Math. Z. 132, 239–244 (1973)

Eine Bemerkung zu den Triangel-Gruppen

Gerhard Rosenberger

1. Einleitung

A. Gegenstand dieser Note sind die Gruppen

$$G=\{A,B\,|\,A^p=B^q=(AB)^r=1\} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1 \quad \text{und} \quad p,q,r\geqq 4.$$

Diese Gruppen sind auch deshalb von Interesse, weil sich G treu als Fuchssche Gruppe mit kompaktem Fundamentalbereich darstellen läßt.

Unser Ziel ist es, einen Algorithmus zu entwickeln, der beliebige Erzeugende U und V in endlich vielen Schritten in A und B überführt (Satz 1). Weiter wollen wir alle Erzeugenden U und V von G näher kennzeichnen. Satz 2 liefert die in [7] angekündigte Erweiterung von Nielsens Resultat über freie Gruppen vom Rang zwei zu Fuchsschen Gruppen mit zwei kanonischen Erzeugenden.

B. Es bedeute:

$F=\{a,b\}$ die von a und b erzeugte freie Gruppe.

$G=\{A,B\}$ die von A und B erzeugte Gruppe.

$[A,B]=ABA^{-1}B^{-1}$ der Kommutator von A und B.

Wir fassen eine Gruppe $G=\{A,B\}$ als epimorphes Bild der freien Gruppe $F=\{a,b\}$ vom Rang zwei unter dem durch $a\mapsto A$, $b\mapsto B$ definierten Epimorphismus $F \twoheadrightarrow G$ auf. Einen Übergang von (A,B) zu einem anderen Erzeugendensystem (A',B') von G nennen wir frei, wenn es ein freies Erzeugendensystem (a',b') von F gibt, so daß das Bild von a' bzw. b' bei dem durch $a\mapsto A$, $b\mapsto B$ definierten Epimorphismus $F \twoheadrightarrow G$ gleich A' bzw. B' ist. $U\sim V$ in G heißt: U ist in G zu V konjugiert.

Wir identifizieren die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ mit der Gruppe aller linearen Transformationen der oberen Halbebene auf sich.

Es ist $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{E,-E\}$, d.h. die $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ besteht aus den Paaren $(W,-W)$ mit $W\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Es ruft keine Mißverständnisse hervor, wenn wir kurz W statt $(W,-W)$ schreiben.

Es bedeute:

Sp U die Spur von $U \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

(m, n) der größte gemeinsame Teiler von $m, n \in \mathbb{Z}$.

Vereinbarung: Alle auftretenden Exponenten von Elementen einer Gruppe sind ganze Zahlen. Sei $p, q, r \geqq 2$.

2. Erzeugende Fuchsscher Gruppen mit zwei kanonischen Erzeugenden

Lemma 1 (Nielsen [5]). *Sei $F = \{a, b\}$ eine freie Gruppe vom Rang zwei. Zwei Elemente u, v von F sind ganau dann Erzeugende von F, wenn $[u, v]$ in F konjugiert ist zu $[a, b]^{\varepsilon}$ mit $\varepsilon = \pm 1$.*

Durch vollständige Induktion beweist man

Lemma 2. *Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ mit $\mathrm{Sp}\, A = \lambda$. Für $r \geqq 0$, $r \in \mathbb{Z}$, ist*

$$A^r = \begin{pmatrix} a S_{r-1}(\lambda) - S_{r-2}(\lambda) & b S_{r-1}(\lambda) \\ c S_{r-1}(\lambda) & S_r(\lambda) - a S_{r-1}(\lambda) \end{pmatrix},$$

wobei die Polynome $S_r(x)$ definiert sind durch $S_{-1}(x) = 0$, $S_0(x) = 1 = -S_{-2}(x)$, $S_1(x) = x$ und $S_r(x) = x S_{r-1}(x) - S_{r-2}(x)$ für $r \geqq 0$. A^{-r} mit $r > 0$, $r \in \mathbb{Z}$, ergibt sich in üblicher Weise.

Lemma 3. *Sei $G = \{A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1\}$ für $4 \leqq p, q, r$. Seien U, V beliebige Erzeugende von G. Dann gibt es einen freien Übergang von (U, V) zu einem Erzeugendenpaar (R, S) von G mit $R = A^{\alpha}, B^{\beta}$ oder $(AB)^{\gamma}$, wobei $1 \leqq \alpha \leqq p-1$, $(\alpha, p) = 1$; $1 \leqq \beta \leqq q-1$, $(\beta, q) = 1$ und $1 \leqq \gamma \leqq r-1$, $(\gamma, r) = 1$.*

Beweis. G sei treu dargestellt als Fuchssche Gruppe mit den kanonischen Erzeugenden A und B (vgl. [2] und [3]). Es seien also ohne Einschränkung $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ mit $A^p = B^q = (AB)^r = 1$. Seien U, V beliebige Erzeugende von G, und sei ohne Einschränkung $0 \leqq \mathrm{Sp}\, U$, $\mathrm{Sp}\, V$. Wegen $4 \leqq p, q, r$ ist $\mathrm{Sp}[U, V] > 2$, denn für $\mathrm{Sp}[U, V] \leqq 2$ wäre G wegen der Diskretheit entweder freie Gruppe oder von der Form $G = \{U, V\}$ mit $[U, V]^n = 1$ für $n \geqq 2$ (vgl. z.B. [7, 8] und [9])[1]. Es bezeichne:

$$E_G = \{(R, S) \mid \text{Es gibt einen freien Übergang von } (U, V) \text{ zu } (R, S)\}.$$

Insbesondere ist $G = \{R, S\}$ und $\mathrm{Sp}[R, S] = \mathrm{Sp}[U, V]$ für $(R, S) \in E_G$ (vgl. Lemma 1 und [8]). Setze:

$$L_G = \{(\mathrm{Sp}\, R, \mathrm{Sp}\, S, \mathrm{Sp}\, RS) \mid (R, S) \in E_G \text{ mit } 0 \leqq \mathrm{Sp}\, R \leqq \mathrm{Sp}\, S \leqq \mathrm{Sp}\, RS\}.$$

---

[1] Der Beweis ist nicht trivial. Man zeigt: Aus $[U, V]^n = 1$ für $n \geqq 2$ (d.h. $[U, V] \sim A^m, B^m$ oder $(AB)^m$) folgt $4 > p, q$ oder r.

Wegen $0 \leqq \operatorname{Sp} U$, $\operatorname{Sp} V$ ist L_G nicht leer. Setze:

$$M_G = \{\operatorname{Sp} R + \operatorname{Sp} S + \operatorname{Sp} RS \mid (\operatorname{Sp} R, \operatorname{Sp} S, \operatorname{Sp} RS) \in L_G\},$$

$$A_G = \{\operatorname{Sp} R \mid (\operatorname{Sp} R, \operatorname{Sp} S, \operatorname{Sp} RS \in L_G\},$$

$$B_G = \{\operatorname{Sp} S \mid (\operatorname{Sp} R, \operatorname{Sp} S, \operatorname{Sp} RS \in L_G\} \quad \text{und}$$

$$C_G = \{\operatorname{Sp} RS \mid (\operatorname{Sp} R, \operatorname{Sp} S, \operatorname{Sp} RS \in L_G\}.$$

Sei $x.=\inf A_G$, $y.=\inf B_G$ und $z.=\inf C_G$. Dann ist

a) $0 \leqq x \leqq y \leqq z$,

b) $x+y+z \leqq \operatorname{Sp} R + \operatorname{Sp} S + \operatorname{Sp} RS$ für alle $(\operatorname{Sp} R, \operatorname{Sp} S, \operatorname{Sp} RS) \in L_G$ und

c) $xy-z<0$ oder $xy-z \geqq z$

unter Beachtung von $\operatorname{Sp} RS^{-1} = \operatorname{Sp} R \cdot \operatorname{Sp} S - \operatorname{Sp} RS$ und $(0,0,0) \notin L_G$.

Der Fall $xy-z \geqq z$ kann nicht eintreten, denn sonst wäre $z<y$ für $x<2$ und $yz<2x$ für $2 \leqq x$ wegen $\operatorname{Sp}[U,V]>2$ im Widerspruch zu $x \leqq y \leqq z$ (vgl. [8] und [9]). Es ist also $xy-z<0$. Weiter ist $x+y+z$ kein Häufungspunkt von M_G, d.h. es gibt Erzeugende P, Q von G mit $\operatorname{Sp} P = x$, $\operatorname{Sp} Q = y$, $\operatorname{Sp} PQ = z$ und $\operatorname{Sp} PQ^{-1} = xy - z$. Der Fall $2 \leqq x \leqq y \leqq z$ und $xy-z \leqq -2$ kann nicht eintreten, denn sonst wäre G freie Gruppe (vgl. [6] und [8]). Es ist also $x<2$ oder $-2<xy-z<0$. Wegen der Diskretheit von G hat daher P oder PQ^{-1} endliche Ordnung, und P oder PQ^{-1} ist in G konjugiert zu A^α, B^β oder $(AB)^\gamma$ ([1]).

Natürlich ist $(\alpha, p) = (\beta, q) = (\gamma, r) = 1$. Weiter können wir $1 \leqq \alpha \leqq p-1$; $1 \leqq \beta \leqq q-1$ und $1 \leqq \gamma \leqq r-1$ annehmen. Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

Satz 1. *Sei $G = \{A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1\}$ für $4 \leqq p, q, r$. Seien U, V beliebige Erzeugende von G. Dann gibt es einen freien Übergang von (U, V) zu (A^α, B^β), zu $(A^\alpha, (AB)^\gamma)$ oder zu $(B^\beta, (AB)^\gamma)$ mit $1 \leqq \alpha \leqq p-1$, $(\alpha, p) = 1$; $1 \leqq \beta \leqq q-1$, $(\beta, q) = 1$ und $1 \leqq \gamma \leqq r-1$, $(\gamma, r) = 1$.*

Beweis. Sei G wieder treu dargestellt als Fuchssche Gruppe mit den kanonischen Erzeugenden A und B. Es sei also wieder $A, B \in \operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ mit $A^p = B^q = (AB)^r = 1$.

Seien U, V beliebige Erzeugende von G. Nach Lemma 3 können wir $U = A^\alpha$, $U = B^\beta$ oder $U = (AB)^\gamma$ mit $(\alpha, p) = (\beta, q) = (\gamma, r) = 1$ annehmen. Sei ohne Einschränkung $U = A^\alpha$. Wegen $(\alpha, p) = 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n| = 2\cos\dfrac{\pi}{p}$. Sei ohne Einschränkung $0 \leqq \operatorname{Sp}(A^\alpha)^n$, $\operatorname{Sp} V$.

Wir brauchen nur zu zeigen:

Es gibt einen freien Übergang von (A^α, V) zu (A^α, W), $W \in G$, mit der Eigenschaft, daß W in G konjugiert zu B^β oder $(AB)^\gamma$ ist; denn sei etwa $W = CB^\beta C^{-1}$, $C \in G$. Dann ist AB ein Wort in A und CBC^{-1}, denn es ist natürlich $(\beta, q)=1$. Sei also etwa

$$AB=R^{-1}A^{n_1}CB^{m_1}C^{-1}\dots A^{n_k}CB^{m_k}C^{-1}R,\ R\in G,$$

mit

$$0\leqq n_i\leqq p-1, \quad 0\leqq m_i\leqq q-1 \quad \text{für } i=1,\dots,k$$

und höchstens $n_1=0$, $m_k=0$. Das ist wegen $(AB)^r=1$ nur für $C=A^m B^n$ möglich, denn sonst gäbe es in G eine weitere, von $A^p=B^q=(AB)^r=1$ unabhängige definierende Relation.

Es können genau drei Fälle eintreten.

Fall 1. Sp $V<2$, d.h. V hat endliche Ordnung. Dann ist V in G konjugiert zu A^δ, B^β oder $(AB)^\gamma$. Angenommen $V=DA^\delta D^{-1}$, $D\in G$. Dann ist B ein Wort in $(A^\alpha)^n$ und $DA^\delta D^{-1}$, d.h. $B=F((A^\alpha)^n, DA^\delta D^{-1})$. Vergleichen wir die Summe der Exponenten für B, so ist $0\equiv 1 \pmod q$. Dies ist ein Widerspruch. Es ist also V in G konjugiert zu B^β oder $(AB)^\gamma$.

Fall 2. $2\leqq \operatorname{Sp} V$ und $|\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V|<2$ oder $|\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V^{-1}|<2$. Sei ohne Einschränkung $|\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V|<2$, d.h. $(A^\alpha)^n V$ hat endliche Ordnung.

Der Übergang

$$A^\alpha\mapsto A^\alpha, \quad V\mapsto (A^\alpha)^n V$$

ist frei. Mit obiger Begründung ist $(A^\alpha)^n V$ in G konjugiert zu B^β oder $(AB)^\gamma$.

Fall 3. $2\leqq \operatorname{Sp} V$ und $2\leqq |\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V|, |\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V^{-1}|$. Wegen

$$\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n=2\cos\frac{\pi}{p}$$

ist sogar $2\leqq \operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V, \operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V^{-1}$, d.h. $\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V^{-1}-\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n\cdot \operatorname{Sp} V\leqq -2$, denn sonst wäre G freies Produkt von $\{(A^\alpha)^n\}$ und $\{V\}$ ([6] und [8]). Wegen $\operatorname{Sp}(A^\alpha)^{-n}V(A^\alpha)^{-n(p-2)}=\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n V^{-1}-\operatorname{Sp}(A^\alpha)^n\cdot\operatorname{Sp} V\leqq -2$ gibt es ein $m\in\mathbb{N}$ mit $1\leqq m\leqq p-2$ und $|\operatorname{Sp}(A^\alpha)^{-n}V(A^\alpha)^{-nm}|<2$, denn sonst wäre G wieder freies Produkt von $\{(A^\alpha)^n\}$ und $\{V\}$ ([6] und [8]). Damit hat $(A^\alpha)^{-n}V(A^\alpha)^{-nm}$ endliche Ordnung.

Der Übergang

$$A^\alpha\mapsto A^\alpha, \quad V\mapsto (A^\alpha)^{-n}V(A^\alpha)^{-nm}$$

ist frei. Mit obiger Begründung ist $(A^\alpha)^{-n}V(A^\alpha)^{-nm}$ in G konjugiert zu B^β oder $(AB)^\gamma$.

Natürlich ist $(\alpha, p)=(\beta, q)=(\gamma, r)=1$. Weiter können wir $1\leqq\alpha\leqq p-1$, $1\leqq\beta\leqq q-1$ und $1\leqq\gamma\leqq r-1$ annehmen. Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

Bemerkung. Folgendes Beispiel zeigt, daß die Aussage von Satz 1 für $p=q=3$ i.a. falsch ist:

Sei $G=\{A, B\mid A^3=B^3=(AB)^5=1\}$ und $U=AB^2$, $V=B^2A$. Dann ist $G=\{U, V\}$, und es gibt keinen freien Übergang von (U, V) zu (A, B), $(A, (AB)^\gamma)$ oder $(B, (AB)^\gamma)$.

Korollar. *Sei* $A, B \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ *und* $G = \{A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1\}$ *Fuchssche Gruppe mit* $4 \leqq p, q, r$.

Seien U, V *Erzeugende von* G. *Dann ist*

$$\mathrm{Sp}[U, V] = S_{\alpha-1}^2(\mathrm{Sp}\, A) \cdot S_{\beta-1}^2(\mathrm{Sp}\, B)(\mathrm{Sp}[A, B] - 2) + 2,$$

$$\mathrm{Sp}[U, V] = S_{\alpha-1}^2(\mathrm{Sp}\, A) \cdot S_{\gamma-1}^2(\mathrm{Sp}\, AB)(\mathrm{Sp}[A, B] - 2) + 2 \text{ oder}$$

$$\mathrm{Sp}[U, V] = S_{\beta-1}^2(\mathrm{Sp}\, B) \cdot S_{\gamma-1}^2(\mathrm{Sp}\, AB)(\mathrm{Sp}[A, B] - 2) + 2,$$

wobei α, β, γ *wie in Satz* 1 *und* $S_{n-1}(x)$, $n \geqq 0$, *wie in Lemma* 2 *gegeben.*

Beweis. Für $R, S \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist unter Berücksichtigung von Lemma 2

$$\mathrm{Sp}[R^n, S^m] = S_{n-1}^2(\mathrm{Sp}\, R) \cdot S_{m-1}^2(\mathrm{Sp}\, S)(\mathrm{Sp}[R, S] - 2) + 2,$$

wobei $0 \leqq n, m$ und $n, m \in \mathbb{Z}$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 1 und Satz 1. q.e.d.

Bemerkung. Sei G nicht-abelsche Fuchssche Gruppe mit zwei kanonischen Erzeugenden A und B. Dann ist für G einer der folgenden Fälle erfüllt:

a) G ist freie Gruppe vom Rang zwei,

b) $G = \{A, B \mid [A, B]^n = 1\}$ für $n \geqq 2$,

c) $G = \{A, B \mid A^p = 1\}$ für $p \geqq 2$,

d) $G = \{A, B \mid A^p = B^q = 1\}$ für $p, q \geqq 2$,

e) $G = \{A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1\}$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$

(vgl. [3; pp. 220–246]).

Satz 2. *Sei* G *nicht-abelsche Fuchssche Gruppe mit zwei kanonischen Erzeugenden* A *und* B. *Sei* $4 \leqq p, q, r$ *im Fall* e). *Zwei Elemente* U, V *von* G *erzeugen genau dann* G, *wenn gilt:*

a) $[U, V] \sim [A, B]^\varepsilon$ *in* G *mit* $\varepsilon = \pm 1$, *falls entweder* $G = \{A, B\}$ *freie Gruppe vom Rang zwei oder* $G = \{A, B \mid [A, B]^n = 1\}$ *für* $n \geqq 2$ *ist,*

b) $[U, V] \sim [A^\alpha, B^\varepsilon]$ *in* G *mit* $1 \leqq \alpha \leqq p-1$, $(\alpha, p) = 1$; $\varepsilon = \pm 1$, *falls* $G = \{A, B \mid A^p = 1\}$ *für* $p \geqq 2$ *ist,*

c) $[U, V] \sim [A^\alpha, B^\beta]$ *in* G *mit* $1 \leqq \alpha \leqq p-1$, $(\alpha, p) = 1$; $1 \leqq \beta \leqq q-1$, $(\beta, q) = 1$, *falls* $G = \{A, B \mid A^p = B^q = 1\}$ *für* $p, q \geqq 2$ *ist und*

d) $[U, V] \sim [A^\alpha, B^\beta]$ *oder* $[U, V] \sim [A^\alpha, (AB)^\gamma]$ *oder* $[U, V] \sim [B^\beta, (AB)^\gamma]$ *in* G *mit* $1 \leqq \alpha \leqq p-1$, $(\alpha, p) = 1$; $1 \leqq \beta \leqq q-1$, $(\beta, q) = 1$ *und* $1 \leqq \gamma \leqq r-1$, $(\gamma, r) = 1$, *falls* $G = \{A, B \mid A^p = B^q = (AB)^r = 1\}$ *für* $4 \leqq p, q, r$ *ist.*

Beweis. Für a) folgt die Aussage aus Lemma 1 und [9][2]. Es liege nun b), c) oder d) vor. Die Aussage ist nach [4; p. 191] und Satz 1 notwendig.

[2] In [9; p. 265] sage: „Dann gibt es einen freien Übergang von (U, V) zu (U_1, V_1)." anstatt „Dann sind nur folgende vier Fälle möglich: ...".

Wegen Lemma 1 können wir das Hinreichen der Aussage exemplarisch zeigen. Sei etwa $G=\{A, B|A^p=B^q=(AB)^r=1\}$ mit $4 \leqq p, q, r$ und $[U, V] \sim [A^\alpha, B^\beta]$ in G, wobei α, β wie in Satz 2 gegeben. Da wir modulo freie Übergänge rechnen, können wir nach Lemma 1 sogar ohne Einschränkung $[U, V]=[A^\alpha, B^\beta]$ annehmen. Dann gibt es einen freien Übergang von (A^α, B^β) zu (U, V). Damit sind U, V Erzeugende von G. q.e.d.

Korollar. *Sei* $G=\{A, B|A^p=B^q=(AB)^r=1\}$ *für* $4 \leqq p, q, r$. *Sei* $F=\{a, b\}$ *freie Gruppe vom Rang zwei.*

Dann wird jeder Automorphismus von G von einem Automorphismus von F induziert.

Beweis. Sei φ ein Automorphismus von G. Dann ist unter Berücksichtigung der möglichen Fälle aus Satz 2 sogar notwendig $[\varphi(A), \varphi(B)]$ in G konjugiert zu $[A, B]^\varepsilon$ mit $\varepsilon = \pm 1$. Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

Bemerkung. G läßt sich auch darstellen als Gruppe

$$H=\{A, B, C|A^p=B^q=C^r=ABC=1\} \quad \text{für } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1.$$

Es ist bekannt, daß jeder Automorphismus von H von einem Automorphismus von F_3 induziert wird, wobei F_3 freie Gruppe vom Rang drei ist. In diesem Sinn liefert das obige Korollar also eine schärfere Aussage.

Literatur

1. Greenberg, L.: Discrete groups of motions. Canadian J. Math. **12**, 414–425 (1960).
2. Knapp, A.W.: Doubly generated Fuchsian groups. Michigan math. J. **15**, 289–304 (1968).
3. Lehner, J.: Discontinous groups and automorphic forms. Providence: American Mathematical Society 1964.
4. Magnus, W., Karrass, A., Solitar, D.: Combinatorial group theory. New York: Interscience 1966.
5. Nielsen, J.: Die Isomorphismen der allgemeinen unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. Math. Ann. **78**, 385–397 (1918).
6. Purzitsky, N.: Two generator discrete free products. Math. Z. **126**, 209–223 (1972).
7. Purzitsky, N., Rosenberger, G.: Two generator Fuchsian groups of genus one. Math. Z. **128**, 245–251 (1972). Correction. Math. Z. (to appear).
8. Rosenberger, G.: Fuchssche Gruppen, die freies Produkt zweier zyklischer Gruppen sind, und die Gleichung $x^2+y^2+z^2=xyz$. Math. Ann. **199**, 213–227 (1972).
9. Rosenberger, G.: Automorphismen und Erzeugende für Gruppen mit einer definierenden Relation. Math. Z. **129**, 259–267 (1972).

G. Rosenberger
D-2104 Hamburg 92
Haferacker 1
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 8. Januar 1973)