Werk

Titel: Über die Spektralmatrix elliptischer Systeme.

Autor: Brübach, Rickleff

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0140|log35

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 140, 231 – 244 (1974)
© by Springer-Verlag 1974

Über die Spektralmatrix elliptischer Systeme

Rickleff Brübach

V. G. Avakumović zum fünfundsechzigsten Geburtstag am 12. März 1975 gewidmet

§ 1. Einleitung

Hörmander hat im Jahre 1969 [9] die bestmögliche Abschätzung der Spektralfunktion eines elliptischen Differentialoperators der Ordnung $2m \geqq 2$ bewiesen. Im Anschluß an diese Arbeit deutet er an, daß dieses Ergebnis mit seiner Methode nur auf die elliptischen Systeme $\mathfrak{A}(D) = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} \mathfrak{A}_\alpha D^\alpha$ übertragen werden kann, bei denen die Eigenwerte $a_k^0(z)$ der durch den Hauptteil erzeugten Matrix $\mathfrak{A}^0(z) = \sum_{|\alpha| = 2m} \mathfrak{A}_\alpha z^\alpha$, $z \in \mathbb{R}^n$, einfach sind. Auch Gromes [8], der ein elliptisches System 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten behandelte, setzte im wesentlichen[1] diese Eigenschaft der Eigenwerte voraus. In der vorliegenden Arbeit wird nun gezeigt, daß bei elliptischen Systemen $\mathfrak{A}(D) = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} \mathfrak{A}_\alpha D^\alpha$ mit konstanten Koeffizienten keine Bedingungen an die Eigenwerte $a_k^0(z)$ der Hauptteilmatrix $\mathfrak{A}^0(z)$ zur Herleitung der bestmöglichen Abschätzung der Spektralfunktion nötig sind.

Mit kleinen deutschen Buchstaben $\mathfrak{u}(x)$, $\mathfrak{v}(x)$, ... kennzeichnen wir stets N-fache Spaltenvektoren, mit $\mathfrak{A}(x)$, $\mathfrak{B}(x)$, ... Matrixfunktionen und die entsprechenden Komponenten mit $\mathfrak{u}_j(x)$, $\mathfrak{v}_j(x)$, ... bzw. $\mathfrak{A}_{ij}(x)$, $\mathfrak{B}_{ij}(x)$, ... Operationen mit Vektoren und Matrizen z.B. Differentiation oder Aussagen $\mathfrak{u}(x) \in C_0^\infty(G)$ sind, solange nichts anderes gesagt wird, komponentenweise zu verstehen. Dabei sind die Räume C^∞, C_0^∞ und L^2 mit dem Skalarprodukt $(\,,\,)$ wie üblich definiert. Für eine Matrix $\mathfrak{A}$ sei $\mathfrak{A}^*$ die transponierte Matrix, sowie $\|\mathfrak{A}\|$ eine Matrizennorm, die mit der durch das im $\mathbb{R}^N$ übliche Skalarprodukt $\langle\,,\,\rangle$ erzeugten Vektornorm verträglich ist. $\mathfrak{I}$ bezeichne die Einheitsmatrix.

Wir betrachten den Differentialausdruck $\mathfrak{A}(D) = \sum_{|\alpha| \leqq 2m} \mathfrak{A}_\alpha D^\alpha$. Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, ein Multiindex mit $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, und $\mathfrak{A}_\alpha$ sind $N \times N$ Matrizen mit konstanten Koeffizienten.

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \qquad D_j = \frac{\partial}{i \partial x_j}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ist wie üblich definiert.

Definition. Für $z \in \mathbb{R}^n$ bezeichnen $a_1^0(z), \ldots, a_N^0(z)$ die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}^0(z) := \sum_{|\alpha| = 2m} \mathfrak{A}_\alpha z^\alpha$. Der Differentialausdruck $A(D)$ heißt *p-elliptisch*, wenn für $\|z\| = 1$ $\operatorname{Re} a_j^0(z) > 0$, $j = 1, \ldots, N$, gilt.

Es sei G ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{A}(D)$ als Differentialoperator $\mathfrak{A}: C_0^\infty(G) \to C_0^\infty(G)$ betrachtet. Dann setzen wir voraus:

[1] Gromes verlangt, daß die Eigenwerte der Hauptteilmatrix $\mathfrak{A}^0(z)$ als Funktionen von z sich weder schneiden noch berühren.

(1) $\mathfrak{A}(D)=\sum_{|\alpha|\leqq 2m}\mathfrak{A}_\alpha D^\alpha$ *ist p-elliptisch.*

(2) $\mathfrak{A}$ *ist symmetrisch, d.h. für alle Spaltenvektorfunktionen* $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}\in C_0^\infty(G)$ *gilt* $(\mathfrak{A}\mathfrak{h},\mathfrak{g})=(\mathfrak{h},\mathfrak{A}\mathfrak{g})$.

(3) $\mathfrak{A}$ *ist halbbeschränkt und o.B.d.A. positiv, d.h.* $(\mathfrak{A}\mathfrak{g},\mathfrak{g})\geqq c(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}\in C_0^\infty(G)$, $c>0$.

Wegen der Voraussetzungen (2) und (3) und des klassischen Satzes von Friedrichs existiert eine positive selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$, deren Zerlegung der Einheit mit $\{\mathfrak{E}_\lambda\}$ bezeichnet werden soll. Aufgrund des Resultates von Gårding [6] ist $\mathfrak{E}_\lambda$ ein Integraloperator mit dem Kern $\mathfrak{E}(x,y;\lambda)\in C^\infty(G\times G)$, der die Spektralfunktion von $\tilde{\mathfrak{A}}$ genannt wird.

Es ist bekannt [5, 7], daß der stetige Kern $\mathfrak{G}$ des Operators $e^{-t\tilde{\mathfrak{A}}}$, $\mathfrak{G}(x,y;t)=\int_0^\infty e^{-t\lambda}\,d\mathfrak{E}(x,y;\lambda)$, für $x,y\in G$, $0<t<T$ der Abschätzung

$$|\mathfrak{G}(x,y;t)|\leqq C\,t^{\frac{-n}{2m}}e^{-\delta\|x-y\|^{\frac{2m}{2m-1}}t^{\frac{-1}{2m-1}}} \tag{4}$$

genügt. Dabei ist $\delta>0$, und $C>0$ hängt nur von T ab.

Um die gewünschte Abschätzung der Spektralfunktion zu erhalten, betrachten wir das zugeordnete parabolische Problem und bauen die Methode von Avakumović [2] und Gårding [6] weiter aus. Sie beruht auf dem Vergleich des Kerns $\mathfrak{G}$ von $e^{-t\tilde{\mathfrak{A}}}$ mit der Grundlösung $\mathfrak{L}$ des Systems $\mathfrak{A}(D)+\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{J}$, die beide als Laplace-Stieltjes Integrale dargestellt werden. Mit Hilfe eines passenden Taubersatzes schließt man dann auf das Verhalten der Spektralfunktion $\mathfrak{E}(x,x;\lambda)$, $x\in G$. Dabei kommt der Matrixfunktion $\mathfrak{R}=(\mathfrak{R}_{ij}(x-y;u))$, $x,y\in G$, $u>0$, die bei der Darstellung der Grundlösung $\mathfrak{L}$ als Laplace-Stieltjes Integral, $\mathfrak{L}(x-y;t)=\int_0^\infty e^{-tu}\,d\mathfrak{R}(x-y;u)$, auftritt, entscheidende Bedeutung zu. Denn für die Herleitung der gewünschten Abschätzung der Spektralfunktion benötigt man eine Aussage der Form

$$\mathfrak{R}_{ii}(0,u)=C_i\,u^{\frac{n}{2m}}+O\big(u^{\frac{n-1}{2m}}\big),\qquad u\to\infty, \tag{5}$$

die bisher nur mit den oben erwähnten Bedingungen an die Eigenwerte $a_k^0(z)$ bewiesen werden konnte. In Satz 1 dieser Arbeit gelingt es nun, die Gültigkeit von (5) ohne jegliche Einschränkung zu zeigen. Damit ist dieser Satz von grundlegender Bedeutung für alle im folgenden aufgezählten Ergebnisse.

Wir betrachten die hermiteschen Matrizen $\mathfrak{A}(z):=\sum_{|\alpha|\leqq 2m}\mathfrak{A}_\alpha z^\alpha$ und $\mathfrak{A}^0(z)=\sum_{|\alpha|=2m}\mathfrak{A}_\alpha z^\alpha$ mit den Eigenwerten $a_k(z)$ bzw. $a_k^0(z)$, $k=1,\ldots,N$, und bezeichnen mit $\mathfrak{M}(z):=(\mathfrak{m}_1(z),\ldots,\mathfrak{m}_N(z))=(\mathfrak{M}_{ik}(z))$ bzw. $\mathfrak{M}^0(z):=(\mathfrak{m}_1^0(z),\ldots,\mathfrak{m}_N^0(z))=(\mathfrak{M}_{ik}^0(z))$ die unitären Matrizen, die $\mathfrak{A}(z)$ bzw. $\mathfrak{A}^0(z)$ auf Diagonalgestalt transformieren und deren Spaltenvektoren die Eigenvektoren sind. Dann lautet Satz 1:

Satz 1. *Für* $u>0$, $1\leqq i\leqq N$ *gilt*

$$(2\pi)^{-n}\left|\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz-\int_{a_k^0(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2\,dz\right|\leqq C\,u^{\frac{n-1}{2m}}.$$

Die Konstante C hängt nur von den Eigenschaften des Systems ab.

In Satz 2 leiten wir die für die spätere Anwendung eines Taubersatzes von Avakumović [4] notwendige exponentielle Abschätzung der Differenz der Green'schen Funktion und Grundlösung her.

Satz 2. *Für $y\in G$, $0<s-t<C\,l(y)^{2m}$ gilt*

$$\left|\int_0^\infty e^{-(s-t)u}\,d\mathfrak{E}_{ii}(y,y;u)-\int_0^\infty e^{-(s-t)u}\,d\left((2\pi)^{-n}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz\right)\right|$$
$$\leqq C\,(s-t)^{\frac{-n}{2m}}e^{-C\,l(y)^{\frac{2m}{2m-1}}(s-t)^{\frac{-1}{2m-1}}}.$$

$l(y)$ bezeichnet den Abstand von $y\in G$ zum Rand von G, die Konstanten hängen nur und C ist nur von dem System abhängig.

Wegen der Homogenität von $\mathfrak{M}_{ik}^0(z)$ vom Grade 0 liefert Satz 1 die Aussage

$$(2\pi)^{-n}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz=C_i\,u^{\frac{n}{2m}}+O(u^{\frac{n-1}{2m}}),\qquad u\to\infty,$$

aus der mit Hilfe des schon erwähnten Taubersatzes leicht das gewünschte Ergebnis für die Spektralmatrixfunktion herleiten können.

Satz 3. *Für die Diagonalglieder der Spektralmatrixfunktion $\mathfrak{E}(y,y;u)$ gelten für $i=1,2,\ldots,N$, $u>u_0$ die Abschätzungen*

$$|\mathfrak{E}_{ii}(y,y;u)-C_i\,u^{\frac{n}{2m}}|\leqq\frac{C}{l(y)}\,u^{\frac{n-1}{2m}}.$$

Dabei ist

$$C_i:=(2\pi)^{-n}\sum_{k=1}^{N}\int_{a_k^0(z)\leqq 1}|\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2\,dz,$$

und C ist nur von dem System abhängig.

Als Folgerung dieses Satzes ergibt sich auf bekannte Weise [3, 8] eine Abschätzung der Anzahlfunktion N von $\mathfrak{A}$.

Satz 4. *Das Gebiet G besitze die gewöhnliche Kegeleigenschaft und der Rand von G habe endliches Minkowsky-Maß. Das Volumen von G sei mit $V(G)$ bezeichnet. Dann genügt für $u>u_1$ die Anzahlfunktion N von $\mathfrak{A}$ der Abschätzung*

$$\left|N(u)-\sum_{i=1}^{N}C_i\,V(G)\,u^{\frac{n}{2m}}\right|\leqq C\,u^{\frac{n-1}{2m}}\log u.$$

§ 2. Beweis von Satz 1

Es sei $z\in\mathbb{R}^n$ und $\mathfrak{A}(z):=\sum_{|\alpha|\leqq 2m}\mathfrak{A}_\alpha z^\alpha$. Wegen (2) ist $\mathfrak{A}(z)$ hermitesch, die N reellen Eigenwerte von $\mathfrak{A}(z)$ bezeichnen wir mit $a_k(z)$, $k=1,\ldots,N$. Diese sind stetige Funktionen bez. der Komponenten der Matrix und somit auch stetig bez. z und wegen (1) und (3) gilt $0<a_k(z)\to\infty$ falls $z\to\infty$.

Wir bezeichnen mit Ω den n-dimensionalen Einheitskreis und führen Polarkoordinaten $z=r\omega$ ein, wobei $\|z\|=r$ ist, und definieren $d\omega>0$ durch $dz=r^{n-1}\,dr\,d\omega$.

Für festes $\omega\in\Omega$ seien die Eigenwerte $a_k^0(\omega)$ bzw. $a_k(r\omega)$ wie folgt geordnet

$$\begin{aligned} &a_1^0(\omega)\leqq a_2^0(\omega)\leqq\cdots\leqq a_N^0(\omega)\\ &a_1(r\omega)\leqq a_2(r\omega)\leqq\cdots\leqq a_N(r\omega)\qquad \text{für } r\in[0,\infty). \end{aligned}\tag{6}$$

Dann gilt für $1\leqq k\leqq N$ wegen der Min-Max-Eigenschaft der Eigenwerte

$$|a_k(r\omega)-r^{2m}a_k^0(\omega)|\leqq\|\mathfrak{A}(r\omega)-r^{2m}\mathfrak{A}^0(\omega)\|\leqq C_2(r^{2m-1}+1),\tag{7}$$

wobei C_2 unabhängig von $\omega\in\Omega$ ist.

Satz 1 ergibt sich nun unmittelbar aus den folgenden zwei Hilfssätzen. Mit den Voraussetzungen von Satz 1 gilt:

Hilfssatz 1.1.

$$(2\pi)^{-n}\left|\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{a_k(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz-\int\limits_{a_k^0(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz\right|\leqq C\,u^{\frac{n-1}{2m}}$$

und

Hilfssatz 1.2.

$$(2\pi)^{-n}\left|\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{a_k^0(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz-\int\limits_{a_k^0(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2\,dz\right|\leqq C\,u^{\frac{n-1}{2m}}.$$

Beweis von Hilfssatz 1.1. Es genügt, Hilfssatz 1.1 für große $u\in\mathbb{R}_+^1$ zu beweisen, denn es gilt

$$\int\limits_{a_k^0(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz\leqq\int\limits_{a_k^0(z)\leqq u}dz\leqq C\,u^{\frac{n}{2m}}$$

und

$$\int\limits_{a_k(z)\leqq u}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz$$

ist wegen (1) und (3) für kleine $u\in\mathbb{R}_+^1$ identisch gleich Null.

Im weiteren Beweis werden wir wesentlich die Ungleichung (7) verwenden. Mit $u=v^{2m}$ setzen wir

$$\begin{aligned} B(v)&:=(2\pi)^{-n}\left|\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{a_k(z)\leqq v^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz-\int\limits_{a_k^0(z)\leqq v^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz\right|\\ &=(2\pi)^{-n}\left|\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\Omega}d\omega\left(\int\limits_{a_k(r\omega)\leqq v^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2\,r^{n-1}\,dr-\int\limits_{r^{2m}a_k^0(\omega)\leqq v^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2\,r^{n-1}\,dr\right)\right|. \end{aligned}$$

Der r-Integrationsweg, das ist die Differenz der beiden Mengen

$$R_k(\omega,v)=\{r\in\mathbb{R}_+^1\,|\,a_k(r\omega)\leqq v^{2m}\}\quad\text{und}\quad K_k(\omega,v)=\{r\in\mathbb{R}_+^1\,|\,r^{2m}a_k^0(\omega)\leqq v^{2m}\},$$

wird aufgrund von (7) vergrößert, wenn wir über das Intervall

$$I_k(\omega,v):=\{r>0\,|\,v^{2m}-C_2r^{2m-1}-C_2\leqq a_k^0(\omega)\,r^{2m}\leqq v^{2m}+C_2r^{2m-1}+C_2\}$$

integrieren. Also ist

$$B(v) \leqq \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} d\omega \int_{I_k(\omega, v)} |\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 \, r^{n-1} \, dr$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int_{\Omega} d\omega \int_{I_k(\omega, v)} r^{n-1} \, dr.$$

Setzen wir nun $K_k'(\omega) := \left(C_2 \, a_k^0(\omega)^{-1}\right)^{\frac{1}{2m}} + C_2 \, a_k^0(\omega)^{-1}$, so vergrößern wir wiederum, wie man leicht nachrechnet, das r-Integrationsintervall, wenn von

$$r_k(\omega) = a_k^0(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v - K_k'(\omega) \quad \text{bis} \quad r_k'(\omega) = a_k^0(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v + K_k'(\omega)$$

integriert wird.

Somit ergibt sich

$$\int_{I_k(\omega, v)} r^{n-1} \, dr \leqq \int_{r_k(\omega)}^{r_k'(\omega)} r^{n-1} \, dr$$
$$= \frac{1}{n} \left((a_k^0(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v + K_k'(\omega))^n - (a_k^0(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v - K_k'(\omega))^n \right) \leqq K_k''(\omega) \, v^{n-1}.$$

Für $\omega \in \Omega$ nimmt K_k'' ein positives Maximum an, weil $a_k^0(\omega)^{-1}$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist. Beachten wir $u = v^{2m}$, so ist Hilfssatz 1.1 bewiesen.

Beweis von Hilfssatz 1.2. Auch für diese Behauptung brauchen wir den Beweis nur für große $u \in \mathbb{R}_+^1$ durchzuführen.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}_s(r\omega)$ den Projektionsoperator auf den Unterraum $H_s(r\omega) \subset \mathbb{R}^N$, der von den ersten s Spaltenvektoren der Matrix

$$\mathfrak{M}(r\omega) = (\mathfrak{m}_1(r\omega), \mathfrak{m}_2(r\omega), \ldots, \mathfrak{m}_N(r\omega))$$

aufgespannt wird. Entsprechend bezeichne $P_s^0(\omega)$ den Projektionsoperator auf den Unterraum $H_s^0(\omega) \subset \mathbb{R}^N$, der von $\mathfrak{m}_1^0(\omega), \mathfrak{m}_2^0(\omega), \ldots, \mathfrak{m}_s^0(\omega)$ aufgespannt wird.

Dann gilt für die Matrix $\mathfrak{P}_s(r\omega) = (\mathfrak{P}_s(r\omega))_{ij})$

$$(\mathfrak{P}_s(r\omega))_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{M}_{ik}(r\omega) \, \overline{\mathfrak{M}_{jk}(r\omega)} \tag{8}$$

und analog für $\mathfrak{P}_s^0(\omega) = ((\mathfrak{P}_s^0(\omega))_{ij})$

$$(\mathfrak{P}_s^0(\omega))_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \mathfrak{M}_{ik}^0(\omega) \, \overline{\mathfrak{M}_{jk}^0(\omega)}. \tag{9}$$

Wir verwenden im folgenden die Abkürzungen

$$v := u^{\frac{1}{2m}} \quad \text{und} \quad r_k(\omega, v) := a_k^0(\omega)^{\frac{-1}{2m}} v, \qquad 1 \leqq k \leqq N. \tag{10}$$

Setzen wir $K_k(\omega, v) := \{r \in \mathbb{R}_+^1 \mid a_k^0(r\omega) \leqq v^{2m}\}$, so ist

$$\left| \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int\limits_{a_k^0(z) \leqq v^{2m}} \left(|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2 \right) dz \right|$$
$$= (2\pi)^{-n} \left| \int\limits_{\Omega} d\omega \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{K_k(\omega, v)} \left(|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^0(\omega)|^2 \right) r^{n-1} dr \right|.$$

Wegen (6) gilt $r_N(\omega, v) \leqq r_{N-1}(\omega, v) \leqq \cdots \leqq r_1(\omega, v)$. Wir können deshalb $K_k(\omega, v)$ zerlegen in die Intervalle $[0, r_N(\omega, v))$, $[r_N(\omega, v), r_{N-1}(\omega, v))$, …, $[r_{k+1}(\omega, v), r_k(\omega, v))$ und erhalten

$$\left| \sum_{k=1}^{N} (2\pi)^{-n} \int\limits_{a_k^0(z) \leqq v^{2m}} \left(|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 \, dz - |\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2 \right) dz \right|$$
$$= (2\pi)^{-n} \left| \int\limits_{\Omega} d\omega \left(\int\limits_{0}^{r_N(\omega, v)} \sum_{k=1}^{N} \left(|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^0(\omega)|^2 \right) r^{n-1} dr \right.\right.$$
$$+ \int\limits_{r_N(\omega, v)}^{r_{N-1}(\omega, v)} \sum_{k=1}^{N-1} \left(|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^0(\omega)|^2 \right) r^{n-1} dr$$
$$+ \cdots$$
$$\vdots$$
$$\left.\left. + \cdots \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_{r_2(\omega, v)}^{r_1(\omega, v)} \left(|\mathfrak{M}_{i1}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}_{i1}^0(\omega)|^2 \right) r^{n-1} dr \right) \right|.$$

Aufgrund der Normierung der $\mathfrak{m}_k(r\omega)$ bzw. $\mathfrak{m}_k^0(\omega)$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(|\mathfrak{M}_{ik}(r\omega)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^0(\omega)|^2 \right) = 0 \quad \text{für } 1 \leqq i \leqq N,$$

und wir erhalten wegen (8) bzw. (9)

$$(2\pi)^{-n} \left| \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{a_k^0(z) \leqq v^{2m}} \left(|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2 - |\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2 \right) dz \right|$$
$$= (2\pi)^{-n} \left| \int\limits_{\Omega} d\omega \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{r_{k+1}(\omega, v)}^{r_k(\omega, v)} \left((\mathfrak{P}_k(r\omega))_{ii} - (\mathfrak{P}_k^0(\omega))_{ii} \right) r^{n-1} dr \right| \tag{11}$$
$$\leqq (2\pi)^{-n} \int\limits_{\Omega} d\omega \sum_{k=1}^{N-1} \int\limits_{r_{k+1}(\omega, v)}^{r_k(\omega, v)} \| \mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^0(\omega) \| \, r^{n-1} dr.$$

Wir werden uns im folgenden mit der Abschätzung des Integrals

$$I_k(\omega) = \int\limits_{r_{k+1}(\omega, v)}^{r_k(\omega, v)} \| \mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^0(\omega) \| \, r^{n-1} dr \tag{12}$$

beschäftigen.

Die Differenz $\|\mathfrak{P}_k - \mathfrak{P}_k^0\|$ bezeichnet man als die Öffnung der Unterräume H_k und H_k^0, für die nach [1] gilt:

$$\|\mathfrak{P}_k - \mathfrak{P}_k^0\| = \max\Big(\sup_{\substack{\|\mathfrak{h}\|=1 \\ \mathfrak{h}\in H_k}} \|(\mathfrak{J}-\mathfrak{P}_k^0)\,\mathfrak{h}\|,\ \sup_{\substack{\|\mathfrak{g}\|=1 \\ \mathfrak{g}\in H_k^0}} \|(\mathfrak{J}-\mathfrak{P}_k)\,\mathfrak{g}\|\Big) \leqq 1.$$

Für $\mathfrak{h}\in H_k(r\omega)$ folgt

$$\|(\mathfrak{J}-\mathfrak{P}_k^0(\omega))\,\mathfrak{h}\| = \Big\| \sum_{l=k+1}^{N} \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{m}_l^0(\omega)\rangle\, \mathfrak{m}_l^0(\omega) \Big\|$$

$$= \Big\| \sum_{l=k+1}^{N} \sum_{j=1}^{k} \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{m}_j(r\omega)\rangle\, \langle \mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_l^0(\omega)\rangle\, \mathfrak{m}_l^0(\omega) \Big\|$$

wegen $|\langle \mathfrak{h}, \mathfrak{m}_j(r\omega)\rangle| \leqq 1$ und der Normierung der $\mathfrak{m}_l^0(\omega)$ ist also

$$\|(\mathfrak{J}-\mathfrak{P}_k^0(\omega))\,\mathfrak{h}\| \leqq C \max_{\substack{l=k+1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,k}} |\langle \mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_l^0(\omega)\rangle|,$$

Für $\mathfrak{g}\in H_k^0(\omega)$ werden wir auf die analoge Abschätzung geführt und erhalten somit

$$\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^0(\omega)\| \leqq C \max_{\substack{l=k+1,\ldots,N \\ j=1,\ldots,k}} |\langle \mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_l^0(\omega)\rangle|. \tag{13}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &\big|(r^{2m} a_1^0(\omega) - a_j(r\omega))\,\langle \mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_l^0(\omega)\rangle\big| \\ &= \big|\langle (\mathfrak{A}^0(r\omega) - \mathfrak{A}(r\omega))\,\mathfrak{m}_j(r\omega), \mathfrak{m}_l^0(\omega)\rangle\big| \\ &\leqq \|\mathfrak{A}^0(r\omega) - \mathfrak{A}(r\omega)\| \leqq C_2(r^{2m-1}+1). \end{aligned} \tag{14}$$

Aus den obigen Ungleichungen (13) und (14) ersieht man, daß für weitere Abschätzungen von $\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^0(\omega)\|$ bzw. (12) das Verhalten der Eigenwerte $a_k^0(\omega)$, $1 \leqq k \leqq N$, bez. $\omega\in\Omega$ von entscheidender Bedeutung ist. Wir werden deshalb die einzelnen Fälle gesondert betrachten.

Es sei $k\in\mathbb{N}$, $1 \leqq k \leqq N-1$, beliebig aber fest gewählt.

Fall 1. $a_k^0(\omega) \neq a_{k+1}^0(\omega)$ für alle $\omega\in\Omega$.

In diesem Fall gilt für $l, j\in\mathbb{N}$, $l>k$, $j\leqq k$, $r^{2m} a_l^0(\omega) \neq a_j(r\omega)$ für alle $\omega\in\Omega$ und genügend großes $r\in\mathbb{R}_+^1$. Denn wegen (6) und (7) folgt

$$\begin{aligned} r^{2m}|a_l^0(\omega) - a_j^0(\omega)| &\geqq r^{2m}|a_{k+1}^0(\omega) - a_k^0(\omega)| \geqq r^{2m}\, C_k' \\ &> 4\, C_2\, r^{2m-1} \geqq 2|r^{2m}\, a_j^0(\omega) - a_j(r\omega)| \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} |r^{2m} a_l^0(\omega) - a_j(r\omega)| &\geqq \big|r^{2m}|a_l^0(\omega) - a_j^0(\omega)| - |a_j(r\omega) - r^{2m}\, a_j^0(\omega)|\big| \\ &= \big|\tfrac{1}{2} r^{2m}|a_l^0(\omega) - a_j^0(\omega)| + \tfrac{1}{2} r^{2m}|a_l^0(\omega) - a_j^0(\omega)| - |a_j(r\omega) - r^{2m} a_j^0(\omega)|\big| \\ &> \tfrac{1}{2} r^{2m}|a_l^0(\omega) - a_j^0(\omega)| \geqq \tfrac{1}{2} r^{2m}|a_{k+1}^0(\omega) - a_k^0(\omega)| \geqq C_k'\, r^{2m} > 0. \end{aligned}$$

Aufgrund von (13) und (14) erhalten wir also die Abschätzung

$$\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^0(\omega)\| \leqq \frac{C_2(r^{2m-1}+1)}{r^{2m}\, C_k'} \leqq \frac{C_k''}{r}$$

und darüber hinaus wegen (10) und (12) für genügend große $v\in\mathbb{R}^1_+$

$$\int_{\Omega} I_k(\omega)\,d\omega \leqq C\int_{\Omega}\left((r_k(\omega,v))^{n-1}-(r_{k+1}(\omega,v))^{n-1}\right)d\omega$$
$$\leqq C' v^{n-1}.$$

Fall 2. $a_k^0(\omega)=a_{k+1}^0(\omega)$ für alle $\omega\in\Omega$.

In diesem Fall ist $I_k(\omega)=0$ und $\int_{\Omega} I_k(\omega)\,d\omega=0$.

Fall 3. $a_k^0(\omega)=a_{k+1}^0(\omega)$ für gewisse $\omega\in\Omega$.

Mit $v\in R_+^1$ und $v\,a_{k+1}^0(\omega)>1$ definieren wir die folgenden Mengen

$$\Omega_1 := \{\omega\in\Omega \mid a_{k+1}^0(\omega)=a_k^0(\omega)\}$$

(15)
$$\Omega_{2,v} := \left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, a_{k+1}^0(\omega)\neq a_k^0(\omega) \text{ und } \frac{4C_2\,a_{k+1}^0(\omega)^{\frac{1}{2m}}}{a_{k+1}^0(\omega)-a_k^0(\omega)}>v\right\}$$

$$\Omega_{3,v} := \left\{\omega\in\Omega \,\middle|\, a_{k+1}^0(\omega)\neq a_k^0(\omega) \text{ und } \frac{4C_2\,a_{k+1}^0(\omega)^{\frac{1}{2m}}}{a_{k+1}^0(\omega)-a_k^0(\omega)}\leqq v\right\}$$

und erhalten somit

$$\int_{\Omega} I_k(\omega)\,d\omega = \left(\int_{\Omega_1}+\int_{\Omega_{2,v}}+\int_{\Omega_{3,v}}\right) I_k(\omega)\,d\omega$$
(16)
$$= \left(\int_{\Omega_{2,v}}+\int_{\Omega_{3,v}}\right) I_k(\omega)\,d\omega.$$

Betrachten wir zuerst $\int_{\Omega_{3,v}} I_k(\omega)\,d\omega$:

Für $r\geqq v\,a_{k+1}^0(\omega)^{-\frac{1}{2m}}$ und wegen (6) folgern wir zunächst für $k+1\leqq l\leqq N$, $1\leqq j\leqq k$

$$r^{2m}|a_l^0(\omega)-a_j^0(\omega)| \geqq r^{2m}|a_{k+1}^0(\omega)-a_k^0(\omega)|$$
$$> r^{2m-1}v\left(a_{k+1}^0(\omega)\right)^{-\frac{1}{2m}}\left(a_{k+1}^0(\omega)-a_k^0(\omega)\right).$$

Wegen (15) und (7) gilt jedoch weiterhin

$$\geqq r^{2m-1}4C_2$$
$$>2(C_2\,r^{2m-1}+C_2)$$
$$\geqq 2|r^{2m}\,a_i^0(\omega)-a_i(r\omega)|, \quad 1\leqq i\leqq N.$$

Wie in Fall 1 schließen wir daraus

$$\|\mathfrak{P}_k(r\omega)-\mathfrak{P}_k^0(\omega)\| \leqq \frac{4C_2}{r\left(a_{k+1}^0(\omega)-a_k^0(\omega)\right)}$$

und

$$\int_{\Omega_{3,v}} I_k(\omega)\,d\omega \leqq C\int_{\Omega_{3,v}} d\omega \int_{r_{k+1}(\omega,v)}^{r_k(\omega,v)} \frac{r^{n-2}}{a_{k+1}^0(\omega)-a_k^0(\omega)}\,dr$$
$$\leqq C\int_{\Omega_{3,v}} \frac{r_k^{n-1}(\omega,v)-r_{k+1}^{n-1}(\omega,v)}{a_{k+1}^0(\omega)-a_k^0(\omega)}\,d\omega,$$

so daß sich wegen $r_k(\omega, v) = v\, a_k^0(\omega)^{-\frac{1}{2m}}$ ergibt

$$= C \int_{\Omega_{3,v}} v^{n-1} \frac{a_k^0(\omega)^{\frac{1-n}{2m}} - a_{k+1}^0(\omega)^{\frac{1-n}{2m}}}{a_{k+1}^0(\omega) - a_k^0(\omega)}\, d\omega.$$

Wegen $\frac{n-1}{2m} > 0$ ist der Quotient im letzten Integral sogar für alle $\omega \in \Omega$ beschränkt. Wir erhalten also

$$\int_{\Omega_{3,v}} I_k(\omega)\, d\omega \leqq C\, v^{n-1} \int_{\Omega} C'\, d\omega = C''\, v^{n-1} \tag{17}$$

und C'' ist unabhängig von v.

Abschätzung von $\int_{\Omega_{2,v}} I_k(\omega)\, d\omega$:

Wegen $\|\mathfrak{P}_k(r\omega) - \mathfrak{P}_k^0(\omega)\| \leqq 1$ und (10) ist zunächst

$$\int_{\Omega_{2,v}} I_k(\omega)\, d\omega \leqq \int_{\Omega_{2,v}} d\omega \int_{r_{k+1}(\omega, v)}^{r_k(\omega, v)} r^{n-1}\, dr$$

und somit

$$\leqq \int_{\Omega_{2,v}} d\omega \frac{v^n}{n} \left(a_k^0(\omega)^{\frac{-n}{2m}} - a_{k+1}^0(\omega)^{\frac{-n}{2m}}\right).$$

Wegen $\omega \in \Omega_{2,v}$ gilt weiterhin

$$\int_{\Omega_{2,v}} I_k(\omega)\, d\omega \leqq \int_{\Omega_{2,v}} d\omega \frac{v^{n-1}}{n} \left(\frac{a_k^0(\omega)^{\frac{-n}{2m}} - a_{k+1}^0(\omega)^{\frac{-n}{2m}}}{a_{k+1}^0(\omega) - a_k^0(\omega)}\right) 4\, C_2\, a_{k+1}^0(\omega)^{\frac{1}{2m}}.$$

Wie oben zeigt man, daß der Quotient für $\omega \in \Omega$ beschränkt bleibt, so daß

$$\int_{\Omega_{2,v}} I_k(\omega)\, d\omega \leqq C \int_{\Omega_{2,v}} d\omega\, v^{n-1} \leqq C \int_{\Omega} d\omega\, v^{n-1} \leqq C' v^{n-1}.$$

Zusammen mit (16) und (17) folgt also auch in diesem Fall

$$\int_{\Omega} I_k(\omega)\, d\omega \leqq C\, v^{n-1}.$$

Setzen wir $u^{\frac{1}{2m}} = v$, so ist in Verbindung mit den anderen Fällen sowie (11) und (12) Hilfssatz 1.2 gezeigt.

§ 3. Beweis von Satz 2

Die Methode, Satz 2 zu beweisen, ist wohlbekannt [3]. Man benutzt die Green'sche Funktion als inversen Operator und stellt mit ihrer Hilfe die Differenz $\mathfrak{G}(y, y; s-t) - \mathfrak{L}(0; s-t)$ durch ein Integral dar, das bei genügend guter Kenntnis der Grundlösung $\mathfrak{L}$ relativ einfach abgeschätzt werden kann. Die für die Anwendung des Taubersatzes notwendige Darstellung der Grundlösung $\mathfrak{L}$ als Laplace-Stieltjes Integral, die auch in der Satzbehauptung auftritt, beweisen wir am Ende dieses Paragraphen.

Sei $\mathfrak{Q}(z,t)$ die Lösung von

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{Q}(z,t) = -\mathfrak{A}(z)\,\mathfrak{Q}(z,t) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Q}(z,0)=\mathfrak{J}. \tag{18}$$

Dann gilt nach [6] für $t>0$:

$$\mathfrak{L}(x-y;\,t)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y,\,z\rangle}\,\mathfrak{Q}(z,t)\,dz \tag{19}$$

ist Grundlösung von $\mathfrak{A}+\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{J}$, und es gelten die Abschätzungen für $0<t<T$

$$\|D^\alpha\,\mathfrak{L}(x;t)\| \leqq C_3\, t^{\frac{-n-|\alpha|}{2m}}\, e^{-C_4\|x\|^{\frac{2m}{2m-1}} t^{-\frac{1}{2m-1}}}. \tag{20}$$

C_3 und C_4 hängen von T und den Koeffizienten von $\mathfrak{A}$ ab.

Mit der Funktion $b\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, die $b(x)=\begin{cases}1 & \text{für } \|x\|<1\\ 0 & \text{für } \|x\|>2\end{cases}$ erfüllt, definieren wir für $\rho>0$, das so gewählt sei, daß $G_{3\rho}:=\{y\in G/l(y)\geqq 3\rho\}\neq\varnothing$, und für $x,y\in G$, $s-t>0$

$$\mathfrak{H}(x-y;\,s-t):=b\left(\frac{x-y}{\rho}\right)\mathfrak{L}(x-y;\,s-t) \tag{21}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}(x,y;\,s,t)&=\left(\mathfrak{A}(D)+\frac{\partial}{\partial s}\mathfrak{J}\right)\left(\mathfrak{G}(x,y;\,s,t)-\mathfrak{H}(x,y;\,s,t)\right)\\ &=\delta(x-y)\,\delta(s-t)-\delta(x-y)\,\delta(s-t)\\ &\quad-\sum_{0<|\alpha|\leqq 2m}\frac{\rho^{-|\alpha|}}{\alpha!}(D_x^\alpha b)\left(\frac{x-y}{\rho}\right)\mathfrak{S}^\alpha(D)\,\mathfrak{L}(x,y;\,s,t)\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{S}^\alpha(D)$ eine Matrix ist, deren Komponenten Differentialausdrücke der Ordnung $2m-|\alpha|$ sind.

Verwenden wir nun die Abschätzung (20) und beachten, daß $(D_x^\alpha b)\left(\frac{x-y}{\rho}\right)\neq 0$ nur für $1\leqq\frac{\|x-y\|}{\rho}\leqq 2$, so ergibt sich mit der Beschränktheit von $\left|\frac{1}{\alpha!}D_x^\alpha b\right|$

$$|\mathfrak{K}(x,y;\,s,t)|\leqq C(s-t)^{\frac{-2m-n}{2m}}\, e^{-C\rho^{\frac{2m}{2m-1}}(s-t)^{-\frac{1}{2m-1}}}\sum_{0<|\alpha|\leqq 2m} C\,\rho^{-|\alpha|}(s-t)^{\frac{\alpha}{2m}} \tag{22}$$

für $(x,y)\in G\times G$, $0<s-t<T$.

Mit Hilfe der für $x\in G$, $y\in G_{3\rho}$, $0<s-t<T$ geltenden Identität

$$\mathfrak{G}(x,y;\,s,t)-\mathfrak{H}(x-y;\,s-t)=\int_t^s dt'\int_G \mathfrak{G}(x,x';\,s,t')\,\mathfrak{K}(x',y;\,t',t)\,dx' \tag{23}$$

und den Abschätzungen (4) und (22) ergibt sich nach kurzer Rechnung

$$|\mathfrak{G}(x,y;\,s,t)-\mathfrak{H}(x-y;\,s-t)|\leqq C(s-t)^{\frac{-n}{2m}}\, e^{-C\rho^{\frac{2m}{2m-1}}(s-t)^{-\frac{1}{2m-1}}},$$

wenn man berücksichtigt, daß wegen $y\in G_{3\rho}$ und $\mathfrak{R}(x', y; t', t)\neq 0$ nur für $\rho\leqq\|x'-y\|\leqq 2\rho$ das Gebietsintegral in (23) sich über den Ring

$$R_y^\rho=\{x'\in G/\rho\leqq\|x'-y\|\leqq 2\rho\}$$

um $y\in G$ erstreckt.

Mit $\rho:=\dfrac{l(y)}{3}$ ergibt sich unmittelbar die Behauptung von Satz 2, wenn wir noch die Darstellung der Grundlösung als Laplace-Stieltjes Integral beweisen. Dies gelingt mit der im folgenden definierten Funktion $\mathfrak{R}(x-y; u)$.

Für $x, y\in\mathbb{R}^n$, $u>0$ sei

$$\mathfrak{R}_{ij}(x-y; u):=(2\pi)^{-n}\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{a_k(z)\leqq u}\mathfrak{M}_{ik}(z)\,\overline{\mathfrak{M}_{ij}(z)}\,e^{i\langle x-y, z\rangle}\,dz. \tag{24}$$

Es gilt

(25) *$\mathfrak{R}(x-y; u)$ ist auf jedem endlichen u-Intervall von beschränkter Totalvariation.*

Denn sei $s_0<s_1<\cdots<s_m$ eine Unterteilung eines Intervalles $[0, v]$ der u-Achse, so folgt

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{m}|\mathfrak{R}_{ij}(x-y; s_l)-\mathfrak{R}_{ij}(x-y; s_{l-1})| &= \sum_{l=1}^{m}\left|\sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n}\int\limits_{s_{l-1}\leqq a_k(z)\leqq s_l}\mathfrak{M}_{ik}(z)\overline{\mathfrak{M}_{jk}(z)}\,e^{i\langle x-y, z\rangle}\,dz\right| \\ &\leqq \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n}\int\limits_{s_{l-1}\leqq a_k(z)\leqq s_l}dz \\ &\leqq \sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n}\int\limits_{0<a_k(z)\leqq v}dz.\end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß $|\mathfrak{M}_{ik}(z)|\leqq 1$, $1\leqq i, k\leqq N$.

Beweisen wir jetzt die Darstellung von $\mathfrak{L}(x-y; t)$ als Laplace-Stieltjes Integral.

Seien $x, y\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}_+^1$ sowie $\mathfrak{R}(x-y; u)$ wie in (24) definiert. Dann gilt für die Grundlösung $\mathfrak{L}(x-y; t)$ für $t>0$:

$$\mathfrak{L}(x-y; t)=\int_0^\infty e^{-ut}\,d\mathfrak{R}(x-y; u). \tag{26}$$

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 1 zeigt man, daß $|\mathfrak{R}(x-y; u)|\leqq C u^{\frac{n}{2m}}$, $u>0$; also existiert wegen (25) das Integral in (26), und es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-ut}\,d\mathfrak{R}_{ij}(x-y; u) &= t\int_0^\infty e^{-ut}\,\mathfrak{R}_{ij}(x-y; u)\,du \\ &= \sum_{k=1}^{N}t\int_0^\infty e^{-ut}(2\pi)^{-n}\int\limits_{a_k(z)\leqq u}\mathfrak{M}_{ik}(z)\,\overline{\mathfrak{M}_{jk}(z)}\,e^{i\langle x-y, z\rangle}\,dz\,du \\ &= \sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\mathfrak{M}_{ik}(z)\,\overline{\mathfrak{M}_{jk}(z)}\,e^{i\langle x-y, z\rangle}\,e^{-a_k(z)t}\,dz \\ &= (2\pi)^{-n}\int_{R^n}e^{i\langle x-y, z\rangle}\sum_{k=1}^{N}\mathfrak{M}_{ik}(z)\,\overline{\mathfrak{M}_{jk}(z)}\,e^{-a_k(z)t}\,dz.\end{aligned}$$

Die unter dem Integral auftretende Summe stellt die in (18) definierte Funktion $\mathfrak{Q}$ dar. Denn $\mathfrak{Q}$ hat bekanntermaßen die Darstellung $\mathfrak{Q}(z,t)=e^{-t\mathfrak{A}(z)}$, so daß wir wegen $((\overline{\mathfrak{M}^*(z)}\,\mathfrak{A}(z)\,\mathfrak{M}(z))_{ij})=(a_i(z)\,\delta_{ij})$ bzw. $\mathfrak{A}^k(z)=\mathfrak{M}(z)((a_i(z))^k\,\delta_{ij})\,\overline{\mathfrak{M}^*(z)}$ erhalten

$$\mathfrak{Q}(z,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-t)^l}{l!}\sum_{k=1}^{N}\mathfrak{M}_{ik}(z)\,\overline{\mathfrak{M}_{jk}(z)}\,(a_k(z))^l$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\mathfrak{M}_{ik}(z)\,\overline{\mathfrak{M}_{jk}(z)}\,e^{-a_k(z)t}.$$

Wegen (19) ergibt sich somit sofort die Behauptung (26), und Satz 2 ist damit bewiesen.

§ 4. Beweis von Satz 3

Der Beweis von Satz 3 beruht im wesentlichen auf der Anwendung des folgenden Taubersatzes von Avakumović [4].

Taubersatz. *Es sei* $D\colon \mathbb{R}^1_+\to\mathbb{R}^1_+$ *eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

V1 *D ist lokal von beschränkter Schwankung.*

V2 $D(u)=O(u^n)$ *für* $u\to\infty$, $n\in\mathbb{N}$.

V3 *Es gibt eine Konstante* $C_0>0$, *so daß für* $0<u\leqq v\leqq u+1$ *gilt*

$$D(v^{2m})-D(u^{2m})>-C_0u^{n-1}.$$

V4 $$\left|\int_0^{\infty}e^{-tu}\,dD(u)\right|\leqq Ct^{-\frac{n}{2m}}\,e^{-C_5t^{-\frac{1}{2m-1}}}\qquad\text{für } 0<t<C_5^{2m-1}.$$

V5 $$\left|\int_0^{\infty}e^{-tu}\,dD(u)\right|\leqq Ct^{-\frac{n}{2m}}\qquad\text{für } C_5^{2m-1}<t.$$

Behauptung. Für $v\geqq C(m)\,C_5^{-\frac{2m-1}{2m}}$ *gilt:* $|D(v^{2m})\,v^{1-n}|\leqq CC_5^{-\frac{2m-1}{2m}}$.

Für die Anwendung des Taubersatzes auf unseren Fall setzen wir für $y\in G$, $u>0$

(27) $$D_i(y;u):=\mathfrak{E}_{ii}(y,y;u)-\mathfrak{R}_{ii}(0;u),\qquad 1\leqq i\leqq N.$$

Dann gilt

(28) $$|D_i(y;u)|\leqq Cu^{\frac{n}{2m}}$$

und damit auch

(29) $$\left|\int_0^{\infty}e^{-tu}\,dD_i(y;u)\right|\leqq Ct^{-\frac{n}{2m}}.$$

Die Behauptung (28) ist im Grunde genommen bekannt, aber meines Wissens für Systeme nicht explizit bewiesen. Der Vollständigkeit wegen wollen wir sie hier auf bekanntem Wege beweisen.

Wegen $\mathfrak{R}_{ij}(0;u)\leqq C u^{\frac{n}{2m}}$, $u>0$, und der Monotonie von $\mathfrak{E}_{ii}(y,y;u)$ bez. u gilt

$$\begin{aligned}|D_i(y;u)| &= |\mathfrak{E}_{ii}(y,y;u)-\mathfrak{R}_{ii}(0;u)|\\ &\leqq \left|\int_0^u d\mathfrak{E}_{ii}(y,y;\lambda)\right| + C u^{\frac{n}{2m}}\\ &\leqq e\left|\int_0^u e^{-\frac{\lambda}{u}} d\mathfrak{E}_{ii}(y,y;\lambda)\right| + C u^{\frac{n}{2m}}\\ &\leqq e\left|\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda}{u}} d\mathfrak{E}_{ii}(y,y;\lambda)\right| + C u^{\frac{n}{2m}}\\ &= e\left|\mathfrak{G}_{ii}\left(y,y,\frac{1}{u}\right)\right| + C u^{\frac{n}{2m}}.\end{aligned}$$

Wegen (4) folgt für $u>\dfrac{1}{T}$ $|D_i(y;u)|\leqq C u^{\frac{n}{2m}}$.

Außerdem ist wegen (3) $\mathfrak{E}_{ii}(y,y;u)=0$ für $u<c$, $(c>0)$, und $|\mathfrak{R}_{ii}(0;u)|\leqq C u^{\frac{n}{2m}}$ für alle $u>0$ erfüllt, so daß wir $|D_i(y;u)|\leqq C u^{\frac{n}{2m}}$ für alle $u\in\mathbb{R}^1_+$ erhalten, wenn wir nur $T>\dfrac{1}{c}$ wählen.

Also sind wegen der Monotonie von $\mathfrak{E}_{ii}(y,y;u)$ und (25) Voraussetzung V1, wegen (28) Voraussetzung V2, wegen Satz 2 Voraussetzung V4 und wegen (29) Voraussetzung V5 des Taubersatzes erfüllt. Es bleibt noch die Tauberbedingung V3 zu zeigen.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}&D_i(.;v^{2m})-D_i(.;u^{2m})\\ &\quad=\left(\mathfrak{E}_{ii}(.,.;v^{2m})-\mathfrak{R}_{ii}(0;v^{2m})\right)-\left(\mathfrak{E}_{ii}(.,.;u^{2m})-\mathfrak{R}_{ii}(0;u^{2m})\right)\\ &\quad\geqq -\left(\mathfrak{R}_{ii}(0;v^{2m})-\mathfrak{R}_{ii}(0;u^{2m})\right)\\ &\quad= -\Bigg(\mathfrak{R}_{ii}(0;v^{2m})-\sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n}\int\limits_{a_k^0(z)\leqq v^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz\\ &\qquad+\sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n}\int\limits_{u^{2m}\leqq a_k^0(z)\leqq v^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz\\ &\qquad+\sum_{k=1}^{N}(2\pi)^{-n}\int\limits_{a_k^0(z)\leqq u^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz-\mathfrak{R}_{ii}(0;u^{2m})\Bigg).\end{aligned}$$

Wegen Hilfssatz 1.1., (24) und

$$\int\limits_{u^{2m}\leqq a_k^0(z)\leqq v^{2m}}|\mathfrak{M}_{ik}(z)|^2\,dz\leqq C(v^n-u^n)$$

ergibt sich schließlich

$$D_i(.;v^{2m})-D_i(.,u^{2m})\geqq -\left(C v^{n-1}+C(v^n-u^n)+C u^{n-1}\right)\geqq -C_0 u^{n-1}$$

für alle $u\leqq v\leqq u+1$.

Also sind alle Voraussetzungen des Taubersatzes erfüllt, und wir erhalten für $v \geqq C(m)\, C_5^{-\frac{2m-1}{2m}} = C\, l(y)^{-1}$ (s. Satz 2)

$$|D_i(y; v)| \leqq \frac{C}{l(y)}\, v^{\frac{n-1}{2m}}. \tag{30}$$

Wegen (28) ist diese Ungleichung auch für $v \leqq \dfrac{C}{l(y)}$ erfüllt. Unter Verwendung von Satz 1 und (30) folgern wir nun für $u > 0$ und

$$C_i := (2\pi)^{-n} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{a_k^0(z) \leqq 1} |\mathfrak{M}_{ik}^0(z)|^2\, dz$$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{E}_{ii}(y, y; u) - C_i\, u^{\frac{n}{2m}}| &\leqq |\mathfrak{E}_{ii}(y, y; u) - \mathfrak{R}_{ii}(0, u)| + |\mathfrak{R}_{ii}(0, u) - C_i\, u^{\frac{n}{2m}}| \\ &\leqq \frac{C}{l(y)}\, u^{\frac{n-1}{2m}} + C u^{\frac{n-1}{2m}} \\ &\leqq \frac{C}{l(y)}\, u^{\frac{n-1}{2m}}, \end{aligned}$$

wenn man $l(y) \leqq 1$ voraussetzt. Damit ist die Behauptung von Satz 3 gezeigt.

Literatur

1. Achieser, N.I., Glasman, I.M.: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, 5. Aufl. Berlin: Akademie Verlag 1968
2. Avakumović, V.G.: Über die Eigenfunktionen der Schwingungsgleichung. Acad. serbe Sci. Publ. Inst. math. **4**, 95–96 (1952)
3. Avakumović, V.G.: Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Math. Z. **65**, 327–344 (1956)
4. Avakumović, V.G.: Einige Sätze über Laplace'sche Integrale. Acad. serbe Sci., Publ. Inst. math. **3**, 287–304 (1950)
5. Eidel'man, S.D.: Parabolic systems. Amsterdam-London: North-Holland, Groningen: Wolters-Noordhoff, 1969
6. Gårding, L.: On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a selfadjoint semi-bounded extension of an elliptic differential operator. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. **24**, Nr. 21, 1–18 (1954)
7. Greiner, P.: An asymptotic expansion for the heat equation. Arch. rat. Mech. Analysis **41**, 163–218 (1971)
8. Gromes, W.: Über das asymptotische Verhalten der Spektralfunktion elliptischer Systeme. Math. Z. **118**, 254–270 (1970)
9. Hörmander, L.: The spectral function of an elliptic operator. Acta math. **121**, 193–218 (1968)

Dr. Rickleff Brübach
Fachbereich Mathematik
D-3550 Marburg/Lahn
Lahnberge
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 16. August 1974)