Werk

Titel: Eigenwerte Hankelscher Matrizen und Pole meromorpher Funktionen.

Autor: Boutellier, Roman

Jahr: 1976

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0147|log33

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 147, 263 – 269 (1976)

Mathematische Zeitschrift
© by Springer-Verlag 1976

Eigenwerte Hankelscher Matrizen und Pole meromorpher Funktionen

Roman Boutellier

Mathematisches Seminar, Eidgenössische Technische Hochschule, Rämistraße 101, CH-8006 Zürich, Schweiz

§ 1

Die Nevanlinnaklasse N besteht aus allen Funktionen $\phi(z)$, die in der oberen Halbebene analytisch sind und dort einen positiven Imaginärteil haben. Ist $\phi(z)$ im Nullpunkt holomorph,

$$\phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

so sind die zu ϕ gehörigen Hankelschen Matrizen $H_k^{(n)}(\phi)$ definiert durch

$$H_k^{(n)}(\phi)=\begin{pmatrix} a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} & \cdots & a_{n+k} \\ \vdots & & & & \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & a_{n+k+1} & \cdots & a_{n+2k-2} \end{pmatrix}$$

Der Satz von Hadamard [2] bringt die Determinante von $H_k^{(n)}(\phi)$ in Zusammenhang mit dem Produkt der ersten k Polstellen λ_j, $j=1,2,\ldots,k$ von ϕ: Ist ϕ im Kreis $\{|z|<R\}$ meromorph und sind die Pole dem Betrage nach geordnet, sind ferner $\mu_{k,j}^{(n)}$, $j=1,2,\ldots,k$ die Eigenwerte von $H_k^{(n)}$, so gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{k,1}^{(n)} \cdot \mu_{k,2}^{(n)} \cdot \cdots \cdot \mu_{k,k}^{(n)}} = \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_k}.$$

Satz 1 der vorliegenden Arbeit zeigt, daß für $\phi \in N$ nicht nur die Produkte, sondern auch die einzelnen Faktoren übereinstimmen:

$$\operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{k,j}^{(n)}} = \frac{1}{\lambda_j}.$$

Eine weitere Eigenschaft der Eigenwerte von $H_k^{(n)}(\phi)$ folgt aus dem Kriterium von Kronecker: Eine Funktion ϕ ist genau dann rational, wenn der betrags-

mäßig kleinste Eigenwert $\varepsilon_k^{(n)}$ der Matrix $H_k^{(n)}$ für fast alle k und n verschwindet [4]. Satz 2 ist eine Verschärfung dieser Aussage: Hat die Funktion ϕ in N nur positive Pole und ist R der Meromorphieradius, so gilt

$$\operatorname*{limes}_{k\to\infty} \operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}} = \frac{1}{R}.$$

Die vorliegende Arbeit ist ein Teil einer Arbeit, die ich unter der Leitung von Professor Pfluger ausführte. Ich möchte ihm für seine wertvolle Hilfe danken.

§ 2

Eine Funktion der Nevanlinnaklasse N läßt sich eindeutig in der Form

$$\phi(z) = \alpha z + \beta + \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu(\lambda)$$

darstellen, wo $\alpha \geqq 0$, β reell und $d\mu(\lambda)$ ein positives Borel-Maß auf der reellen Achse ist, für das $\int (\lambda^2+1)^{-1}\, d\mu(\lambda)$ endlich ist.

Wir nehmen im folgenden an, daß der Träger von μ im Intervall $[\delta, +\infty)$, $\delta > 0$ enthalten ist. (Der allgemeine Fall kann durch Betrachtung der Funktion $\phi^*(z) = \phi(z) - \phi(-z)$ auf diesen zurückgeführt werden.) Daraus folgt für $n > 1$:

$$\sum_{i,j=0}^{k-1} a_{n+i+j}\, x_i\, x_j = \sum_{i,j=0}^{k-1} \int \frac{1}{\lambda^{i+j+n+1}}\, d\mu(\lambda)\, x_i\, x_j$$

$$= \int \left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{x_i}{\lambda^i} \right)^2 \cdot \frac{1}{\lambda^{n+1}}\, d\mu(\lambda) \geqq 0.$$

(Für $n = 1$ muß noch αx_1^2 addiert werden.)

$H_k^{(n)}(\phi)$ ist positiv semidefinit für alle $k > 0$ und alle $n > 0$. $H_k^{(n)}$ hat den Eigenwert 0 mit Vielfachheit d genau dann, wenn μ eine Treppenfunktion mit $k - d$ Sprungstellen ist, das heißt, wenn ϕ eine rationale Funktion vom Grad $k - d$ ist (Kriterium von Kronecker).

§ 3

Satz 1. *Ist $\phi \in N$ eine meromorphe Funktion mit den Polstellen*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$$

und hat die zugeordnete Hankelsche Matrix $H_k^{(n)}(\phi)$ die Eigenwerte

$$\mu_{k,1}^{(n)} \geqq \mu_{k,2}^{(n)} \geqq \cdots \geqq \mu_{k,k}^{(n)} \geqq 0,$$

so gilt

$$\operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{k,j}^{(n)}} = \frac{1}{\lambda_j}, \qquad 1 \leqq j \leqq k,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Sind nur endlich viele Pole $\lambda_1, \ldots, \lambda_K$ vorhanden, so setzt man $1/\lambda_j = 0$ für $j > K$.

Dem Beweis von Satz 1 schicken wir drei Lemma voraus. Lemma 1 ist eine bekannte Anwendung des Prinzips von Courant-Fischer-Weyl [3], Lemma 2 ist der Satz von Hadamard [2] über die Determinante Hankelscher Matrizen.

Lemma 1. *Die Hermitesche Matrix A habe die Eigenwerte*

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_{k-1} \leqq \mu_k.$$

A' entstehe aus A durch Streichen der letzten Zeile und der letzten Kolonne von A und habe die Eigenwerte

$$\mu_1' \leqq \mu_2' \leqq \cdots \leqq \mu_{k-1}'.$$

Dann gilt

$$\mu_1 \leqq \mu_1' \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_{k-1}' \leqq \mu_k.$$

Lemma 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{Det} H_k^{(n)}(\phi)} = \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_k},$$

wo im Falle von endlich vielen Polen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K$ wieder $1/\lambda_j = 0$ für $j > K$ gesetzt wird.

Lemma 3. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt für den kleinsten Eigenwert $\mu_{k,k}^{(n)}$ der Matrix $H_k^{(n)}(\phi)$*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{k,k}^{(n)}} \geqq \frac{1}{\lambda_k}.$$

Beweis von Lemma 3. Da $\phi \in N$ und meromorph ist, hat ϕ die folgende Darstellung

$$\phi(z) = \alpha z + \beta + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{m_j}{\lambda_j - z} - \frac{m_j}{\lambda_j} \right).$$

Für $|z| < \lambda_1$ ist

$$\phi(z) = \alpha z + \beta + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{\lambda_j^2} \right) z + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{\lambda_j^{n+1}} \right) z^n + \cdots.$$

Setzt man

$$\phi_k(z) = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{m_j}{\lambda_j - z} - \frac{m_j}{\lambda_j} \right),$$

so ist

$$H_k^{(n)}(\phi) = H_k^{(n)}(\phi_k) + H_k^{(n)}(\phi - \phi_k)$$

und $\phi - \phi_k$ ist in N. Deshalb ist $H_k^{(n)}(\phi - \phi_k)$ positiv semidefinit und nach dem Prinzip von Rayleigh genügt es, die Behauptung von Lemma 3 für ϕ_k zu zeigen.

Es sei

$$B_k^{(n)} = H_k^{(n)}(\phi_k) - \frac{1}{\lambda_k} H_k^{(n-1)}(\phi_k)$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} m_j \left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right) \frac{1}{\lambda_j^{n+1}} \cdots & \\ \vdots & \\ & \sum_{j=1}^{k} m_j \left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right) \frac{1}{\lambda_j^{n+2k-1}} \end{pmatrix}.$$

Die $B_k^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$ sind die Hankelschen Matrizen für die Funktion

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{k} m_j \left(1-\frac{\lambda_j}{\lambda_k}\right) \left(\frac{1}{\lambda_j - z} - \frac{1}{\lambda_j}\right).$$

Da $\psi \in N$, sind die $B_k^{(n)}$ positiv semidefinit und daher gelten die folgenden Ungleichungen

$$\mu_{k,k}^{(n)} \geqq \min_{|x|=1} \langle x, H_k^{(n)}(\phi_k) x \rangle$$

$$= \min \left\langle x, \left(\frac{1}{\lambda_k} H_k^{(n-1)}(\phi_k) + B_k^{(n)}(\phi_k)\right) x \right\rangle$$

$$\geqq \frac{1}{\lambda_k} \min \langle x, H_k^{(n-1)}(\phi_k) x \rangle$$

$$\geqq \frac{1}{\lambda_k^{n-2}} \min \langle x, H_k^{(2)}(\phi_k) x \rangle.$$

Damit ist das Lemma 3 gezeigt.

Beweis von Satz 1 (durch vollständige Induktion über k). Ist $k=1$, so ist $H_1^{(n)} = a_n$ (wegen $a_n > 0$) und daher

$$\operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{1,1}^{(n)}} = \operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Der Satz sei für $H_{k-1}^{(n)}$ bewiesen, das heißt

$$\operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{k-1,j}^{(n)}} = \frac{1}{\lambda_j}, \qquad j=1,2,\ldots,k-1.$$

Nach Lemma 1 ist

$$\mu_{k,k}^{(n)} \leqq \mu_{k-1,k-1}^{(n)} \leqq \mu_{k,k-1}^{(n)} \leqq \mu_{k-1,k-2}^{(n)} \leqq \cdots \leqq \mu_{k-1,1}^{(n)} \leqq \mu_{k,1}^{(n)}$$

und daher

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{k,j}^{(n)}} \geqq \frac{1}{\lambda_j}, \qquad \text{für } j=1,2,\ldots,k-1.$$

Zusammen mit Lemma 3 folgt daraus

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\operatorname{Det} H_k^{(n)}(\phi)} \geqq \frac{1}{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_k}$$

und in Verbindung mit Lemma 2 schließlich

$$\operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu_{k,j}^{(n)}} = 1/\lambda_j, \qquad j=1,2,\ldots,k,$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

Der Radius des größten Kreises $\{|z|\leqq R\}$, in dem ϕ meromorph ist, heißt Meromorphieradius. Zwischen R und den Eigenwerten von $H_k^{(n)}(\phi)$ besteht folgender Zusammenhang:

Satz 2. *Es sei $\phi \in N$ im Intervall $(-\infty, \delta)$, $\delta > 0$ holomorph und $\varepsilon_k^{(n)}$ bezeichne den kleinsten Eigenwert der Matrix $H_k^{(n)}(\phi)$.*

Dann gilt für den Meromorphieradius R von ϕ:

$$\operatorname*{limes}_{k\to\infty} \operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}} = 1/R.$$

Beweis. 1. Fall: Es gibt unendlich viele Pole $\lambda_k < R$. Nach Satz 1 ist

$$\operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}} = 1/\lambda_k, \qquad k=1,2,\ldots$$

und wegen $\operatorname*{limes}_{k\to\infty} \lambda_k = R$ folgt

$$\operatorname*{limes}_{k\to\infty} \operatorname*{limes}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}} = 1/R.$$

2. Fall: Es gibt in $(0, R)$ nur endlich viele Pole: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_K$. Dann ist

$$\phi(z) = \alpha z + \beta + \sum_{j=1}^{K} \left(\frac{1}{\lambda_j - z}\right) + \psi(z)$$

und $\psi(z)$ ist holomorph in $\{|z| < R\}$. Da R der Meromorphieradius ist, gilt

$$\psi(z) = \int_R^\infty \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}\right) d\mu(\lambda),$$

mit

$$\mu(R) = 0 \quad \text{und} \quad \mu(\lambda) > 0 \quad \text{für} \quad \lambda > R.$$

Sei

$$\phi_K(z) = \alpha z + \beta + \sum_{j=1}^{K} \frac{m_j}{\lambda_j - z}$$

und

$$b_j = (\varepsilon/2) \cdot (1/2)^j, \qquad \varepsilon > 0.$$

Damit folgt

$$\phi(z)=\phi_K(z)+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{R+2b_j-z}-\frac{R+2b_j}{(R+2b_j)^2+1}\right)\cdot(\mu(R+2b_j)-\mu(R+b_j))$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}\int_{R+b_j}^{R+2b_j}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)d(\mu(\lambda)-\mu(R+b_j))$$
$$+\int_{R+\varepsilon}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-z}-\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)d\mu(\lambda).$$

Aus dieser Darstellung von $\phi(z)$ als Summe von Funktionen aus N folgt mit Satz 1

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}}\geqq 1/R \qquad \text{für } k=1,2,\ldots$$

und deshalb ist

$$\liminf_{k\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}}\geqq 1/R.$$

Andererseits ist wegen $\phi=\phi_K+\psi$

$$H_k^{(n)}(\phi)=H_k^{(n)}(\phi_K)+H_k^{(n)}(\psi).$$

Bezeichnet $\varepsilon_k^{(n)}(\eta)$ den kleinsten, $\tau_k^{(n)}(\eta)$ den größten Eigenwert von $H_k^{(n)}(\eta)$, so gilt

$$\varepsilon_k^{(n)}(\phi)\leqq\varepsilon_k^{(n)}(\phi_k)+\tau_k^{(n)}(\psi).$$

Nach dem Kriterium von Kronecker für rationale Funktionen aus N verschwindet $\varepsilon_k^{(n)}(\phi_K)$ für $k>K$.

Aus der Integraldarstellung von $\psi(z)$ folgt

$$\psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n, \qquad \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=1/R.$$

Mit der Matrix-Norm

$$\|H_k^{(n)}(\psi)\|=\operatorname*{Maximum}_{n\leqq j\leqq n+2k-2}|c_j|$$

folgt deshalb für $k>K$:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}(\phi)}\leqq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\tau_k^{(n)}(\psi)}$$
$$\leqq\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|H_k^{(n)}(\psi)\|}$$
$$=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=1/R.$$

Also gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varepsilon_k^{(n)}(\phi)}\leqq 1/R,$$

und damit ist der Satz 2 bewiesen.

Literatur

1. Donoghue, W.F.: Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
2. Hadamard, J.: Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. In: Oeuvres, Tome **1**, pp. 7 – 60, Paris Centre National de la Recherche Scientifique 1968
3. Noble, B.: Applied Linear Algebra, pp. 415 – 416, New York: Prentice Hall 1969
4. Polya, G., Szegö, G.: Aufgaben und Lehrsätze Band **2**, pp. 101 – 103, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1954

Eingegangen am 5. Oktober 1975