Werk

Titel: Bemerkungen zum Regularitätsproblem der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krüm...

Autor: Tomi, Friedrich

Jahr: 1973

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0132|log37

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 132, 323–326 (1973)
© by Springer-Verlag 1973

Bemerkungen zum Regularitätsproblem der Gleichung vorgeschriebener mittlerer Krümmung

Friedrich Tomi

Bei gewissen geometrisch und physikalisch interessanten Variationsaufgaben für zweidimensionale Flächen im $\mathbb{R}^3$ tritt die Gleichung

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v \tag{1}$$

als Euler-Lagrangesche Variationsgleichung auf [2]. Hierbei ist $x = x(u, v)$ der Ortsvektor einer Fläche, $\wedge$ bezeichnet das Vektorprodukt des $\mathbb{R}^3$, und H ist eine vorgegebene Funktion. Sind die Parameter von x konform, so hat die Gl. (1) geometrische Bedeutung; sie besagt dann nämlich, daß die mittlere Krümmung der Fläche x im Punkte $x(u, v)$ gerade den Wert $H(x(u, v))$ hat. Da die Lösungen der erwähnten Variationsaufgaben zunächst nur im Sobolev-Raum $W^{1,2}$ liegen, stellt sich die Frage nach der Regularität der schwachen Lösungen von (1). Die klassischen Regularitätssätze von Morrey [3] sind auf das System (1) nicht anwendbar – es sei denn, man setzt für die Lösung schon Stetigkeit oder Kleinheit der Oszillation voraus. Gerade dies soll hier aber vermieden werden. Für den Fall $H = \text{const}$ hat Wente [6] die Regularität der schwachen Lösungen von (1) gezeigt. Wir beschäftigen uns hier mit der Übertragung dieses Resultats auf den allgemeinen Fall. Wie Wente erkannt hat, ist die klassische isoperimetrische Ungleichung [4] die entscheidende Grundlage für die Behandlung der Gl. (1). Bekanntlich ist diese Ungleichung recht schwierig zu beweisen. In dem vorstehenden Artikel [1] hat jedoch Heinz eine Version der isoperimetrischen Ungleichung auf völlig elementarem Weg abgeleitet. Der Heinzsche Beweis liefert zwar nicht die optimale Abschätzkonstante, jedoch ist dies hier ohne Bedeutung. Wie der Leser feststellen wird, ergibt sich damit ein sehr einfacher Zugang zu dem Regularitätsproblem der Gl. (1).

Satz 1. *Es sei G eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, die Vektorfunktion x gehöre zu $W^{1,2} \cap L_\infty(G, \mathbb{R}^3)$ und sei eine schwache Lösung des Systems* (1). *Wir nehmen ferner an, daß die Funktion H auf $\mathbb{R}^3$ lokal Lipschitz-stetig ist. Dann gilt*

$$x \in C^{2+\alpha}(G) \quad \textit{für jedes } \alpha \in (0, 1).$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß x in G lokal hölderstetig ist, da die höhere Regularität dann aus Resultaten von Morrey ([3], 5.4) folgt (vgl. auch [5]).

Für $y \in W^{1,2}$ setzen wir

$$D(y) := \int |\nabla y|^2 \, du \, dv.$$

Es sei nun B eine in G enthaltene offene Kreisscheibe und $h_B \in W^{1,2}(B)$ sei die in B harmonische Funktion mit $x - h_B \in W_0^{1,2}(B)$. Wegen

$$\sup |h_B| \leqq \sup |x| < \infty \tag{2}$$

ist die Funktion

$$z := \begin{cases} x - h_B & \text{in } B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

als Testfunktion in (1) zulässig. Wir erhalten daher

$$\int_B \nabla x (\nabla x - \nabla h_B) \, du \, dv = -2 \int H(x)(x - h_B) \, x_u \wedge x_v \, du \, dv. \tag{3}$$

Wie man aus (2) sieht, ist auch $H(x)(x - h_B) \in W_0^{1,2}(B)$. Für das Dirichlet-Integral dieser Funktion erhalten wir unter Beachtung der Ungleichung

$$D(h_B) \leqq D(x|B)$$

die Abschätzung

$$D\big(H(x)(x - h_B)\big)^{\frac{1}{2}} \leqq 2(K + L \sup |x|) \, D(x|B)^{\frac{1}{2}}.$$

Hierbei bezeichnet K das Supremum von $|H|$ und L die Lipschitzkonstante von H jeweils auf der Kugel $\{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \leqq \sup |x|\}$. Aus Satz 2 in [1] erhalten wir somit

$$\Big|2 \int_B H(x)(x - h_B) \, x_u \wedge x_v \, du \, dv\Big| \leqq C D(x|B)^{\frac{3}{2}}$$

mit einer von x und H, nicht aber von B abhängigen Konstanten C. Aus (3) folgt daher

$$D(x|B) \leqq D(x|B)^{\frac{1}{2}} \, D(h_B)^{\frac{1}{2}} + C D(x|B)^{\frac{3}{2}}.$$

Nun gilt für alle Kreisscheiben $B \subset G$ mit hinreichend kleinem Durchmesser

$$C D(x|B)^{\frac{1}{2}} \leqq \tfrac{1}{2}$$

und somit

$$D(x|B) \leqq 4 D(h_B).$$

Nach einem klassischen Argument von Morrey ([3], Theorem 1.10.2.) folgt hieraus die lokale Hölderstetigkeit von x.

Da Satz 1 nur die Regularität beschränkter Lösungen von (1) sicherstellt, wollen wir noch ein hinreichendes Kriterium dafür angeben, wann eine beliebige schwache Lösung der Klasse $W^{1,2}$ beschränkt ist. Wir

nehmen dazu an, daß es ein $R>0$ mit

$$\sup_{|y|\geqq R} |y|\,|H(y)| \leqq 1 \tag{4}$$

gibt. Sei ζ ein beliebiger Punkt von G. Es bezeichne $B_r(\zeta)$ die Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt ζ. Man kann ein $r>0$ wählen mit

$$\overline{B_r(\zeta)} \subset G$$

und

$$\int_{\partial B_r(\zeta)} |x_s|^2\, ds < \infty,$$

wobei s die Bogenlänge von $\partial B_r(\zeta)$ bedeutet. Für ein solches r ist dann

$$M_r := \sup |x|\partial B_r(\zeta)|$$

eine endliche Zahl.

Wir setzen nun

$$k := \max\{M_r, R\},$$

wählen ein $l>k$ und definieren

$$[x]_k^l := \begin{cases} l & \text{falls } |x|>l \\ |x| & \text{falls } l \geqq |x| > k \\ k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $[x]_k^l \in W^{1,2}(G)$ und für die Ableitungen von $[x]_k^l$ gilt fast überall

$$\partial_\alpha [x]_k^l = \begin{cases} |x|^{-1}\, x\, \partial_\alpha x & \text{falls } k<|x|\leqq 1 \\ 0 & \text{sonst} \quad (\alpha = u, v). \end{cases} \tag{5}$$

Wegen der speziellen Wahl von k ist

$$[x]_k^l - k \in W_0^{1,2}(B_r(\zeta)),$$

woraus dann unter Beachtung von (5) auch

$$([x]_k^l - k)\, x \in W_0^{1,2}(B_r(\zeta))$$

gefolgert werden kann. Wenn wir die Funktion $([x]_k^l - k)\, x$ als Testfunktion für das System (1) einsetzen, erhalten wir mit Hilfe von (4)

$$\begin{aligned} &\int_{B_r(\zeta)} ([x]_k^l - k)\, |\nabla x|^2\, du\, dv + \int_{B_r(\zeta)\cap\{k<|x|\leqq l\}} |x|^{-1}\big((x\, x_u)^2 + (x\, x_v)^2\big)\, du\, dv \\ &\quad = 2\Big|\int_{B_r(\zeta)} H(x)([x]_k^l - k)\, x\, x_u \wedge x_v\, du\, dv\Big| \\ &\quad \leqq \int_{B_r(\zeta)} ([x]_k^l - k)\, |\nabla x|^2\, du\, dv. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort

$$\nabla([x]_k^l - k) = 0 \quad \text{in } B_r(\zeta)$$

und somit auch

$$[x]_k^l - k = 0 \quad \text{in } B_r(\zeta).$$

Da dies für alle $l > k$ gilt, erhält man $|x| \leqq k$ in $B_r(\zeta)$. Es ergibt sich daher

Satz 2. *Es sei $x \in W^{1,2}(G)$ eine schwache Lösung des Systems* (1), *wobei die Funktion H lokal lipschitzstetig sein und für ein positives R der Bedingung* (4) *genügen möge. Dann ist $x \in C^{2+\alpha}(G)$ für alle $\alpha \in (0, 1)$.*

Literatur

1. Heinz, E.: Elementare Bemerkung zur isoperimetrischen Ungleichung im $\mathbb{R}^3$. Math. Z. **132**, 319–322 (1973)
2. Hildebrandt, S.: Randwertprobleme für Flächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung und Anwendungen auf die Kapillaritätstheorie, I. Math. Z. **112**, 205–213 (1969)
3. Morrey, C.B.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966
4. Rado, T.: The isoperimetric inequality and the Lebesgue definition of surface area. Trans. Amer. math. Soc. **61**, 530–555 (1947)
5. Tomi, F.: Ein einfacher Beweis eines Regularitätssatzes für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Math. Z. **112**, 214–218 (1969)
6. Wente, H.: An existence theorem for surfaces of constant mean curvature. J. math. Analysis Appl. **26**, 318–344 (1969).

Friedrich Tomi
Mathematisches Institut
Universität Münster
D-4400 Münster, Roxeler Str. 64
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 7. Mai 1973)