

Werk

Titel: Zur Holomorphie des Poissonintegrals.

Autor: Bauermeister, Hanns

Jahr: 1974

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0137|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Zur Holomorphie des Poissonintegrals

Hanns Bauermeister

Es soll die Frage untersucht werden, wann eine Funktion $f \in \mathfrak{D}_p$, $p \geq 1$,

$$\mathfrak{D}_p := \left\{ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, g \in L^p(-T, T) \text{ für alle } T > 0 \text{ und} \right. \\ \left. \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |g(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

zu einem in der Halbebene $S(0, \infty) := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ bez. der Variablen $z = x + iy$ holomorphen Poissonintegral Pf ,

$$(Pf)(x, y) := \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{x^2 + (y-t)^2} dt,$$

führt.

Das ist von Interesse, weil das Poissonintegral viele Eigenschaften der Randfunktion f auf Pf überträgt, wie z.B. Wachstum und Fastperiodizität längs vertikaler Geraden. Letzteres ist für Besicovitch fastperiodische Funktionen im Falle negativer Exponenten von Bedeutung, da man mit einem holomorphen Poissonintegral eine in $S(0, \infty)$ analytisch Besicovitch fastperiodische Funktion bekommt. Bei Bohr fastperiodischen Funktionen ist dies einfacher, da hier eine holomorphe Fortsetzung aus der Fourierreihe der Randfunktion gewonnen werden kann.

Ist $p > 1$ und $f \in L^p(-\infty, \infty)$, so liefert die Entwicklung von f in eine Orthogonalreihe nach einem gewissen Orthogonalsystem Aufschluß darüber, wann Pf holomorph mit gleichmäßig beschränkter $L^p(-\infty, \infty)$ -Norm längs jeder vertikalen Geraden in

$$\tilde{S}(0, \infty) := \{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$$

ist (Hille [2], Corollar 1 zu Satz 19.1.1).

Durch eine Abbildung von $\mathfrak{D}_p$ in $L^p(-\infty, \infty)$, die auf dem Bild umkehrbar ist, soll hier dieses Kriterium für die Funktionen aus $\mathfrak{D}_p$ zur Verfügung gestellt werden.

Unter p wollen wir, falls nichts anderes gesagt ist, stets eine Zahl ≥ 1 verstehen, und unter L^p den Raum $L^p(-\infty, \infty)$. Sei f in $S(0, \infty)$ holomorph und sei für jedes $x > 0$ $f_x \in L^p$, $f_x(t) := f(x + it)$. Ist $\|f\|_0 := \sup_{x>0} \|f_x\|_p$ endlich, so gehört f p.d. zum „Hardy-Lebesgue“-Raum $H_p(0)$. (Für die Eigenschaften von $H_p(0)$ sei auf Hille [2], Kapitel 19 verwiesen.)

Die ersten Lemmata befassen sich mit der Existenz und Eigenschaften des Poissonintegrals. In Lemma 4 wird die Abbildung $\mathfrak{D}_p \rightarrow L^p$ angegeben.

Lemma 1. Sei $f \in \mathfrak{D}_p$, dann existiert Pf in $\tilde{S}(0, \infty)$ und ist dort (regulär) harmonisch.

Beweis. Sei $K \subset \tilde{S}(0, \infty)$ kompakt etwa in

$$\{(x, y): 0 < \delta_1 \leq x \leq \delta_2, |y| \leq T_0\}$$

enthalten und

$$\psi_p(t) := \int_0^t |f(t)|^p dt \leq C|t| \quad \text{für } |t| > 1.$$

Seien $T', T'' > T_0$, dann gilt für $p > 1$, $q := \frac{p}{p-1}$,

$$\begin{aligned} I_p(T', T'') &:= \left| \frac{x}{\pi} \int_{T'}^{T''} \frac{f(t)}{x^2 + (y-t)^2} dt \right| \\ &\leq \left(\frac{x}{\pi} \int_{T'}^{T''} \frac{|f(t)|^p}{x^2 + (y-t)^2} dt \right)^{1/p} \cdot \left(\frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{x^2 + (y-t)^2} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

und für $p=1$

$$I_1(T', T'') \leq \frac{x}{\pi} \int_{T'}^{T''} \frac{|f(t)|}{x^2 + (y-t)^2} dt.$$

Das heißt, für alle $p \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} (I_p(T', T''))^p &\leq \frac{x}{\pi} \int_{T'}^{T''} \frac{|f(t)|^p}{x^2 + (y-t)^2} dt = \\ &= \frac{x}{\pi} \left\{ \frac{\psi_p(t)}{x^2 + (y-t)^2} \Big|_{T'}^{T''} + 2 \int_{T'}^{T''} \frac{\psi_p(t)(t-y)}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt \right\} \\ &\leq \frac{x}{\pi} C \left\{ \frac{T''}{x^2 + (y-T'')^2} + \frac{T'}{x^2 + (y-T')^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{T'}^{T''} \frac{t^2}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt + \right. \\ &\quad \left. + 2|y| \int_{T'}^{T''} \frac{t}{(x^2 + (y-t)^2)^2} dt \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\delta_2}{\pi} C \left\{ \frac{T''}{\delta_1^2 + (T_0 - T'')^2} + \frac{T'}{\delta_1^2 + (T_0 - T')^2} + \right. \\ &\quad + 2 \int_{T'}^{T''} \frac{t^2}{(\delta_1^2 + (T_0 - t)^2)^2} dt + \\ &\quad \left. + 2 T_0 \int_{T'}^{T''} \frac{t}{(\delta_1^2 + (T_0 - t)^2)^2} dt \right\}. \end{aligned}$$

Zu $\varepsilon > 0$ läßt sich daher ein $T_1 > 0$ so finden, daß für alle $T', T'' > T_1$ der letzte Ausdruck kleiner als ε wird. Entsprechendes gilt für $T', T'' < -T_1$. Das Poissonintegral konvergiert deshalb gleichmäßig auf Kompakten in $\tilde{S}(0, \infty)$. Man rechnet leicht nach, daß dasselbe auch für die Integrale über die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung des Integranden nach x bzw. y gilt. Der Konvergenzsatz von Lebesgue (Grauert-Lieb [1], S. 60–61) liefert die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration. Daraus folgt die Harmonizität.

Das erwartete Randverhalten des Poissonintegrals liefert hier

Lemma 2. Sei $f \in \mathfrak{D}_p$. Für fast alle $y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} (Pf)(x, y) = f(y).$$

Beweis. Sei $g \in L(a, b)$. Für fast alle $t_0 \in [a, b]$ existiert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |g(s) - g(t_0)| ds, \quad t_0 + h \in [a, b],$$

und ist gleich 0 (Hille [2], Lemma 17.5.2).

Die Lebesguemenge von g ist die Menge der $t_0 \in [a, b]$, die diese Eigenschaft besitzen.

Sei nun y_0 aus der Lebesguemenge von f so, daß $f(y_0)$ endlich ist. Es gibt zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$G(s, y_0) := \int_0^s |f(y_0 + t) - f(y_0)| dt \leq \varepsilon |s|$$

für alle s mit $|s| \leq \delta$ erfüllt ist. Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} |(Pf)(x, y_0) - f(y_0)| &\leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t + y_0) - f(y_0)|}{x^2 + t^2} dt = \\ &= \frac{x}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} + \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(t + y_0) - f(y_0)|}{x^2 + t^2} dt \right\}. \end{aligned}$$

Diese Integrale werden einzeln untersucht:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(y_0+t)-f(y_0)|}{x^2+t^2} dt \\
 &= \frac{x}{\pi} \left\{ \frac{G(\delta, y_0)}{x^2+\delta^2} - \frac{G(-\delta, y_0)}{x^2+\delta^2} + 2 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{tG(t, y_0)}{(t^2+x^2)^2} dt \right\} \\
 &\leq \frac{x}{\pi} \left\{ \frac{2\delta\varepsilon}{x^2+\delta^2} + 4\varepsilon \int_0^{\delta} \frac{t^2}{(t^2+x^2)^2} dt \right\} \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{\pi} \left\{ 1 + 4 \int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \right\} \leq C_0 \varepsilon
 \end{aligned}$$

mit von x unabhängigem C_0 .

$G(t, y_0)$ genügt für $|t| \geq \delta$ einer Abschätzung

$$\begin{aligned}
 G(t, y_0) &\leq \int_0^t |f(y_0+s)| ds + |t| |f(y_0)| \leq C_\delta |t| \\
 &\frac{x}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{|f(y_0+t)-f(y_0)|}{x^2+t^2} dt = \frac{x}{\pi} \left\{ \frac{G(t, y_0)}{x^2+t^2} \Big|_{t=\delta}^{\infty} + 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{tG(t, y_0)}{(x^2+t^2)^2} dt \right\} \\
 &\leq \frac{x}{\pi} \left\{ \frac{G(\delta, y_0)}{\delta^2+x^2} + 2C_\delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{t^2}{(t^2+x^2)^2} dt \right\} \\
 &\leq \frac{1}{\pi} \frac{\delta \cdot \varepsilon \cdot x}{\delta^2+x^2} + \frac{2C_\delta}{\pi} \int_{\frac{\delta}{x}}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{C_\delta}{\pi} \left\{ \frac{\frac{\delta}{x}}{1+\left(\frac{\delta}{x}\right)^2} + \arctan \infty - \arctan \left(\frac{\delta}{x}\right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Man kann daher $\eta > 0$ so wählen, daß dieser Ausdruck für alle $x > 0$ mit $x < \eta$ kleiner als ε wird.

Lemma 3. Sei $f \in L^p$, dann ist auch $(Pf)(x, \cdot) \in L^p$ für jedes $x > 0$ und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|(Pf)(x, \cdot) - f\|_p = 0.$$

Beweis. Mit

$$|(Pf)(x, y)|^p \leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t+y)|^p}{x^2+t^2} dt$$

erhält man unter Anwendung des Satzes von Fubini

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(Pf)(x, y)|^p dy \leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t+y)|^p dy = \|f\|_p^p.$$

Ebenso gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(Pf)(x, y) - f(y)|^p dy &\leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t+y) - f(y)|^p dt}{x^2 + t^2} dy = \\ &= \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_p^p(t, f)}{x^2 + t^2} dt, \end{aligned}$$

wobei $\mu_p(t, f) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t+y) - f(y)|^p dy \right)^{1/p}$ bedeutet.

$\mu_p(\cdot, f)$ ist stetig, beschränkt ($\mu_p(t, f) \leq 2 \|f\|_p$), subadditiv und hat im Nullpunkt den Wert $\mu_p(0, f) = 0$ (Hille [2], Lemma 19.1.7).

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $\delta > 0$, so daß $\mu_p(t, f) \leq \varepsilon$ für alle t mit $|t| \leq \delta$ ist. Damit erhält man

$$\frac{x}{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\mu_p^p(t, f)}{x^2 + t^2} dt \leq \varepsilon^p \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = \varepsilon^p.$$

Weiter schätzt man ab

$$\frac{x}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{\mu_p^p(t, f)}{x^2 + t^2} dt \leq 2 \|f\|_p^p \cdot \frac{x}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \frac{dt}{x^2 + t^2} = 2 \|f\|_p^p \arccotg \frac{\delta}{x}.$$

Insgesamt ergibt das

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(Pf)(x, y) - f(y)|^p dy \leq \varepsilon^p + 4 \|f\|_p^p \arccotg \frac{\delta}{x},$$

woraus die Behauptung des Lemmas folgt.

Lemma 4 stellt die Verbindung zwischen $\mathfrak{D}_p$ und L^p her.

Lemma 4. Sei $f \in \mathfrak{D}_p$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha > \frac{1}{p}$, dann gilt $f \cdot (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha} \in L^p$ (für den Logarithmus wird hier stets der Hauptwert $\lg 1 = 0$ gewählt).

Beweis. Es ist $|(1 + it)^\alpha| \leq (1 + t^2)^{\operatorname{Re} \alpha / 2} e^{\pi \operatorname{Im} \alpha}$. Sei daher ohne Einschränkung $\alpha \in \mathbb{R}$.

Für $|t| > 1$ ist $|\psi_p(t)| \leq C |t|$,

$$\psi_p(t) := \int_0^t |f(t)|^p dt.$$

Daher gilt

$$\left| \int_{T'}^{T''} \frac{f(t)}{(1+it)^\alpha} dt \right|^p = \left| \int_{T'}^{T''} \frac{|f(t)|^p}{(1+t^2)^{\alpha p/2}} dt \right|$$

$$\leq \frac{|\psi_p(T'')|}{(1+T''^2)^{\alpha p/2}} + \frac{|\psi_p(T')|}{(1+T'^2)^{\alpha p/2}} + \alpha p \left| \int_{T'}^{T''} \frac{t^2}{(1+t^2)^{\alpha p/2+1}} dt \right|.$$

Für $\alpha p > 1$ läßt sich daher zu $\varepsilon > 0$ ein $T_0 > 0$ so finden, daß dieser Ausdruck für alle $T', T'' > T_0$ bzw. $T', T'' < -T_0$ kleiner als ε wird.

Lemma 5. Sei $f \in \mathfrak{D}_p$ und $\tilde{f}_\alpha := (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha} f$, dann ist $P\tilde{f}_\alpha$ in $\{\alpha: \operatorname{Re} \alpha > 0\}$ holomorph.

Beweis. Die Differentiation von $P\tilde{f}_\alpha$ nach $\operatorname{Re} \alpha$ und $\operatorname{Im} \alpha$ läßt sich mit der Integration vertauschen (entsprechend dem Beweis von Lemma 1). Die Ableitungen genügen den Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

Corollar. Für $f \in \mathfrak{D}_p$ gilt

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \operatorname{Re} \alpha > 0}} (P\tilde{f}_\alpha)(x, y) = (Pf)(x, y)$$

gleichmäßig auf Kompakten in $\tilde{S}(0, \infty)$.

Beweis. Sei $K \subset \tilde{S}(0, \infty)$ ein Kompaktum und $\varepsilon > 0$.

Es ist

$$|(P\tilde{f}_\alpha)(x, y) - (Pf)(x, y)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{x^2 + (y-t)^2} \left| \frac{1}{(1+it)^\alpha} - 1 \right| dt.$$

Es gibt ein $T_0 > 0$, so daß für alle $(x, y) \in K$

$$\frac{x}{\pi} \left(\int_{T_0}^{\infty} + \int_{-\infty}^{-T_0} \frac{|f(t)|}{x^2 + (y-t)^2} dt \right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Weiter gilt

$$\frac{x}{\pi} \int_{-T_0}^{T_0} \frac{|f(t)|}{x^2 + (y-t)^2} \left| \frac{1}{(1+it)^\alpha} - 1 \right| dt$$

$$\leq \sup_{t \in [-T_0, T_0]} \left| \frac{1}{(1+it)^\alpha} - 1 \right| \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{x^2 + (y-t)^2} dt.$$

Daher läßt sich ein $\hat{\alpha} > 0$ so finden, daß für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$ und $|\alpha| < \hat{\alpha}$ und $(x, y) \in K$

$$|(P\tilde{f}_\alpha)(x, y) - (Pf)(x, y)| < \varepsilon$$

ist.

Satz 6. Sei $f \in \mathfrak{D}_p$, so daß Pf bez. $z = x + iy$ holomorph in $S(0, \infty)$ ist.

Dann gilt für jedes α mit $\operatorname{Re} \alpha > \frac{2}{p}$

$$(1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{C}})^{-\alpha} Pf \in H_p(0).$$

Beweis. Sei ohne Einschränkung α reell. $g := (1 + \text{id}_{\mathbb{C}})^{-\alpha} Pf$ ist in $S(0, \infty)$ holomorph. Es bleibt daher nur zu zeigen, daß die L^p -Normen von g längs jeder Geraden $\text{Re } z = \text{const} > 0$ existieren und beschränkt sind.

Wir zerlegen

$$|(Pf)(x, y)|^p \leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t+y)|^p}{x^2+t^2} dt = \frac{x}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} + \int_{-1}^1 \frac{|f(t+y)|^p}{x^2+t^2} dt \right\}$$

und schätzen diese Integrale einzeln ab.

Sei $\rho = \frac{\alpha \cdot p}{2}$ und $\psi_p(t, y) := \int_0^y |f(t+\tau)|^p d\tau$, dann ist für alle t, y
 $|\psi_p(t, y)| \leq C(|y| + |t| + 1)$ mit einem geeigneten C . Das ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{((1+x)^2 + y^2)^{\rho}} \cdot \frac{x}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{|f(t+y)|^p}{x^2+t^2} dt \\ &= \frac{x}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{x^2+t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t+y)|^p dy}{((1+x)^2 + y^2)^{\rho}} \\ &\leq \frac{x}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{x^2+t^2} \left\{ \frac{\psi_p(t, y)}{((1+x)^2 + y^2)^{\rho}} \Big|_{y=-\infty}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. + 2\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_p(t, y)| |y|}{((1+x)^2 + y^2)^{\rho+1}} dy \right\} \\ &\leq 2C\rho \cdot \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{x^2+t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 + 2|y|}{(1+y^2)^{\rho+1}} dy =: C_{\rho}. \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2 + 2|y|}{(1+y^2)^{\rho+1}} dy$ ist für $\rho > \frac{1}{2}$ konvergent.

Die beiden anderen Integrale werden folgendermaßen abgeschätzt:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{((1+x)^2 + y^2)^{\rho}} \int_1^{\infty} \frac{|f(t+y)|^p dt}{x^2+t^2} \\ &= \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{((1+x)^2 + y^2)^{\rho}} \int_0^{\infty} \frac{|f(t+y+1)|^p}{x^2+(t+1)^2} dt \\ &\leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{\rho}} \left\{ \frac{|\psi_p(y, 1)|}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{t |\psi_p(y+1, t)|}{(1+t^2)^2} dt \right\} \\ &\leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{\rho}} \left\{ 2C(|y|+2) + C \int_0^{\infty} \frac{t^2 + |y|t + 2t}{(1+t^2)^2} dt \right\} \\ &\leq x \cdot L_{\rho} \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten L_{ρ} für $\rho > 1$.

Diese Abschätzung liefert nur die Endlichkeit der L^p -Normen, aber nicht ihre Beschränktheit für $x \rightarrow \infty$. Hierzu muß anders vorgegangen werden:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{((1+x)^2+y^2)^p} \cdot \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t+y)|^p}{x^2+t^2} dt \\
 & \leq \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{((1+x)^2+y^2)^p} \left\{ \frac{|\psi_p(y,t)|}{x^2+t^2} \Big|_{t=-\infty}^{\infty} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi_p(y,t)| \cdot |t|}{(x^2+t^2)^2} dt \right\} \\
 & \leq 2C \cdot \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{((1+x)^2+y^2)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y \cdot t| + t^2 + |t|}{(x^2+t^2)^2} dt \\
 & \leq \frac{2C}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^p} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt + \frac{|y|+1}{x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|}{(1+t^2)^2} dt \right\} = \\
 & = M_{1\rho} + \frac{1}{x} M_{2\rho}, \quad \text{für } x \geq 1,
 \end{aligned}$$

wobei

$$M_{1\rho} := \frac{2C}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

und

$$M_{2\rho} := \frac{2C}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|+1}{(1+y^2)^p} dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|}{(1+t^2)^2} dt$$

bedeuten. Zusammengefaßt ergibt sich daher für $\alpha > \frac{2}{p}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |(1+x+iy)^{-\alpha} (Pf)(x,y)|^p dy & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{((1+x)^2+y^2)^p} \cdot \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t+y)|^p}{x^2+t^2} dt \\
 & \leq \begin{cases} M_{1\rho} + M_{2\rho} \cdot \frac{1}{x} & \text{für } x \geq 1 \\ C_\rho + 2L_\rho \cdot x & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Satz 7. Sei $p > 1$ und $f \in \mathfrak{D}_p$, so daß Pf in $S(0, \infty)$ holomorph ist. Dann gilt die „Vertauschung“

$$(1 + i d_{\mathbb{C}})^{-\alpha} Pf = P((1 + i d_{\mathbb{R}})^{-\alpha} f)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Beweis. Für jedes α mit $\operatorname{Re} \alpha > \frac{2}{p}$ ist $g := (1 + i d_{\mathbb{C}})^{-\alpha} Pf$ aus $H_p(0)$ und hat im Sinn der Konvergenz fast überall die Randfunktion $(1 + i d_{\mathbb{R}})^{-\alpha} f \in L^p$. g besitzt eine Randfunktion f_0 im Sinn der L^p -Konvergenz, so daß $g = Pf_0$ ist (Hille [2], Sätze 19.1.5 und 19.1.1).

Aus Lemma 19.2.1, Hille [2], folgt dann

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x + iy) = f_0(y) \quad \text{fast überall.}$$

Daher ist $f_0 = (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha} f$ fast überall, d.h. es ist $(1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{C}})^{-\alpha} Pf = P((1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha} f)$. Linke und rechte Seite dieser Beziehung sind holomorphe Funktionen von α in $\{\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} \alpha > 0\}$, daher gilt die Beziehung auch für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$.

Zusammengefaßt haben wir folgendes Ergebnis:

Satz 8. Sei $p > 1$ und $f \in \mathfrak{D}_p$. Pf ist genau dann in $S(0, \infty)$ holomorph, wenn es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \alpha > 0$ gibt, so daß $P(f \cdot (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha})$ in $S(0, \infty)$ holomorph ist.

Beweis. Ist Pf holomorph, dann ist nach Satz 6 und 7

$$P(f \cdot (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha}) \in H_p(0)$$

für jedes α mit $\operatorname{Re} \alpha > \frac{2}{p}$. Sei umgekehrt $P(f \cdot (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha_0})$ holomorph.

Für $\beta \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \beta > \frac{2}{p}$ ist $g_\beta := (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{C}})^{-\beta} P(f \cdot (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha_0}) \in H_p(0)$, und es gilt $g_\beta = P(f \cdot (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha_0 - \beta})$. Beide Seiten dieser Gleichung sind holomorph in β , solange $\operatorname{Re} \beta > -\operatorname{Re} \alpha_0$ ist. Daher gilt diese Gleichung auch für alle diese β . Außerdem existiert der

$$\lim_{\substack{\beta \rightarrow -\alpha_0 \\ \operatorname{Re} \beta > \operatorname{Re}(-\alpha_0)}} P(f(1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha_0 - \beta}) = Pf$$

(Corollar zu Lemma 5) und ist gleich $g_{-\alpha_0} = (1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{C}})^{\alpha_0} P(f(1 + i \operatorname{id}_{\mathbb{R}})^{-\alpha_0})$; dies ist eine holomorphe Funktion.

Literatur

1. Grauert, H., Lieb, I.: Differential- und Integralrechnung Bd. III, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968
2. Hille, E.: Analytic Function Theory. Vol. II, Boston-New York-Chicago: Ginn and Co. 1962

Dr. H. Bauermeister
Mathematisches Institut der Universität
D-34 Göttingen
Bunsenstr. 3–5
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 12. Oktober 1973)

