## Werk

**Titel:** Lineare Algebra über Fastkörpern.

**Autor:** André, Johannes

**Jahr:** 1974

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0136|log33

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 136, 295–313 (1974)
© by Springer-Verlag 1974

# Lineare Algebra über Fastkörpern

Johannes André

## Einleitung

Bekanntlich ist die lineare Algebra (im üblichen Sinne) die Theorie der Vektorräume über Schiefkörpern. In der vorliegenden Note wollen wir diese Theorie dahingehend verallgemeinern, daß wir Schiefkörper durch Fastkörper ersetzen; in ihnen ist das linksseitige Distributivgesetz $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$ durch $0\cdot\alpha=0$ abgeschwächt, das rechtsseitige $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$ wird aber weiterhin gefordert[1]. Um nun zu einer Verallgemeinerung des Linksvektorraums über Schiefkörpern zu gelangen, gehe man von einem Fastkörper $F$ und einer abelschen Gruppe $V$ (mit additiver Verknüpfung) aus und definiere eine Abbildung von $F\times V$ in $V$, genannt Multiplikation, die gewissen Regeln genügen muß, unter denen $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ für alle $\alpha\in F$ und $x, y\in V$ besonders wichtig ist. [Analog wie bei Fastkörpern verlangen wir aber das andere Distributivgesetz $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ nicht.] Versucht man eine Liste vernünftiger Axiome für solche verallgemeinerten Linksvektorräume aufzustellen, so stellt man fest, daß eine Addition in $F$ zunächst gar nicht verlangt werden muß (wohl aber eine Multiplikation). Man kommt so zum Begriff der *F-Gruppe* (Definition 1.1), in der das oben angegebene rechtsseitige Distributivgesetz, das Assoziativgesetz $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$, die Existenz des Inversen für alle von 0 verschiedenen Elemente aus $F$ sowie die Unitarität $1\cdot x=x$ gelten sollen; ferner wird eine Kürzungsregel [vgl. § 1, (F4)] verlangt. Diese so eingeführten Strukturen sind nicht nur für sich interessant; sie führen vielmehr zu verallgemeinerten affinen Räumen, deren Punkte die Elemente aus $V$ sind und deren Verbindungslinie von $x$ nach $y$ ($x, y\in V$, $x\neq y$) man durch

$$x\sqcup y:=F(y-x)+x$$

gewinnt. Hierüber soll an anderer Stelle berichtet werden (vgl. aber auch [1–3, 5]); bemerkt sei hier nur, daß die so definierte Verbindungsoperation $\sqcup$ i.allg. nicht kommutativ ist. (Zum Beweis der Kommutativität wird wesentlich das hier nicht vorausgesetzte linksseitige Distributivgesetz benutzt!)

[1] Eine allgemeine Theorie der Fastkörper findet man beispielsweise in [16] (vgl. z.B. auch [13]). Ein Fastkörper $F$ in unserem Sinne braucht nicht planar zu sein (vgl. etwa [12], S. 94), d.h. es kann $\alpha\in F\setminus\{1\}$, $\beta\in F$ geben, so daß $\alpha\xi\neq\xi+\beta$ für alle $\xi\in F$ gilt.

In § 1 werden die $F$-Gruppen eingeführt und einige ihrer elementaren Eigenschaften bewiesen sowie Verbindungen zu gewissen Frobeniusgruppen hergestellt. Über die mögliche Struktur solcher $F$-Gruppen ist praktisch nichts bekannt, wenn man nicht zusätzliche Eigenschaften von ihnen fordert. Zu diesen kommt man über den *Quasikern* einer $F$-Gruppe, der in § 2 definiert wird. Ein Element einer $F$-Gruppe gehört definitionsgemäß genau dann zum Quasikern, wenn die Summe zweier Vielfacher dieses Elements wieder ein Vielfaches ist (vgl. Definition 2.1). Besteht der Quasikern nicht nur aus 0, so kann man in natürlicher Weise eine Addition einführen, so daß $F$ zu einem Fastkörper wird (vgl. Satz 2.4 mit Korollar). In § 3 wird gezeigt, daß man einen Quasikern als Abhängigkeitsraum, etwa im Sinne von [15], § 20, auffassen kann. Dieses Ergebnis wird benutzt, um in den beiden letzten Paragraphen die Struktur bestimmter $F$-Gruppen genau zu untersuchen. Eine $F$-Gruppe $V$ heißt *$F$-Linksfastvektorraum* oder einfach *Fastvektorraum*, wenn ihr Quasikern die Gruppe $V$ erzeugt [Bedingung (Q1) von § 4]. Ein solcher Fastvektorraum wird *regulär* genannt, wenn es zu je zwei Elementen seines Quasikerns eine nichttriviale Linearkombination gibt, die ebenfalls zum Quasikern gehört [Bedingung (Q2)]. Jeder Fastvektorraum ist direkte Summe regulärer Fastvektorräume (Satz 4.13, Zerlegungssatz) und es gibt eine eindeutige direkte Zerlegung in maximale reguläre Fastvektorräume (vgl. Satz 4.14, Eindeutigkeitssatz). Dadurch wird die Theorie der Fastvektorräume weitgehend auf die der regulären zurückgeführt. Jeder reguläre Fastvektorraum besteht nun aus allen Familien $(\xi_i)_{i\in I}$ für eine geeignete Indexmenge $I$ und einen geeigneten Fastkörper $F$ mit $\xi_i\in F$ und $\xi_i\neq 0$ nur für endlich viele $i$, sowie mit komponentenweiser Addition und Multiplikation (Satz 5.2, Struktursatz). Im wesentlichen genau dann ist ein Fastvektorraum ein Vektorraum (über einem Schiefkörper), wenn er mit seinem Quasikern übereinstimmt (Satz 5.5); dieses Ergebnis steht mit anderer Terminologie und mit anderem Beweis auch in [1] (Satz 1.2 mit Korollar). Damit ist die Verbindung zur klassischen Linearen Algebra hergestellt. Nach dem Struktursatz ist insbesondere jeder reguläre $F$-Fastvektorraum ein Vektorraum, wenn der Fastkörper $F$ sogar ein Schiefkörper ist. Es gibt aber nichtreguläre Fastvektorräume über Schiefkörpern (sogar über Körpern), die keine Vektorräume sind (in ihnen gilt das linksseitige Distributivgesetz nicht); Beispiele hierfür werden am Ende von § 4 (vor Satz 4.17) gegeben.

Anstelle von Linksfastvektorräumen über einem Fastkörper $F$ kann man auch Rechtsfastvektorräume einführen: Ein solcher ist eine abelsche Gruppe $V$ zusammen mit einer Multiplikation von $V\times F$ in $V$, für die $x(\alpha+\beta)=x\alpha+x\beta$ [jedoch nicht notwendig das andere Distributivgesetz], $(x\alpha)\beta=x(\alpha\beta)$, $x\cdot 1=x$ und $0\cdot\alpha=0$ gilt. Jeder Fastkörper

ist somit trivialerweise sowohl Links- als auch Rechtsfastvektorraum über sich. Über allgemeine Rechtsfastvektorräume wird in einer weiteren Note berichtet. (Über eine geometrische Anwendung spezieller solcher Räume vgl. auch [4].)

## § 1. *F*-Gruppen

**Definition 1.1.** Eine Struktur $(V, F, +)$ [kürzer $(V, F)$ oder einfach $V$] heißt *F-Gruppe*, wenn für sie folgende vier Bedingungen gelten:

(F1) *$(V, +)$ ist eine Gruppe (mit neutralem Element 0 und $-x$ als zu $x \in V$ inversem Element) und $F$ eine Menge von Endomorphismen (Operatoren) auf ihr.*

*Bemerkung* zu (F1). Ist $x \in V$ und $\alpha \in F$, so bezeichnen wir das Bild von $x$ bei Anwendung von $\alpha$ mit $\alpha x$. Die Endomorphismeneigenschaft von $\alpha$ besagt gerade

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (\in V) \tag{1.1}$$

für alle $x, y \in V$. Die Elemente aus $V$ nennen wir auch *Vektoren*, die aus $F$ *Skalare*.

(F2) *Die Endomorphismen 0, 1 und $-1$, die durch $0 \cdot x=0$, $1 \cdot x=x$ und $(-1)x=-x$ für alle $x \in V$ definiert sind, gehören zu $F$.*

(F3) *$F^{\times} := F \setminus \{0\}$ ist Untergruppe der Automorphismengruppe von $(V, +)$.*

(F4) *Aus $\alpha x=\beta x$ für ein $x \in V$ und $\alpha, \beta \in F$ folgt $x=0$ oder $\alpha=\beta$* (Kürzungsregel).

*Bemerkungen.* (1) Ist $V \neq \{0\}$, so $0 \neq 1$.

(2) Aus (F2) folgt wegen

$$x+y=(-1)(-x)+(-1)(-y)=(-1)(-x-y)=(-1)\big(-(y+x)\big)=y+x,$$

daß $(V, +)$ abelsch ist[2].

(3) *Beispiele* von $F$-Gruppen sind (Links-)Vektorräume über Schiefkörpern, wobei der Schiefkörper dem Operatorenbereich $F$ entspricht. Im Laufe der Arbeit werden wir weitere Beispiele kennenlernen.

**Definition 1.2.** Eine $F$-Gruppe $(V, F)$ heißt *planar*[3], wenn in ihr zusätzlich zu (F 1) bis (F 4) noch gilt

(F5) *Zu $v \in V$ und $\alpha \in F \setminus \{1\}$ gibt es $x \in V$ mit*

$$\alpha x=x+v. \tag{1.2}$$

[2] Man kann die Bedingung $-1 \in F$ in (F 2) auch fortlassen. In einem solchen Fall ist $(V, +)$ nicht mehr notwendig abelsch, und auch viele der folgenden Sätze gelten nicht mehr. Zum Beweis von (2) wird übrigens nur benutzt, daß $-1$ ein Endomorphismus von $V$ ist.

[3] Der Name „planar" für $(V, F)$ kommt daher, daß für spezielle $V$ der zugehörige Fastkörper $F$ genau dann planar (im Sinne von [7], S. 129) ist, wenn $V$ planar im Sinne unserer Definition ist. (Vgl. § 5, insbesondere Satz 5.4.)

*Bemerkungen* zu (F 5). (1) Mit Hilfe der Kürzungsregel (F 4) folgt, daß die Lösung $x$ von (1.2) durch $v$ und $\alpha$ *eindeutig bestimmt* ist.

(2) *Aus* $\alpha \in F$ *und* $\alpha^2 = 1$ *folgt* $\alpha = 1$ *oder* $\alpha = -1$. Sei nämlich $v \in V \setminus \{0\}$ und $\alpha^2 = 1$, $\alpha \neq 1$ vorausgesetzt. (Der Fall $V = \{0\}$ ist trivial.) Aus (F 5) folgt die Existenz eines $x \in V$ mit $v = \alpha x - x$ und hieraus $\alpha v = -v = (-1)v$, wegen der Kürzungsregel also $\alpha = -1$. (Vgl. auch [1], Satz 1.1.) Für eine planare $F$-Gruppe besteht somit genau eine der beiden folgenden (einander ausschließenden) Möglichkeiten: Entweder ist $-1 \neq 1$; dann enthält die Gruppe $F^\times$ genau eine Involution (d.h. ein Element der Ordnung 2), nämlich $\alpha = -1$, während $(V, +)$ keine Involution enthält. Oder es ist $-1 = 1$; dann ist wegen $-x = x$ für alle $x \in V$ jedes Element aus $V \setminus \{0\}$ eine Involution der Gruppe $(V, +)$, dagegen hat $F^\times$ in diesem Fall keine Involution.

(3) Planare $F$-Gruppen hängen eng mit gewissen Frobeniusgruppen zusammen. Dabei ist eine *Frobeniusgruppe* eine Permutationsgruppe, in der jede nichtidentische Permutation höchstens einen Fixpunkt hat und ihre fixpunktfreien Permutationen zusammen mit der Identität einen transitiven Normalteiler bilden (vgl. z.B. [1, 10, 14, 17, 18]; s. auch [8]). Ist $(V, F)$ eine planare $F$-Gruppe, so ist die Menge aller Abbildungen $x \mapsto \alpha x + v$ $(x, v \in V, \alpha \in F \setminus \{0\})$ eine Frobeniusgruppe auf $V$, wie man leicht nachrechnen kann. Wegen der Planarität von $(V, F)$ sind die fixpunktfreien Abbildungen dieser Gruppe genau diejenigen, für die $\alpha = 1$ und $v \neq 0$ gilt. In dieser Frobeniusgruppe sind entweder alle fixpunktfreien Abbildungen involutorisch (wenn $-1 = 1$), oder es gibt (wenn $-1 \neq 1$) zu jedem $v \in V$ genau eine $v$ festlassende Involution (nämlich $x \mapsto -x + v + v$) und keine weiteren. Man kann umgekehrt zeigen, daß man so bis auf Isomorphie alle Frobeniusgruppen mit diesen Involutionseigenschaften erhält.

(4) Das in Bemerkung (3) im Anschluß an Definition 1.1 angegebene Beispiel (Vektorraum) ist planar.

(5) Aus Abzählungsgründen folgt mit (F 4): *Jede endliche F-Gruppe ist planar.* Dagegen gibt es unendliche nichtplanare $F$-Gruppen; denn es gibt nichtplanare Fastkörper ([20]), und aus diesen kann man nichtplanare $F$-Gruppen konstruieren, wie in § 5 gezeigt wird (s. insbesondere Satz 5.4).

(6) Die in [1] eingeführten unvollständigen Fastkörper sind unter den planaren $F$-Gruppen im wesentlichen durch $F \subseteq V$ gekennzeichnet[4].

[4] Das ist nur eine scheinbare Spezialisierung, denn sei $(V, F)$ eine $F$-Gruppe $\neq \{0\}$, $e \in V \setminus \{0\}$, so setze man $\bar{F} := Fe$ und $\alpha e \cdot v := \alpha v$ $(v \in V, \alpha \in F)$; dann ist $\bar{F} \subseteq V$ und $(V, \bar{F})$ zu $(V, F)$ isomorph.

## § 2. Quasikerne

**Definition 2.1.** Sei $(V, F)$ eine (nicht notwendig planare) $F$-Gruppe. Unter dem *Quasikern* $Q(V,F)=Q(V)=Q$ von $(V,F)$ versteht man die Menge derjenigen $u\in V$, für die es zu allen $\alpha,\beta\in F$ ein $\gamma\in F$ gibt mit

$$\alpha u+\beta u=\gamma u. \tag{2.1}$$

**Hilfssatz 2.2.** *Der Quasikern $Q$ hat folgende Eigenschaften:* (a) $0\in Q$. (b) *Für $u\in Q\setminus\{0\}$ ist $\gamma$ in* (2.1) *durch $\alpha$ und $\beta$ eindeutig bestimmt.* (c) $u\in Q$, $\lambda\in F\Rightarrow \lambda u\in Q$, *insbesondere* $-u\in Q$. (d) $u\in Q$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in F\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u\in Q$. (e) *Ist $u\in Q$, $\alpha,\beta\in F$, so gibt es ein $\gamma\in F$ mit $\alpha u-\beta u=\gamma u$.*

*Beweis.* (a) ist trivial, (b) folgt aus der Kürzungsregel. Zu (c): Dies ist klar für $\lambda=0$. Ist $\lambda\neq 0$, so existiert $\lambda^{-1}\in F$ nach (F 3), und mit (2.1) erhalten wir

$$\alpha\lambda u+\beta\lambda u=\gamma' u=\gamma'\lambda^{-1}\lambda u$$

für ein geeignetes $\gamma'\in F$. Durch Induktion nach $n$ folgt (d) aus (c) und (2.1). Schließlich erhalten wir (e) aus (2.1) und $-\beta u=\beta(-u)=\beta(-1)u$ und $\beta(-1)=-\beta\in F$ für $\beta\in F$.

*Beispiel.* Ist $F$ Schiefkörper und $(V,F)$ Vektorraum über $F$ [vgl. Bemerkung (3) im Anschluß an Definition 1.1], so ist $Q(V,F)=V$. In § 5, Satz 5.5, werden wir sehen, daß durch diese Eigenschaft die Vektorräume unter den $F$-Gruppen im wesentlichen gekennzeichnet sind.

**Definition 2.3.** Eine $F$-Gruppe $V$ heißt *lineare $F$-Gruppe*, wenn $V=\{0\}$ oder $Q(V)\neq\{0\}$ gilt.

Wir werden im folgenden jedem $u\in Q\setminus\{0\}$ einer linearen $F$-Gruppe auf natürliche Weise einen *Fastkörper* (nearfield) zuordnen. Dabei wird als Fastkörper wie üblich eine algebraische Struktur mit den zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ verstanden, in der alle Schiefkörperaxiome mit Ausnahme des linksseitigen Distributivgesetzes $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$ gelten; an seine Stelle tritt die Abschwächung $0\cdot\gamma=0$. (Vgl. [7][5], S. 33; [12][6], S. 94; [16]; [19][7].)

Sei $(V,F)$ eine lineare $F$-Gruppe, $Q$ ihr Quasikern und $u\in Q\setminus\{0\}$. Dann definieren wir eine Addition $\underset{u}{+}$ auf $F$ durch

$$(\alpha\underset{u}{+}\beta)u:=\alpha u+\beta u \tag{2.2}$$

---

[5] Dort allerdings mit dem linksseitigen statt des hier geforderten rechtsseitigen Distributivgesetzes. Die eine Strukturklasse ist aber aus der anderen leicht durch Übergang zur entgegengesetzten Multiplikation $\alpha\circ\beta:=\beta\alpha$ zu gewinnen.

[6] Dort allerdings mit der hier in § 5 eingeführten Planaritätsbedingung.

[7] Dort *vollständige Fastkörper* genannt.

$(\alpha, \beta \in F)$. Wegen Hilfssatz 2.2(b) ist $\alpha \underset{u}{+} \beta$ durch $\alpha, \beta$ eindeutig in $F$ bestimmt.

*Bemerkung.* Da $V$ abelsch, ist bekanntlich die Menge *aller* Endomorphismen von $V$ ein Ring, wenn man die Addition durch

$$(\alpha+\beta)\, x = \alpha\, x + \beta\, x$$

erklärt. Für $\alpha, \beta \in F$ gehört aber die so erhaltene Summe i.allg. nicht zu $F$, so daß sie von der durch (2.2) definierten verschieden ist. Gilt aber auch $\alpha+\beta \in F$, so rechnet man wegen (F 4) leicht $\alpha+\beta = \alpha \underset{u}{+} \beta$ nach.

**Satz 2.4.** *Sei $(V, F)$ eine lineare $F$-Gruppe, $u \neq 0$ ein Element ihres Quasikerns $Q(V, F)$. Dann ist $(F, \underset{u}{+}, \cdot)$ mit der durch (2.2) definierten Addition $\underset{u}{+}$ ein Fastkörper.*

*Beweis.* Das rechtsseitige Distributivgesetz folgt aus

$$\alpha(\beta \underset{u}{+} \gamma)\, u = \alpha(\beta\, u + \gamma\, u) = \alpha\, \beta\, u + \alpha\, \gamma\, u = (\alpha\, \beta \underset{u}{+} \alpha\, \gamma)\, u$$

unter Benutzung von (1.1), und der Kürzungsregel (F 4). Ganz entsprechend rechnet man nach, daß $F$ hinsichtlich $\underset{u}{+}$ eine abelsche Gruppe mit 0 als neutralem Element ist. Wegen (F 3) ist $F^\times$ eine Gruppe hinsichtlich der Multiplikation. Schließlich folgt $0 \cdot \alpha = 0$.

**Korollar.** *Ist $(V, F)$ eine lineare $F$-Gruppe mit $V \neq \{0\}$, so ist [die nach (F 3) existierende] Gruppe $F^\times$ multiplikative Gruppe eines Fastkörpers.*

**Satz 2.5.** *Ist $u \in Q \setminus \{0\}$ und $\lambda \in F \setminus \{0\}$ [nach Hilfssatz 2.2(c) also auch $\lambda u \in Q \setminus \{0\}$], so sind die Fastkörper $(F, \underset{u}{+}, \cdot)$ und $(F, \underset{\lambda u}{+}, \cdot)$ zueinander isomorph. Ein Isomorphismus von $(F, \underset{u}{+}, \cdot)$ auf $(F, \underset{\lambda u}{+}, \cdot)$ kann durch den inneren Automorphismus*

$$\alpha \mapsto \lambda^{-1} \alpha\, \lambda =: \alpha^\lambda \tag{2.3}$$

*von $F^\times$ vermittelt werden.*

*Beweis.* Die durch (2.3) gegebene Abbildung ist bijektiv, verträglich mit der Multiplikation und mit der Addition wegen

$$\lambda^{-1}(\alpha \underset{\lambda u}{+} \beta)\, \lambda = \lambda^{-1} \alpha\, \lambda \underset{u}{+} \lambda^{-1} \beta\, \lambda. \tag{2.4}$$

*Bemerkungen.* (1) Aus (2.4) erhält man durch Umrechnung unter Benutzung von (2.3) sofort

$$\alpha \underset{\lambda u}{+} \beta = (\alpha^\lambda \underset{u}{+} \beta^\lambda)^{\lambda^{-1}}. \tag{2.4'}$$

(2) Aus $u, v \in Q \setminus \{0\}$ und $v \notin Fu := \{\lambda u \mid \lambda \in F\}$ braucht nicht die Isomorphie von $(F, \underset{u}{+}, \cdot)$ mit $(F, \underset{v}{+}, \cdot)$ zu folgen.

**Definition 2.6.** Unter dem *Kern* $R_u(V,F)=R_u(V)=R_u$ der linearen $F$-Gruppe $(V,F)$ *hinsichtlich* $u\in Q(V,F)\setminus\{0\}$ verstehen wir die Menge

$$R_u:=\{v\in V\mid(\alpha\underset{u}{+}\beta)v=\alpha v+\beta v \text{ für alle } \alpha,\beta\in F\}. \tag{2.5}$$

Nach der Definition von $\underset{u}{+}$ und (2.2) folgt

$$u\in R_u\subseteq Q, \tag{2.6}$$

ferner folgt leicht $0\in R_u$ und

$$v,w\in R_u\Rightarrow v\pm w\in R_u, \tag{2.7}$$

d.h. $R_u$ *ist Untergruppe von* $V$. Aus (2.6) und Hilfssatz 2.2(c) folgt

**Satz 2.7.** $Q\supseteq FR_u:=\{\lambda v\mid\lambda\in F, v\in R_u\}$.

*Bemerkung.* Das Gleichheitszeichen gilt hier nur in speziellen Fällen; vgl. hierzu § 5.

**Hilfssatz 2.8.** *Aus* $u,v\in Q\setminus\{0\}$, $v\notin Fu$ *und*

$$\alpha u+\beta v=\alpha' u+\beta' v \tag{2.8}$$

$(\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in F)$ *folgt* $\alpha=\alpha'$ *und* $\beta=\beta'$.

*Beweis.* Aus (2.8) und $u,v\in Q$ folgt wegen Hilfssatz 2.2(e) die Existenz von $\gamma,\delta\in F$ mit

$$\gamma u=\alpha u-\alpha' u=\beta' v-\beta v=\delta v.$$

Wäre $\delta\neq 0$, so $v=\delta^{-1}\gamma u\in Fu$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $\delta=0$, d.h. $\beta v=\beta' v$, wegen $v\neq 0$ und der Kürzungsregel auch $\beta=\beta'$. Ebenso folgt $\alpha=\alpha'$.

Sehr wichtig für die weiteren Untersuchungen ist der folgende Hilfssatz.

**Hilfsatz 2.9.** *Aus* $v\in R_u$, $w, v+w\in Q$ *und* $w\notin Fv$ *folgt* $w\in R_u$ [*und damit wegen* (2.7) *auch* $v+w\in R_u$].

*Beweis.* Wegen $v\in R_u\subseteq Q$ und $v+w\in Q$ gibt es nach Hilfssatz 2.2(e) zu jedem $\alpha\in F$ ein $\beta\in F$ mit

$$v+w=\alpha(v+w)+\beta(v+w)=(\alpha\underset{u}{+}\beta)v+\alpha w+\beta w. \tag{2.9}$$

Aus $w\in Q$ folgt die Existenz eines $\gamma\in F$ mit $\alpha w+\beta w=\gamma w$. Damit erhalten wir

$$v+w=(\alpha\underset{u}{+}\beta)v+\gamma w. \tag{2.9'}$$

Anwendung von Hilfssatz 2.8 ergibt nun $\alpha\underset{u}{+}\beta=1=\gamma$, also

$$\alpha w+\beta w=w=(\alpha\underset{u}{+}\beta)w, \tag{2.9''}$$

d.h. die Distributivität für alle $\alpha, \beta \in F$ mit $\alpha \underset{u}{+} \beta = 1$. Die Distributivität für die $\alpha, \beta$ mit $\alpha \underset{u}{+} \beta \neq 0$ führen wir durch Linksmultiplikation mit $(\alpha \underset{u}{+} \beta)^{-1}$ auf diesen Fall zurück; für $\alpha \underset{u}{+} \beta = 0$, d.h. $\beta = -\alpha$, ist sie trivial. Damit ist $w \in R_u$ gezeigt.

In Ergänzung zu Satz 2.5 gilt

**Satz 2.10.** *Sei $Q = Q(V)$ der Quasikern der $F$-Gruppe $V$ und seien $u, v \in Q \setminus \{0\}$ mit $v \notin Fu$ (und damit auch $u \notin Fv$) gegeben. Für ein $\lambda \in F \setminus \{0\}$ ist genau dann*

$$u + \lambda v \in Q, \tag{2.10}$$

*wenn*

$$\underset{u}{+} = \underset{\lambda v}{+} \tag{2.11}$$

*gilt.*

Dies ist eine einfache Folgerung aus (2.7) und Hilfssatz 2.9.

## § 3. Der Quasikern als Abhängigkeitsraum

Sei $V$ eine $F$-Gruppe und $Q$ ihr Quasikern. In $Q$ definieren wir eine Relation „abh", *Abhängigkeitsrelation* genannt, zwischen $Q$ und $\mathfrak{P}Q$ auf folgende Weise: $x$ abh $\varnothing$ soll dasselbe besagen wie $x = 0$, und für $\varnothing \neq M \subseteq Q$ soll gelten

$$v \text{ abh } M :\Leftrightarrow \text{es gibt } u_1, \ldots, u_n \in M \text{ und } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F \text{ mit } v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i. \tag{3.1}$$

Besteht $M$ insbesondere aus genau einem Element, d.h. $M = \{u\}$, so ist $v$ abh $\{u\}$ genau dann, wenn $v \in Fu$ gilt.

**Satz 3.1.** *Der Quasikern $Q$ einer $F$-Gruppe ist mit der durch* (3.1) *definierten Abhängigkeitsrelation ein Abhängigkeitsraum* (vgl. etwa [11], S. 65ff., [15], § 20), *d.h. es gilt*

(A 1) $v \in M \Rightarrow v$ abh $M$ *(Reflexivität der Abhängigkeit),*

(A 2) $w$ abh $M, v$ abh $N$ *für alle* $v \in M \Rightarrow w$ abh $N$ *(Transitivität der Abhängigkeit),*

(A 3) $v$ abh $M, \neg (v \text{ abh } M \setminus \{u\})$[8] $\Rightarrow u$ abh $(M \setminus \{u\}) \cup \{v\}$ *(Austauschbedingung).*

Der Beweis geht entsprechend wie in der linearen Algebra.

*Bemerkungen.* Wir können jetzt alle Folgerungen aus den Abhängigkeitsaxiomen (A 1) bis (A 3) verwenden ([11], [15]). Wie üblich, heißt eine Menge $M \subseteq Q$ *unabhängig*, wenn kein $v \in M$ von $M \setminus \{v\}$ abhängt, sonst *abhängig*. Genau dann ist $M$ unabhängig, wenn für $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq M$ die Beziehung $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0$ nur für $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ gilt. Wir nennen $E \subseteq Q$

[8] Mit $\neg$ ist das (logische) Negationszeichen gemeint.

ein *Erzeugendensystem* von $Q$, wenn $v$ abh $E$ für jedes $v \in Q$ gilt. Aus dem Zornschen Lemma folgt die Existenz maximaler unabhängiger Mengen; sie sind zugleich minimale Erzeugendensysteme von $Q$. Jede solche Menge heißt *Basis* von $Q$. Die Mächtigkeiten aller Basen stimmen überein (zum Beweis hierzu s.a. Baer [6], p. 14, [9], Chaps. 6, 7); wir nennen sie die *Dimension* von $Q$ und bezeichnen sie mit Dim $Q$. Schließlich kann jede unabhängige Menge zu einer Basis von $Q$ ergänzt werden.

Wir schließen mit folgendem leicht einzusehendem Hilfssatz.

**Hilfssatz 3.2.** *Ist* $\{u_i\}_{i \in I}$ *eine Basis von* $Q$ *und sind* $\lambda_i \in F \setminus \{0\}$ *für alle* $i \in I$, *so ist auch* $\{\lambda_i u_i\}_{i \in I}$ *eine Basis von* $Q$.

## § 4. Fastvektorräume

Im folgenden betrachten wir $F$-Gruppen $V$ mit „hinreichend großen" Quasikernen. Hierzu gehören insbesondere die schon früher erwähnten Vektorräume über Schiefkörpern. In Verschärfung von Definition 2.3 stellen wir zunächst folgende Reichhaltigkeitsforderung.

**Definition 4.1.** Eine $F$-Gruppe $(V, F)$ heißt *$F$-Linksfastvektorraum*, *$F$-Fastvektorraum* oder einfach *Fastvektorraum*, wenn in ihm folgende Bedingung gilt:

(Q 1) *Der Quasikern $Q$ von $V$ ist Erzeugendensystem der Gruppe $(V, +)$.*

*Bemerkungen.* (1) Jeder $F$-Fastvektorraum ist eine lineare $F$-Gruppe (vgl. Definition 2.3).

(2) In einem Fastvektorraum $V$ mit Quasikern $Q$ nennen wir jede Basis von $Q$ (vgl. § 3) auch *Basis von $V$* (und umgekehrt), und wir setzen Dim $V :=$ Dim $Q$.

Der folgende Satz gibt wichtige Beispiele von Fastvektorräumen.

**Satz 4.2.** *Sei $F = (F, +, \cdot)$ ein Fastkörper und $I$ eine Indexmenge. Dann ist die Menge*

$$F^{(I)} := \{(\xi_i)_{i \in I} \mid \xi_i \in F,\ \xi_i \neq 0 \text{ nur für endlich viele } i \in I\} \text{ für } I \neq \varnothing,$$
$$F^{(\varnothing)} := \{0\} \tag{4.1}$$

*ein Fastvektorraum, wenn man Addition und Multiplikation durch*

$$(\xi_i) + (\eta_i) := (\xi_i + \eta_i),$$
$$\lambda(\xi_i) := (\lambda\, \xi_i) \tag{4.2}$$

$(\xi_i, \eta_i, \lambda \in F)$, *also komponentenweise erklärt*[9].

[9] Statt $(\xi_i)_{i \in I}$ schreiben wir oft auch kurz $(\xi_i)$. – In der üblichen Terminologie ist $F^{(I)}$ direkte Summe von $|I|$ Exemplaren von $F$.

**Definition 4.3.** Sei $F$ ein Fastkörper. Unter seinem *Kern*[10] $K(F)=K$ verstehen wir die Menge

$$K:=\{\kappa\in F|(\xi+\eta)\,\kappa=\xi\kappa+\eta\,\kappa \text{ für alle } \xi,\eta\in F\} \tag{4.3}$$

([11], S. 203/204[11], [16]).

Man sieht sofort, daß $K$ mit den auf $F$ gegebenen Verknüpfungen ein Schiefkörper und $F$ Rechtsvektorraum über $K$ ist. Genau dann ist $F=K$, wenn $F$ selbst ein Schiefkörper ist. Nunmehr sind wir in der Lage, eine genaue Übersicht über den Quasikern $Q$ von $F^{(I)}$ zu bekommen.

**Satz 4.4.** *Der Quasikern $Q$ der $F$-Gruppe $(F^{(I)}, F)$ besteht genau aus den Vektoren $\lambda(\kappa_i)_{i\in I}$ mit $\lambda\in F$ und $\kappa_i\in K(F)$.*

*Beweis.* (1) Wegen $\kappa_i\in K(F)$ gilt

$$\alpha(\kappa_i)+\beta(\kappa_i)=(\alpha\,\kappa_i)+(\beta\,\kappa_i)=(\alpha\,\kappa_i+\beta\,\kappa_i)=\big((\alpha+\beta)\,\kappa_i\big)=(\alpha+\beta)\,(\kappa_i),$$

also $(\kappa_i)\in Q$. Wegen Hilfssatz 2.2 (c) gilt dann auch $\lambda(\kappa_i)\in Q$.

(2) Sei umgekehrt $(\xi_i)\in Q$. Der Fall $(\xi_i)=0$ ist trivial; sei also $(\xi_i)\neq 0$, d.h. $\xi_{i_0}\neq 0$ für ein $i_0\in I$ vorausgesetzt. Setzen wir $\kappa_i:=\xi_{i_0}^{-1}\,\xi_i$, so erhalten wir

$$(\xi_i)=\xi_{i_0}(\kappa_i). \tag{4.4}$$

Wegen Hilfssatz 2.2 (c) gilt $(\kappa_i)\in Q$, nach (2.1) gibt es also zu $\alpha,\beta\in F$ ein $\gamma\in F$ mit

$$\alpha\,\kappa_i+\beta\,\kappa_i=\gamma\,\kappa_i \tag{4.5}$$

für alle $i\in I$. Wegen $\kappa_{i_0}=1$ ist $\gamma=\alpha+\beta$, und zusammen mit (4.5) folgt $\kappa_i\in K$. Wegen (4.4) ist Satz 4.4 vollständig bewiesen.

Die folgenden Untersuchungen beschäftigen sich in der Hauptsache damit, wie man umgekehrt die Räume $F^{(I)}$ als $F$-Gruppen kennzeichnen kann.

**Hilfssatz 4.5.** *Sei $V$ ein Fastvektorraum und $B=\{u_i|i\in I\}$ eine Basis von $Q$* [nach der in Bemerkung (2) im Anschluß an Definition 4.1 getroffenen Verabredung also auch Basis von $V$]. *Dann ist jedes $x\in V$ eindeutige Linearkombination von Elementen aus $B$, d.h. es gibt durch $x$ und $B$ eindeutig bestimmte $\xi_i\in F$ mit $\xi_i\neq 0$ für nur endlich viele $i\in I$ und*

$$x=\sum_{i\in I}\xi_i\,u_i. \tag{4.6}$$

*Beweis.* Sei $x\in V$. Wegen (Q 1) gibt es $v_1,\ldots,v_n\in Q$ mit

$$x=\sum_{j=1}^{n}v_j. \tag{4.7}$$

---

[10] Diese Definition ist, wie man leicht sieht, eine Spezialisierung der Definition 2.6 des Kerns einer $F$-Gruppe, wenn man $F$ in natürlicher Weise als $F$-Gruppe auf sich betrachtet.

[11] Dort allgemeiner für Quasikörper eingeführt.

Da jedes $v_j$ Linearkombination von Elementen aus $B$ ist, so wegen $B \subseteq Q$ auch $x$. Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei

$$\sum_{i \in I} \xi_i u_i = \sum_{i \in I} \xi_i' u_i, \tag{4.8}$$

wobei nur endlich viele $\xi_i$, $\xi_i' \neq 0$ sind. Aus $u_i \in Q$, (4.8) und Hilfssatz 2.2(e) folgt

$$\sum_{i \in I} \eta_i u_i = 0 \quad (\eta_i \in F). \tag{4.8'}$$

Da $B$ unabhängig ist, folgt $\eta_i = 0$, wegen (F 4) also $\xi_i = \xi_i'$.

**Satz 4.6.** *Sei $V$ ein F-Fastvektorraum. Dann gibt es eine Indexmenge $I$ und eine bijektive Abbildung $f: V \to F^{(I)}$, die verträglich mit der Multiplikation ist, d.h. für die*

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (\alpha \in F, x \in V) \tag{4.9}$$

*gilt, wobei mit $\alpha f(x)$ das durch (4.2) gegebene komponentenweise Produkt gemeint ist.*

*Bemerkung.* Die Verträglichkeit von $f$ mit der Addition kann ohne zusätzliche Voraussetzungen über $V$ nicht bewiesen werden, vgl. dazu § 5, insbesondere Satz 5.2.

*Beweis.* Man nimmt eine Basis $B$ von $V$ als Indexmenge und definiert $f$ durch

$$f(x) = f\Big(\sum_{u \in B} \xi_u u\Big) := (\xi_u)_{u \in B}. \tag{4.10}$$

Ersichtlich ist $f$ eine Bijektion von $V$ auf $F^{(I)}$, und die Bedingung (4.9) ist leicht zu verifizieren.

*Bemerkung.* Wir setzen $f(u_i) =: e_i$ und stellen fest, daß $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$ ist, wobei $\delta_{ij}$ wie üblich das Kroneckersymbol bedeuten soll.

Für weitere Untersuchungen zur Struktur eines Fastvektorraumes ist es zweckmäßig, in $Q \setminus \{0\}$ folgende Relation einzuführen.

**Definition 4.7.** Elemente $u, v \in Q \setminus \{0\}$ heißen miteinander *verträglich*, in Zeichen

$$u \operatorname{vt} v, \tag{4.11}$$

wenn es ein $\lambda \in F \setminus \{0\}$ gibt mit $u + \lambda v \in Q$.

**Hilfssatz 4.8.** *Genau dann gilt $u \operatorname{vt} v$ für $u, v \in Q \setminus \{0\}$, wenn es ein $\lambda \in F \setminus \{0\}$ gibt mit*

$$\underset{u}{+} = \underset{\lambda v}{+} \tag{4.12}$$

[vgl. (2.2)].

*Beweis.* Für $v \notin Fu$ ist dies eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.10. Für $v \in Fu$, d.h. $v = \alpha u$ für ein $\alpha \in F \setminus \{0\}$, gilt einerseits stets die Verträglichkeit

$$u \operatorname{vt} \alpha u, \tag{4.13}$$

da $u+\lambda\alpha u\in Q$ für alle $\lambda\in F$ wegen Hilfssatz 2.2(d) gilt; andererseits ist dann (4.12) für $\lambda=\alpha^{-1}$ erfüllt.

Aus diesem Hilfssatz folgt nun mit (2.4') sofort

**Satz 4.9.** *Die durch die Definition* 4.7 *gegebene Verträglichkeitsrelation* vt *ist eine Äquivalenzrelation auf* $Q\setminus\{0\}$.

**Hilfssatz 4.10.** *Sind* $u, v, u+v\in Q\setminus\{0\}$, *so gilt stets* $u$ vt $v$ *und* u vt $u+v$.

*Beweis.* $u$ vt $v$ folgt unmittelbar aus Definition 4.7 für $\lambda=1$. Für $v\in Fu$ gilt $v=\alpha u$, also $u+v=u+\alpha u\in Q$ nach Hilfssatz 2.2(d). Ist $v\notin Fu$, so folgt $v, u+v\in R_u$ nach Hilfssatz 2.9; aus (2.7) erhalten wir $u+(u+v)\in R_u \subseteq Q$, also auch $u$ vt $u+v$.

**Definition 4.11.** Ein Fastvektorraum heißt *regulär (r.F.)*, wenn in ihm gilt

(Q2) *Je zwei Vektoren aus* $Q\setminus\{0\}$ *sind verträglich im Sinne der Definition* 4.7.

**Satz 4.12.** *Ein Fastvektorraum* $V$ *ist genau dann regulär, wenn er eine Basis aus paarweise verträglichen Vektoren enthält. In diesem Fall besteht jede Basis aus paarweise verträglichen Vektoren.*

*Beweis.* Ist $V$ regulär, so besteht wegen (Q2) jede Basis aus paarweise verträglichen Vektoren. Sei umgekehrt $V$ ein Fastvektorraum mit einer Basis $B$, die aus paarweise verträglichen Vektoren besteht. Sei $u\in Q\setminus\{0\}$ und $u=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i u_i$ mit $u_i\in B$ und $\lambda_i\neq 0$ für alle $i\in\{1,\ldots,r\}$ eine nach Hilfssatz 4.5 mögliche Basisdarstellung von $u$. Wir setzen $u':=\sum_{i=1}^{r-1}\lambda_i u_i$ für $r>1$ bzw. $u'=0$ für $r=1$. Wegen $u=u'+\lambda_r u_r\in Q$ gibt es zu $\alpha,\beta\in F$ ein $\gamma\in F$ [vgl. (2.1)] mit

$$\alpha u'+\beta u'+\alpha\lambda_r u_r+\beta\lambda_r u_r=\alpha u+\beta u=\gamma u=\gamma u'+\gamma\lambda_r u_r,$$

nach Hilfssatz 4.5 also $\alpha u'+\beta u'=\gamma u'$, d.h. $u'\in Q$. Nun folgt $u$ vt $u_r$ für $u'=0$ nach (4.13) und für $u'\neq 0$ wegen Hilfssatz 4.10. Nach Voraussetzung und Satz 4.9 ist $u$ zu jedem Vektor aus $B$ verträglich, und da $u$ beliebig aus $Q\setminus\{0\}$ sein konnte, sind je zwei Elemente aus $Q\setminus\{0\}$ miteinander verträglich. Also ist $V$ regulär und insbesondere besteht jede Basis von $V$ aus paarweise verträglichen Vektoren.

**Satz 4.13** (Zerlegungssatz). *Jeder Fastvektorraum* $V$ *ist direkte Summe regulärer Fastvektorräume* $V_j$ $(j\in J)$ *derart, daß jedes* $u\in Q(V)\setminus\{0\}$ *in genau einem dieser direkten Summanden* $V_j$ *liegt. Die Unterräume* $V_j$ *sind maximale reguläre Fastvektorräume.*

*Beweis.* (1) Sei $Q \setminus \{0\}$ gemäß Satz 4.9 in Klassen $Q_j$ $(j \in J)$ verträglicher Vektoren zerlegt. Ferner sei $B \subseteq Q \setminus \{0\}$ eine Basis von $V$ und $B_j := B \cap Q_j$ gesetzt. Die $B_j$ sind paarweise disjunkt und jedes ist als Teilmenge von $B$ unabhängig. Ferner ist

$$B = \bigcup_{j \in J} B_j. \tag{4.14}$$

Sei $V_j := \langle B_j \rangle$ der von $B_j$ erzeugte Unterraum von $V$. Nach Satz 4.12 ist $V_j$ regulär, da $B_j$ eine aus paarweise verträglichen Vektoren bestehende Basis von $V_j$ ist. Wegen (4.14) und da jedes $x \in V$ Linearkombination von Elementen aus $B$ ist, folgt die Existenz einer Zerlegung

$$x = \sum_{j \in J} x_j \tag{4.15}$$

mit $x_j \in V_j$ und $x_j \neq 0$ nur für endlich viele $j \in J$.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung (4.15) ist leicht zu verifizieren. Damit ist die Existenz der direkten Zerlegung

$$V = \sum_{j \in J} V_j \tag{4.16}$$

nachgewiesen. Insbesondere folgt

$$V_j \cap V_{j'} = \{0\} \quad \text{für } j \neq j'. \tag{4.17}$$

(2) Wir nehmen an, nicht jedes Element aus $Q \setminus \{0\}$ liege in einem $V_j$. Sei $u$ ein solches mit möglichst wenig Summanden in der durch (4.15) gegebenen Zerlegung

$$u = \sum_{j \in J} u_j. \tag{4.15'}$$

Wegen (2.1) und $u \in Q$ gibt es zu $\alpha, \beta \in F$ ein $\gamma \in F$ mit

$$\sum_{j \in J} (\alpha u_j + \beta u_j) = \alpha u + \beta u = \gamma u = \sum_{j \in J} \gamma u_j,$$

wegen der direkten Summenzerlegung (4.15') also

$$\alpha \sum_{j \in J'} u_j + \beta \sum_{j \in J'} u_j = \gamma \sum_{j \in J'} u_j$$

für jedes $J' \subseteq J$. Hieraus folgt

$$u' := \sum_{j \in J'} u_j \in Q. \tag{4.15''}$$

Sei $J_u$ die Menge derjenigen $j \in J$, für die $u_j \neq 0$ in der Zerlegung (4.15') gilt. $J_u$ ist endlich, und wir haben $|J_u| > 1$ und $|J_{u^*}| \geqq |J_u|$ für alle $u^* \in Q \setminus \bigcup_{j \in J} V_j$ angenommen. Für $J' \subseteq J$ mit $J_u \cap (J \setminus J') \neq \varnothing$ ist deshalb $|J_{u'}| = 1$, d.h. $J_{u'} = \{j'\}$ für ein geeignetes $j' \in J$, wenn $u'$ durch (4.15'') gegeben ist. Ebenso ist $|J_{u-u'}| = 1$, d.h. $J_{u-u'} = \{j''\}$ für ein $j'' \in J$ mit $j'' \neq j'$. Wir erhalten somit

$$u = u' + (u - u') \tag{4.18}$$

mit $u' \in V_{j'}$ und $u - u' \in V_{j''}$ und somit $u' \in Q_{j'}$ und $u - u' \in Q_{j''}$. Aus (4.18) und Hilfssatz 4.10 folgt aber

$$u' \text{ vt } u - u', \tag{4.19}$$

also $j' = j''$, was im Widerspruch zum früher festgestellten $j' \neq j''$ steht. Es gilt also

$$Q \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j. \tag{4.20}$$

Jedes $u \in Q \setminus \{0\}$ liegt also in mindestens einem $V_j$, wegen (4.17) liegt es sogar in genau einem $V_j$.

(3) Jeder der direkten Summanden $V_j$ ist ein maximaler regulärer Unterraum. Gäbe es nämlich ein $j_0 \in J$ und einen regulären Unterraum $W \supset V_{j_0}$, so auch ein $u \in Q \cap (W \setminus V_{j_0})$. Wegen $u \in Q \setminus \{0\}$ gilt $u \in V_j$ für ein $j \in J \setminus \{j_0\}$ nach Beweisteil (2). Da $W$ regulär, wäre $u$ verträglich mit jedem Element aus $(Q \setminus \{0\}) \cap V_j$, was wegen $j \neq j_0$ nicht der Fall ist.

Damit sind alle Aussagen des Zerlegungssatzes gezeigt. Im folgenden zeigen wir, daß eine solche Zerlegung eindeutig bestimmt ist.

**Satz 4.14** (Eindeutigkeitssatz). *Es gibt genau eine direkte Zerlegung eines Fastvektorraumes in maximale reguläre Unterräume.*

*Beweis.* Die Existenz einer solchen Zerlegung wurde im Zerlegungssatz gezeigt. Seien nun

$$V = \sum_{j \in J} V_j = \sum_{j' \in J'} V_{j'}. \tag{4.21}$$

zwei direkte Zerlegungen von $V$ in maximale reguläre Unterräume $V_j$ bzw. $V_{j'}$; ferner sei $Q_j := (Q \setminus \{0\}) \cap V_j$ gesetzt. Je zwei Vektoren aus $Q_j$ sind miteinander verträglich, und es gilt $V_j = \langle Q_j \rangle$ wegen (Q1) für $V_j$. Da $V_j$ maximal regulär, ist $Q_j$ eine volle Äquivalenzklasse verträglicher Vektoren (vgl. Satz 4.9). Da auch alle $V_{j'}$ maximal regulär sind, ist $(Q \setminus \{0\}) \cap V_{j'}$ eine volle Äquivalenzklasse hinsichtlich der Relation vt und stimmt deshalb mit einem $Q_j$ ($j \in J$) überein. Hieraus folgt $Q_j \subseteq V_{j'}$, also auch $V_j \subseteq V_{j'}$. Da $V_j$ maximal regulär, folgt $V_j = V_{j'}$. Jedes in der rechten Seite von (4.21) auftretende $V_{j'}$ kommt also auch in der linken Seite vor. Aus Symmetriegründen gilt aber auch das Umgekehrte, so daß auf beiden Seiten von (4.21) dieselben Unterräume stehen.

**Definition 4.15.** Die (gemäß Satz 4.14) eindeutig bestimmte direkte Zerlegung eines Fastvektorraums $V$ in maximale reguläre Unterräume heißt *kanonische direkte Zerlegung von V.*

Der folgende Satz gibt eine weitere Kennzeichnung kanonischer direkter Zerlegungen.

**Satz 4.16.** *Genau dann ist eine direkte Zerlegung*

$$V = \sum_{j \in J} V_j \tag{4.16'}$$

*eines Fastvektorraums $V$ in reguläre Unterräume $V_j$ kanonisch (d.h. die $V_j$ sind maximal regulär), wenn*

$$Q(V) \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j \tag{4.22}$$

*gilt.*

*Beweis.* Sind alle $V_j$ in (4.16′) maximal regulär, so folgt (4.22) aus den Sätzen 4.13 und 4.14. Sei nun umgekehrt (4.22) vorausgesetzt und ein $V_{j_0}$ in (4.16′) nicht maximal regulär, d.h. $V_{j_0} \subset W$, wobei wir wegen des Zornschen Lemmas o.B.d.A. $W$ als in $V$ maximal regulär voraussetzen können. Es existiert dann ein $u \in Q \cap (W \setminus V_{j_0})$. Wegen (4.22) gibt es ein $j_1 \in J$ mit $u \in V_{j_1}$, und wegen der für alle direkten Zerlegungen geltenden Bedingung (4.17) ist $j_0 \neq j_1$. Wegen Satz 4.9, der Regularität von $V_{j_1}$ und $W$ und $u \in V_{j_1} \cap W$ sind alle Vektoren aus $(Q \setminus \{0\}) \cap (V_{j_1} + W)$ paarweise verträglich, also $V_{j_1} + W$ regulär. Da $W$ maximal regulär sein sollte, ist $V_{j_1} \subseteq W$, also auch $V_{j_0} + V_{j_1} \subseteq W$. Zu $u_k \in V_{j_k} \cap (Q \setminus \{0\})$ $[k = 0, 1]$ gibt es $\lambda \in F \setminus \{0\}$ mit $u_0 + \lambda u_1 \in Q \setminus \{0\}$, hierzu wurde wieder die Regularität von $W$ benutzt. Wegen (4.22) gibt es ein $j_2 \in J$ mit

$$u_0 + \lambda u_1 \in V_{j_2} \setminus \{0\}. \tag{4.23}$$

Da andererseits $u_0 + \lambda u_1$ weder zu $V_{j_0}$ noch zu $V_{j_1}$ gehört, ist $V_{j_2} \neq V_{j_0}, V_{j_1}$, und aus der direkten Zerlegung (4.16′) folgt

$$(V_{j_0} + V_{j_1}) \cap V_{j_2} = \{0\}. \tag{4.24}$$

Das ist aber ein Widerspruch zu (4.23). Mithin sind alle $V_j$ in (4.16′) maximal und der Satz damit bewiesen.

*Beispiel.* Sei $(F, +, \cdot)$ ein (kommutativer) Körper und $\sigma: \alpha \mapsto \alpha^\sigma$ ein Automorphismus der multiplikativen Gruppe $F^\times$, durch $0^\sigma := 0$ erweitert auf $F$, der kein Automorphismus von $(F, +)$ sei. Sei $\underset{\sigma}{+}$ definiert durch

$$\alpha \underset{\sigma}{+} \beta = (\alpha^\sigma + \beta^\sigma)^{\sigma^{-1}}. \tag{4.25}$$

Man sieht sofort, daß $(F, \underset{\sigma}{+}, \cdot)$ ein zu $(F, +, \cdot)$ isomorpher Körper ist. Wegen $\sigma \notin \mathrm{Aut}(F, +)$ ist aber $\underset{\sigma}{+} \neq +$. In der $F$-Gruppe $V := F^2$ mit komponentenweiser Multiplikation und Addition, definiert durch

$$(\alpha, \alpha') + (\beta, \beta') := (\alpha + \beta, \alpha' \underset{\sigma}{+} \beta'),$$

gilt (Q1), denn $F^2$ wird durch die zu $Q$ gehörenden Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ erzeugt. Dagegen gilt (Q2) nicht, denn $(1, 0)$ und $(0, 1)$ sind nicht verträglich im Sinne der Definition 4.7 wegen

$$\underset{(1,0)}{+} = + \neq \underset{\sigma}{+} = \underset{(0,1)}{+} = \underset{\lambda(0,1)}{+} \qquad (\lambda \in F \setminus \{0\})$$

und Hilfssatz 4.8.

Hiermit hat man ein Beispiel eines nichtregulären Fastvektorraumes [d.h. (Q 2) kann nicht aus (Q 1) gefolgert werden], wenn man einen Körper $F$ mit einer Abbildung der oben genannten Art finden kann. Solche Körper gibt es aber bereits im Endlichen: Sei $F=GF(q)$ mit $q=p^s$; die Gruppe $F^\times$ ist zyklisch von der Ordnung $q-1$, und ihre Automorphismen sind genau die Abbildungen $\alpha\mapsto\alpha^r$ mit $(r, q-1)=1$. Nur dann ist eine solche Abbildung auch Automorphismus von $(F, +)$, wenn $r=p^a$ ist. Das kleinste Galoisfeld mit einem Automorphismus seiner multiplikativen Gruppe, der kein Automorphismus des Körpers ist, ist $GF(5)$; in ihm hat die Abbildung $\alpha\mapsto\alpha^3$ diese beiden Eigenschaften.

**Satz 4.17.** *Sei $V$ ein Fastvektorraum*[12] *mit Quasikern $Q$. Aus $u\in Q\setminus\{0\}$, $x\in V\setminus Fu$ und*

$$\alpha u+\beta x=\alpha' u+\beta' x \qquad (\alpha, \beta, \alpha', \beta'\in F) \tag{4.26}$$

*folgt $\alpha=\alpha'$ und $\beta=\beta'$.*

*Beweis.* Wir ergänzen gemäß der in § 3 gemachten Bemerkungen $u=:u_0$ zu einer Basis $B$ von $Q$. Nach Hilfssatz 4.5 gibt es eine Linearkombination $x=\sum_{i=0}^{r}\xi_i u_i$ mit $u_i\in B$. Wegen $x\notin Fu$ ist (o.B.d.A.) $\xi_1\neq 0$. Durch Anwendung von (4.26) und (2.2) erhalten wir

$$(\alpha+\underset{u_0}{\beta\xi_0})u_0+\sum_{i=1}^{r}\beta\xi_i u_i=(\alpha'+\underset{u_0}{\beta'\xi_0})u_0+\sum_{i=1}^{r}\beta'\xi_i' u_i.$$

Wegen der Eindeutigkeit dieser Darstellung (vgl. Hilfssatz 4.5) erhalten wir

$$\alpha+\underset{u_0}{\beta\xi_0}=\alpha'+\underset{u_0}{\beta'\xi_0}, \qquad \beta\xi_1=\beta'\xi_1.$$

Wegen $\xi_1\neq 0$ folgt $\beta=\beta'$ aus der zweiten Bedingung und hieraus $\alpha=\alpha'$ aus der ersten.

## § 5. Die Struktur regulärer Fastvektorräume

Um eine vollständige Übersicht über alle regulären Fastvektorräume (r.F.) zu gewinnen, beweisen wir zunächst folgende Ergänzung zu Satz 2.7.

**Satz 5.1.** *Genau dann ist ein Fastvektorraum $V$ regulär, wenn für den zu einem $u\in Q(V)\setminus\{0\}=Q\setminus\{0\}$ gehörenden Kern $R_u(V)=R_u$* (vgl. Definition 2.6) *gilt*

$$Q=\{\lambda v\mid\lambda\in F, v\in R_u\}=:FR_u. \tag{5.1}$$

*In diesem Fall gilt* (5.1) *für alle $u\in Q\setminus\{0\}$.*

[12] Es ist mir unbekannt, unter welchen schwächeren Voraussetzungen für $V$ dieser Satz noch gültig bleibt.

*Beweis.* (1) Sei $V$ regulär und $u, v \in Q \setminus \{0\}$. Ist $v \in Fu$, so $v \in FR_u$ wegen $u \in R_u$. Gilt $v \notin Fu$, so folgt $u + \lambda v \in Q$ für ein $\lambda \in F \setminus \{0\}$ wegen $u \,\mathrm{vt}\, v$; nach Hilfssatz 2.9 ist also $\lambda v \in R_u$, d.h. $v \in FR_u$. In jedem Fall gilt somit $Q \subseteq FR_u$; zusammen mit Satz 2.7 ergibt das (5.1).

(2) Sei umgekehrt (5.1) erfüllt für ein $u \in Q \setminus \{0\}$. Dann gibt es zu jedem $v \in Q \setminus \{0\}$ ein $v_0 \in R_u$ und ein $\alpha \in F \setminus \{0\}$ mit $v = \alpha v_0$. Wegen $u, v_0 \in R_u$ gilt wegen (2.7) auch

$$u + v_0 = u + \alpha^{-1} v \in R_u \subseteq Q,$$

d.h. $u \,\mathrm{vt}\, v$. Da $v$ beliebig aus $Q \setminus \{0\}$ sein konnte, besteht $Q \setminus \{0\}$ nur aus einer Äquivalenzklasse hinsichtlich der Relation vt, und $V$ ist deshalb regulär. Aus Beweisteil (1) folgt dann wiederum (5.1) für jedes $u \in Q \setminus \{0\}$.

**Satz 5.2** (Struktursatz für r.F.). *Genau dann ist eine F-Gruppe $(V, F)$ ein regulärer Fastvektorraum, wenn $F$ ein Fastkörper und $V$ isomorph zu $F^{(I)}$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation ist.* [Zur Definition von $F^{(I)}$ vgl. (4.1) und (4.2).]

*Beweis.* (1) Sei $V$ zu $F^{(I)}$ isomorph; o.B.d.A. also $V = F^{(I)}$. Ist $I = \varnothing$, so ist $V = \{0\}$ regulär; sei von nun an $I \neq \varnothing$ vorausgesetzt. Nach Satz 4.2 ist $F^{(I)}$ ein Fastvektorraum. Sei $v \in Q$. Nach Satz 4.4 gibt es ein $\lambda \in F$ und $\kappa_i \in K(F)$ mit $v = \lambda(\kappa_i)$. Ersichtlich gilt $R_{e_j} = \{(\kappa_i) | \kappa_i \in K\} =: R$ für alle $j \in I$, wobei

$$e_j := (\delta_{jk})_{k \in I}, \qquad \delta_{jk} \text{ Kronecker-Symbol}, \tag{5.2}$$

gesetzt ist. Hieraus folgt $Q = FR$, nach Satz 5.1 also die Regularität von $V$.

(2) Sei $V$ regulär und o.B.d.A. $\neq \{0\}$. Ferner sei $B = \{u_i\}_{i \in I}$ eine Basis von $Q$. Wegen Satz 5.1 gibt es $\lambda_i \in F \setminus \{0\}$, so daß $v_i := \lambda_i u_i \in R_{u_0}$ für ein $u_0 \in B$ gilt. Nach Hilfssatz 3.2 ist $B' := \{v_i\} \subseteq R_{u_0}$ eine Basis von $V$, und nach Hilfssatz 4.5 ist jedes $x \in V$ eindeutig darstellbar durch

$$x = \sum_{i \in I} \xi_i v_i \tag{5.3}$$

mit $\xi_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in I$. Nun definieren wir eine Abbildung $f\colon V \to F^{(I)}$ durch

$$f(x) := (\xi_i)_{i \in I}; \tag{5.4}$$

sie ist bijektiv und verträglich mit der Multiplikation. Wegen $v_i \in R_{u_0}$ gilt aber auch die Verträglichkeit von $f$ mit der Addition. Damit ist gezeigt, daß $f$ einen Isomorphismus von $V$ nach $F^{(I)}$ vermittelt.

Die folgenden beiden Sätze sind leicht nachzuprüfen.

**Satz 5.3** (Isomorphiesatz für r.F.). *Genau dann sind die r.F. $F^{(I)}$ und $F'^{(I')}$ zueinander isomorph, wenn $F \cong F'$ und $|I| = |I'|$ gilt*[13].

[13] Die letzte Aussage bedeutet gerade, daß die beiden Räume die gleiche Dimension haben (vgl. hierzu § 3).

**Satz 5.4.** *Für $I \neq \varnothing$ ist genau dann $F^{(I)}$ planar* [vgl. Definition 1.2, (F 5)], *wenn der Fastkörper $F$ planar ist, d.h. für $\beta \in F$ und $\alpha \in F \setminus \{1\}$ die Gleichung*

$$\alpha \xi = \xi + \beta \tag{5.5}$$

*nach $\xi \in F$ lösbar (und damit auch eindeutig lösbar) ist.*

Zum Schluß geben wir noch eine Kennzeichnung von Vektorräumen über Schiefkörpern; man findet sie im wesentlichen (aber mit anderem Beweis) auch in [1], Satz 1.2.

**Satz 5.5.** *Sei $(V, F)$ ein $F$-Fastvektorraum mit* Dim $V > 1$. *Genau dann ist $F$ ein Schiefkörper und $V$ Vektorraum darüber, wenn $V$ mit seinem Quasikern $Q(V)$ übereinstimmt.*

*Beweis.* (1) Ist $F$ Schiefkörper und $V$ Vektorraum über $F$, so gilt $V = Q(V)$.

(2) Sei umgekehrt $V = Q$ und außerdem Dim $V > 1$ vorausgesetzt. Dann gibt es ein $u \in Q \setminus \{0\}$. Wir zeigen zunächst $Q = R_u$. Für $v \in Q \setminus Fu$ folgt $v \in R_u$ aus Hilfssatz 2.9 wegen $v, u + v \in V = Q$. Sei nun $v \in Fu \setminus \{0\}$. Wegen Dim $V > 1$ gibt es ein $w \in Q \setminus Fu$, und wie eben folgt $w \in R_u$. Erneute Anwendung dieses Schlusses ergibt wegen $v \notin Fw$ auch $v \in R_u$, also $V = Q = R_u$. In $V$ gilt also auch das linksseitige Distributivgesetz $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ für alle $\alpha, \beta \in F$ und $x \in V$. Hieraus folgt das linksseitige Distributivgesetz für $F$ wegen

$$(\alpha + \beta) \gamma x = \alpha \gamma x + \beta \gamma x = (\alpha \gamma + \beta \gamma) x$$

und der Kürzungsregel. Somit ist $F$ Schiefkörper und $V$ Vektorraum über $F$.

*Bemerkungen.* (1) Für Dim $V = 1$ stimmt dieser Satz nicht, denn es gibt Fastkörper, die keine Schiefkörper sind.

(2) Der Satz bleibt gültig, wenn man die Voraussetzung, daß $V$ ein Fastvektorraum ist, abschwächt. Tatsächlich genügt es zu fordern, daß $V$ eine $F$-Gruppe ist; wegen $V = Q$ ist dann $V$ automatisch ein Fastvektorraum (vgl. Definition 4.1).

## Literatur

1. André, J.: Über unvollständige Fastkörper und verallgemeinerte affine Räume. Math. Z. **119**, 254–266 (1971)
2. André, J.: Some new results on incidence structures. Erscheint in: Proceedings of the „Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie", Rom (1973)
3. André, J.: Eine Kennzeichnung der Dilatationsgruppen desarguesscher affiner Räume als Permutationsgruppen. Erscheint in: Arch. der Math. **25** (1974)
4. Arnold, H.J.: Algebraische und geometrische Kennzeichnung der schwach affinen Vektorräume über Fastkörpern. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **32**, 73–88 (1968)

5. Bachmann, O.: Über eine Klasse verallgemeinerter affiner Räume. Unveröffentlichtes Mskr.
6. Baer, R.: Linear Algebra and Projective Geometry. New York, Academic Press 1952
7. Dembowski, P.: Finite Geometries. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968
8. Kerby, W.: On infinite sharply multiply transitive groups. Habilitationsschrift, Hannover 1972
9. Mirsky, L.: Transversal Theory. New York-London, Academic Press 1971
10. Passman, D.S.: Permutation groups. New York-Amsterdam: Benjamin 1968
11. Pickert, G.: Einführung in die höhere Algebra. Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht 1951
12. Pickert, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955
13. Pokropp, F.: Dicksonsche Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **30**, 188–219 (1967)
14. Tits, J.: Généralisations des groupes projectifs basée sur les propriétés de transitivité. Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. $8^0$ **27** (2), 115 (1952)
15. Waerden, B.L. van der: Algebra I, 7. Aufl., Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
16. Wähling, H.: Zur Theorie der Fastkörper. Habilitationsschrift, Hamburg 1972
17. Wielandt, H.: Finite permutation groups. New York-London, Academic Press 1964
18. Zassenhaus, H.: Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 17–40 (1934)
19. Zassenhaus, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **11**, 187–220 (1935)
20. Zemmer, J.L.: Nearfields planar and non-planar. Math. Student **32**, 145–150 (1964)

Prof. Dr. J. André
D-6600 Saarbrücken
Fachbereich Mathematik der Universität
Bundesrepublik Deutschland

*(Eingegangen am 18. Oktober 1973)*