine S vérifie 3.10. Si l'extrémité S de \tilde{e}_i est un bout, $\tilde{e}_{i+1} = \tilde{e}_i^{-1}$ et (3.4) $H_{i+1} \neq H_i$. Donc S est l'extrémité d'un \mathcal{E}_j , soit $S = P_{j+1}$. M n'ayant pas de région intérieure de degré 2 ($C''(\frac{1}{2})$), si $B_j = A_{j+1}$, $P_{j+1} B_j = P_{j+1} A_{j+1}$ et P_{j+1} est un sommet de degré 2 dans M . Contradiction. Donc $B_j \neq A_{j+1}$. On reprend ensuite (3.10).

3.12. M_0 a au moins une région. (un graphe connexe et simplement connexe, non vide et non réduit à un point, et ne contenant aucune région a au moins deux bouts).

3.13. Si M_0 n'a pas de bout, on note $M_1 = M_0$ et P l'origine d'un cycle frontière vérifiant 3.10. Si M_0 a un bout, il existe un chemin γ de M_0 maximal tel que $\gamma \gamma^{-1}$ soit une partie consécutive d'un cycle frontière de M_0 : on note P l'origine de γ et M_1 le graphe obtenu en supprimant $\bar{\gamma} - P$ dans M_0 . M_1 est un diagramme propre et $1 \leq d^0 M_1 < d^0 M$.

3.14. Si $d^0 M_1 \geq 2$, M_1 a deux régions à partie frontière consécutive strictement majeure. Pour l'une des deux au moins, K, P n'est pas un sommet intermédiaire du chemin α décrivant $\dot{K} \cap \dot{M}_1$. Si $d^0 M_1 = 1$, on prend pour K l'intérieur de M_1 et pour α le cycle frontière d'origine P . Dans tous les cas, on a un cycle frontière $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n)$ de M_0 vérifiant (3.10) tel que:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\tilde{e}_k, \tilde{e}_{k+1}, \dots, \tilde{e}_{k+l}) \text{ avec } 1 \leq k \leq k+l \leq n \\ l &\geq 2 \text{ (} \varphi(\tilde{e}_k), \varphi(\tilde{e}_{k+1}) \text{ sont des pièces, on utilise } C''(\frac{1}{2}) \text{)} \\ 0 &\leq r < l \Rightarrow H_{k+r} \neq H_{k+r+1} \text{ (on a supprimé dans } M \text{ les sommets de degré 2),} \end{aligned}$$

il existe $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_k &\text{ est le dernier côté de } \mathcal{E}_j \\ \mathcal{E}_{j+1} &= (\tilde{e}_{k+1}), \mathcal{E}_{j+2} = (\tilde{e}_{k+2}), \dots, \mathcal{E}_{j+l-1} = (\tilde{e}_{k+l-1}) \\ \tilde{e}_{k+l} &\text{ est le premier côté de } \mathcal{E}_{j+1} \\ K_j &= H_k, K_{j+1} = H_{k+1}, \dots, K_{j+l} = H_{k+l} \end{aligned}$$

et compte-tenu de 3.10:

$$\begin{aligned} P_{j+1} B_j &= P_{j+1} A_{j+1}, P_{j+2} B_{j+1} = P_{j+2} A_{j+2}, \dots, P_{j+l} B_{j+l-1} = P_{j+l} A_{j+l} \\ l(\delta_j) &\leq \frac{1}{2} l(K_j), l(\delta_{j+1}) \leq \frac{1}{2} l(K_{j+1}), \dots, l(\delta_{j+l-1}) \leq \frac{1}{2} l(K_{j+l-1}). \end{aligned}$$

On peut ainsi former à partir de M un X -diagramme M_2 réduit, de degré $l + 2 \geq 4$, de régions $K, K_j, K_{j+1}, \dots, K_{j+l}$, en éventail autour de K le long de α , ayant au plus deux régions à partie frontière strictement majeure K_j et K_{j+l} ($l(\alpha) > \frac{1}{2}l(K)$). M_2 contredit 2.6. Ceci démontre le théorème 3.

Une généralisation aux quotients de produits libres de la condition établie dans ce travail est proposée dans un compte-rendu à l'Académie des Sciences de Paris («Sur l'utilisation de l'Algorithme de Dehn dans un produit libre» Sér. A **284**, 1341–1344 (1977)).

Bibliographie

1. Lyndon, R.C.: On Dehn's Algorithm. Math. Ann. **166**, 208–228 (1966)
2. Schupp, P.E.: On Dehn's Algorithm and the conjugacy problem. Math. Ann. **178**, 119–130 (1968)
3. Schupp, P.E.: A Survey of Small cancellation theory. Studies in logic and the foundations of mathematics 71. Amsterdam-London: North Holland Publishing Co 1973
4. Soldatova, V.V.: Solution of the word problem for a certain class of groups (Russian). Ivanov. Gos. Ped. Inst. Učen Zap **44**, vyp. mat. 17–25 (1969)

Reçu le 10 février 1978

