Werk

Titel: Harmonische Analyse auf Gruppen mit endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellun...

Autor: KANIUTH, Eberhard; Hauenschild, W.

Jahr: 1975

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0144|log27

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 144, 239 – 256 (1975)
© by Springer-Verlag 1975

Harmonische Analyse auf Gruppen mit endlich-dimensionalen irreduziblen Darstellungen

Wilfried Hauenschild und Eberhard Kaniuth

Institut für Mathematik der Technischen Universität D-8000 München 2, Arcisstraße 21
Bundesrepublik Deutschland

In [6, 7] wurden weitreichende Ergebnisse in der harmonischen Analyse auf zentralen Gruppen, d.h. Gruppen mit kompakter Zentrumsfaktorgruppe, erzielt. Eine lokalkompakte Gruppe heißt Moore-Gruppe, falls alle ihre irreduziblen unitären Darstellungen endlich-dimensional sind; insbesondere ist jede zentrale Gruppe eine Moore-Gruppe. Die Struktur dieser Gruppen wurde von Moore [19] vollständig geklärt: eine lokalkompakte Gruppe ist eine Moore-Gruppe genau dann, wenn sie projektiver Limes von endlichen Erweiterungen von zentralen Gruppen ist. Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit harmonischer Analyse auf Moore-Gruppen und verallgemeinern insbesondere die Ergebnisse von [7, § 3].

Für eine Moore-Gruppe G ist die Abbildung, die einer irreduziblen Darstellung ihre normierte Spur zuordnet, eine Bijektion zwischen dem Dual $\hat{G}$ und der Menge $E(G)$ der unzerlegbaren unter den normierten, stetigen, positiv-definiten Klassenfunktionen auf G. In Satz 1 geben wir eine Beschreibung der Jacobson-Topologie auf $\hat{G}$, die im allgemeinen nicht hausdorffsch ist, durch $E(G)$.

Es ist naheliegend, für Funktionen auf $\hat{G}$ mittels der Zerlegung von Tensorprodukten irreduzibler Darstellungen eine Translation $f \to {}_{\pi}f$ zu definieren. Wir zeigen, daß es auf $\hat{G}$ (bis auf einen positiven Faktor) genau ein innen-reguläres, positives Borelmaß ν gibt mit $\int f\, d\nu = \int {}_{\pi}f\, d\nu$ für alle $f \in C_{00}(\hat{G})$ und $\pi \in \hat{G}$; diese Gleichung gilt sogar für $f \in L^1(\hat{G}, \nu)$ (Sätze 2 und 3). Weiter erhalten wir eine nichtzentrale Umkehrformel (Satz 4) und beweisen schließlich, daß für eine mittelbare SIN-Gruppe G (Gruppe mit kleinen invarianten Umgebungen) $L^1(G)$ die Tauber-Eigenschaft besitzt, d.h. jedes echte abgeschlossene Ideal in einem maximalen modularen Ideal enthalten ist, falls $L^1(G)$ symmetrisch und stark-halbeinfach ist (Satz 5). Insbesondere ist also die Gruppenalgebra einer Moore-Gruppe taubersch.

Entscheidend ist dabei die Tatsache, daß „fast alle" irreduziblen Darstellungen einer Moore-Gruppe G induziert werden von ebensolchen des klassenkompakten Anteils G_F von G (Lemma 1 und Korollare). Dies erlaubt es, letztlich alle Aussagen auf G_F zurückzuführen. Wir bemerken ausdrücklich, daß wir nicht die teils weiterreichenden Resultate in der zentralen harmonischen Analyse auf klassenkompakten SIN-Gruppen [15, 16, 20] benutzen, sondern nur die entsprechenden Ergebnisse für abelsche bzw. kompakte Gruppen. Wir verwenden, ausgenommen beim Beweis von Satz 5, möglichst wenig Strukturtheorie.

1. Präliminarien

Eine lokalkompakte Gruppe G heißt SIN-Gruppe, falls es eine Umgebungsbasis der Eins aus Mengen gibt, die gegen innere Automorphismen invariant sind, und sie heißt Moore-Gruppe, falls alle ihre irreduziblen unitären Darstellungen endlich-dimensional sind. G_F bezeichne die Vereinigung aller relativ kompakten Klassen konjugierter Elemente von G. G heißt klassenkompakt oder FC-Gruppe, falls $G=G_F$ ist, und FD-Gruppe, falls die topologische Kommutatorgruppe $\overline{G'}$ kompakt ist. In einer SIN-Gruppe ist G_F offener Normalteiler.

Ist G eine Moore-Gruppe, so ist es eine SIN-Gruppe [19, Lemma 4.2], der Index $[G:G_F]$ von G_F in G endlich (vgl. z.B. [12, Lemma 8]) und G_F eine FD-Gruppe. Letzteres folgt aus der Charakterisierung in [19] und [5, (3.11) und (3.18)]. Direkter und kürzer läßt sich dies folgendermaßen beweisen. Sei H eine klassenkompakte Moore-Gruppe und H_0 die Zusammenhangskomponente der Eins. Nach dem Satz von Freudenthal-Weil [3, (16.4.6)] ist $H_0=\mathbb{R}^n\times K$, K kompakt. Also können wir $H_0=\mathbb{R}^n$ annehmen; sei N ein offener Normalteiler in H mit $N/\mathbb{R}^n$ kompakt. H/N ist eine klassenfinite diskrete Moore-Gruppe, also $(H/N)'$ endlich nach dem Lemma in [Kaniuth, E.: Der Typ der regulären Darstellung diskreter Gruppen, Math. Ann. **182**, 334 – 339 (1969)]. Also können wir annehmen: H/N abelsch, $N/\mathbb{R}^n$ kompakt. Nun ist aber $\mathbb{R}^n$ im Zentrum von H enthalten; denn für $x\in H$ ist $v\to xvx^{-1}v^{-1}$ eine lineare Abbildung, deren Bild beschränkt ist, also die triviale Abbildung. Nach [3, (16.5.3)] ist N das semi-direkte Produkt des $\mathbb{R}^n$ mit einer kompakten Untergruppe C. Dann ist aber C ein Normalteiler in H, so daß wir $N=\mathbb{R}^n$ annehmen können. Seien nun $\alpha_j\in E(H)$, $1\leqq j\leqq r$, so daß die $\alpha_j|\mathbb{R}^n$ die Punkte des $\mathbb{R}^n$ trennen. Dann existiert eine Untergruppe L von endlichem Index in H mit $L\supseteq\mathbb{R}^n$, so daß die $\alpha_j|L$ linear sind [12, Teil b) des Beweises zu Lemma 2]. Mit $H/\mathbb{R}^n$ abelsch folgt dann: L liegt im Zentrum von H, also ist H' endlich.

Sei $P(G)$ die Menge der stetigen, positiv-definiten Funktionen f auf G mit $f(e)\leqq 1$, $P^1(G)=\{f\in P(G); f(e)=1\}$ and $K(G)$ die Menge der Klassenfunktionen in $P(G)$ sowie $K^1(G)=K(G)\cap P^1(G)$. $E(G)$ sei die Extremalpunktmenge von $K^1(G)$. Wir identifizieren für einen Normalteiler N von G $E(G/N)$ mit $E_N(G)=\{\alpha\in E(G); \alpha|N=1\}$. Die $\sigma(L^\infty, L^1)$-Topologie stimmt auf $P^1(G)$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen überein. Hinsichtlich der Eigenschaften von $E(G)$ verweisen wir auf [12, 15, 20].

Für einen topologischen Raum X sei $\mathcal{B}(X)$ die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra. Unter einem Borelmaß μ verstehen wir ein nicht triviales Maß auf $\mathcal{B}(X)$ mit $\mu(K)<\infty$ für jede kompakte Borelmenge K. μ heißt innenregulär, falls $\mu(A)=\sup\{\mu(K); K\subseteq A, K\in\mathcal{B}(X) \text{ kompakt}\}$. $L^1(X,\mu)$ bezeichne den Raum der μ-integrierbaren Borelfunktionen auf X.

Zu $\varphi\in P(G)$ sei π_φ die zugehörige zyklische Darstellung von G, L_φ die stetige Fortsetzung des positiven Funktionals $f\to\int f(x)\varphi(x)dx$ von $L^1(G)$ auf die C^*-Algebra $C^*(G)$ und $J_\varphi=\{a\in C^*(G); L_\varphi(a^*a)=0\}$. $\hat{G}$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen irreduzibler, unitärer Darstellungen von G mit der üblichen Topologie. Für eine endlich-dimensionale Darstellung π sei d_π die Dimension und $\operatorname{tr}\pi$ die Spur. Wir schreiben d_φ anstatt d_{π_φ} für $\varphi\in P(G)$.

Für einen Normalteiler N von G, $x\in G$ und $f\colon N\to\mathbb{C}$ sei f^x definiert durch $f^x(n)=f(x^{-1}nx)$, $n\in N$. Sei $Z^1(N,G)=\{f\in L^1(N);f^x=f$ fast überall für alle $x\in G\}$ und $K(N,G)=\{f\in P(N);f^x=f$ für alle $x\in G\}$. Weiter sei $E(N,G)$ die Extremalpunktmenge von $K^1(N,G)=K(N,G)\cap P^1(N)$. Für eine Moore-Gruppe G ist $t\colon \hat{G}\to E(G)$, definiert durch $t(\pi)=d_\pi^{-1}\operatorname{tr}\pi$, eine Bijektion [4, S. 73–75] und $s\colon E(G_F)\to E(G_F,G)$, definiert durch $s(\gamma)=\gamma^G=[G:G_F]^{-1}\sum_{x\in G/G_F}\gamma^x$, wo über ein Vertretersystem von Nebenklassen von G_F in G summiert wird, ist stetig, offen, surjektiv und eigentlich, d.h. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt [20, Theorem 5.8]. Zum Beweis dieser Tatsache benötigt man hier wegen der Endlichkeit der wirkenden Gruppe G/G_F nicht den allgemeinen Satz [5, Theorem (0.1)]. Jedoch benötigen wir [10, Section 1] und damit [5, Theorem (0.1)] beim Beweis von Satz 5.

Für eine FD-Gruppe läßt sich $E(G)$ schreiben als disjunkte Vereinigung $E(G)=\bigcup_{\alpha\in\Delta}\alpha\widehat{G/K}$ mit $K=\overline{G'}$ und $\Delta\subseteq E(G)$, und die $\alpha\widehat{G/K}$ sind offen [15, S. 340]. Für $\alpha\in E(G)$ sei $m_\alpha\colon \widehat{G/K}\to\alpha G/K$ definiert durch $m_\alpha(\lambda)=\alpha\lambda$; m_α ist offensichtlich stetig und surjektiv. Man überlegt sich unschwer, daß m_α auch offen ist, und wegen $m_\alpha^{-1}m_\alpha(S)=S\widehat{G/N_\alpha}$, wo N_α den von K und $\{x;\alpha(x)\neq 0\}$ erzeugten Normalteiler bezeichnet, ist m_α auch eigentlich.

Sei jetzt G eine Moore-Gruppe. Die Abbildung $r\colon E(G)\to E(G_F,G)$, $\alpha\to\alpha|G_F$ ist stetig und surjektiv. Die in [13] definierte Abbildung $p\colon \hat{G}\to E(G_F,G)$ ist stetig, offen, surjektiv und eigentlich. Auch der Beweis der Offenheit ist in unserer Situation ganz einfach, da wegen $[G:G_F]<\infty$ $J_\alpha\supseteq J_{\widetilde{\alpha|G_F}}$ für $\alpha\in E(G)$ gilt. Im Beweis von [13, Theorem 1] sieht man noch folgendes: ist $\rho\in\hat{G}$ und $\varphi\in P(G)$ mit $\operatorname{Kern}\pi_\varphi=\operatorname{Kern}\rho$ und $(\varphi|G_F)^G\in E(G_F,G)$, so ist $p(\rho)=(\varphi|G_F)^G$. Insbesondere gilt $\operatorname{Kern}\rho=\operatorname{Kern}\pi_{t(\rho)}$ und $(t(\rho)|G_F)^G=\alpha_\rho|G_F\in E(G_F,G)$. Also ist $p(\rho)=\alpha_\rho|G_F$ oder $p=r\circ t$.

2. Die Dualräume $\hat{G}$ und $E(G)$

Sei G eine Moore-Gruppe, $\hat{G}_n=\{\pi\in\hat{G};d_\pi=n\}$ und $E_n(G)=\{\alpha\in E(G);d_\alpha=n^2\}$. Dann ist $t\colon\pi\to\alpha_\pi=\dfrac{\operatorname{tr}\pi}{d_\pi}$ eine bijektive Abbildung zwischen $\hat{G}$ und $E(G)$, und es gilt $t(\hat{G}_n)=E_n(G)$ [4, S. 54, Corollaire 1, und S. 73–75]. $t|\hat{G}_n$ ist ein Homöomorphismus [3, 3.6.4], $\hat{G}_n$ eine Borelmenge in $\hat{G}$ [3, 3.6.3] und $E_n(G)$ eine solche in $E(G)$, da $\bigcup_{i=1}^{m}E_i(G)$ abgeschlossen ist in $E(G)$. Daraus folgt, daß t ein Borel-Isomorphismus ist. t ist ein Homöomorphismus genau dann, wenn $G=G_F$ ist. Denn ist $\hat{G}$ hausdorffsch, so $G=G_F$ [18, Beweis zu Theorem 5.2]; ist umgekehrt $G=G_F$, so ist p injektiv, also ein Homöomorphismus. Für eine Moore-Gruppe G ist nach [18, Lemma 5.4] $G=G_F$ gleichwertig damit, daß G ein projektiver Limes von Z-Gruppen ist. Wir geben nun eine Beschreibung der Topologie auf $\hat{G}$ durch $E(G)$.

Satz 1. *Sei G eine Moore-Gruppe, $M\subseteq\hat{G}$ und $\pi\in\hat{G}$. Dann ist $\pi\in\overline{M}$ genau dann, wenn ein Netz $(\pi_\iota)_{\iota\in I}\subseteq M$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: $(\alpha_{\pi_\iota})_{\iota\in I}$ konvergiert gegen ein $\beta\in K(G)$, und es gilt $\alpha_\pi\leqq c\cdot\beta$ für ein $c>0$.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend; denn es gilt $\operatorname{Kern}\rho = J_{\alpha_\rho}$ für $\rho \in \hat{G}$ [20, (2.2)], und mit $\alpha_\pi \leqq c\beta$ folgt daraus

$$\operatorname{Kern}\pi = J_{\alpha_\pi} \supseteq J_\beta \supseteq \bigcap_{\iota \in I} J_{\alpha_{\pi_\iota}} = \bigcap_{\iota \in I} \operatorname{Kern}\pi_\iota .$$

Sei umgekehrt $\pi \in \overline{M}$ und $(\pi_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz in $\hat{G}$, das gegen π konvergiert. Wir zeigen zunächst, daß wir nach Auswahl eines Teilnetzes d_{π_ι} konstant $= d$ annehmen können. Für $\rho \in \hat{G}$ und $\tau \in E(G_F)$ mit $\tau^G = p(\rho)$ gilt

$$d_\rho \leqq d_{\alpha_\rho} \leqq d_{\widetilde{\alpha_\rho | G_F}} = [G:G_F] \cdot d_{p(\rho)} \leqq [G:G_F]^2 \, d_\tau .$$

Sei nun $\sigma \in E(G_F)$ mit $\sigma^G = p(\pi)$ und $V = \sigma \cdot \widehat{G_F/G_F'}$. Dann ist V offen und wegen $s\colon \tau \to \tau^G$ offen und p stetig $p^{-1}(V^G)$ offene Umgebung von π, also $\pi_\iota \in p^{-1}(V^G)$ für alle $\iota \geqq \iota_0$. Daraus folg; $p(\pi_\iota) = \sigma_\iota^G$ für ein $\sigma_\iota \in V$ und damit

$$d_{\pi_\iota} \leqq [G:G_F]^2 \, d_{\sigma_\iota} = [G:G_F]^2 \, d_\sigma \quad \text{für } \iota \geqq \iota_0 .$$

Da $K(G)$ kompakt ist, können wir weiter annehmen, daß $(\alpha_{\pi_\iota})_{\iota \in I}$ gegen ein $\beta \in K(G)$ konvergiert. Die Stetigkeit von p liefert dann $\beta | G_F = p(\pi) \in E(G_F, G)$, so daß α_{π_ι} gleichmäßig auf kompakten Mengen gegen β konvergiert.

Sei nun H ein Hilbertraum der Dimension d, $U(H)$ die kompakte unitäre Gruppe von H und $\operatorname{Rep}_H(G)$ die Menge der (nicht notwendig stetigen) unitären Darstellungen von G in H. Wir versehen $\operatorname{Rep}_H(G)$ mit der Topologie, die die Abbildung $\rho \to (\rho(x))_{x \in G}$ von $\operatorname{Rep}_H(G)$ in $\prod_{x \in G} U(H)$ zu einem Homöomorphismus macht; dann ist $\operatorname{Rep}_H(G)$ kompakt (vgl. dazu [11, Satz 12.1.3]). Wegen $d_{\pi_\iota} = d$ können wir $\pi_\iota \in \operatorname{Rep}_H(G)$ annehmen, weiter wegen der Kompaktheit von $\operatorname{Rep}_H(G)$, daß das Netz $(\pi_\iota)_{\iota \in I}$ gegen ein $\rho \in \operatorname{Rep}_H(G)$ konvergiert. Dann folgt $\operatorname{tr}\rho(x) = \lim \operatorname{tr}\pi_\iota(x)$, also $\beta(x) = \lim \alpha_{\pi_\iota}(x) = \dfrac{\operatorname{tr}\rho(x)}{d}$ für alle $x \in G$.

Wir zeigen nun weiter, daß $\pi \in \widehat{G_d}$ schwach enthalten ist in ρ (G_d bezeichnet die Gruppe G mit der diskreten Topologie). Sei $F \subseteq G$ endlich mit $e \in F$ und $\xi \in H_\pi$. Zu $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $\iota_n \in I$ mit $|\langle \pi_\iota(x)\eta, \eta\rangle - \langle \rho(x)\eta, \eta\rangle| < \dfrac{1}{n}$ für alle $\iota \geqq \iota_n$, $x \in F$ und $\eta \in H$ mit $\|\eta\| \leqq \|\xi\| + 1$. Wegen $\pi \in \overline{\{\pi_\iota ; \iota \geqq \iota_n\}}$ für alle n existieren zu jedem n ein $\kappa_n \geqq \iota_n$ und $\eta_n \in H$ mit $\|\eta_n\| \leqq \|\xi\| + 1$ (wegen $e \in F$) und $|\langle \pi_{\kappa_n}(x)\eta_n, \eta_n\rangle - \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle| \leqq \dfrac{1}{n}$ für alle $x \in F$ [3, (18.1.5)]. Wegen $\dim H < \infty$ können wir $\eta_n \to \eta \in H$ annehmen. Dann gilt $\langle \pi(x)\xi, \xi\rangle = \lim \langle \pi_{\kappa_n}(x)\eta, \eta\rangle$, und wegen $\kappa_n \geqq \iota_n$ folgt daraus $\langle \rho(x)\eta, \eta\rangle = \lim \langle \pi_{\kappa_n}(x)\eta, \eta\rangle = \langle \pi(x)\xi, \xi\rangle$ für alle $x \in F$. Wegen $d_\rho < \infty$ ist dann π äquivalent zu einer Teildarstellung $\rho | L$ von ρ für einen Teilraum L von H. Ergänzt man eine orthonormierte Basis $\xi_1, \ldots, \xi_t$ von L zu einer orthonormierten Basis $\xi_1, \ldots, \xi_t, \ldots, \xi_d$ von H, so folgt für $x_j \in G$ und $\lambda_j \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \operatorname{tr}\pi(x_j^{-1} x_i) = \sum_{k=1}^{t} \Big\langle \Big(\sum_i \lambda_i \rho(x_i)\Big)^* \Big(\sum_i \lambda_i \rho(x_i)\Big) \xi_k, \xi_k \Big\rangle$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{d} \Big\langle \Big(\sum_i \lambda_i \rho(x_i)\Big)^* \Big(\sum_i \lambda_i \rho(x_i)\Big) \xi_k, \xi_k \Big\rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \operatorname{tr}\rho(x_j^{-1} x_i),$$

also $\alpha_\pi = \dfrac{\operatorname{tr}\pi}{d_\pi} \leqq \dfrac{d}{d_\pi} \cdot \dfrac{\operatorname{tr}\rho}{d} = \dfrac{d}{d_\pi} \cdot \beta$.

Sei nun G eine FD-Gruppe, $K=\overline{G'}$ und λ ein Haarsches Maß auf $\widehat{G/K}$. Zu $\alpha\in E(G)$ setzen wir $c_\alpha=(\int_K|\alpha(x)|^2dx)^{-1}$, wo dx das normierte Haarmaß auf K bezeichnet. Ist $E(G)=\bigcup_{\alpha\in\Delta}\alpha\cdot\widehat{G/K}$, so definiert $\mu_G(S)=\sum_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\cdot\lambda(m_\alpha^{-1}(S\cap\alpha\cdot\widehat{G/K}))$ ein Borelmaß auf $E(G)$ (vgl. dazu [15, Satz 6]).

Lemma 1. *Sei G eine Moore-Gruppe, $G_\sigma=\{x\in G;\ \sigma^x=\sigma\}$ für $\sigma\in E(G_F)$ und $D=\{\sigma\in E(G_F);\ G_\sigma=G_F\}$. Dann ist D offen in $E(G_F)$ und $E(G_F)\setminus D$ eine lokale μ_{G_F}-Nullmenge, insbesondere also D dicht in $E(G_F)$.*

Beweis. Sei $N=G_F$, $K=\overline{G'_F}$ und $\mu=\mu_N$; da für jede Untergruppe H von G $\{\sigma\in E(G_F);\ G_\sigma\supseteq H\}$ abgeschlossen ist, folgt die Offenheit von D aus $[G:N]<\infty$. Da $\alpha\widehat{N/K}$ offen ist in $E(N)$, genügt es $\mu(C\cap\alpha\widehat{N/K}\setminus D)=0$ zu zeigen für jedes $\alpha\in E(N)$ und $C\subseteq E(N)$ kompakt. Sei H eine Untergruppe von G mit $N\subsetneq H$ und sei $Q=\{\sigma\in\alpha\widehat{N/K};\ G_\sigma\supseteq H\}$; wegen $[G:N]<\infty$ genügt es dann $\mu(Q\cap C)=0$ zu zeigen. Ist $\mu(Q\cap C)>0$, so können wir zunächst $\alpha\in Q\cap C$ annehmen wegen $\sigma\widehat{N/K}=\alpha\widehat{N/K}$ für alle $\sigma\in\alpha\widehat{N/K}$. Sei dann L die von K und $\{x\in N;\ \alpha(x)\neq 0\}$ erzeugte Untergruppe von G: L ist normal in H wegen $H\subseteq G_\alpha$, und es gilt $\alpha=\widehat{\alpha|L}$, also $[N:L]<\infty$ wegen $d_\alpha<\infty$. Setzen wir $\Delta=\{\tau\in\widehat{L/K};\ \tau^y=\tau$ für alle $y\in H\}$, so gilt $\Delta\supseteq m_\alpha^{-1}(Q)|L$; denn ist $\sigma\in\widehat{N/K}$ mit $\alpha\sigma\in Q$, so $\alpha\sigma^y=(\alpha\sigma)^y=\alpha\sigma$ für $y\in H$, also $\sigma^y|L=\sigma|L$ nach Definition von L. Sei nun ν das Bildmaß von λ unter der Abbildung $\sigma\to\sigma|L$ von $\widehat{N/K}$ auf $\widehat{L/K}$. Dann ist ν ein Haarmaß auf $\widehat{L/K}$, und es gilt

$$0<\mu(Q\cap C)=c_\alpha\cdot\lambda(m_\alpha^{-1}(Q\cap C))$$
$$\leqq c_\alpha\cdot\nu(m_\alpha^{-1}(Q\cap C)|L)\leqq c_\alpha\cdot\nu(m_\alpha^{-1}(C)|L\cap\Delta)<\infty,$$

da $m_\alpha^{-1}(C)|L$ kompakt ist. Da Δ eine Untergruppe von $\widehat{L/K}$ ist, muß Δ offen sein, also $\Delta=\widehat{L/F}$ für eine kompakte Untergruppe F von L mit $K\subseteq F$. Aus $\tau^y=\tau$ für alle $\tau\in\Delta$ und $y\in H$ folgt: F ist normal in H, und L/F liegt im Zentrum von H/F. Da $[H:L]<\infty$ und F kompakt ist, folgt dann $H=H_F$, und $[G:H]<\infty$ ergibt den Widerspruch $H\subseteq G_F$.

Es bezeichne $\mu_{G_F,G}$ das Bildmaß von μ_{G_F} unter der Abbildung $\sigma\to\sigma^G$ von $E(G_F)$ auf $E(G_F,G)$.

Korollar 1. *Für $\sigma\in D$ gilt $r^{-1}(\sigma^G)=\{\widetilde{\sigma^G}\}$, D^G ist offen in $E(G_F,G)$ und $E(G_F,G)\setminus D^G$ eine lokale $\mu_{G_F,G}$-Nullmenge.*

Beweis. Ist H eine lokalkompakte Gruppe und π eine endlich-dimensionale irreduzible Darstellung von H, so gilt $\frac{\operatorname{tr}\pi}{d_\pi}\in E(H)$ [4]. Daraus folgt: ist $\sigma\in E(G_F)$ und $\sigma=\frac{\operatorname{tr}\pi}{d_\pi}$, $\pi\in\widehat{G_F}\subseteq\widehat{(G_F)_d}$, so auch $\sigma\in E((G_F)_d)$. Aus dem in [22, Seite 135] Gezeigten ergibt sich dann: ist $\sigma\in D$, also $G_\sigma=G_F$, und $\alpha\in K(G_d)$ mit $\alpha|G_F=\sigma^G=[G:G_F]^{-1}\sum_{x\in G/G_F}\sigma^x$, so $\alpha(x)=0$ für alle $x\notin G_F$. Das gilt erst recht für $\alpha\in K(G)$ mit $\alpha|G_F=\sigma^G$, d.h. es ist $\widetilde{\sigma^G}\in E(G)$. Der Rest folgt aus Lemma 1 und der Offenheit von s.

Bemerkung. Insbesondere ist also für eine Moore-Gruppe G $\widetilde{E(G_F, G)} \cap E(G)$ dicht in $\widetilde{E(G_F, G)}$. Dies gilt im separablen Fall für jede SIN-Gruppe [8, Satz 1], hingegen wurde in [9] ein Beispiel einer (nicht-abzählbaren) nilpotenten diskreten Gruppe G der Stufe 2 angegeben mit $\widetilde{E(G_F, G)} \cap E(G) = \varnothing$.

Korollar 2. *$p^{-1}(D^G)$ ist offen und dicht in $\hat{G}$ und $p|p^{-1}(D^G)$ ein Homöomorphismus von $p^{-1}(D^G)$ auf D^G.*

Beweis. Aus D^G offen, dicht in $E(G_F, G)$ und p stetig, offen folgt $p^{-1}(D^G)$ offen, dicht in $\hat{G}$. Weiter ist nach Korollar 1 $p^{-1}(\gamma) = t^{-1}(\tilde{\gamma})$ für $\gamma \in D^G$, also $p|p^{-1}(D^G)$ injektiv.

Korollar 3. *$\pi \to d_\pi$ ist stetig genau, wenn $G = G_F$ ist.*

Beweis. Nach Korollar 2 existiert ein Netz $(\pi_\iota)_{\iota \in I} \subseteq p^{-1}(D^G) \cap \widehat{G/\overline{G'}_F}$ mit $\pi_\iota \to 1$. Für $\lambda \in D \cap \widehat{G_F/\overline{G'}_F}$ gilt $d_{\lambda G} = [G : G_F]$, demnach für alle ι

$$d_{\pi_\iota}^2 = d_{\widetilde{p(\pi_\iota)}} = [G : G_F]\, d_{p(\pi_\iota)} = [G : G_F]^2.$$

Ist also $\pi \to d_\pi$ stetig, so muß $G = G_F$ sein. Ist umgekehrt $G = G_F$, so ist $\pi \to \alpha_\pi$ ein Homöomorphismus und $\alpha \to d_\alpha$ stetig; denn $\alpha \widehat{G/\overline{G'}}$ ist offen in $E(G)$ und $d_{\alpha\lambda} = d_\alpha$ für alle $\lambda \in \widehat{G/\overline{G'}}$.

Korollar 4. *$\hat{G}$ ist total unzusammenhängend genau dann, wenn G nur kompakte Elemente besitzt.*

Beweis. Zu einer topologischen Gruppe H bezeichne H^c die Menge der kompakten Elemente von H. Ist $G = G^c$, so $E(G_F, G)$ total unzusammenhängend; denn ist zu $\gamma \in E(G_F, G)$ und einem kompakten Normalteiler K von G $E_K^\gamma(G_F, G) = \{\alpha \in E(G_F, G); \alpha|K = \gamma|K\}$, so $E_K^\gamma(G_F, G)$ offen-abgeschlossen, und da wegen $G_F = G_F^c$ jede kompakte Menge in G_F einen kompakten Normalteiler in G erzeugt, bilden die $E_K^\gamma(G_F, G)$ eine Umgebungsbasis von γ in $E(G_F, G)$. Also ist für $\pi \in \hat{G}$ die Zusammenhangskomponente von π endlich. Da Punkte in $\hat{G}$ abgeschlossen sind, folgt dann $\hat{G}$ total unzusammenhängend.

Sei umgekehrt $\hat{G}$ total unzusammenhängend; es genügt dann $G/\overline{G'_F} = (G/\overline{G'_F})^c$ zu zeigen, d.h. wir können G_F als abelsch annehmen. Es ist erst recht $p^{-1}(D^G)$ und damit D^G total unzusammenhängend (Korollar 2). Sei $W = s^{-1}(D^G)$; dann ist W offen in $\widehat{G_F}$ und total unzusammenhängend, da $s^{-1}(\gamma)$ endlich ist für alle $\gamma \in E(G_F, G)$. Da W lokalkompakt ist, hat jeder Punkt aus W eine offen-abgeschlossene Basis. Daraus folgt $\widehat{G_F}$ total unzusammenhängend, d.h. $G_F = G_F^c$.

Bemerkungen. a) Zum Beweis der Korollare 3 und 4 wird Lemma 1 nur für den Spezialfall G_F abelsch gebraucht.

b) Aus Korollar 4 folgt: *ist G eine separable SIN-Gruppe, so ist $\hat{G}$ total unzusammenhängend genau dann, wenn G eine Moore-Gruppe und $G = G^c$ ist.* Denn eine separable Gruppe, deren Dual ein T_1-Raum ist, ist vom Typ I [3, Théorème (9.1)], und eine SIN-Gruppe vom Typ I ist eine Moore-Gruppe [12, 18]. Dies ergänzt die Resultate in [13].

c) Für $(\mathbb{Z}_2 \circledS \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}_2 \circledS \left(\prod_{i=1}^{\infty}{}' \mathbb{Z}\right)$, wo $\prod'$ das schwache direkte Produkt bezeichne, lassen sich $E(G)$ und $\hat{G}$ mit Hilfe bzw. entsprechend dem Beispiel in [23, S. 392] bestimmen. In beiden Fällen ist $E(G_F, G) \setminus D^G$ in $E(G_F, G)$ nicht diskret.

3. Translation von Funktionen auf $\hat{G}$

Sei G eine Moore-Gruppe. Zu $f\colon \hat{G} \to \mathbb{C}$ und $\pi \in \hat{G}$ sei ${}_\pi f$ auf $\hat{G}$ definiert durch ${}_\pi f(\rho) = d_\pi^{-1} d_\rho^{-1} \sum_{\sigma \in \hat{G}} d_\sigma m_{\pi \otimes \rho}(\sigma) f(\sigma)$, wobei $m_{\pi \otimes \rho}(\sigma)$ die Vielfachheit von σ im Tensorprodukt $\pi \otimes \rho$ bezeichnet. Für $\pi, \rho \in \hat{G}$ und $x \in G$ gilt

$$\alpha_\pi \alpha_\rho(x) = d_\pi^{-1} d_\rho^{-1} \operatorname{tr} \pi \otimes \rho(x) = d_\pi^{-1} d_\rho^{-1} \sum_{\sigma \in \hat{G}} d_\sigma m_{\pi \otimes \rho}(\sigma)\, \alpha_\sigma(x),$$

also $f(\alpha_\pi \alpha_\rho) = \sum_{\sigma \in \hat{G}} d_\pi^{-1} d_\rho^{-1} d_\sigma m_{\pi \otimes \rho}(\sigma) f(\alpha_\sigma)$ für jede affin-lineare Funktion f auf $K(G)$. Mit [1, I.4.1 und I.4.5] folgt dann: $\mu_{\alpha_\pi \alpha_\rho} = \sum_{\sigma \in \hat{G}} d_\pi^{-1} d_\rho^{-1} d_\sigma m_{\pi \otimes \rho}(\sigma)\, \delta_{\alpha_\sigma}$, δ_ω Diracmaß in $\omega \in E(G)$, ist das eindeutig bestimmte maximale Zerlegungsmaß von $\alpha_\pi \alpha_\rho$ in $K(G)$. Für $f\colon E(G) \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in E(G)$ sei nun ${}_\alpha f$ auf $E(G)$ definiert durch ${}_\alpha f(\beta) = \sum_{\gamma \in E(G)} \mu_{\alpha\beta}(\gamma) f(\gamma)$; dann gilt für $\pi \in \hat{G}$ und $f\colon E(G) \to \mathbb{C}$

$$ {}_\pi(f \circ t) = {}_{t(\pi)} f \circ t. \tag{1}$$

Lemma 2. *Ist $f\colon \hat{G} \to \mathbb{C}$ Borel-meßbar und $\pi \in \hat{G}$, so ist auch ${}_\pi f$ Borel-meßbar.*

Beweis. Da t ein Borel-Isomorphismus ist und wegen (1) genügt es zu zeigen: für jede Borelfunktion $f\colon E(G) \to \mathbb{C}$ und $\alpha \in E(G)$ ist ${}_\alpha f$ Borel-meßbar. Zu $\omega \in K(G)$ bezeichne μ_ω das maximale Zerlegungsmaß von ω auf $K(G)$. Ist $g\colon K(G) \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $\omega \to \mu_\omega(g)$ Borel-meßbar [1, II.3.15]. Da die μ_ω regulär sind, folgt daraus: $\omega \to \mu_\omega(A)$ ist Borel-meßbar für jede Borelmenge A in $K(G)$. Für $\alpha \in E(G)$ ist $\beta \to \alpha\beta$, $E(G) \to K(G)$ stetig, also $\beta \to \mu_{\alpha\beta}(A)$ borelsch für eine Borelmenge A in $K(G)$. Da die $\mu_{\alpha\beta}$ endliche Linearkombinationen von Diracmaßen zu Punkten aus $E(G)$ sind und die Borelstruktur auf $E(G)$ die von $K(G)$ induzierte ist, ist damit $\beta \to \mu_{\alpha\beta}(A)$ borelsch für jede Borelmenge A in $E(G)$. Wegen $\mu_{\alpha\beta}(f) = {}_\alpha f(\beta)$ folgt dann die Behauptung.

Ist N ein abgeschlossener Normalteiler in G mit $N \subseteq G_F$ und $\alpha \in K(N, G)$, so bezeichne μ_α das maximale Zerlegungsmaß von α über $K(N, G)$. Sind $\alpha, \beta \in E(G_F, G)$ und $\alpha', \beta' \in E(G)$ mit $\alpha'|G_F = \alpha$, $\beta'|G_F = \beta$, so gilt $\mu_{\alpha\beta}(\gamma) = \mu_{\alpha'\beta'}(r^{-1}(\gamma))$ für alle $\gamma \in E(G_F, G)$. Definieren wir zu $\alpha \in E(G_F, G)$ und $f\colon E(G_F, G) \to \mathbb{C}$ ${}_\alpha f$ auf $E(G_F, G)$ durch ${}_\alpha f(\beta) = \sum_{\gamma \in E(G_F, G)} \mu_{\alpha\beta}(\gamma) f(\gamma)$, so gilt für $\pi \in \hat{G}$:

$$ {}_\pi(f \circ p) = {}_{p(\pi)} f \circ p; \tag{2}$$

denn

$$\begin{aligned} {}_\pi(f \circ p)(\rho) &= {}_{t(\pi)} f \circ r(t(\rho)) = \sum_{\beta \in E(G)} \mu_{\alpha_\pi \alpha_\rho}(\beta) f \circ r(\beta) \\ &= \sum_{\gamma \in E(G_F, G)} \Big(\sum_{\beta \in r^{-1}(\gamma)} \mu_{\alpha_\pi \alpha_\rho}(\beta) f(\gamma) \Big) = \sum_{\gamma \in E(G_F, G)} f(\gamma)\, \mu_{p(\pi)\, p(\rho)}(\gamma) = {}_{p(\pi)} f \circ p(\rho). \end{aligned}$$

Genauso wie im Beweis zu Lemma 2 folgt: *ist* $f\colon E(G_F, G)\to\mathbb{C}$ *borelsch und* $\gamma\in E(G_F, G)$, *so ist auch* ${}_\gamma f$ *borelsch.*

Zu $M\subseteq\hat{G}$ (bzw. $M\subseteq E(G_F, G)$) und $\pi\in G$ (bzw. $\alpha\in E(G_F, G)$) setzen wir ${}_\pi M=\{\rho\in\hat{G}; m_{\pi\otimes\rho}(\sigma)>0$ für ein $\sigma\in M\}$ (bzw. ${}_\alpha M=\{\beta\in E(G_F, G); \mu_{\alpha\beta}(\gamma)>0$ für ein $\gamma\in M\}$). *Ist* M *eine Borelmenge, so auch* ${}_\pi M$ *(bzw.* ${}_\alpha M$*)* (man wende Lemma 2 bzw. die eben gemachte Bemerkung auf die charakteristische Funktion von M an). Wir zeigen weiter: *ist* M *relativ kompakt, so auch* ${}_\pi M$ *bzw.* ${}_\alpha M$. Wegen ${}_\pi M\subseteq p^{-1}({}_{p(\pi)}p(M))$ für $M\subseteq\hat{G}$ und $\pi\in\hat{G}$ genügt es $M\subseteq E(G_F, G)$ zu betrachten. Ist $\alpha=\sigma^G$, $\beta=\tau^G$, $\sigma, \tau\in E(G_F)$, so gilt $\mu_{\alpha\beta}(M)>0$ genau dann, wenn für geeignete $x, y\in G/G_F$ $\mu_{\sigma^x\tau^y}(s^{-1}(M))>0$ gilt. Also ist ${}_\alpha M=s(\bigcup_{x\in G/G_F}{}_{\sigma^x}(s^{-1}(M)))$, und wir können daher $G=G_F$ voraussetzen. Ist $\beta\in E(G)$ mit $\mu_{\alpha\beta}(M)>0$, so ist $\mu_{\alpha|K\cdot\beta|K}(M|K)>0$, $K=\overline{G'}$. Da $M|K\subseteq E(K, G)$ endlich ist, gibt es nur endlich viele $\gamma\in E(K, G)$ mit $\mu_{\alpha|K\cdot\gamma}(M|K)>0$. Also genügt es zu zeigen: ist $\beta\in E(G)$ und $M\subseteq E(G)$ relativ kompakt, so ist auch $\{\beta\lambda;\ \lambda\in\widehat{G/K},\ \mu_{\alpha\beta\lambda}(M)>0\}$ relativ kompakt. Das folgt aber aus

$$\{\beta\lambda;\lambda\in\widehat{G/K}, \mu_{\alpha\beta\lambda}(M)>0\}=m_\beta(\{\lambda\in\widehat{G/K};\mu_{\alpha\beta\lambda}(M)>0\})$$
$$=\bigcup_{\delta\in E(G)} m_\beta(\{\lambda\in\widehat{G/K};\mu_{\delta\lambda}(M)>0\})=\bigcup_\delta m_\beta(m_\delta^{-1}(M)).$$

Lemma 3. *Sei* G *eine Moore-Gruppe,* $\alpha\in E(G_F, G)$ *und* $M\subseteq E(G_F, G)$ *eine lokale* $\mu_{G_F, G}$*-Nullmenge. Dann ist auch* ${}_\alpha M$ *eine lokale* $\mu_{G_F, G}$*-Nullmenge.*

Beweis. Nach den oben gemachten Bemerkungen ist mit M auch ${}_\alpha M$ eine Borelmenge. Ist $\tau\in E(G_F)$ mit $\tau^G=\alpha$, so gilt $s^{-1}({}_\alpha M)=\bigcup_{x\in G/G_F}{}_{\tau^x}(s^{-1}(M))$; also genügt es den Fall $G=G_F$ zu betrachten. Ist zu $\beta\in E(G)$ N_β der von $K=\overline{G'}$ und $\{x\in G;\beta(x)\neq 0\}$ erzeugte Normalteiler, so ist G/N_β endlich und $m_\beta^{-1}(m_\beta(A))=A\cdot\widehat{G/N_\beta}$ für $A\subseteq\widehat{G/K}$ (vgl. Beweis zu Lemma 1). Demnach ist $\lambda(A)=0$ gleichwertig mit $\mu_G(m_\beta(A))=0$ für $A\subseteq\widehat{G/K}$ und $\beta\in E(G)$. Ist nun $C\subseteq E(G)$ kompakt, so ist $\mu_G({}_\alpha M\cap C\cap\omega\widehat{G/K})=0$ zu zeigen für $\omega\in E(G)$. Für $\tau\in\widehat{G/K}$ gilt $\omega\tau\in{}_\alpha M\Leftrightarrow\mu_{\alpha\omega\tau}(\beta)>0$ für ein $\beta\in M\Leftrightarrow\tau\in m_\sigma^{-1}(M)$ für ein $\sigma\in E(G)$ mit $\mu_{\alpha\omega}(\sigma)>0$. Also folgt

$${}_\alpha M\cap C\cap\omega\widehat{G/K}\subseteq\bigcup_{\substack{\sigma\in E(G)\\ \mu_{\alpha\omega}(\sigma)>0}} m_\omega(m_\sigma^{-1}(M\cap m_\alpha(m_\omega^{-1}(C)))).$$

Nun ist $m_\sigma(m_\omega^{-1}(C))$ kompakt, also $Q=M\cap m_\sigma(m_\omega^{-1}(C))$ eine μ_G-Nullmenge. Daraus folgt $\lambda(m_\sigma^{-1}(Q))=0$ und dann $\mu_G(m_\omega(m_\sigma^{-1}(Q)))=0$.

Für eine Funktion h auf $E(G_F, G)$ und $\gamma=\sigma^G$, $\sigma\in E(G_F)$, gilt

$${}_\gamma h\circ s=[G:G_F]^{-1}\sum_{x\in G/G_F}{}_{\sigma^x}(h\circ s);\tag{3}$$

denn für $\omega\in E(G_F)$ ist

$${}_\gamma h\circ s(\omega)=\sum_{\beta\in E(G_F, G)}\mu_{\gamma\omega^G}(\beta)\,h(\beta)=\sum_{\tau\in E(G_F)}\mu_{\gamma\omega^G}(\tau)\,h(\tau^G)$$
$$=[G:G_F]^{-2}\sum_{x, y\in G/G_F}\sum_{\tau\in E(G_F)}\mu_{\sigma^x\omega^y}(\tau)\,h\circ s(\tau)$$

$$=[G:G_F]^{-2}\sum_{y\in G/G_F}\Big(\sum_{x\in G/G_F}\sum_{\tau\in E(G_F)}h\circ s(\tau)\,\mu_{(\sigma^x\omega)^y}(\tau)\Big)$$

$$=[G:G_F]^{-2}\sum_{y}\Big(\sum_{x}\sum_{\tau}h\circ s(\tau^{y^{-1}})\,\mu_{\sigma^x\omega}(\tau)\Big)=[G:G_F]^{-1}\sum_{x\in G/G_F}{}_{\sigma^x}(h\circ s)(\omega).$$

Lemma 4. *Ist G eine Moore-Gruppe, $\pi\in\hat{G}$ und $f\in C(\hat{G})$ (bzw. $f\in C_{00}(\hat{G})$) so ist auch ${}_\pi f\in C(\hat{G})$ (bzw. ${}_\pi f\in C_{00}(\hat{G})$).*

Beweis. Die Aussage in Klammern folgt aus der anderen und der Bemerkung vor Lemma 3. Wir beweisen die Behauptung zunächst im Falle $G=G_F$. Sei $f\in C(E(G))$, $K=\overline{G'}$ und $\alpha,\tau\in E(G)$. Sei $\Gamma=\{\gamma\in E(G);\ \mu_{\alpha\tau}(\gamma)>0\}$. Für $\rho\in\widehat{G/K}$ gilt dann

$${}_\alpha f(\tau\rho)=\sum_{\sigma\in E(G)}\mu_{\alpha\tau\rho}(\sigma)f(\sigma)=\sum_{\gamma\in\Gamma}\mu_{\alpha\tau}(\gamma)f(\rho\gamma).$$

Die rechte Seite ist stetig in ρ, die Offenheit von m_τ und $\tau\widehat{G/K}$ ergeben dann die Stetigkeit von ${}_\alpha f$ in τ. Ist nun $f\in C(\hat{G})$, so nach Korollar 1 zu Lemma 1 f konstant auf $p^{-1}(\gamma)$ für alle $\gamma\in E(G_F,G)$. Sei $h(\gamma)=f(\pi)$, $\pi\in p^{-1}(\gamma)$; dann ist $h\in C(E(G_F,G))$ und ${}_\gamma h\circ p={}_\pi(h\circ p)={}_\pi f$ nach Formel (1), also ${}_\pi f\in C(\hat{G})$, falls ${}_\gamma h\in C(E(G_F,G))$. Dies folgt aber aus Formel (3), s offen und der Stetigkeit von ${}_\sigma(h\circ s)$ für alle $\sigma\in E(G_F)$.

4. Invariantes Integral und Umkehrformel

Das folgende Lemma wird zum Eindeutigkeitsbeweis des invarianten Integrals benötigt.

Lemma 5. *Sei G eine Moore-Gruppe mit $G=G_F$ und $K=\overline{G'}$. Für $f,g\in C_{00}(E(G))$ mit $\operatorname{supp} f\subseteq\widehat{G/K}$ und $\alpha\in E(G)$ gilt dann*

$$\int{}_\alpha f\,g\,d\mu_G=\int f\cdot{}_{\bar\alpha}g\,d\mu_G.$$

Beweis. Da beide Seiten linear in g sind, können wir $\operatorname{supp} g\subseteq\bar\sigma\widehat{G/K}$ annehmen für ein $\sigma\in E(G)$. Aus $\mu_{\alpha\beta}(\widehat{G/K})>0$ folgt $\beta|K=\overline{\alpha|K}$; also ist $\operatorname{supp}{}_\alpha f\subseteq\bar\alpha\widehat{G/K}$ und damit die linke Seite der Gleichung $=0$, falls $\alpha\notin\sigma\widehat{G/K}$. In diesem Fall ist aber auch die rechte Seite $=0$; denn aus $\mu_{\bar\alpha\omega}(\bar\sigma\widehat{G/K})>0$ für ein $\omega\in\widehat{G/K}$ folgt $\sigma|K=\alpha|K$. Sei also $\alpha=\sigma\omega$ mit $\omega\in\widehat{G/K}$; dann gilt $\int f_{\bar\alpha}g\,d\mu_G=\int\limits_{\widehat{G/K}}f(\lambda)g(\overline{\sigma\omega}\lambda)\,d\lambda$ und

$$\begin{aligned}\int{}_\alpha f\,g\,d\mu_G&=c_\sigma\cdot\int\limits_{\widehat{G/K}}g(\bar\sigma\lambda)\,{}_{\sigma\omega}f(\bar\sigma\lambda)\,d\lambda\\&=c_\sigma\int\limits_{\widehat{G/K}}g(\bar\sigma\lambda)\Big(\sum_{\chi\in\widehat{G/K}}f(\chi)\,\mu_{\sigma\bar\sigma\omega\lambda}(\chi)\Big)\,d\lambda\\&=c_\sigma\sum_{\chi\in\widehat{G/K}}\mu_{\sigma\bar\sigma}(\chi)\int\limits_{\widehat{G/K}}f(\chi\omega\lambda)\,g(\bar\sigma\lambda)\,d\lambda\\&=c_\sigma\int\limits_{\widehat{G/K}}f(\lambda)\sum_{\chi\in\widehat{G/K}}\mu_{\sigma\bar\sigma}(\chi)\,g(\overline{\sigma\omega\chi}\lambda)\,d\lambda,\end{aligned}$$

also

$$\int f_{\check{\alpha}} g\, d\mu_G - \int_\alpha f g\, d\mu_G = \int f(\lambda)[g(\overline{\sigma\omega}\lambda) - c_\sigma \sum_{\chi \in \widehat{G/K}} \mu_{\sigma\bar{\sigma}}(\chi)\, g(\overline{\sigma\omega\chi}\lambda)]\, d\lambda.$$

Wir zeigen als nächstes: ist $\chi \in \widehat{G/K}$ und $\mu_{\sigma\bar{\sigma}}(\chi) > 0$, so gilt $\sigma\chi = \sigma$. Das sieht man leicht ein durch Übergang zur Bohr-Kompaktifizierung. Ist nämlich $\varphi\colon G \to G^\varphi$ der kanonische Homomorphismus von G in seine Bohr-Kompaktifizierung G^φ und zu $\pi \in \hat{G}$ $\pi^\varphi \in \widehat{G^\varphi}$ mit $\pi^\varphi(\varphi(x)) = \pi(x)$ für alle $x \in G$, so gilt

$$\begin{aligned} m_{\pi\otimes\bar{\pi}}(\chi) &= m_{\pi^\varphi \otimes \overline{\pi^\varphi}}(\chi^\varphi) = \int_{G^\varphi} |\operatorname{tr} \pi^\varphi(x)|^2\, \overline{\operatorname{tr} \chi^\varphi(x)}\, dx \\ &= m_{\pi^\varphi \otimes \chi^\varphi}(\pi^\varphi) = m_{\pi\otimes\chi}(\pi) \qquad [10, (27.30)]. \end{aligned}$$

Ist also $\pi \in \hat{G}$ mit $\alpha_\pi = \sigma$, so folgt aus $\mu_{\sigma\bar{\sigma}}(\chi) > 0$ $m_{\pi\otimes\chi}(\pi) = m_{\pi\otimes\bar{\pi}}(\chi) > 0$, d.h. $\pi \otimes \chi \cong \pi$ und damit $\sigma\chi = \sigma$. Weiter gilt $c_\sigma\, \mu_{\sigma\bar{\sigma}}(\widehat{G/K}) = 1$. Zum Beweis sei $\omega \in E(K)$ mit $\sigma|K = |o(\omega)|^{-1} \sum_{\tau \in o(\omega)} \tau$, wo $o(\omega)$ die G-Bahn von ω bezeichnet; dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_{\sigma\bar{\sigma}}(\widehat{G/K}) &= \mu_{\sigma|K \cdot \bar{\sigma}|K}(1) = |o(\omega)|^{-2} \sum_{\tau \in o(\omega)} \mu_{\tau\bar{\tau}}(1) \\ &= |o(\omega)|^{-2} \sum_{\tau \in o(\omega)} d_\tau^{-1}\, m_{t^{-1}(\tau)\otimes t^{-1}(\bar{\tau})}(1) \\ &= |o(\omega)|^{-2} \sum_{\tau \in o(\omega)} \int_K |\tau(x)|^2\, dx = \int_K |\sigma(x)|^2\, dx = c_\sigma^{-1}. \end{aligned}$$

Damit folgt dann aber $c_\sigma \sum_{\chi \in \widehat{G/K}} \mu_{\sigma\bar{\sigma}}(\chi)\, g(\overline{\sigma\omega\chi}\lambda) = g(\overline{\sigma\omega}\lambda)\, c_\sigma\, \mu_{\sigma\bar{\sigma}}(\widehat{G/K}) = g(\overline{\sigma\omega}\lambda)$, d.h. $\int_\alpha f g\, d\mu_G = \int f_{\check{\alpha}} g\, d\mu_G$.

Lemma 6. *Sei G eine Moore-Gruppe mit $G = G_F$ und $\omega \in E(G)$. Ist $f \in L^1(E(G), \mu_G)$, so auch ${}_\omega f \in L^1(E(G), \mu_G)$, und es gilt $\int f\, d\mu_G = \int {}_\omega f\, d\mu_G$ sowie $\| {}_\omega f \|_1 \leqq \| f \|_1$.*

Beweis. Sei $K = \overline{G'}$ und $E(G) = \dot{\bigcup}_{\alpha \in \Delta} \alpha\, \widehat{G/K}$; wir zeigen zunächst, daß für $\beta, \gamma \in E(G)$ gilt $c_\gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha\, \mu_{\alpha\beta}(\gamma\, \widehat{G/K})$. Dazu seien ρ_0, σ_0, τ_0 aus $E(K)$ mit

$$\alpha|K = |o(\rho_0)|^{-1} \sum_{\rho \in o(\rho_0)} \rho, \qquad \beta|K = |o(\sigma_0)|^{-1} \sum_{\sigma \in o(\sigma_0)} \sigma$$

und

$$\gamma|K = |o(\tau_0)|^{-1} \sum_{\tau \in o(\tau_0)} \tau.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_{\alpha\beta}(\gamma\, \widehat{G/K}) &= \mu_{\alpha|K \cdot \beta|K}(\gamma|K) = |o(\rho_0)|^{-1} \cdot |o(\sigma_0)|^{-1} \sum_{\rho,\sigma,\tau} \mu_{\rho\sigma}(\tau) \\ &= |o(\rho_0)|^{-1}\, |o(\sigma_0)|^{-1} \sum_{\rho,\sigma,\tau} d_{\rho_0}^{-\frac{1}{2}}\, d_{\sigma_0}^{-\frac{1}{2}}\, d_{\tau_0}^{\frac{1}{2}}\, m_{t^{-1}(\rho)\otimes t^{-1}(\sigma)}(t^{-1}(\tau)) \\ &= |o(\rho_0)|^{-1}\, |o(\sigma_0)|^{-1}\, d_{\tau_0}\, d_{\rho_0}^{-1} \sum_{\rho,\sigma,\tau} d_{\rho_0}^{\frac{1}{2}}\, d_{\sigma_0}^{-\frac{1}{2}}\, d_{\tau_0}^{-\frac{1}{2}}\, m_{t^{-1}(\tau)\otimes t^{-1}(\bar{\sigma})}(t^{-1}(\rho)) \\ &= |o(\tau_0)| \cdot |o(\rho_0)|^{-1}\, d_{\tau_0}\, d_{\rho_0}^{-1}\, \mu_{\gamma|K \cdot \bar{\beta}|K}(\alpha|K) = d_{\gamma|K}\, d_{\alpha|K}^{-1}\, \mu_{\gamma|K \cdot \bar{\beta}|K}(\alpha|K). \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$d_{\alpha|K}^{-1}=|o(\rho_0)|^{-1}\,d_{\rho_0}^{-1}=|o(\rho_0)|^{-2}\,d_{\rho_0}^{-1}\sum_{\rho\in o(\rho_0)}\int_K|\mathrm{tr}\,t^{-1}(\rho)(x)|^2\,dx=\int_K|\alpha(x)|^2\,dx=c_\alpha^{-1}$$

ergibt das

$$\sum_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\,\mu_{\alpha\beta}(\gamma\,\widehat{G/K})=d_{\gamma|K}\sum_{\alpha\in\Delta}\mu_{\gamma|K\cdot\beta|K}(\alpha|K)=d_{\gamma|K}=c_\gamma.$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}\int|{}_\omega f|\,d\mu_G&=\sum_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\int_{\widehat{G/K}}|{}_\omega f(\alpha\lambda)|\,d\lambda\\&=\sum_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\cdot\int_{\widehat{G/K}}\Big|\sum_{\rho\in E(G)}\mu_{\alpha\omega\lambda}(\rho)\,f(\rho)\Big|\,d\lambda\\&\leqq\sum_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\cdot\int_{\widehat{G/K}}\sum_{\rho\in E(G)}\mu_{\alpha\omega}(\rho)\,|f(\lambda\rho)|\,d\lambda\\&=\sum_{\alpha\in\Delta}c_\alpha\Big(\sum_{\beta\in\Delta}\sum_{\tau\in\widehat{G/K}}\mu_{\alpha\omega}(\beta\tau)\int_{\widehat{G/K}}|f(\lambda\beta)|\,d\lambda\Big)\\&=\sum_{\alpha,\beta\in\Delta}c_\alpha\,\mu_{\alpha\omega}(\beta\,\widehat{G/K})\int_{\widehat{G/K}}|f(\beta\lambda)|\,d\lambda=\sum_{\beta\in\Delta}c_\beta\int_{\widehat{G/K}}|f(\beta\lambda)|\,d\lambda=\|f\|_1.\end{aligned}$$

Da ${}_\omega f$ borelsch ist (Lemma 2), ist also ${}_\omega f\in L^1(E(G),\mu_G)$ und $\|{}_\omega f\|_1\leqq\|f\|_1$. Die eben durchgeführte Rechnung ohne Betragstriche ergibt die Gleichung $\int{}_\omega f\,d\mu_G=\int f\,d\mu_G$.

Satz 2. *Sei G eine Moore-Gruppe; dann existiert auf $C_{00}(\hat G)$ ein positives lineares Funktional $I\neq 0$ mit $I(f)=I({}_\pi f)$ für alle $\pi\in\hat G$ und $f\in C_{00}(\hat G)$, und I ist bis auf eine positive Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis. a) Zu $f\in C_{00}(\hat G)$ sei $f'\in C_{00}(E(G_F,G))$ die eindeutig bestimmte Funktion auf $E(G_F,G)$ mit $f'\circ p=f$ und $f''=f'\circ s\in C_{00}(E(G_F))$. Wir setzen $I''(h)=\int h\,d\mu_{G_F}$ für $h\in C_{00}(E(G_F))$, $I'(g)=\int g\,d\mu_{G_F,G}=I''(g\circ s)$ für $g\in C_{00}(E(G_F,G))$ und $I(f)=I'(f')$ für $f\in C_{00}(\hat G)$. Dann ist I ein positives lineares Funktional, und für $\pi\in\hat G$ gilt nach Formel (2) $I({}_\pi f)=I({}_\pi(f'\circ p))=I({}_{p(\pi)}f'\circ p)=I'({}_{p(\pi)}f')$. Ist nun $\sigma\in E(G_F)$ mit $\sigma^G=p(\pi)$, so folgt mit Formel (3) und Lemma 6 weiter

$$I'({}_{p(\pi)}f')=I''({}_{p(\pi)}f'\circ s)=[G:G_F]^{-1}\sum_{x\in G/G_F}I''({}_{\sigma^x}(f'\circ s))=I''(f'\circ s)=I(f).$$

b) Sei I das in a) definierte Funktional auf $C_{00}(\hat G)$ und J ein zweites invariantes positives lineares Funktional auf $C_{00}(\hat G)$. Dann definiert $J'(g)=J(g\circ p)$, $g\in C_{00}(E(G_F,G))$, ein invariantes positives lineares Funktional auf $C_{00}(E(G_F,G))$; denn mit $\gamma=p(\pi)$ gilt $J'({}_\gamma g)=J({}_\gamma g\circ p)=J({}_\pi(g\circ p))=J(g\circ p)=J'(g)$. Da $g\to g\circ p$ eine bijektive Abbildung zwischen $C_{00}(E(G_F,G))$ und $C_{00}(\hat G)$ ist, genügt es $J'=c\,I'$ zu zeigen. Aus Lemma 5 folgt nun

$$\int{}_\alpha f g\,d\mu_{G_F,G}=\int f_{\check\alpha}g\,d\mu_{G_F,G}$$

für $f, g \in C_{00}(E(G_F, G))$, $\operatorname{supp} f \subseteq E(G_F/K, G/K)$ und $\alpha \in E(G_F, G)$; denn mit $\sigma^G = \alpha$, $\sigma \in E(G_F)$, ergeben Lemma 5 und Formel (3)

$$I'({}_\alpha f g) = \int ({}_\alpha f \circ s)(g \circ s)\, d\mu_{G_F} = [G:G_F]^{-1} \sum_{x \in G/G_F} \int_{\sigma^x} (f \circ s)\, g \circ s\, d\mu_{G_F}$$

$$= [G:G_F]^{-1} \sum_{x \in G/G_F} \int (f \circ s)_{\overline{\sigma^x}} (g \circ s)\, d\mu_{G_F} = I'(f_{\check{\alpha}} g).$$

Für $f, g \in C_{00}(E(G_F, G))$ mit $\operatorname{supp} f \subseteq E(G_F/K, G/K)$ rechnet man dann leicht nach $I'(f)J'(g) = I'(g)J'(\check{f})$, wo $\check{f}(\alpha) = f(\bar{\alpha})$. Ist also $I'(f) \neq 0$, so

$$J'(g) = \frac{J'(\check{f})}{I'(f)} I'(g) \quad \text{für alle } g \in C_{00}(E(G_F, G)).$$

Bemerkung. 1) I in Satz 2 ist ein Integral, da I' eins ist.

2) Das Integral I von Satz 2 läßt sich explizit angeben. Ist zu $f \in C_{00}(\hat{G})$ wieder $f' \in C_{00}(E(G_F, G))$ mit $f' \circ p = f$ und $\widehat{G_F} = \dot{\bigcup}_{\pi \in \Delta} \pi \otimes \widehat{G_F/G_F'}$ (wir identifizieren $\widehat{G_F}$ mit $E(G_F)$), so

$$I(f) = \sum_{\pi \in \Delta} d_\pi^2 \Big(\int_{G_F'} |\operatorname{tr} \pi(x)|^2\, dx \Big)^{-1} \int_{\widehat{G_F/G_F'}} (f' \circ s)(\pi \otimes \lambda)\, d\lambda.$$

Nach [2, V.3.4] existiert genau ein innen-reguläres, positives Borelmaß ν_{G_F} auf $E(G_F)$ mit $\int f\, d\nu_{G_F} = \int f\, d\mu_{G_F}$ für alle $f \in C_{00}(E(G_F))$, nämlich $\nu_{G_F}(A) = \sup\{\mu_{G_F}(K);\ K \subseteq A,\ K \text{ kompakt}\}$ für $A \in \mathcal{B}(E(G_F))$. Es gilt $L^1(E(G_F), \mu_{G_F}) \subseteq L^1(E(G_F), \nu_{G_F})$, und umgekehrt gibt es zu $f \in L^1(E(G_F), \nu_{G_F})$ ein $f' \in L^1(E(G_F), \mu_{G_F})$ mit $f = f'$ lokal μ_{G_F}-fast überall (vgl. [2, V. 5.4]). Insbesondere ist $N \in \mathcal{B}(E(G_F))$ genau dann eine lokale μ_{G_F}-Nullmenge, wenn es ν_{G_F}-Nullmenge ist [2, V. 4.3 Prop. 4]. Entsprechendes gilt für das durch $\nu_{G_F, G}(A) = \sup\{\mu_{G_F, G}(K);\ K \subseteq A \text{ kompakt}\}$ definierte Maß auf $E(G_F, G)$. Wir werden im folgenden $\mu_{G_F, G}$, μ_{G_F}, $\nu_{G_F, G}$ bzw. ν_{G_F} mit μ', μ'', ν' bzw. ν'' bezeichnen. Dann ist ν' das Bildmaß von ν'' unter s.

Satz 3. *Ist G eine Moore-Gruppe, so gibt es ein bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmtes innen-reguläres, positives Borelmaß ν_G auf $\hat{G}$ mit $\int f\, d\nu_G = \int {}_\pi f\, d\nu_G$ für alle $f \in C_{00}(\hat{G})$ und $\pi \in \hat{G}$. Für $f \in L^1(\hat{G}, \nu_G)$ und $\pi \in \hat{G}$ gilt auch ${}_\pi f \in L^1(\hat{G}, \nu_G)$ und $\int f\, d\nu_G = \int {}_\pi f\, d\nu_G$.*

Beweis. a) Sei $U = p^{-1}(D^G)$ mit D aus Lemma 1. Dann definieren wir ein Maß ν auf $\hat{G}$ durch $\nu(A) = \nu'(p(A \cap U))$ für $A \in \mathcal{B}(\hat{G})$: $p(A \cap U)$ ist borelsch, da $p|U$ ein Homöomorphismus ist (Kor. 2 zu Lemma 1). Nach Lemma 1 ist $\nu''(E(G_F) \setminus D) = 0$ und $\nu'(E(G_F, G) \setminus p(U)) = 0$. Wegen $p(A \cap U) = p(A) \cap p(U)$ gilt $\nu(A) = \nu'(p(A) \cap p(U)) = \nu'(p(A))$, falls nur $p(A) \in \mathcal{B}(E(G_F, G))$. Für jede kompakte Borelmenge $K \subseteq \hat{G}$ ist also $\nu(K) = \nu'(p(K)) < \infty$ und für jede Folge A_i paarweise disjunkter Borelmengen

$$\nu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \nu'\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} p(A_i \cap U)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu'(p(A_i \cap U)) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).$$

Also ist ν ein positives Borelmaß; es ist innen-regulär, denn für $A \in \mathcal{B}(\hat{G})$ gilt $\nu(A) = \nu'(p(A \cap U)) = \sup\{\nu'(C);\ C \subseteq p(A \cap U) \text{ kompakt}\} = \sup\{\nu'(p(K));\ K \subseteq A \cap U,\ K \in \mathcal{B}(\hat{G}) \text{ kompakt}\} \leqq \sup\{\nu(K);\ K \subseteq A,\ K \in \mathcal{B}(\hat{G}) \text{ kompakt}\}$. Aus Lemma 3 folgt nun: mit $M \in \mathcal{B}(\hat{G})$ ist auch ${}_\pi M$ eine ν-Nullmenge. Denn $p(M \cup (\hat{G} \setminus U)) = p(M \cap U)$

$\cup p(\hat{G}\setminus U)$ ist eine Borelmenge, und es gilt $\nu'(p(M\cup(\hat{G}\setminus U)))=\nu'(p(M\cap U))+\nu'(p(\hat{G}\setminus U))=\nu(M)=0$, also auch $\nu(p^{-1}({}_{p(\pi)}p(M\cup(\hat{G}\setminus U))))=\nu'({}_{p(\pi)}p(M\cup(\hat{G}\setminus U)))=0$ nach Lemma 3; wegen ${}_{\pi}M\subseteq p^{-1}({}_{p(\pi)}p(M))\subseteq p^{-1}({}_{p(\pi)}p(M\cup(\hat{G}\setminus U)))$ folgt die Behauptung. Für $B\in\mathscr{B}(E(G_F,G)$ gilt $\nu(p^{-1}(B))=\nu'(p(p^{-1}(B)))=\nu'(B)$, also ist ν' das Bildmaß von ν unter p. Zum einen haben wir also $f'\in L^1(E(G_F,G),\nu')$ genau dann, wenn $f'\circ p\in L^1(\hat{G},\nu)$ [2, IV. 2.2, Théorème 2]. Umgekehrt gilt $f\in L^1(\hat{G},\nu)$ genau dann, wenn f borelsch ist und ein $f'\in L^1(E(G_F,G),\nu')$ existiert mit $f'\circ p=f$ ν-fast überall. Definiert man nämlich zu $f\in L^1(\hat{G},\nu)$ f' durch $f'(\gamma)=f(\pi)$ für $\gamma=p(\pi),\pi\in U$, und $f'(\gamma)=0$ für $\gamma\notin p(U)$, so ist f' borelsch und es gilt $f'\circ p(\rho)=f(\rho)$ für alle $\rho\in U$, also ν-fast überall. Mit f ist auch $f'\circ p\in L^1(\hat{G},\nu)$, also $f'\in L^1(E(G_F,G),\nu')$. Ist andererseits $f'\in L^1(E(G_F,G),\nu')$ und $f=f'\circ p$ ν-fast überall, so ist auch $f\in L^1(\hat{G},\nu)$.

Zu $f\in C_{00}(\hat{G})$ sei $f'\in C_{00}(E(G_F,G))$ mit $f'\circ p=f$ wie im Beweis zu Satz 2. Dann gilt $I(f)=I'(f')=\int f'\,d\mu'=\int f'\,d\nu'$, also mit Satz 2 $\int f\,d\nu=I(f)=I({}_{\pi}f)=\int {}_{\pi}f\,d\nu$ für $f\in C_{00}(\hat{G})$ und $\pi\in\hat{G}$. Sind g und h Funktionen auf $\hat{G}$ und $M\subseteq\hat{G}$ mit $g(\rho)=h(\rho)$ für $\rho\in\hat{G}\setminus M$, so gilt ${}_{\pi}g(\rho)={}_{\pi}h(\rho)$ für alle $\rho\in\hat{G}\setminus{}_{\pi}M$. Ist also $g=h$ ν-fast überall, so auch ${}_{\pi}g={}_{\pi}h$ ν-fast überall. Zu $f\in L^1(\hat{G},\nu)$ und $\pi\in\hat{G}$ sei $f'\in L^1(E(G_F,G),\nu')$ mit $f'\circ p=f$ ν-fast überall; dann gilt mit (2) ${}_{p(\pi)}f'\circ p={}_{\pi}f$ ν-fast überall und deshalb wegen (3) und Lemma 6

$$\int_{\hat{G}} f\,d\nu=\int_{E(G_F,G)} f'\,d\nu'=\int_{E(\hat{G}_F)} f'\circ s\,d\nu''=\int_{E(\hat{G}_F)} {}_{p(\pi)}f'\circ s\,d\nu''$$
$$=\int_{E(G_F,G)} {}_{p(\pi)}f'\,d\nu'=\int_{\hat{G}} {}_{\pi}f\,d\nu.$$

b) Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von ν. Sei ν_1 ein positives, innen-reguläres Borelmaß mit $\int f\,d\nu_1=\int {}_{\pi}f\,d\nu_1$ für alle $f\in C_{00}(\hat{G})$ und $\pi\in\hat{G}$. $J(f)=\int f\,d\nu_1$ ist dann ein invariantes positives lineares Funktional auf $C_{00}(\hat{G})$; also existiert ein $c\geqq 0$ mit $J=cI$. Sei weiter ν_1' das Bildmaß von ν_1 unter p, dann gilt $\int f'\,d\nu_1'=c\cdot\int f'\,d\nu'$ mit dem ν' aus a). Wegen $\nu_1'(K)=\inf\{\int f'\,d\nu_1';f'\geqq\chi_K,f'\in C_{00}(E(G_F,G))\}$ für $K\subseteq E(G_F,G)$ kompakt und der inneren Regularität gilt also $\nu_1'(B)=c\cdot\nu_1(B)$ für alle $B\in\mathscr{B}(E(G_F,G))$. Insbesondere ist also $\nu_1(\hat{G}\setminus U)=\nu_1'(E(G_F,G)\setminus p(U))=c\nu'(E(G_F,G)\setminus p(U))=0$ und damit für $A\in\mathscr{B}(\hat{G})$ $\nu_1(A)=\nu_1(p^{-1}p(A\cap U))=\nu_1'(p(A\cap U))=c\nu'(p(A\cap U))=c\nu(A)$.

Für eine Teilmenge M eines linearen Raumes bezeichne im folgenden $[M]$ die lineare Hülle von M. Das nächste Lemma folgt natürlich aus [15, Sätze 4 und 6]; wir geben hier einen direkten einfachen Beweis.

Lemma 7. *Sei G eine FD-Gruppe, $K=\overline{G'}$ und μ_G wie vor Lemma 1. Zu $f\in L^1(G)$ sei $\hat{f}(\beta)=\int f(x)\,\beta(x)\,dx$, $\beta\in E(G)$. Für $f\in[Z^1(G)\cap P(G)]$ ist dann $\hat{f}\in L^1(E(G),\mu_G)$, und es gilt $f(x)=\int_{E(G)}\hat{f}(\beta)\,\overline{\beta(x)}\,d\mu_G(\beta)$ für alle $x\in G$.*

Beweis. Wir können $f\in Z^1(G)\cap P(G)$ annehmen. Zu $h\in L^1(G)\cap P(G)$ sei $\dot{h}$ auf G/K definiert durch $\dot{h}(\dot{x})=\int_K h(xk)\,dk$, $\dot{x}\in G/K$; dann gilt $\dot{h}\in L^1(G/K)\cap P(G/K)$ [7, (3.5) (i)]. Für $\lambda\in\widehat{G/K}$ und $\alpha\in E(G)$ haben wir

$$\hat{f}(\alpha\lambda)=\int_G f(x)\,\alpha(x)\,\lambda(x)\,dx=\int_{G/K}\int_K \alpha f(xk)\,\lambda(xk)\,dk\,d\dot{x}$$
$$=\int_{G/K}(\alpha f)^{\cdot}(\dot{x})\,\lambda(\dot{x})\,d\dot{x}=\widehat{(\alpha f)^{\cdot}}(\lambda).$$

Zu $x\in G$ definieren wir ein Maß μ_x auf G durch $\int h(y)\,d\mu_x(y)=\int\limits_K h(xk)\,dk$ für $h\in C_{00}(G)$; μ_x ist dann G-invariant, da G/K abelsch und dk G-invariant ist. Weiter gilt für $g\in[P(K)]$

$$\sum_{\omega\in E(K,\,G)} c_\omega \int\limits_K g(k)\,\omega(k)\,dk=g(e);$$

denn mit $\omega=|o(\gamma_0)|^{-1}\sum\limits_{\gamma\in o(\gamma_0)}\gamma$, $\gamma_0\in E(K)$, gilt [10, § 34]:

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in E(K,\,G)} c_\omega \int\limits_K g(k)\,\omega(k)\,dk&=\sum_{\omega\in E(K,\,G)} c_\omega|o(\gamma_0)|^{-1}\sum_{\gamma\in o(\gamma_0)}\int\limits_K g(k)\,\gamma(k)\,dk\\&=\sum_{\omega\in E(K)} c_\omega\int\limits_K g(k)\,\omega(k)\,dk=\sum_{\rho\in\hat K} d_\rho\int\limits_K g(k)\,\mathrm{tr}\,\rho(k)\,dk\\&=\sum_{\rho\in\hat K} d_\rho\,\mathrm{tr}\,\rho(g)=g(e).\end{aligned}$$

Die folgende Gleichungskette zeigt insbesondere für $x=e$ die Integrierbarkeit von $\hat f$ wegen $\hat f\geqq 0$ für $f\in P(G)$. Wir benutzen dabei die Formel für die Elemente in $E(G)$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{E(G)}\hat f(\beta)\,\overline{\beta(x)}\,d\mu_G(\beta)&=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\int\limits_{\widehat{G/K}}\hat f(\alpha\lambda)\overline{(\alpha\lambda)(x)}\,d\lambda\\&=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\,\overline{\alpha(x)}\int\limits_{\widehat{G/K}}\widehat{(\alpha f)^{\cdot}}(\lambda)\,\overline{\lambda(\dot x)}\,d\lambda=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\,\overline{\alpha(x)}(\alpha f)^{\cdot}(\dot x)\\&=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\,\overline{\alpha(x)}\int\limits_G f(y)\,\alpha(y)\,d\mu_x(y)=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\int\limits_G f(y)\,\alpha(x^{-1}y)\,d\mu_x(y)\\&=\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha\int\limits_K f(xk)\,\alpha(k)\,dk=\sum_{\omega\in E(K/G)} c_\omega\int\limits_K({}_xf\,|K)(k)\,\omega(k)\,dk\\&=({}_xf\,|K)(e)=f(x).\end{aligned}$$

Für eine kompakte Gruppe G ist $v_G(\rho)=d_\rho^2$ für $\rho\in\hat G$ das invariante Maß. Deshalb unterscheiden sich unsere Formeln von den entsprechenden in [7, Theorem 3.3 und Korollar 3.4] um diesen Faktor.

Satz 4. *Sei G eine Moore-Gruppe. Für $f\in L^1(G)$ und $x\in G$ ist dann*

$$\rho\to d_\rho^{-1}\,\mathrm{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)$$

borelsch und sogar aus $L^1(\hat G, v_G)$, falls $f\in[L^1(G)\cap P(G)]$. Ist $f\in L^1(G)$ und

$$\rho\to d_\rho^{-1}\,\mathrm{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)\in L^1(\hat G, v_G)\quad\textit{für alle } x\in G,$$

so ist

$$f(x)=\int\limits_{\hat G} d_\rho^{-1}\,\mathrm{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)\,dv_G(\rho)\quad\textit{für fast alle } x,$$

und Gleichheit gilt in allen Stetigkeitspunkten von f.

Beweis. Da $\hat G_n$ borelsch ist, genügt es $\rho\to d_\rho^{-1}\,\mathrm{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)$ auf $\hat G_n$ zu betrachten. Wegen $d_\rho^{-1}\,\mathrm{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)=n^{-1}\,\mathrm{tr}(\rho({}_xf))$ für $\rho\in\hat G_n$ und [3, (3.6.4)] ist aber

$\rho \to d_\rho^{-1} \operatorname{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)$ auf $\hat{G}_n$ stetig. Für G_F und $f \in [Z^1(G_F, G) \cap P(G_F)]$ sind die Voraussetzungen von Lemma 7 erfüllt. Also ist $\hat{f} \in L^1(E(G_F), \mu'')$. Für $\hat{\hat{f}}\colon E(G_F, G) \to \mathbb{C}$, definiert durch $\hat{\hat{f}}(\gamma) = \int_{G_F} f(x)\,\gamma(x)\,dx$, gilt $\hat{\hat{f}} \circ s = \hat{f}$; also ist $\hat{\hat{f}} \in L^1(E(G_F, G), \mu')$ und deshalb $\hat{\hat{f}} \in L^1(E(G_F, G), \nu')$, und es gilt

$$\int_{E(G_F, G)} \hat{\hat{f}}(\gamma)\,\overline{\gamma(x)}\,d\nu'(\gamma) = \int_{E(G_F, G)} \hat{\hat{f}}(\gamma)\,\overline{\gamma(x)}\,d\mu'(\gamma)$$
$$= \int_{E(G_F)} \hat{f}(\alpha)\,\overline{\alpha(x)}\,d\mu''(\alpha) = f(x) \quad \text{für alle } x \in G_F.$$

Sei nun $\rho \in U$ und $f \in [L^1(G) \cap P(G)]$. Dann gilt wegen $\operatorname{tr}\rho = d_\rho\,\alpha_\rho = d_\rho\,\widetilde{p(\rho)}$ für $x \in G$:

$$d_\rho^{-1} \operatorname{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*) = d_\rho^{-1} \operatorname{tr}(\rho({}_x f)) = d_\rho^{-1} \int_G {}_x f(y) \operatorname{tr}\rho(y)\,dy$$
$$= \int_G {}_x f(y)\,\widetilde{p(\rho)}(y)\,dy = \int_{G_F} ({}_x f|G_F)^G(y)\,p(\rho)(y)\,dy = \widehat{\widehat{({}_x f|G_F)^G}}(p(\rho)).$$

Nun ist aber wegen $({}_x f|G_F)^G \in [Z^1(G_F, G) \cap P(G_F)]$ [20, Section 1]

$$\widehat{\widehat{({}_x f|G_F)^G}} \in L^1(E(G_F, G), \nu'),$$

und es gilt $\widehat{\widehat{({}_x f|G_F)^G}}(p(\rho)) = d_\rho^{-1} \operatorname{tr}(\rho({}_x f))$ für ν-fast alle $\rho \in \hat{G}$. Also ist

$$\rho \to d_\rho^{-1} \operatorname{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)$$

aus $L^1(\hat{G}, \nu_G)$, da es borelsch ist, und wir haben

$$\int_{\hat{G}} d_\rho^{-1} \operatorname{tr}(\rho(f)\,\rho(x)^*)\,d\nu_G(\rho) = \int_{E(G_F, G)} \widehat{\widehat{({}_x f|G_F)^G}}(\gamma)\,d\nu'(\gamma) = ({}_x f|G_F)^G(e) = f(x).$$

Die letzte Aussage des Satzes beweist man genauso wie in [7]; denn dort wird nur die Existenz einer invarianten Umgebungsbasis der Eins benutzt.

Bemerkungen. (1) Mit Satz 4 erhält man sofort die Plancherel-Formel. Für $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$ ist $f * f^* \in L^1(G) \cap P(G)$; wendet man also die Umkehrformel auf $f * f^*$ und $x = e$ an, so erhält man

$$\int_G |f(x)|^2\,dx = \int_{\hat{G}} d_\rho^{-1} \operatorname{tr}(\rho(f)\,\rho(f)^*)\,d\nu_G(\rho) \quad \text{(vgl. [15, Satz 5])}.$$

(2) In [17, Theorem 4.4] wird das Plancherelmaß beschrieben für eine lokalkompakte unimodulare Gruppe G, die einen Typ I Normalteiler N mit kompakter Faktorgruppe G/N besitzt. In [17, S. 473, (3)] wird darauf hingewiesen, daß dieses Resultat, die Beschreibung des Plancherelmaßes für zentrale Gruppen in [6] sowie die Tatsache, daß eine Moore-Gruppe ein projektiver Limes von endlichen Erweiterungen von zentralen Gruppen ist, es prinzipiell ermöglichen, das Plancherelmaß für eine Moore-Gruppe anzugeben. Daraus ergibt sich aber keineswegs die Formel in (1).

(3) Die Poisson-Summations-Formel für Moore-Gruppen beweist man genauso wie die in [7, Cor. (3.4)].

(4) Wie in [6, S. 449] kann man sich überlegen, daß das Maß ν_G auf $\hat{G}$ auch durch die Umkehrformel (Satz 4) eindeutig bestimmt ist.

5. Tauber-Eigenschaft für $L^1(G)$

In [7, Theorem (3.8)] wurde gezeigt, daß für eine zentrale Gruppe G $L^1(G)$ die Tauber-Eigenschaft besitzt, d.h. jedes echte abgeschlossene Ideal in einem maximalen modularen Ideal enthalten ist. Wir beweisen hier noch einen Satz, aus dem insbesondere die Tauber-Eigenschaft für Moore-Gruppen folgt.

Sei G eine SIN-Gruppe, $N \subseteq G_F$ ein abgeschlossener Normalteiler in G und G-Max $L^1(N)$ die Menge der maximalen modularen G-stabilen Ideale in $L^1(N)$. $\gamma \to I_\gamma = \{f \in L^1(N); \int f * f^*(n)\gamma(n)\,dn = 0\}$ definiert dann eine Bijektion zwischen $E(N, G)$ und G-Max $L^1(N)$ [20, Section 4]. Man kann eine Hüllen-Kern-Topologie auf G-Max $L^1(N)$ definieren [20, S. 299], und dann wird $\gamma \to I_\gamma$ zu einem Homöomorphismus [16]. Sei nun N offen, und seien G als mittelbar und $L^1(G)$ als symmetrisch vorausgesetzt. Zu $M \in \operatorname{Max} L^1(G)$ existiert dann ein $\alpha \in E(G)$ mit $M = I_\alpha$ [16, Lemma 12], und wegen $\alpha|N \in E(N, G)$ ist

$$M \cap L^1(N) = I_\alpha \cap L^1(N) = I_{\alpha|N} \in G\text{-Max } L^1(N).$$

Also definiert p: $M \to M \cap L^1(N)$ eine Abbildung von $\operatorname{Max} L^1(G)$ in G-Max $L^1(N)$, die offenbar stetig ist. p ist aber auch eigentlich und surjektiv; das folgt wie in [13] im C^*-Fall.

Lemma 8. *Sei G eine mittelbare SIN-Gruppe und $L^1(G)$ symmetrisch. Dann ist das Ideal I aller $f \in L^1(G)$, so daß $f \in M$ gilt für alle $M \in \operatorname{Max} L^1(G)$ außerhalb einer kompakten, abgeschlossenen Menge, dicht in $L^1(G)$.*

Beweis. Nach [5, Theorem (2.13)] existiert in G ein offener Normalteiler $N \subseteq G_F$ der Gestalt $N = V \times K$, wo K kompakt und V eine Vektorgruppe ist. Dann ist das Ideal $J = \{g \in Z^1(N, G); \operatorname{supp} \hat{g}$ kompakt in $E(N, G)\}$ dicht in $Z^1(N, G)$. Zum Beweis sei $f \in Z^1(N, G)$ stetig und $\varepsilon > 0$. Nach [24, Theorem 3] existiert dann ein $q \in L^1(N)$ mit $\|q - f\|_1 \leqq \varepsilon$ und $q \in I_\sigma$ für alle $\sigma \in E(N)$ außerhalb einer kompakten Menge. Ist $u \in L^1(N)$ mit $\|q - q * u\|_1 \leqq \varepsilon$, so $g = q * u \in L^1(N) \cap C(N)$ und $\|g - f\|_1 \leqq 2\varepsilon$. Dann folgt $g^G \in Z^1(N, G)$ und $\|f - g^G\|_1 = \|(f-g)^G\|_1 \leqq \|f - g\|_1 \leqq 2\varepsilon$ [20]. Außerdem ist $g^G \in J$; denn ist $\widehat{g^G}(\alpha) \neq 0$, so wegen $\widehat{g^G}(\alpha) = \int_N g(x)\alpha(x)\,dx = \int_{E(N)} \hat{g}(\sigma)\,d\mu_\alpha(\sigma)$ $\hat{g}(\sigma) \neq 0$ für ein $\sigma \in \operatorname{supp} \mu_\alpha = s^{-1}(\alpha)$, wo s die Abbildung $\sigma \to \sigma^G$ von $E(N)$ auf $E(N, G)$ bezeichnet; aus $\hat{g}(\sigma) \neq 0$ folgt aber $g \notin I_\sigma$. Also haben wir

$$\operatorname{supp} \widehat{g^G} \subseteq s(\overline{\{\sigma \in E(N); g \notin I_\sigma\}}),$$

d.h. $\operatorname{supp} \widehat{g^G}$ kompakt. Nun gilt weiter $J \subseteq I$; denn ist $f \in J$, d.h. $f \in I_\gamma$ für alle $\gamma \notin \operatorname{supp} \hat{f}$, so $f \in I_\gamma \subseteq M$ für alle $M \in p^{-1}(\gamma)$ und $\gamma \notin \operatorname{supp} \hat{f}$, und $p^{-1}(\operatorname{supp} \hat{f})$ ist kompakt und abgeschlossen. Damit folgt aber $I \subseteq L^1(G)$ dicht. Denn sei $f \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$, dann existiert zunächst ein $u \in Z^1(N, G)$ mit $\|f - f * u\|_1 \leqq \varepsilon$, da $Z^1(N, G)$ eine approximative Einheit für $L^1(G)$ enthält. Da $J \subseteq I$ in $Z^1(N, G)$ dicht ist, gibt es ein

$g \in J$ mit $\|g-u\|_1 \leqq \varepsilon$. Dann folgt $f*g \in I$ und

$$\|f-f*g\|_1 \leqq \|f-f*u\|_1 + \|f\|_1 \cdot \|u-g\|_1 \leqq \varepsilon(1+\|f\|_1).$$

Lemma 9. *Sei G wie in Lemma 8 und $C \subseteq \operatorname{Max} L^1(G)$ kompakt. Dann existiert ein $f \in L^1(G)$, so daß f Einselement mod M ist für alle $M \in C$.*

Beweis. Sei wieder $N \subseteq G_F$ ein offener Normalteiler der Gestalt $V \times K$ und $S = s^{-1}(p(C))$; dann ist auch S kompakt. Es existiert ein $f \in Z^1(N) \cap C(N)$ mit $\hat{f}(\sigma) = 1$ für alle $\sigma \in S$. Dann ist $u = f^G \in Z^1(N, G)$, und es gilt $\hat{u}(\gamma) = \int f^G(x)\gamma(x)\,dx = \int f(x)\gamma(x)\,dx = \int\limits_{E(N)} \hat{f}(\sigma)\,d\mu_\gamma(\sigma) = 1$ für alle γ mit $\operatorname{supp}\mu_\gamma = s^{-1}(\gamma) \subseteq S$, d.h. $\gamma \in p(C)$. u ist dann auch Einselement für $L^1(N) \bmod I_\gamma$, $\gamma \in p(C)$; denn es ist nach [20, Theorem 4.5] $I_\gamma = \{g \in L^1(N); (g*h)^G \in I_\gamma \cap Z^1(N, G)$ für alle $h \in L^1(N)\}$, und es gilt für $g, h \in L^1(N)$ $((g*u-g)*h)^G = (g*h*u-g*h)^G = (g*h)^G * u - (g*h)^G \in I_\gamma \cap Z^1(N, G)$, d.h. $g*u-g \in I_\gamma$ für alle $g \in L^1(N)$. u ist schließlich auch Einselement $\bmod M$ für alle $M \in p^{-1}(p(C))$; denn dazu genügt es zu zeigen $f*u-f \in I_\gamma$ für alle $\gamma \in p(C)$ und $f \in L^1(G)$ mit $f = \widetilde{f|xN}$ für ein $x \in G$:

$$f*u-f = {}_{x^{-1}}(\widetilde{{}_x f|N})*u - {}_{x^{-1}}(\widetilde{{}_x f|N}) = {}_{x^{-1}}(\widetilde{{}_x f|N * u - {}_x f|N}) \in {}_{x^{-1}}(I_\gamma) \subseteq I_{\bar{\gamma}}.$$

Satz 5. *Sei G eine mittelbare SIN-Gruppe und $L^1(G)$ symmetrisch und stark halbeinfach (d.h. der Durchschnitt der maximalen modularen Ideale ist trivial). Dann ist jedes echte abgeschlossene Ideal in $L^1(G)$ in einem maximalen modularen Ideal enthalten.*

Beweis. Sei J ein Ideal in $L^1(G)$ mit $h(J) = \varnothing$ (h bezeichnet die Hülle in $\operatorname{Max} L^1(G)$) und I das Ideal von Lemma 8. Da $I \subseteq L^1(G)$ dicht ist, genügt es $I \subseteq J$ zu zeigen. Sei $f \in I$ und $C \subseteq \operatorname{Max} L^1(G)$ kompakt und abgeschlossen mit $f \in M$ für alle $M \notin C$. Nach Lemma 9 existiert ein $u \in L^1(G)$ mit $u*g-g \in M$ für alle $g \in L^1(G)$, $M \in C$, d.h. $u*g-g \in k(C) = \bigcap\limits_{M \in C} M$, also ist $k(C)$ modular. Wegen $h(J) = \varnothing$ existiert dann nach [21, Lemma 2.6.9] ein $v \in J$ mit $v*g-g \in k(C)$ für alle $g \in L^1(G)$, insbesondere $v*f-f \in k(C)$. Andererseits ist $f \in M$ für alle $M \notin C$, also folgt $f = v*f \in J$.

Korollar. *Sei G eine SIN-Gruppe; dann ist $L^1(G)$ taubersch, falls G endliche Erweiterung einer nilpotenten Gruppe oder falls G/G_F endlich ist, insbesondere also, falls G eine Moore-Gruppe ist.*

Beweis folgt aus Satz 5 und Ergebnissen in [14].

Bemerkung. Ist G eine Moore-Gruppe, so ist $I_\alpha \in \operatorname{Max} L^1(G)$ für alle $\alpha \in E(G)$, insbesondere also $L^1(G)$ stark halbeinfach [6, S. 429] ($\alpha \to I_\alpha$ ist sogar eine Bijektion zwischen $E(G)$ und $\operatorname{Max} L^1(G)$). Dies vereinfacht den Beweis von Satz 5 für Moore-Gruppen.

Literatur

1. Alfsen, E.: Compact convex sets and boundary integrals. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
2. Courrège, P.: Théorie de la mesure. Paris Centre de Documentation Universitaire: 1962

3. Dixmier, J.: Les C^*-algèbres et leurs représentations. Paris: Gauthier-Villars 1964
4. Godement, R.: Mémoire sur la théorie des charactères dans les groupes localement compacts unimodulaires. J. Math. pures appl., IX. Sér. **30**, 1 – 110 (1951)
5. Grosser, S., Moskowitz, M.: Compactness conditions in topological groups. J. reine angew. Math. **246**, 1 – 40 (1971)
6. Grosser, S., Moskowitz, M.: Harmonic analysis on central topological groups. Trans. Amer. math. Soc. **156**, 419 – 454 (1971)
7. Grosser, S., Mosak, R., Moskowitz, M.: Duality and harmonic analysis on central topological groups. Indagationes math. **35**, 65 – 91 (1973)
8. Hauenschild, W.: Zur Darstellungstheorie von SIN-Gruppen. Math. Ann. **210**, 257 – 276 (1974)
9. Henrichs, R. W.: Ein maximales Maß, dessen Träger keine Extremalpunkte enthält. Arch. der Math. **25**, 502 – 504 (1974)
10. Hewitt, E., Ross, K. A.: Abstract harmonic analysis I, II. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1963/69
11. Heyer, H.: Dualität lokalkompakter Gruppen. Lecture Notes in Mathematics 150, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970
12. Kaniuth, E.: Die Struktur der regulären Darstellung lokalkompakter Gruppen mit invarianter Umgebungsbasis der Eins. Math. Ann. **194**, 225 – 248 (1971)
13. Kaniuth, E.: Topology in duals of SIN-groups. Math. Z. **134**, 67 – 80 (1973)
14. Kaniuth, E.: On maximal ideals in group algebras of SIN-groups. Math. Ann. **214**, 167 – 175 (1975)
15. Kaniuth, E., Schlichting, G.: Zur harmonischen Analyse klassenkompakter Gruppen II. Inventiones math. **10**, 332 – 345 (1970)
16. Kaniuth, E., Steiner, D.: On complete regularity of group algebras. Math. Ann. **204**, 305 – 329 (1973)
17. Kleppner, A., Lipsman, R.: The Plancherel formula for group extensions. Ann. sci. École norm. sup., IV. Sér. **5**, 459 – 516 (1972)
18. Liukkonen, J.: Dual spaces of groups with precompact conjugacy classes. Trans. Amer. math. Soc. **180**, 85 – 108 (1973)
19. Moore, C. C.: Groups with finite dimensional irreducible representations. Trans. Amer. math. Soc. **166**, 401 – 410 (1972)
20. Mosak, R.: The L^1- and C^*-algebras of $[\mathrm{FIA}]_B$-groups and their representations. Trans. Amer. math. Soc. **163**, 277 – 310 (1972)
21. Rickart, C. E.: General theory of Banach algebras. New York: van Nostrand 1960
22. Thoma, E.: Über unitäre Darstellungen abzählbarer diskreter Gruppen. Math. Ann. **153**, 111 – 138 (1964)
23. Thoma, E.: Über positiv-definite Klassenfunktionen abzählbarer Gruppen. Math. Z. **84**, 389 – 402 (1964)
24. Willcox, A. B.: Note on certain group algebras. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 874 – 879 (1956)

Eingegangen am 13. März 1975

Nachtrag bei der Korrektur: R. Lipsman hat kürzlich [Non-Abelian Harmonic Analysis, Bull. Sci. math. 2. Sér. 98, 209 – 233 (1974)] eine Umkehrformel für separable Typ I-Gruppen bewiesen. Man kann zeigen (vgl. dazu [8, § 3]), daß im separablen Fall das Maß in Satz 3 ein Plancherel-Maß ist [3, § 18.8], so daß dann die hier bewiesene Umkehrformel (Satz 4) aus der von Lipsman folgt. Jedoch ist unser Maß translationsinvariant und dadurch eindeutig bestimmt.