Math. Z. 132, 21—28 (1973)

Maß und Kategorie von Summenmengen

Dietmar Kahnert

In der vorliegenden Note werden folgende Sätze (1) und (2) bewiesen, denen eine separable, metrisierbare, lokalkompakte Gruppe G zugrunde liegt:

(1) *Zu jeder Teilmenge A von 1. Kategorie in G gibt es eine perfekte Menge B, so daß auch noch $A+B$ von 1. Kategorie ist.*

(2) *Ist A eine perfekte Teilmenge einer nichtdiskreten Gruppe G, dann existiert eine perfekte Menge B von 1. Kategorie derart, daß $A+B$ eine Umgebung der Null enthält.*

Die Aussage (1) stellt ein Kategorie-Analogon zu einem maßtheoretischen Ergebnis von Taylor dar (s. [4], Fall $G=\mathbb{R}_n$).

1. Bezeichnungen

Ist (G,d) eine lokalkompakte, metrische Gruppe, so sei μ ein festes Haar-Maß auf G, $U(0)$ das System der abgeschlossenen symmetrischen Umgebungen der Null und $K(x,r)=\{y\in G\colon d(x,y)\leqq r\}$. Auf $G^n=G\times G\times\cdots\times G$ werde folgende Metrik d_n eingeführt:

$$d_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_i) \quad \text{für } x=(x_i),\ y=(y_i)\in G^n.$$

Für Teilmengen A, B und G und $x\in G$ sei

$$A+B=\{a+b\colon a\in A, b\in B\}, \qquad A+x=A+\{x\},$$

$$x+A=\{x\}+A, \qquad -A=\{-a\colon a\in A\},$$

$$G_1(A)=A, \qquad G_{n+1}(A)=G_n(A)+(-1)^{n+1}A \qquad (n=1,2,\ldots),$$

$$A^*=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n(A).$$

Im Unterschied zu $A-B=A+(-B)$ bezeichne $A\setminus B$ die mengentheoretische Differenz. Sei $\bar{A}$ die Hülle, $\underline{A}$ der Kern von A. Schließlich sei $\mathbb{R}_n$ der n-dimensionale euklidische Raum, $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

2. Summenmengen von 1. Kategorie

Taylor [4] bewies, daß zu jeder Menge A reeller Zahlen vom Lebesgue-Maß Null ($L(A)=0$) eine perfekte Menge B existiert, so daß auch das 1-dimensionale Hausdorff-Maß von $A \times B$ verschwindet. Speziell folgt, daß $L(A+B)=0$ ist. Nach einer in [1] erwähnten Methode kann man B darüber hinaus so konstruieren, daß sogar $L(A+B^*)=0$ gilt. Dieses letzte Ergebnis soll nun „dualisiert" werden. Damit ist gemeint, daß die Begriffe „vom Maß Null" und „von 1. Kategorie" an allen auftretenden Stellen vertauscht werden. In vielen Fällen erhält man dann wieder richtige Ergebnisse. Eine sehr gute Darstellung dieses Sachverhaltes findet sich in einem Buch von Oxtoby [2]. Statt der Gruppe $\mathbb{R}_1$ betrachten wir hier eine beliebige separable, vollständige metrische Gruppe G.

Satz 1. *Zu jeder Teilmenge A von 1. Kategorie in G gibt es eine perfekte Menge B, so daß $A+B^*$ von 1. Kategorie ist.*

Hilfssatz 1. *Sei X eine nirgends dichte Teilmenge von G. Dann gibt es zu Elementen $x_1, x_2, \dots, x_m$ und nichtleeren offenen Mengen $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ ein $r>0$, so daß für $i=1,2,\dots,k$ die Menge*

$$Z_i \setminus \left(X + \bigcup_{j=1}^{m} K(x_j, r) \right)$$

nichtleer ist.

Beweis. Da $\bigcup_{j=1}^{m} (X+x_j)$ nirgends dicht ist, enthält jede der Mengen Z_i eine Menge $y_i + U_i$ ($U_i \in U(0)$), die zu $\bigcup_{j=1}^{m} (X+x_j)$ fremd ist. Sei $V \in U(0)$ mit $V - V \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Dann ist

$$(y_i + V) \cap \left(X + \bigcup_{j=1}^{m} (x_j + V) \right) = \emptyset$$

für $i=1,2,\dots,k$. Wählt man $r>0$ derart, daß

$$K(x,r) \subset x + V \quad \text{für } x \in \{x_1, x_2, \dots, x_m;\ y_1, y_2, \dots, y_m\}$$

gilt, so sind die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt.

Beweis von Satz 1. Da A von 1. Kategorie ist, gibt es eine nicht fallende Folge (A_i) abgeschlossener, nirgends dichter Mengen mit

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Sei $\{Z_i\colon i=1,2,\dots\}$ eine Basis der offenen Mengen von G. Induktiv werden nun eine Mengenfolge (S_n) und Folgen (r_n), (s_n) positiver reeller Zahlen definiert.

Sei $x_1=0$, $x_2\neq 0$ und $S_1=\{x_1, x_2\}$. Nach Hilfssatz 1 gibt es ein $r_1>0$, so daß

(1) $$Z_1 \setminus \left(A_1+\bigcup_{x\in S_1} K(x, r_1)\right) \neq \varnothing$$

gilt. Sei $s_1=r_1$.

Sind für $n\geqq 2$ bereits eine Menge

$$S_{n-1}=\{x_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\colon\ i_m=0, 1;\ m=1, 2, \ldots, k;\ k=0, 1, \ldots, n-1\}$$

und positive reelle Zahlen r_{n-1} und s_{n-1} definiert, so wählen wir 2^n Elemente $x_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ in folgender Weise:

$$x_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 0}=x_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}},$$

$$x_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, 1}\in K(x_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}, s_{n-1})\setminus S_{n-1}.$$

Ist S_n entsprechend wie oben erklärt, dann wählen wir ein $r_n>0$:

$$3r_n<\min\{d(x, y)\colon\ x, y\in S_n,\ x\neq y\},$$

(2) $$Z_i \setminus \left(A_n+\bigcup_{x\in G_n(S_n)} K(x, r_n)\right)\neq\varnothing \qquad \text{für } i=1, 2, \ldots, n.$$

Da die Abbildung $f_n\colon (z_1, z_2, \ldots, z_n)\to z_1-z_2+-\cdots+(-1)^{n+1}z_n$ von G^n in G stetig ist, gibt es ein $s_n>0$, so daß für alle $y\in(S_n)^n$ und für alle $z\in G^n$ die Implikation

$$d_n(z, y)<s_n \Rightarrow d\big(f_n(z), f_n(y)\big)<r_n$$

gilt.

Wir definieren

$$B(n)=\bigcup_{x\in S_n} K(x, s_n/n) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

und

$$B=\bigcap_{n=1}^{\infty} B(n).$$

Dann ist B perfekt, kompakt und nirgends dicht. Induktiv definieren wir

$$B_{n,1}=B(n),$$

$$B_{n,k+1}=B_{n,k}+(-1)^k B(n) \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

und

$$B_k=\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{n,k}.$$

Dann gilt

$$B-B+-\cdots+(-1)^{k-1}B\subset B_k$$

und

$$B^*\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Also ist

$$A+B^*\subset\bigcup_{k=1}(A_k+B_k).$$

Damit genügt es zu zeigen, daß die Mengen A_k+B_k nirgends dicht sind. Sei k fest gewählt. Für alle $n \geqq k$ gilt nun

$$A_k+B_k \subset A_n+B_{n,k} \subset A_n+B_{n,n}.$$

Ferner ist

$$B_{n,n} \subset \bigcup_{x \in G_n(S_n)} K(x, r_n) \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Denn sei $b=b_1-b_2+-\cdots+(-1)^{n+1}b_n$ mit $b_j \in B(n)$ für $j=1,2,\ldots,n$. Dann gibt es Elemente $y_j \in S_n$ mit

$$d(b_j, y_j) < s_n/n.$$

Also ist

$$d_n((b_1, b_2, \ldots, b_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) < s_n.$$

Setzt man $y=y_1-y_2+-\cdots+(-1)^{n+1}y_n$, dann ist $y \in G_n(S_n)$ und $d(b, y) < r_n$.

Nach (2) gilt damit

$$Z_i \setminus (A_k+B_k) \neq \varnothing \qquad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Folglich ist die Menge $A_k+B_k=\overline{A_k+B_k}$ nirgends dicht.

Korollar 1. *Die Gruppe G enthält eine perfekt erzeugte Untergruppe 1. Kategorie.*

Bemerkungen zu Satz 1. a) Ist P eine beliebige perfekte Teilmenge von G, so kann B als Teilmenge von P gewählt werden.

b) Im Falle $G=\mathbb{R}_n$ kann man B als „regelmäßige Cantormenge“ konstruieren.

3. Summenmengen vom Maß Null

Ist G eine separable, metrisierbare, lokalkompakte Gruppe und μ ein Haar-Maß auf G, dann gibt es vermutlich zu jeder μ-Nullmenge A eine perfekte Menge B mit $\mu(A+B^*)=0$. Die Existenz einer derartigen Menge B wird hier jedoch lediglich für F_σ-Mengen A gezeigt. Der Beweis des folgenden Satzes verläuft ganz „dual“ zum Beweis von Satz 1.

Satz 1'. *Zu jeder F_σ-Menge A mit $\mu(A)=0$ gibt es eine perfekte Menge B, so daß $\mu(A+B^*)=0$ ist.*

An die Stelle von Hilfssatz 1 tritt folgende Überlegung.

Hilfssatz 1'. *Sei X kompakt, $\mu(X)=0$ und $q>0$. Dann gibt es zu Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ eine positive reelle Zahl $r>0$, so daß*

$$\mu\left(X+\bigcup_{j=1}^{m} K(x_j, r)\right) < q$$

ist.

Beweisskizze zu Satz 1'. Es gibt eine nicht fallende Folge (A_i) kompakter Nullmengen mit $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Im weiteren tritt gegenüber dem Beweis von Satz 1 die Aussage (1') an die Stelle von (1), (2') an die von (2):

$$\mu\Big(A_1 + \bigcup_{x \in S_1} K(x, r_1)\Big) < 1, \tag{1'}$$

$$\mu\Big(A_n + \bigcup_{x \in G_n(S_n)} K(x, r_n)\Big) < 1/n. \tag{2'}$$

Später genügt es zu zeigen, daß stets

$$\mu(A_k + B_k) = 0$$

ist. Da für alle $n \geqq k$ die Inklusion

$$A_k + B_k \subset A_n + \bigcup_{x \in G_n(S_n)} K(x, r_n)$$

besteht, folgt aus (2') die Behauptung.

Das folgende Korollar folgt natürlich auch schon aus Korollar 1, da perfekte Mengen mit positivem Maß die Gruppe G erzeugen.

Korollar 1'. *Die Gruppe G enthält eine perfekt erzeugte Untergruppe vom Haar-Maß Null.*

Bemerkung. Die Korollare 1 und 1' sind vermutlich wohlbekannt. Ist insbesondere G abelsch, so nennt man eine Teilmenge B von G unabhängig, wenn für je n verschiedene Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von B und ganze Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ aus $z_1 x_1 + z_2 x_2 + \cdots + z_n x_n = 0$ stets $z_1 x_1 = z_2 x_2 = \cdots = z_n x_n = 0$ folgt. Jede nichtdiskrete, lokalkompakte abelsche Gruppe enthält eine kompakte, perfekte unabhängige Menge B (s. [3], S. 103). Eine derartige Menge B erzeugt eine Gruppe vom Haar-Maß Null (s. [3], S. 108).

4. Summenmengen von 2. Kategorie

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß die nichtdiskrete, separable, metrische Gruppe G lokalkompakt ist.

Von Taylor [4] stammt die Frage, ob es eine überabzählbare Menge reeller Zahlen gibt, so daß für jede Lebesgue-Nullmenge B das 1-dimensionale Hausdorff-Maß von $A \times B$ verschwindet. Existiert eine derartige Menge A, so gilt speziell für alle Mengen B mit $L(B) = 0$ auch $L(A + B) = 0$. Damit stellt sich folgendes „einfachere“ Problem, formuliert für Gruppen G obiger Art.

Frage 1. Gibt es eine überabzählbare Teilmenge X von G, so daß für alle Mengen Y mit $\mu(Y) = 0$ auch noch $\mu(X + Y) = 0$ ist?

Wir gehen hier nur auf das „duale“ Problem ein.

Frage 2. Gibt es eine überabzählbare Menge A, so daß für alle Mengen B von 1. Kategorie auch noch $A+B$ von 1. Kategorie ist?

Der folgende Satz zeigt, daß eine derartige Menge A zumindest nicht perfekt sein kann.

Satz 2. *Zu jeder perfekten Menge A gibt es eine perfekte Menge B von 1. Kategorie, so daß $A+B$ eine Umgebung der Null enthält.*

Hilfssatz 2. *Ist O eine nichtleere offene Menge, U eine kompakte Menge, $x \in G$ und gilt*

$$A+O \supset U,$$

so gibt es eine Kugel $K(x, r)$ mit

$$A+(O \setminus K(x,r)) \supset U.$$

Beweis. Es gilt

$$A+\bigcup_{V \in U(0)} (O \setminus (V+x)) \supset U.$$

Denn sei $y \in U$. Dann gibt es Elemente $a \in A$, $b \in O$ mit $y=a+b$. Falls $b \neq x$ ist, gibt es ein $V \in U(0)$ mit

$$b \in O \setminus (V+x).$$

Ist $b=x$, so wählen wir ein $U \in U(0)$ mit $U+x \subset O$. Da A insichdicht ist, gibt es ein Element $a' \in A \setminus \{a\}$ mit $a' \in a+U$. Sei

$$b'=-a'+a+b,$$

also

$$a'+b'=a+b \quad \text{und} \quad b' \neq x.$$

Dann ist

$$-a' \in -U-a=U-a \quad \text{und} \quad -a'+a \in U,$$

also

$$b' \in U+x \subset O.$$

Dann schließt man wie im ersten Fall.

Weil die Mengen $O \setminus (V+x)$ offen sind, gibt es, da U kompakt ist, endlich viele $V_i \in U(0)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ mit

$$A+\bigcup_{i=1}^{m} (O \setminus (V_i+x)) \supset U.$$

Wählt man $r>0$, so daß

$$K(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{m} (V_i+x)$$

ist, dann ergibt sich die Behauptung.

Beweis von Satz 2. Ist A von 2. Kategorie, so ist nichts zu beweisen. Sei also A von 1. Kategorie. Wir wählen eine Basis $\{Z_i\colon i=1,2,\ldots\}$ der offenen Mengen von G, eine kompakte Umgebung U der Null und eine nichtleere offene, relativkompakte Menge O, so daß $A+O\supset U$ gilt.

Induktiv wird nun eine absteigende Folge (O_n) offener Mengen, sowie eine Mengenfolge (K_n) definiert. Ist $Z_1\cap O=\emptyset$, so sei $K_1=\emptyset$. Andernfalls gibt es nach Hilfssatz 2 eine Kugel K_1 mit

$$K_1\subset Z_1\cap O$$

und

$$A+(O\setminus K_1)\supset U.$$

Wir setzen $O_1=O\setminus K_1$.

Seien nun für $n\geqq 1$ bereits offene Mengen $O_1, O_2, \ldots, O_n$ und Mengen $K_1, K_2, \ldots, K_n$ so definiert, daß

$$A+O_i\supset U \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

gilt. Ist $O_n\cap Z_n=\emptyset$, so sei $K_{n+1}=\emptyset$. Andernfalls gibt es eine Kugel K_{n+1} mit

$$K_{n+1}\subset Z_n\cap O_n$$

und

$$A+(O_n\setminus K_{n+1})\supset U.$$

Sei

$$O_{n+1}=O_n\setminus K_{n+1}.$$

Wir setzen

$$C(n)=\bar{O}_n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

und

$$C=\bigcap_{n=1}^{\infty} C(n).$$

Die Menge C ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\bar{O}$, also kompakt, und es gilt

$$A+C=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A+C(n))\supset U.$$

Angenommen, C enthalte eine Basismenge Z_i. Dann ist

$$Z_i\setminus C(n)=\emptyset \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Andererseits gilt

$$Z_i\setminus O_i\supset K_i.$$

Ist $K_i\neq\emptyset$, so folgt

$$Z_i\setminus O_i\supset \underline{K_i}\neq\emptyset.$$

Im Falle $K_i=\emptyset$ ist $Z_i\cap O_i=\emptyset$. Damit gilt auch dann

$$Z_i\setminus\bar{O}_i=Z_i\setminus C(i)\neq\emptyset.$$

Folglich ergibt sich ein Widerspruch. Also ist C nirgends dicht.

Die Menge C ist überabzählbar, da sonst $A+C$ von 1. Kategorie wäre. Nach dem Satz von Cantor-Bendixson ist C zerlegbar in eine abzählbare Menge C_1 und in eine perfekte Menge C_2. Die Menge C_1 ist in einer perfekten, nirgends dichten Menge C_3 enthalten. Die Menge

$$B = C_2 \cup C_3$$

leistet dann das Gewünschte.

Bemerkungen. 1) Im Fall $G = \mathbb{R}_n$ kann C als „regelmäßige Cantormenge" konstruiert werden.

2) Man kann die Folge (K_n) so wählen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) < \mu(O)$$

ist, also $\mu(B) > 0$ wird.

Herrn W. Dürr bin ich für einen Hinweis zum Beweis von Satz 1 sehr dankbar.

Literatur

1. Kahnert, D.: Metrische Dimensionsfunktionen. Math. Z. **127**, 127—137 (1972).
2. Oxtoby, J.C.: Maß und Kategorie. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971.
3. Rudin, W.: Fourier analysis on groups. New York: Interscience 1962.
4. Taylor, S.J.: On Cartesian product sets. J. London math. Soc. **27**, 295—304 (1952).

Dietmar Kahnert
Mathematisches Institut
D-7000 Stuttgart, Herdweg 21
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 13. November 1972)