Math. Z. 134, 181 – 188 (1973)

Biorthogonalität von Polynomen

Peter Lesky

Wir bezeichnen mit $y_n(x^s)$ ein Polynom n-ten Grades in x^s

$$y_n(x^s) = a_{n,n}\, x^{ns} + a_{n,n-1}\, x^{(n-1)s} + \cdots + a_{n,0} \qquad (s \in \mathbb{N};\ a_{n,k} \in \mathbb{R};\ a_{n,n} \neq 0) \tag{1}$$

und mit $z_m(x^t)$ ein Polynom m-ten Grades in x^t

$$z_m(x^t) = b_{m,m}\, x^{mt} + b_{m,m-1}\, x^{(m-1)t} + \cdots + b_{m,0} \qquad (t \in \mathbb{N};\ b_{m,i} \in \mathbb{R};\ b_{m,m} \neq 0). \tag{2}$$

Gilt für diese Polynome

$$\int_a^b p(x)\, y_n(x^s)\, z_m(x^t)\, dx = \begin{cases} \sigma_n(\neq 0) & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases} \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

mit einer „Gewichtsfunktion" $p(x)$, dann bilden die beiden Folgen $(y_n(x^s))$ und $(z_m(x^t))$ von Polynomen ein *Biorthogonalsystem* bezüglich $p(x)$ im Intervall (a, b). Neben der Integrierbarkeit von $p(x)$ setzen wir noch voraus, daß $p(x)$ für $a < x < b$ positiv ist.

Aus der Gleichung

$$\int_a^b p(x)\, y_n(x^s)\, z_n(x^t)\, dx = a_{n,n}\, b_{n,n} \int_a^b p(x) [x^{n(s+t)} + \cdots]\, dx$$

erkennt man, daß die Vorzeichen von $a_{n,n}$ und $b_{n,n}$ so gewählt werden können, daß alle σ_n positiv sind. Wir nehmen daher im folgenden stets $\sigma_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ an.

Die biorthogonalen Polynome lassen sich bekanntlich sukzessive mit Hilfe eines Verfahrens berechnen, das dem *Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren* entspricht. Wir wollen im Gegensatz dazu ein Verfahren beschreiben, das die direkte Bestimmung der biorthogonalen Polynome in der Gestalt von *Rodriguesformeln* gestattet.

Zu diesem Zweck benötigen wir zunächst einen metrischen Raum, den wir folgendermaßen aufbauen: Mit Hilfe der geordneten Paare (y_n, z_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ bilden wir mit der Addition

$$(y_n, z_n) + (y_m, z_m) := (y_n + y_m, z_n + z_m) \tag{4}$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot (y_n, z_n) := (\lambda y_n, \lambda z_n) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{5}$$

einen linearen Vektorraum über $\mathbb{R}$ (die Erfüllung der erforderlichen Eigenschaften ist einfach nachzuprüfen). In diesem linearen Vektorraum kann mit Hilfe von

$$\|(y_n, z_n)\| = \sqrt{\underbrace{\int_a^b p(x)\, y_n(x^s)\, z_n(x^t)\, dx}_{\sigma_n}} \tag{6}$$

eine *Norm* (*Länge*) des Vektors (y_n, z_n) eingeführt werden (ebenso leicht läßt sich zeigen, daß die Normeigenschaften erfüllt sind). Erklären wir noch in der üblichen Weise mit Hilfe der Norm den *Abstand* von je zwei Vektoren (y_n, z_n) und (y_m, z_m)

$$d[(y_n, z_n), (y_m, z_m)] = \|(y_n, z_n) - (y_m, z_m)\|, \tag{7}$$

so wird unser linearer Vektorraum zu einem metrischen Raum.

In diesem metrischen Raum können Aussagen über Vektoren von minimaler Länge gemacht werden. Solche Aussagen bilden die Grundlage zur Formulierung eines Variationsproblems, aus dem wir die biorthogonalen Polynome gewinnen werden (vgl. z.B. mit [1]). Dazu verwenden wir folgenden

Hilfssatz. *Sind für die Polynome $y_n(x^s)$ und $z_m(x^t)$ die Bedingungen* (3) *der Biorthogonalität mit $\sigma_n > 0$ erfüllt* $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$, *so hat unter den Vektoren*

$$(c_0\, y_0 + c_1\, y_1 + \cdots + c_{n-1}\, y_{n-1} + y_n,\; c_0\, z_0 + c_1\, z_1 + \cdots + c_{n-1}\, z_{n-1} + z_n) \tag{8}$$

$(c_k \in \mathbb{R})$ *derjenige mit $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ die minimale Länge.*

Der Beweis ist sehr einfach, denn für die Länge der Vektoren (8) ergibt sich mit Hilfe von (6) und (3)

$$\|(c_0\, y_0 + \cdots + y_n,\; c_0\, z_0 + \cdots + z_n)\| = c_0^2\, \sigma_0 + \cdots + c_{n-1}^2\, \sigma_{n-1} + \sigma_n$$

und daraus läßt sich wegen $\sigma_n > 0$ die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar ablesen.

Wir weisen darauf hin, daß die Umkehrung des Hilfssatzes nicht gilt. Diese könnte nur dann bewiesen werden, wenn für beliebige Polynome $y_n(x^s)$ und $z_m(x^t)$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ die beiden Integrale

$$\int_a^b p(x)\, y_n(x^s)\, z_m(x^t)\, dx \quad \text{und} \quad \int_a^b p(x)\, y_m(x^s)\, z_n(x^t)\, dx$$

denselben Wert hätten. Diese „Symmetrieeigenschaft" ist aber nicht erfüllt; daher war es auch nicht möglich, das in (6) stehende Integral in üblicher Weise als ein Skalarprodukt aufzufassen.

Obwohl unter den Vektoren (8) das Erreichen der minimalen Länge mit $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ für die Biorthogonalität nur notwendig (nicht hinreichend) ist, versuchen wir die Forderung

$$\int_a^b p(x)\, y_n(x^s)\, z_n(x^t)\, dx = \min! \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\frac{d^{ns}\, y_n(x^s)}{dx^{ns}} = a_{n,n}(ns)!, \qquad \frac{d^{nt}\, z_n(x^t)}{dx^{nt}} = b_{n,n}(nt)! \tag{10}$$

zu einem Variationsproblem zusammenzufassen. Wir bilden nach Lagrange

$$(\Omega =) \int_a^b \{p(x)\, y_n(x^s)\, z_n(x^t) + \lambda_n(x) [y_n^{(ns)}(x^s) - a_{n,n}(ns)!]$$
$$+ \mu_n(x) [z_n^{(nt)}(x^t) - b_{n,n}(nt)!]\}\, dx = \text{stat}!$$

mit Funktionen $x \to \lambda_n(x)$ und $x \to \mu_n(x)$, von denen wir die Erfüllung der im folgenden benötigten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften voraussetzen. Für die Ableitungen verwenden wir jetzt die abgekürzte Schreibweise mit hochgestellten Klammern.

Wir ersetzen nun die $y_n(x^s)$ durch $y_n(x^s) + \varepsilon h(x^s)$ bzw. die $z_n(x^t)$ durch $z_n(x^t) + \eta k(x^t)$, wobei die „Überlagerungsfunktionen" $x \to h(x^s)$ unserer Problemstellung entsprechend einem linearen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis $\{1, x^s, x^{2s}, \ldots\}$ bzw. die Überlagerungsfunktionen $x \to k(x^t)$ einem linearen Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit der Basis $\{1, x^t, x^{2t}, \ldots\}$ entnommen werden. Auch für diese Überlagerungsfunktionen werden wir einige Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften benötigen, deren Erfüllung wir ebenfalls annehmen. Wir erhalten somit

$$\Omega(\varepsilon, \eta) = \int_a^b \{p(y_n + \varepsilon h)(z_n + \eta k) + \lambda_n [(y_n + \varepsilon h)^{(ns)} - a_{n,n}(ns)!]$$
$$+ \mu_n [(z_n + \eta k)^{(nt)} - b_{n,n}(nt)!]\}\, dx.$$

Wird auch noch $p(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ stetig vorausgesetzt, dann kann unter dem Integral nach ε bzw. η differenziert werden und es ergeben sich folgende Gleichungen zur Berechnung des stationären Wertes von Ω:

$$\left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0, \eta=0} = \right] \int_a^b [p h z_n + \lambda_n h^{(ns)}]\, dx = 0, \tag{11}$$

$$\left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)_{\varepsilon=0, \eta=0} = \right] \int_a^b [p k y_n + \mu_n k^{(nt)}]\, dx = 0. \tag{12}$$

Wir formen nun die beiden Integrale durch sukzessive partielle Integration derart um, daß die Ausklammerung der willkürlich gewählten $h(x^s)$ und $k(x^t)$ aus den Integranden gelingt:

$$\int_a^b [p z_n + (-1)^{ns} \lambda_n^{(ns)}] h\, dx \\ + [\lambda_n h^{(ns-1)} - \lambda_n' h^{(ns-2)} + \cdots + (-1)^{ns-1} \lambda_n^{(ns-1)} h]_a^b = 0, \tag{13}$$

$$\int_a^b [p y_n + (-1)^{nt} \mu_n^{(nt)}] k\, dx \\ + [\mu_n k^{(nt-1)} - \mu_n' k^{(nt-2)} + \cdots + (-1)^{nt-1} \mu_n^{(nt-1)} k]_a^b = 0. \tag{14}$$

Für diesen Schritt sind gewisse Differenzierbarkeitseigenschaften der Überlagerungsfunktionen $x \to h(x^s)$ bzw. $x \to k(x^t)$ und der Funktionen $x \to \lambda_n(x)$ bzw. $x \to \mu_n(x)$ erforderlich, deren Erfüllung wir oben vorausgesetzt haben. Beschränken wir uns auf solche Überlagerungsfunktionen, für die in (13) bzw. (14) außerhalb der Integrale stehenden Teile null werden, so kann bezüglich dieser Funktionen das Lemma der Variationsrechnung (vgl. z.B. [2]) angewandt werden und wir erhalten für $a < x < b$

$$z_n(x^t) = \frac{(-1)^{ns+1} \lambda_n^{(ns)}(x)}{p(x)}, \quad y_n(x^s) = \frac{(-1)^{nt+1} \mu_n^{(nt)}(x)}{p(x)} \tag{15}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Gelingt die Berechnung der $\lambda_n(x)$ und $\mu_n(x)$ und läßt sich die Biorthogonalität der Polynome $z_m(x^t)$ und $y_n(x^s)$ nachweisen (für $z_0(x^t)$ bzw. $y_0(x^s)$ ist einfach eine Konstante zu setzen), dann liegen mit den Gln. (15) bereits *Rodriguesformeln* für die biorthogonalen Polynome vor.

Die Bestimmung der $\lambda_n(x)$ und $\mu_n(x)$ kann folgendermaßen erfolgen: Mit Hilfe der Nebenbedingungen (10) erhalten wir nach (nt)-maliger bzw. (ns)-maliger Differentiation von (15) die Differentialgleichungen

$$\left[\frac{(-1)^{ns+1} \lambda_n^{(ns)}(x)}{p(x)}\right]^{(nt)} = b_{n,n} (nt)!, \tag{16}$$

$$\left[\frac{(-1)^{nt+1} \mu_n^{(nt)}(x)}{p(x)}\right]^{(ns)} = a_{n,n} (ns)!, \tag{17}$$

falls auch von $x \to p(x)$ die Erfüllung der entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften vorausgesetzt wird. Zu diesen Differentialgleichungen ergeben sich für $\lambda_n(x)$ und $\mu_n(x)$ aus den in (13) und (14) außerhalb der Integrale stehenden Teilen Randbedingungen, indem fortgesetzt mit speziellen $h(x^s)$ und $k(x^t)$ gearbeitet wird. Weitere Bedingungen entstehen aus der Forderung nach der speziellen Gestalt der Polynome. Mit Hilfe der Randbedingungen und dieser Bedingungen ist dann eine (bis auf einen von n abhängenden Faktor) eindeutige Bestimmung der

$\lambda_n(x)$ und $\mu_n(x)$ möglich. Diese Vorgangsweise werden wir in einem besonders wichtigen Spezialfall näher beschreiben.

Sowohl unser Hilfssatz als auch die Berechnung eines stationären Wertes von Ω garantieren noch nicht, daß die entstehenden Polynome biorthogonal sind. Die Erfüllung von (3) läßt sich aber sehr einfach dadurch nachweisen, daß eines der im Integral stehenden Polynome nach der Rodriguesformel ersetzt wird und sukzessive partielle Integration erfolgt.

Als angekündigtes Beispiel behandeln wir den Fall $s=1$, $t=2$, wobei Biorthogonalität bezüglich $p(x)=e^{-x}$ in $(0,\infty)$ bestehen soll. Die Differentialgleichung (16) und die sich aus (13) ergebenden Regularitätsbedingungen und Randbedingungen

$$\lambda_n(0)=\lambda_n'(0)=\cdots=\lambda_n^{(n-1)}(0)=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{18}$$

erfüllen wir mit dem Ansatz

$$\lambda_n(x)=C(n)\,e^{-x}\,x^n[x^n+a_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+a_0],$$

in dem $C(n)$ einen von n abhängenden Faktor bedeutet. Da $\lambda_n(x)$ in der Rodriguesformel für $z_n(x^2)$ steht, darf $e^x\lambda_n^{(n)}(x)$ nur gerade x-Potenzen enthalten. Diese Forderung führt auf das lineare Gleichungssystem

$$a_{n-2j+1}-\binom{n}{1}\binom{2n-2j+2}{1}a_{n-2j+2}+\binom{n}{2}\binom{2n-2j+3}{2}2!\,a_{n-2j+3}-+\cdots$$
$$+\binom{n}{2j-2}\binom{2n-1}{2j-2}(2j-2)!\,a_{n-1}=\binom{n}{2j-1}\binom{2n}{2j-1}(2j-1)!$$
$$(j=1,2,3,\ldots,n;\ a_n=1;\ a_{n+k}=0 \text{ für } k\in\mathbb{N}),$$

aus dem sich die (eindeutig bestimmten) Lösungselemente

$$a_{n-k}=\binom{n}{k}\binom{2n}{k}k! \qquad (k=0,1,2,\ldots,n)$$

ergeben. Damit erhalten wir

$$\lambda_n(x)=C(n)\,e^{-x}\,x^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{k}k!\,x^{n-k}$$
$$=C(n)\,e^{-2x}\frac{d^n}{dx^n}[e^x\,x^{2n}] \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

und nach (15) die Polynome

$$\begin{aligned} z_n(x^2)&=(-1)^{n+1}\,e^x\,\lambda_n^{(n)}(x)\\ &=-C(n)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n}{2k}(2k)!\,x^{2n-2k} \qquad (n=0,1,2,\ldots). \end{aligned} \tag{19}$$

Für $\mu_n(x)$ ergeben sich aus (14) wegen der speziellen Gestalt der Überlagerungsfunktionen $(k(x^2)=1, x^2, x^4, \ldots)$ im Gegensatz zu (18) die Randbedingungen

$$\mu_n'(0)=\mu_n'''(0)=\cdots=\mu_n^{(2n-1)}(0)=0 \qquad (n=1,2,3,\ldots). \tag{20}$$

Wir setzen jetzt zur Erfüllung von (17) und (14)

$$\mu_n(x)=D(n)\,e^{-x}[x^n+b_{n-1}\,x^{n-1}+\cdots+b_0]$$

mit einem von n abhängendem Faktor $D(n)$. Die Bedingungen (20) führen auf das lineare Gleichungssystem

$$b_{2j-1}-b_{2j-2}+\frac{b_{2j-3}}{2!}-\frac{b_{2j-4}}{3!}+-\cdots-\frac{b_0}{(2j-1)!}=0$$

$$(j=1,2,3,\ldots,n;\; b_n=1;\; b_{n+k}=0 \text{ für } k\in\mathbb{N})$$

mit den (eindeutig bestimmten) Lösungselementen

$$b_k=\frac{2^{k-n}\,n!}{k!}\binom{2n-k}{n} \qquad (k=0,1,2,\ldots,n).$$

Damit erhalten wir

$$\mu_n(x)=D(n)\,e^{-x}\,n!\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k-n}}{k!}\binom{2n-k}{n}x^k$$

und nach (15) die Polynome

$$\begin{aligned} y_n(x)&=-e^x\,\mu_n^{(2n)}(x)\\ &=-D(n)\sum_{k=0}^{n}c_{n-k}\,x^{n-k}\end{aligned} \tag{21}$$

mit

$$c_{n-k}=\binom{n}{k}k!\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\,2^{j-k}\binom{n+k-j}{n}\binom{2n}{j} \qquad (n=0,1,2,\ldots). \tag{21'}$$

Zur Überprüfung der Biorthogonalität berechnen wir erstens für $m\geqq n$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,y_n(x)\,z_m(x^2)\,dx&=(-1)^{m+1}\int_0^\infty y_n(x)\,\lambda_m^{(m)}(x)\,dx\\ &=(-1)^{m+1}[y_n(x)\,\lambda_m^{(m-1)}(x)-y_n'(x)\,\lambda_m^{(m-2)}(x)+-\cdots\\ &\quad+(-1)^{m-1}\,y_n^{(m-1)}(x)\,\lambda_m(x)]_0^\infty-\int_0^\infty y_n^{(m)}(x)\,\lambda_m(x)\,dx.\end{aligned}$$

Da $\lambda_m(x)$ den Faktor e^{-x} enthält und die Randbedingungen (18) erfüllt, ist der Ausdruck in der eckigen Klammer null. Für $m>n$ gilt ferner $y_n^{(m)}(x)=0$, also hat das Ausgangsintegral für $m>n$ den Wert null.

Zweitens berechnen wir für $m \leqq n$

$$\int_0^\infty e^{-x} y_n(x) z_m(x^2)\, dx = -\int_0^\infty \mu_n^{(2n)}(x) z_m(x^2)\, dx$$
$$= -[\mu_n^{(2n-1)}(x) z_m(x^2) - \mu_n^{(2n-2)}(x) z_m'(x^2) + - \cdots$$
$$- \mu_n(x) z_m^{(2n-1)}(x^2)]_0^\infty - \int_0^\infty \mu_n(x) z_m^{(2n)}(x)\, dx.$$

Da $\mu_n(x)$ den Faktor e^{-x} enthält, die Randbedingungen (20) erfüllt und da außerdem $z_m'(0) = z_m'''(0) = \cdots = z_m^{(2n-1)}(0) = 0$ gilt, ist auch hier der Ausdruck in der eckigen Klammer null. Für $m < n$ haben wir ferner $z_m^{(2n)}(x^2) = 0$, also hat das Ausgangsintegral wieder den Wert null.

Schließlich berechnen wir für $m = n$

$$\int_0^\infty y_n^{(n)}(x) \lambda_n(x)\, dx = -n!\, D(n)\, C(n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{2n}{k} k! \int_0^\infty e^{-x} x^{2n-k}\, dx$$
$$= -n!\,(2n)!\, 2^n\, C(n)\, D(n);$$

denselben Wert muß auch das folgende Integral liefern:

$$\int_0^\infty \mu_n(x) z_n^{(2n)}(x^2)\, dx = -(2n)!\, C(n)\, D(n) \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-n} n!}{k!} \binom{2n-k}{n} \int_0^\infty e^{-x} x^k\, dx$$
$$= -n!\,(2n)!\, 2^n\, C(n)\, D(n)$$

und daher ist

$$\left(\int_0^\infty e^{-x} y_n(x) z_n(x^2)\, dx = \right) n!\,(2n)!\, 2^n\, C(n)\, D(n) = \sigma_n \tag{22}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Wird σ_n vorgegeben (z.B. $\sigma_n = 1$), dann lassen sich $C(n)$ und $D(n)$ entsprechend festlegen. Damit ist die Erfüllung aller Biorthogonalitätseigenschaften nachgewiesen.

Die mit (19), (21), (21′) und (22) vorliegenden biorthogonalen Polynome stellen einen Spezialfall der Polynome von *Spencer* und *Fano* [3] dar (im allgemeinen Fall ist die Gewichtsfunktion $p(x) = x^\alpha e^{-x}$ mit $\alpha > -1$). Diese Polynome sind Lösungen von linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung

$$a(x)\, v'''(x) + b(x)\, v''(x) + c(x)\, v'(x) + d_n\, v(x) = 0 \tag{23}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$, in denen nur der Koeffizient d_n vom Grad n des Lösungspolynoms abhängt. Betrachtet man den Fall $s = 1$, $t = 2$ mit $p(x) = 1$ in einem endlichen Intervall, so ergeben sich die biorthogonalen Polynome als Lösungen von Differentialgleichungen der Art (23), in denen auch $b(x)$ und $c(x)$ von n abhängen. Die Behandlung einiger damit zusammenhängender Probleme sowie Fragen der Approximierbarkeit durch biorthogonale Polynome sollen Gegenstand einer weiteren Arbeit sein.

References

1. Gröbner, W.: Über die Konstruktion von Systemen orthogonaler Polynome in ein- und zweidimensionalen Bereichen. Monatsh. Math. **52**, 38 – 54 (1948)
2. Gröbner, W., Lesky, P.: Mathematische Methoden der Physik I. BI Hochschultaschenbuch 89 Mannheim: Bibliographisches Institut 1964
3. Preiser, St.: An Investigation of Biorthogonal Polynomials Derivable from Ordinary Differential Equations of the Third Order. J. math. Analyis Appl. **4**, 38 – 64 (1962)

Prof. Dr. P. Lesky
Mathematisches Institut A
Universität Stuttgart
D-7000 Stuttgart N
Herdweg 23
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 4. Oktober 1973)