

Werk

Titel: Über einen Satz von Witte.

Autor: Lemmert, Roland

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0145|log35

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Über einen Satz von Witte

Roland Lemmert

Mathematisches Institut I der Universität Karlsruhe (TH), D-7500 Karlsruhe, Englerstraße 2
 Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

In [4] behandelt Witte in Verallgemeinerung eines Satzes von Rogers [1] das Problem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \quad \text{in } (0, 1], \\ y(0) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

unter der Voraussetzung

(V) *Es ist $f: D := (0, 1] \times [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es existieren $h \in C((0, 1])$, $\rho \in C([0, 1])$ mit $\rho(0) = 0$, so daß gilt*

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x, \bar{y})| &\leq h(x) |y - \bar{y}| \\ |f(x, y)| &\leq \rho(x) h(x) \exp \left(\int_1^x h(s) ds \right) \end{aligned}$$

für $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$.

(Dabei kann (und wird) $h > 0$ angenommen werden: andernfalls ersetze man h durch $h + \varepsilon$ und ρ durch $\rho \exp(\varepsilon(1-x))$).

Unter dieser Voraussetzung (V) wird in [4] Eindeutigkeit, Existenz und Konvergenz der sukzessiven Approximationen für das Anfangswertproblem (1) gezeigt. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Ergebnisse von Witte vermittlels einer einfachen Variablentransformation auf wohlbekannte Ergebnisse von Nagumo, Jungermann, Ważewski und Olech (vgl. etwa Walter [2, 3]) zurückzuführen. Dabei ergeben sich Vereinfachungen der Beweise und natürliche Verallgemeinerungen. Im übrigen halten wir uns eng an die Bezeichnungen in [4].

2. Der Existenz- und Eindeigkeitssatz

Wir setzen für $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} H(x) &:= \int_1^x h(s) ds, & t_0 &:= \lim_{x \rightarrow 0} \exp(H(x)) \geq 0 \\ t(x) &:= \exp(H(x)) - t_0, & t(0) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Satz 1. Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, $h \in C((0, 1])$ sei positiv, und es gelte

a) für $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$ mit $y \geq \bar{y}$ ist $f(x, y) - f(x, \bar{y}) \leq h(x)(y - \bar{y})$,

b) die Funktion $g(x, y) := f(x, y)/(h(x) \exp H(x))$ ist in D gleichmäßig stetig.

Dann besitzt (1) genau eine Lösung $y \in C([0, \alpha]) \cap C^1((0, \alpha])$, wobei α durch $t(\alpha) = \min \{t(1), a/\sup \{|g(x, y)| : (x, y) \in D\}\} =: \beta$ bestimmt ist.

Beweis. Die in (2) definierte Funktion t bildet $[0, 1]$ bijektiv auf $[0, t(1)]$ ab. Wegen $t'(x) = h(x) \exp(H(x)) > 0$ ist t samt Umkehrfunktion $x(t)$, außer eventuell im Nullpunkt, stetig differenzierbar. Setzen wir für eine beliebige Lösung y von (1)

$$y(x) = v(t(x)), \quad (*)$$

so ist v Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} v'(t) &= f(x(t), v(t))/(h(x(t)) \exp H(x(t))) \\ &= g(x(t), v) = g^*(t, v), \quad 0 < t \leq t(1) \\ v(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Nun ist nach Voraussetzung b) die rechte Seite g^* von (3) auf $D^* := (0, t(1)] \times [-a, a]$ gleichmäßig stetig und genügt außerdem nach a) einer einseitigen Nagumo-bedingung

$$g^*(t, v) - g^*(t, \bar{v}) \leq (v - \bar{v})/(t + t_0) \leq (v - \bar{v})/t, \quad v \geq \bar{v}, \quad t > 0.$$

Nach dem Existenzsatz von Peano und nach dem Eindeutigkeitskriterium von Nagumo besitzt (3) genau eine Lösung aus $C([0, \beta]) \cap C^1((0, \beta])$ (diese ist sogar aus $C^1([0, \beta])$). Transformiert man gemäß (*) zurück, so erhält man genau eine Lösung $y \in C([0, \alpha]) \cap C^1((0, \alpha])$ mit $\alpha = x(\beta)$.

3. Konvergenz der sukzessiven Approximationen

Satz 2. Ersetzt man in Satz 1 die Voraussetzung a) durch eine beidseitige Abschätzung

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq h(x) |y - \bar{y}|$$

für $(x, y), (x, \bar{y}) \in D$, so konvergiert die Folge der sukzessiven Approximationen, ausgehend von $y_0 \in C([0, 1])$ mit $|y_0| \leq a$, gleichmäßig auf $[0, \alpha]$ (α aus Satz 1).

Beweis. Betrachten wir (3) und setzen entsprechend

$$v_0(t(x)) = y_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

so ist $|v_0| \leq a$ auf $[0, t(1)]$. Da g^* in D^* gleichmäßig stetig ist und die Nagumo-bedingung

$$|g^*(t, v) - g^*(t, \bar{v})| \leq |v - \bar{v}|/(t + t_0) \leq |v - \bar{v}|/t, \quad (t, v), (t, \bar{v}) \in D^*$$

erfüllt, konvergieren die sukzessiven Approximationen

$$v_{n+1}(t) = \int_0^t g^*(\tau, v_n(\tau)) d\tau, \quad n \geq 0,$$

gleichmäßig auf $[0, \beta]$ (β aus dem Beweis zu Satz 1). (Vgl. etwa Walter [2].) Nun folgt leicht für (y_n) , definiert durch

$$y_{n+1}(x) = \int_0^x f(\xi, y_n(\xi)) d\xi, \quad n \geq 0,$$

daß $y_n(x) = v_n(t(x))$, $x \in [0, \alpha]$ gilt. (Beweis etwa durch Differentiation nach x .) Damit konvergiert die Folge (y_n) gleichmäßig auf $[0, \alpha]$, und zwar gegen die Lösung von (1). (Daß (y_n) überhaupt definiert ist, folgt aus der Integrierbarkeit von $h \exp H$).

4. Bemerkungen

- a) Ist (V) erfüllt, so sind natürlich die Voraussetzungen zu den Sätzen 1 und 2 ebenfalls erfüllt.
- b) Die angegebenen Sätze besitzen naheliegende Verallgemeinerungen auf Systeme; vgl. dazu etwa Walter [2].

Literatur

1. Rogers, T.: On Nagumo's condition. Canadian math. Bull. **15**, 609–611 (1972)
2. Walter, W.: Über sukzessive Approximation bei Volterra-Integralgleichungen in mehreren Veränderlichen. Ann. Acad. Sci. Fennicae Ser. A. I. Mathematica, No. **345**, 32 p. (1965)
3. Walter, W.: Differential and Integral Inequalities. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
4. Witte, J.: Ein Eindeutigkeitssatz für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Math. Z. **140**, 281–287 (1974)

Eingegangen am 25. März 1975

Singuläre Hermite-Birkhoff-Funktionale

Michael Stieglitz

Universität Karlsruhe (TH), Mathematisches Institut I, D-7500 Karlsruhe 1, Englerstraße 2
 Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

Bei vielen Fragen, die im Zusammenhang mit polynomialer Interpolation oder approximativer Quadratur von Funktionen stehen, trifft man auf Funktionale L der Form $L(f) = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu} f^{(\nu)}(x_\mu)$, die durch Polynome vom Höchstgrad $(n-1)$ annulliert werden. Solche Funktionale sind – insbesondere im Hinblick auf Integraldarstellungen – ausführlich von Sard [11] beschrieben worden. In jüngeren Arbeiten wurden vor allem Folgerungen aus einer Beziehung gezogen, die zwischen einem Funktional L dieser Art und dem L zugeordneten Paar (E, X) besteht, wobei (E, X) aus einer $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrix E und einer Knotenmenge X zusammengesetzt ist. So untersuchten Huddleston [5], Merz [9] und Elsner und Merz [3] die Funktionale L im Fall spezieller regulärer Paare (E, X) . Stieglitz [12] stellte im Fall eines beliebigen regulären Paares (E, X) die Funktionale L dadurch dar, daß er die $a_{\mu\nu}$ explizit als Produkt einer von L unabhängigen Determinante $D_{\mu\nu}$ und eines linear nur von L abhängigen Faktors angab.

Im folgenden nun werden, eine Anregung von Lorentz [7] aufnehmend, diejenigen singulären Paare (E, X) charakterisiert, die eine analoge explizite Darstellung der obigen Funktionale L , die hier *singuläre Hermite-Birkhoff-Funktionale* genannt werden, zulassen. Folgerungen betreffen Integraldarstellungen, Mittelwerteigenschaften und Existenzaussagen für L . Schließlich werden diejenigen Zahlenpaare $(m, n+1)$ charakterisiert, für die es eine feste Knotenmenge X derart gibt, daß jede singuläre $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrix E mit diesem X ein singuläres Paar (E, X) bildet.

2. Singuläre Hermite-Birkhoff-Funktionale

Bevor die singulären Hermite-Birkhoff-Funktionale dargestellt werden, sollen die folgenden Begriffe eingeführt werden.

Es sei $E = (e_{\mu\nu})$ mit $e_{\mu\nu} = 0$ oder 1 eine $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrix mit insgesamt $(n+1)$ Einsen; es ist also $\sum_{(\mu, \nu) \in e} e_{\mu\nu} = n+1$ mit $e = e(E) := \{(\mu, \nu) : e_{\mu\nu} = 1\}$. Ferner sei $X = (x_1, \dots, x_m)$ eine Menge von Knoten x_μ mit $x_1 < \dots < x_m$. Dann heißt das Paar (E, X) ein *reguläres Paar*, wenn für jede Wahl von $y_{\mu\nu} \in \mathbb{R}$ das *Hermite-*

Birkhoff-Interpolationsproblem

$$p^{(v)}(x_\mu) = y_{\mu v} \quad \text{für alle } (\mu, v) \in e$$

genau eine Lösung p in π_n , dem Raum der Polynome vom Höchstgrad n , besitzt. Das Paar (E, X) ist also genau dann regulär, wenn

$$D(E, X) := \det \left(\frac{x_\mu^{n-v}}{(n-v)!}, \dots, \frac{x_\mu^{-v}}{(-v)!} \right) \neq 0$$

ist. Hierbei ist die zur Determinante $D(E, X)$ gehörige Matrix durch die Angabe ihrer (μ, v) -ten Zeile, $(\mu, v) \in e$, und die Vereinbarung definiert, die Paare $(\mu, v) \in e$ lexikographisch anzuordnen; d.h. $(\mu, v) \in e$ kommt genau dann vor $(\mu', v') \in e$, wenn entweder $\mu < \mu'$ oder $\mu = \mu'$ und $v < v'$ ist. Außerdem sei $(v!)^{-1} := 0$ gesetzt, falls $v < 0$ ist. E heißt *regulär* (free, order-poised), wenn (E, X) für alle X regulär ist; andernfalls heißt E *singulär* und jedes Paar (E, X) mit $D(E, X) = 0$ ein *singuläres Paar*.

Setzt man $N_v = N_v(E) := \sum_{\mu=1}^m \sum_{\lambda=0}^v e_{\mu\lambda}$, so ist $N_v \geq v+1$ für $0 \leq v \leq n$ die sog. *Pólya-Bedingung*.

Eine *Sequenz* in E ist eine Folge $(e_{\mu v}, \dots, e_{\mu, v+\lambda})$, die den Bedingungen $\lambda \geq 0$ und $(\mu, v), \dots, (\mu, v+\lambda) \in e$ sowie $(\mu, v-1), (\mu, v+\lambda+1) \notin e$ genügt. Dabei sei durch Definition $(\mu, -1), (\mu, n+1) \notin e$. Eine Sequenz heißt *ungerade*, wenn die Anzahl ihrer Elemente ungerade ist. Die obige Sequenz heißt *gestützt*, wenn es Indizes μ', μ'', v', v'' mit $1 \leq \mu' < \mu < \mu'' \leq m$, $0 \leq v', v'' < v$ und $(\mu', v'), (\mu'', v'') \in e$ gibt.

Die algebraischen Komplemente der Elemente der ersten Spalte von $D(E, X)$ werden mit $D_{\mu v} = D_{\mu v}(E, X)$ bezeichnet. Hat E in der letzten Spalte nur Nullen und ersetzt man unter Verwendung der Bezeichnung $x_+^v := x^v$ für $x > 0$ und $x_+^v := 0$ für $x \leq 0$ die Elemente der ersten Spalte von $D(E, X)$ durch

$$(x_\mu - t)_+^{n-v-1} ((n-v-1)!)^{-1},$$

so erhält man den sog. *Birkhoff-Kern* $K(t) = K(E, X, t)$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende

Satz 1. Bei festem $m, n \geq 1$ sei E eine $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrix, die in der letzten Spalte nur Nullen und insgesamt $(n+1)$ Einsen hat. Ferner sei $X = (x_1, \dots, x_m)$ mit $a \leq x_1 < \dots < x_m \leq b$ eine Knotenmenge derart, daß (E, X) ein singuläres Paar ist. Dann sind die drei folgenden Aussagen (1), (2) und (3) äquivalent.

(1) Für jedes singuläre Hermite-Birkhoff-Funktional L , d.h. für jedes Element L des linearen Raums $\mathcal{L}_{n-1} = \mathcal{L}_{n-1}(E, X) := \{L: C^{n-1}[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } L(f) = \sum_{(\mu, v) \in e} a_{\mu v} f^{(v)}(x_\mu), a_{\mu v} \in \mathbb{R} \text{ nur von } (E, X) \text{ abhängig}, L(p) = 0 \text{ für alle } p \in \pi_{n-1}\}$ gilt die

Beziehung

$$a_{\mu v} = \frac{D_{\mu v}}{D_{\mu' v'}} a_{\mu' v'} \quad \text{für alle } (\mu, v) \in e \text{ mit } (\mu, v) \neq (\mu', v') \in e.$$

Also läßt sich jedes $L \in \mathcal{L}_{n-1}$ für $f \in C^{n-1}[a, b]$ in der Form

$$L(f) = \frac{a_{\mu' v'}}{D_{\mu' v'}} L^*(f)$$

darstellen, wobei zur Abkürzung

$$L^*(f) := \sum_{(\mu, \nu) \in e} D_{\mu\nu} f^{(\nu)}(x_\mu)$$

gesetzt wurde.

(2) Es gibt ein Indexpaar $(\mu', \nu') \in e$ mit $D_{\mu'\nu'} \neq 0$.

(3) Es gibt ein Indexpaar $(\mu', \nu') \in e$, für das $(E_{\mu'\nu'}, X)$ ein reguläres Paar ist. Dabei bedeutet die — u.U. eine Zeile aus Nullen enthaltende — Matrix $E_{\mu'\nu'}$ diejenige (m, n) -Inzidenzmatrix mit n Einsen, die aus E durch Ersetzen von $e_{\mu'\nu'}$ durch Null und Streichen der letzten Spalte entsteht.

Beweis. Aus (1) folgt unmittelbar (2). Ferner folgt die Äquivalenz von (2) und (3) aus der Beziehung

$$(4) \quad D(E_{\mu'\nu'}, X) = \det_{(\mu', \nu') \neq (\mu, \nu) \in e} \left(\frac{x_\mu^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}, \dots, \frac{x_\mu^{-\nu}}{(-\nu)!} \right) = \pm D_{\mu'\nu'}.$$

Somit bleibt zu zeigen, daß (1) aus (2) folgt.

Für $(\mu', \nu') \in e$ sei also $D_{\mu'\nu'} \neq 0$. Dann ist wegen (4) auch $D(E_{\mu'\nu'}, X) \neq 0$. Für jedes $L \in \mathcal{L}_{n-1}$ gilt $L(\pi_{n-1}) = 0$, also

$$L \left(\frac{e_\lambda}{\lambda!} \right) = \sum_{(\mu, \nu) \in e} a_{\mu\nu} e_\lambda^{(\nu)}(x_\mu) = 0 \quad \text{für } 0 \leq \lambda \leq n-1,$$

wobei $e_\lambda(x) := x^\lambda$ gesetzt wurde. Somit ergibt sich ein homogenes Gleichungssystem mit n Gleichungen für die $(n+1)$ Unbekannten $a_{\mu\nu}$. In der zugehörigen Koeffizientenmatrix hat die Unbekannte $a_{\mu\nu}$ die Koeffizientenzeile

$$\left(\frac{x_\mu^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}, \dots, \frac{x_\mu^{-\nu}}{(-\nu)!} \right).$$

Wegen (4) hat das Gleichungssystem daher eine einparametrische Lösungsmenge, nämlich

$$a_{\mu\nu} = \frac{D_{\mu\nu}}{D_{\mu'\nu'}} a_{\mu'\nu'} \quad \text{für } (\mu', \nu') \neq (\mu, \nu) \in e,$$

wie sich nach leichter Zwischenrechnung ergibt. Also besitzt $L(f)$ die angegebene Darstellung.

Aus Satz 1 lassen sich Aussagen über die Dimension von $\mathcal{L}_{n-1}$ sowie Integraldarstellungen und Mittelwerteigenschaften von L ableiten.

Folgerung 1. Sind die Voraussetzungen und die Bedingungen (2) bzw. (3) von Satz 1 erfüllt, so gelten die folgenden Aussagen (5), (6) und (7).

(5) Es ist $L^* \neq 0$, also $\dim \mathcal{L}_{n-1} = 1$.

(6) Jedes $L \in \mathcal{L}_{n-1}$ besitzt für $f \in C^n[a, b]$ die Integraldarstellung

$$L(f) = \frac{a_{\mu'\nu'}}{D_{\mu'\nu'}} \int_a^b f^{(n)}(t) K(t) dt.$$

(7) Ist stets $K(t) \geq 0$ oder ≤ 0 , so gilt für jedes $L \in \mathcal{L}_{n-1}$ die Mittelwerteigenschaft

$$L(f) = \frac{a_{\mu'v'}}{D_{\mu'v'}} f^{(n)}(\xi) D(E, X)$$

bei geeignet gewähltem $\xi = \xi(E, X, f) \in (x_1, x_m)$.

Beweis. Zu (5). Um zu zeigen, daß $L^* \neq 0$ ist, genügt es, ein $f \in C^{n-1}[a, b]$ mit

$$f^{(v)}(x_\mu) = \begin{cases} 1 & \text{für } (\mu, v) = (\mu', v') \\ 0 & \text{für } (\mu', v') \neq (\mu, v) \in e \end{cases}$$

zu konstruieren. Das gelingt z.B. durch Aneinandersetzen der folgenden Polynome: $p_1 \in \pi_{v'}$, definiert durch

$$p_1(x) := \frac{(x - x_{\mu'})^{v'}}{v'!} \quad \text{für } x \in [x_{\mu'} - \alpha, x_{\mu'} + \alpha],$$

wobei $\alpha := \min\left(\frac{x_{\mu'+1} - x_{\mu'}}{2}, \frac{x_{\mu'} - x_{\mu'-1}}{2}\right)$, $x_0 := a - 1$ und $x_{m+1} := b + 1$ gesetzt wurde; $p_2 \in \pi_{2n-1}$ definiert als das auf $[x_{\mu'-1}, x_{\mu'} - \alpha]$ eindeutig bestimmte Interpolationspolynom mit

$$p_2^{(v)}(x_{\mu'-1}) := 0, \quad p_2^{(v)}(x_{\mu'} - \alpha) := p_1^{(v)}(x_{\mu'} - \alpha) \quad \text{für } 0 \leq v \leq n-1;$$

$p_3 \in \pi_{2n-1}$ definiert als das auf $[x_{\mu'} + \alpha, x_{\mu'+1}]$ eindeutig bestimmte Interpolationspolynom mit

$$p_3^{(v)}(x_{\mu'} + \alpha) := p_1^{(v)}(x_{\mu'} + \alpha), \quad p_3^{(v)}(x_{\mu'+1}) := 0 \quad \text{für } 0 \leq v \leq n-1;$$

$p_4(x) := 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus (x_{\mu'-1}, x_{\mu'+1})$.

Zu (6). Die angegebene Darstellung folgt sofort mit Hilfe der für alle $f \in C^n[a, b]$ geltenden Beziehung

$$L^*(f) = \int_a^b f^{(n)}(t) K(t) dt$$

von Birkhoff [2, S. 112, Formel (10)].

Zu (7). Nach Lorentz [7, Formel (4.1)] ist

$$\int_a^b K(t) dt = \int_{x_1}^{x_m} K(t) dt = D(E, X),$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Bemerkungen. a) Die Behauptung (1) von Satz 1 kann nicht auf den Fall $(\mu', v') = (\mu', n)$ ausgedehnt werden, wenn E in der letzten Spalte genau eine Eins, etwa an der Stelle (μ', n) hat. Denn aus der Singularität von (E, X) folgt in diesem Fall die von $(E_{\mu'n}, X)$, wobei $E_{\mu'n}$ aus E durch Streichen der letzten Spalte gewonnen sei.

b) Es gibt singuläre Paare (E, X) , die der Bedingung (2) bzw. (3) nicht genügen. Man wähle z.B.

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X := (0, \frac{1}{2}, 1).$$

c) Die Bedingung (2) bzw. (3) kann nicht durch die schwächere Bedingung $\text{rg } D(E, X) = n$ ersetzt werden. Ein einfaches Gegenbeispiel ist das singuläre Paar (E, X) mit

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X := (0, \frac{1}{2}, 1).$$

Dabei ist die Tatsache, daß E im Beispiel in der ersten Spalte nur Nullen hat, nicht notwendig; denn die obige Behauptung gilt auch dann noch, wenn man für E zusätzlich das Bestehen der bei Regularitätsfragen wichtigen sog. *Birkhoff-Bedingung* $N_v \geq v+2$ für $0 \leq v \leq n-1$ fordert. Ein Gegenbeispiel ist jetzt das singuläre Paar (E, X) mit

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X := (0, \frac{1}{6}, \frac{11}{24}, \frac{3}{4}, 1).$$

Im folgenden soll ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben werden, daß ein Raum $\mathcal{L}_{n-1}$ existiert, auf den Satz 1 anwendbar ist.

Folgerung 2. Bei festem $m, n \geq 1$ sei E eine $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrix, die in der letzten Spalte nur Nullen und insgesamt $(n+1)$ Einsen hat; außerdem genüge E der Pólya-Bedingung und habe genau eine ungerade gestützte Sequenz. Dann gibt es eine Knotenmenge $X = (x_1, \dots, x_m)$ mit $a \leq x_1 < \dots < x_m \leq b$ und ein Indexpaar $(\mu', \nu') \in e$ derart, daß jedes $L \in \mathcal{L}_{n-1}(E, X)$ für $f \in C^{n-1}[a, b]$ in der Form

$$L(f) = \frac{a_{\mu' \nu'}}{D_{\mu' \nu'}} L^*(f)$$

darstellbar ist.

Beweis. Nach Lorentz [6, S. 285] gibt es eine Knotenmenge $X = (x_1, \dots, x_m)$ mit $a \leq x_1 < \dots < x_m \leq b$ derart, daß (E, X) ein singuläres Paar ist. Da E nach Voraussetzung genau eine – etwa mit dem Indexpaar $(\mu', \nu') \in e$ beginnende – ungerade gestützte Sequenz hat, besitzt $E_{\mu' \nu'}$ keine ungerade gestützte Sequenz und erzeugt daher nach Atkinson und Sharma [1, S. 232] sowie Lorentz und Zeller [8, S. 43] ein reguläres Paar $(E_{\mu' \nu'}, X)$. Damit sind die Voraussetzungen und die Bedingung (3) von Satz 1 erfüllt.

3. Singuläre Knotenmengen

Dem in Nr. 2 untersuchten Raum $\mathcal{L}_{n-1}(E, X)$ war ein singuläres Paar (E, X) zugrunde gelegt. Es fragt sich in diesem Zusammenhang, ob es eine *singuläre*

Knotenmenge X gibt, d.h. ob es bei festem Zahlenpaar $(m, n+1)$ ein $X = (x_1, \dots, x_m)$ mit $x_1 < \dots < x_m$ derart gibt, daß $D(E, X) = 0$ ist für alle singulären $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrizen E mit $(n+1)$ Einsen.

Da diejenigen E , für die $D(E, X) = 0$ ist für alle X , von der Betrachtung ausgeschlossen werden können, verbleiben die singulären E unter den sog. *bedingt regulären* (conditionally free) E , also diejenigen singulären E , für die es mindestens ein X mit $D(E, X) \neq 0$ gibt. Das sind nach Ferguson [4, S. 23] genau die singulären E , die der Pólya-Bedingung genügen. Da aber die Pólya-Bedingung sowohl im Fall $m=1$ (Taylor-Interpolation) als auch nach Pólya [10, S. 446] im Fall $m=2$ auf reguläre E führt, bleiben allein die der Pólya-Bedingung genügenden singulären E mit $m \geq 3$ zu untersuchen. Dabei kann $n+1 \geq m$ angenommen werden, da E sonst eine Zeile besitzt, die nur aus Nullen besteht.

Der folgende Satz 2 zeigt, daß eine singuläre Knotenmenge genau im Fall einer $(3,3)$ -Inzidenzmatrix existiert.

Satz 2. Bei festem n, m mit $n+1 \geq m \geq 3$ gibt es eine singuläre Knotenmenge $X = (x_1, \dots, x_m)$ mit $x_1 < \dots < x_m$ für alle singulären $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrizen E mit $(n+1)$ Einsen genau dann, wenn $n+1 = m = 3$, also

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ist.

Beweis. Nach dem bereits Gesagten genügt es, die singulären E zu betrachten, die der Pólya-Bedingung genügen. Ist $n+1 = m = 3$, so ist (vgl. Lorentz [6, S. 285]) nur die im Satz genannte Inzidenzmatrix E eine solche Matrix. Die zugehörige singuläre Knotenmenge ist $X = \left(x_1, \frac{x_1 + x_3}{2}, x_3\right)$.

Um die Umkehrung zu zeigen, genügt es, für jedes Zahlenpaar $(m, n+1)$ mit $(m, n+1) \neq (3,3)$ zwei singuläre $(m, n+1)$ -Inzidenzmatrizen E_1 und E_2 mit je $(n+1)$ Einsen anzugeben, die der Pólya-Bedingung genügen und für die es kein X mit $D(E_1, X) = D(E_2, X) = 0$ gibt. Dazu werden die Fälle a) mit $n+1 > m \geq 3$ und b) mit $n+1 = m > 3$ unterschieden.

a) Es sei $n+1 > m \geq 3$ und X durch die Festsetzung $x_1 := 0$ und $x_m := 1$ normiert. Dann ist mit

$$E_1 := \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \overbrace{0 \dots 0}^{m-3} & \overbrace{1 \dots 1}^{n+1-m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & 1 & 0 \dots 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{vmatrix} \quad \left. \vphantom{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \right\} m-3$$

$D(E_1, X) = 0$ genau dann, wenn $x_2 = \frac{1}{2}$ ist.

Setzt man dagegen

$$E_2 := \left\| \begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{0}^{m-3} & \overbrace{1 \dots 1}^{n-m} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \overbrace{0 \dots 0}^{n-m} \\ \hline & & & & 1 & 0 \dots 0 \\ & & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & & 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{array} \right\|_{m-3},$$

so ist $D(E_2, X) = 0$ genau dann, wenn $x_2 = \frac{1}{3}$ ist.

b) Es sei $n+1 = m > 3$ und X wieder durch die Festsetzung $x_1 := 0$ und $x_m := 1$ normiert. Dann ist mit

$$E_1 := \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{0}^{m-4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & & 1 & 0 \dots 0 \\ & & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & & 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{array} \right\|_{m-4}$$

$D(E_1, X) = 0$ genau dann, wenn die Punkte (x_2, x_3) auf der Hyperbel $3x_2^2 - 6x_2 - x_3^2 + 3x_3 = 0$ liegen.

Setzt man dagegen

$$E_2 := \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \overbrace{0}^{m-4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & & & 1 & 0 \dots 0 \\ & & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ & & & & 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{array} \right\|_{m-4},$$

so ist $D(E_2, X) = 0$ genau dann, wenn die Punkte (x_2, x_3) auf der gedrehten Hyperbel $6x_2 - 3x_2x_3 + x_3^2 = 3$ liegen. Die Behauptung folgt nun aus der leicht nachprüfaren Feststellung, daß die beiden Hyperbeln in dem durch die Ungleichungen $0 < x_2 < x_3 < 1$ definierten Gebiet der (x_2, x_3) -Ebene keinen Schnittpunkt haben.

Bemerkung. Mit der analogen Fragestellung im Regularitätsfall, nämlich der Angabe von (sog. *regulären Birkhoff*-)Knotenmengen X , die zusammen mit jeder bedingt regulären Inzidenzmatrix E ein reguläres Paar (E, X) ergeben, hat sich Windauer [13] beschäftigt.

Literatur

1. Atkinson, K., Sharma, A.: A partial characterization of poised Hermite Birkhoff interpolation problems. *SIAM J. numer. Analysis* **6**, 230–235 (1969)
2. Birkhoff, G.D.: General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature. *Trans. Amer. math. Soc.* **7**, 107–136 (1906)
3. Elsner, L., Merz, G.: Lineare Punktfunktionale und Hermite-Birkhoff-Interpolation. *Inst. Angew. Math. Univ. Erlangen. Bericht* 016 (Juli 1973)
4. Ferguson, D.: The question of uniqueness for G.D. Birkhoff interpolation problems. *J. Approximation Theory* **2**, 1–28 (1969)
5. Huddleston, D.: Some relations between the values of a function and its first derivative at n abscissa points. *Math. Comput.* **25**, 553–558 (1971)
6. Lorentz, G.G.: Birkhoff interpolation and the problem of free matrices. *J. Approximation Theory* **6**, 283–290 (1972)
7. Lorentz, G.G.: Zeros of splines and Birkhoff's kernel. *Math. Z.* **142**, 173–180 (1975)
8. Lorentz, G.G., Zeller, K.L.: Birkhoff interpolation. *SIAM J. numer. Analysis* **8**, 43–48 (1971)
9. Merz, G.: Remark on a paper by Huddleston. *Math. Comput.* **26**, 901–902 (1972)
10. Pólya, G.: Bemerkungen zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung. *Z. angew. Math. Mech.* **11**, 445–449 (1931)
11. Sard, A.: Linear approximation. Providence: American Mathematical Society (1963)
12. Stieglitz, M.: Reguläre Hermite-Birkhoff-Funktionale. Erscheint in *Z. angew. Math. Mech.*
13. Windauer, H.: On Birkhoff interpolation: free Birkhoff nodes. *J. Approximation Theory* **11**, 173–175 (1974)

Eingegangen an 21. Mai 1975