## Werk

**Titel:** Ein Existenzsatz über maßtreue Abbildungen.

**Autor:** Reimann, Hans Martin

**Jahr:** 1972

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0129|log21


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 129, 163 – 171 (1972)
© by Springer-Verlag 1972

# Ein Existenzsatz über maßtreue Abbildungen

Hans Martin Reimann

Maßtreue Abbildungen sind Homöomorphismen $\phi$ zwischen Gebieten $G$ und $G'$ des euklidischen Raumes $R^n$, welche das $n$-dimensionale Maß $|A|$ der meßbaren Mengen $A \subset G$ invariant lassen: $|\phi(A)| = |A|$ für alle $A \subset G$. Die vorliegende Untersuchung entstand aus der Frage, ob zwei diffeomorphe Gebiete in $R^n$ durch eine diffeomorphe maßtreue Abbildung aufeinander abgebildet werden können.

Eingehend werden Diffeomorphismen $\phi$ zwischen Gebieten – und allgemeiner zwischen Mannigfaltigkeiten – konstruiert, die ein gegebenes Volumenelement $\tau$ in ein Volumenelement $\sigma$ überführen; ein Sachverhalt, der sich durch die Beziehung

$$\int_{\phi(A)} \sigma = \int_A \tau$$

ausdrücken läßt, die für alle meßbaren Mengen $A$ im Definitionsbereich von $\phi$ gelten soll. Im folgenden wird die Notation $\phi * \tau = \sigma$ verwendet. Wir stützen uns bei diesen Betrachtungen auf den Satz von Moser [2]:

*Sind $\tau$ und $\sigma$ zwei positive $C^\infty$-Differentialformen vom Grade m (Volumenelemente) auf einer kompakten, m-dimensionalen, zusammenhängenden $C^\infty$-Mannigfaltigkeit $M$, so existiert ein $C^\infty$-Diffeomorphismus $\phi: M \to M$, der $\tau$ in $c\sigma$ überführt ($\phi * \tau = c\sigma$), wobei die Konstante $c$ durch $\int_M c\sigma = \int_M \tau$ gegeben ist.*

Moser gibt für diesen Satz zwei Beweise an, die sich beide wesentlich auf die Kompaktheit der Mannigfaltigkeit $M$ stützen. Aus dem zweiten Beweis ist ersichtlich, daß der Diffeomorphismus $\phi$ so konstruiert werden kann, daß er $C^\infty$-differenzierbar von $\tau$ und $\sigma$ abhängig ist. Der erste Beweis verwendet eine endliche Überdeckung von $M$ durch geeignet gewählte Umgebungen und läßt sich wörtlich auf die folgende Situation übertragen: Korollar zum Satz von Moser:

*Sind $\tau$ und $\sigma$ zwei positive $C^\infty$-Volumenelemente auf einer nicht notwendigerweise kompakten Mannigfaltigkeit $M$ derart, daß $\int_M \sigma = \int_M \tau$ und daß $\tau = \sigma$ außerhalb einer kompakten zusammenhängenden Menge, so existiert ein $C^\infty$-Diffeomorphismus $\phi: M \to M$, der $\tau$ in $\sigma$ überführt*

$$(\phi * \tau = \sigma).$$

Im ersten Teil dieser Arbeit wird ein wichtiger Spezialfall behandelt: die offene $n$-dimensionale Einheitskugel. Es wird gezeigt, daß der Satz von Moser in diesem Falle immer noch gilt. Im zweiten und dritten Teil wird dasselbe Resultat auf Produktmannigfaltigkeiten und gewisse allgemeinere, ebenfalls nicht kompakte Mannigfaltigkeiten erweitert. Zum Abschluß werden die Ergebnisse zur Aufstellung von Existenzsätzen über maßtreue Abbildungen zwischen Gebieten in $R^n$ und insbesondere in $R^3$ verwendet.

## 1. Ein Satz für die offene Einheitskugel

**Satz 1.** *Es seien $\tau$ und $\sigma$ zwei positive $C^\infty$-Volumenelemente auf*

$$B=\{x\in R^n \mid |x|<1\}, \quad n\geqq 2,$$

*welche die Gleichung $\int_B \sigma = \int_B \tau$ erfüllen. Dann existiert ein $C^\infty$-Diffeomorphismus $\phi\colon B\to B$ der $\tau$ in $\sigma$ überführt: $\phi * \tau = \sigma$.*

Das Euklidsche Volumenelement wird mit $dm$ bezeichnet. $\sigma$ läßt sich dann als $f\,dm$ schreiben, mit $f\in C^\infty(B)$. Es genügt offenbar, daß man einen Diffeomorphismus $\phi_\sigma$ von $B_d$ -- der offenen Kugel vom Radius $d$ — auf $B$ konstruiert, welcher für alle meßbaren Mengen $A\subset B_d$ der Gleichung

$$\int_{\phi_\sigma(A)} \sigma = \int_A dm$$

genügt. $d$ ist so bestimmt worden, daß $\int_{B_d} dm = \int_B \sigma$ $(0<d\leqq\infty)$. Der gesuchte Diffeomorphismus $\phi$ ergibt sich dann durch Komposition $\phi = \phi_\sigma \circ (\phi_\tau)^{-1}$.

$f$ kann als Produkt zweier positiver $C^\infty$-Funktionen $g$ und $h$ dargestellt werden derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$g=\begin{cases}1 & \text{in einer Umgebung von } x=0\\ f & \text{für } |x|\geqq\tfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$\int_B g\,dm = \int_B f\,dm = \int_{B_d} dm.$$

Zuerst konstruieren wir eine Hilfsabbildung $\psi_1\colon B_d\to B$ der Form

$$\psi_1(x)=\frac{x}{|x|}\,r(|x|).$$

Die Funktion $r$ wird durch die Gleichung

$$\int_{|x|<r(t)} g\,dm = \int_{|x|<t} dm$$

eindeutig festgelegt. $\psi_1$ ist ein $C^\infty$-Diffeomorphismus mit positiver Funktionaldeterminante $a$. Es gilt

$$\int_A g\,dm = \int_{\psi_1^{-1}(A)} g\circ\psi_1 \cdot a\,dm = \int_{\psi_1^{-1}(A)} g_1\,dm$$

mit $g_1 = (g\circ\psi_1)\cdot a$. Insbesondere schließt man aus der Beziehung

$$\int_{|x|<r(t)} g\,dm = \int_{|x|<t} g_1\,dm = \int_{|x|<t} dm \qquad 0<t<d$$

daß

$$\int_{S_t} g_1\,ds = \int_{S_t} ds \qquad \text{für alle } t, 0<t<d.$$

$ds$ bezeichnet das Oberflächenelement auf der Sphäre $S_t = \{x\in R^n \mid |x| = t\}$. Mit Hilfe des eingangs erwähnten Satzes von Moser, angewandt auf die Sphären $S_t$ mit den Volumenelementen $g_1\,ds$ und $ds$, schließt man auf die Existenz von $C^\infty$-Diffeomorphismen $\psi_{2,t}: S_t \to S_t$, welche (für alle meßbaren Mengen $A\subset S_t$) der Gleichung $\int_A g_1\,ds = \int_{\psi_{2,t}(A)} ds$ genügen. Die durch $\psi_2|_{S_t} = \psi_{2,t}$ gegebene Abbildung ist ein $C^\infty$-Diffeomorphismus von $B_d$ auf sich. Für $x\neq 0$ folgt dies aus der Bemerkung zum Satz von Moser, und in einer Umgebung von $x=0$ ist $\psi_2$ die Identität.

Für alle Kugeln $B_{x,r}$ mit Mittelpunkt $x$ und Radius $r$, die in $B_d$ liegen, gilt nun:

$$\begin{aligned}\int_{B_{x,r}} dm &= \int dt \int_{B_{x,r}\cap S_t} ds \\ &= \int_{\psi_2^{-1}(B_{x,r})} g_1\,dm = \int_{\psi_1\circ\psi_2^{-1}(B_{x,r})} g\,dm.\end{aligned}$$

Der Diffeomorphismus $\psi = \psi_1\circ(\psi_2)^{-1}$ erfüllt daher für beliebige $A\subset B_d$ die Gleichung

$$\int_{(A)} g\,dm = \int_A dm.$$

Es muß noch gezeigt werden, daß ein Diffeomorphismus $\chi: B_d \to B_d$ existiert, welcher das Volumenelement $(h\circ\psi)\,dm$ in das Euklidsche Volumenelement $dm$ überführt. Es gilt dann

$$\int_{\psi(A)} f\,dm = \int_{\psi(A)} g\cdot h\,dm = \int_A (h\circ\psi)\,dm = \int_{\chi(A)} dm,$$

woraus man schließen kann, daß $\psi\circ\chi^{-1} = \phi_\sigma$ die Gleichung

$$\int_{\phi_\sigma(A)} \sigma = \int_A dm$$

erfüllt. Die Existenz von $\chi$ ist nun aber eine Konsequenz des Korollars zum Satz von Moser, denn die Voraussetzungen $g\circ\psi = 1$ außerhalb einer

kompakten Teilmenge von $B_d$ und

$$\int_{B_d} (g \circ \psi)\, dm = \int_{B_d} dm$$

sind bei der ausgeführten Konstruktion erfüllt.

Abschließend sei bemerkt, daß die Abbildung $\psi$ sich direkt aus der Funktion $f$ (anstelle von $g$) definieren ließe. Es ist jedoch fraglich, ob die derart konstruierte Abbildung im Nullpunkt $C^\infty$-differenzierbar wäre.

## 2. Produktmannigfaltigkeiten

$M$ sei eine kompakte, zusammenhängende, $m$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer $C^\infty$-Struktur $\{(\alpha_i, O_i)\}$. Die offenen Mengen $O_i$ bilden hier eine endliche Überdeckung von $M$ und die $\alpha_i$ sind Homöomorphismen von $O_i$ auf $U_i \subset R^m$. $B$ ist die offene Einheitskugel in $R^n$ ($n \geqq 2$). Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $M \times B$. Etwas allgemeiner formuliert können wir $B$ durch eine Mannigfaltigkeit $N$ ersetzen, deren ($C^\infty$-)Struktur durch eine einzige Karte, nämlich durch einen Homöomorphismus $\beta$ von $N$ auf $B \subset R^n$, bestimmt ist. Ein Atlas auf $M \times N$ ist durch die offene Überdeckung $\{O_i \times N\}$ und durch die Homöomorphismen $\gamma_i = (\alpha_i, \beta)$ gegeben: $\gamma_i(y, z) = (\alpha_i(y), \beta(z)) \in U_i \times B$ für Punkte $(y, z) \in M \times N$. Dieser Atlas definiert eine $C^\infty$-Struktur auf $M \times N$. In $M \times N$ sind die Untermannigfaltigkeiten $M \times \{z\}$ definiert. Sie bilden eine Parametrisierung von $M \times N$. Als Parameter wird $t = \beta(z) \in B$ verwendet. Mit den derart eingeführten Bezeichnungen gilt:

**Satz 2.** *Sind zwei positive $C^\infty$-Volumenelemente $\tau, \sigma$ auf $M \times N$ vorgegeben, die $\int_{M \times N} \sigma = \int_{M \times N} \tau$ erfüllen, so existiert ein $C^\infty$-Diffeomorphismus $\phi$ von $M \times N$ auf sich, der $\tau$ in $\sigma$ überführt: $\phi * \tau = \sigma$. Ist $N = (-1, 1)$, so existiert ein derartiger Diffeomorphismus unter der zusätzlichen Voraussetzung $\int_{M \times (-1,1)} \sigma \left(= \int_{M \times (-1,1)} \tau\right) < \infty$.*

Das Volumenelement $\sigma$ auf $M \times N$ induziert auf Grund der Beziehung $\sigma_B(A) = \int_{M \times \beta^{-1}(A)} \sigma$ ein $C^\infty$-Volumenelement $\sigma_B$ auf $B$. $\sigma_B$ und $\tau_B$ erfüllen die Voraussetzungen zum Satz 1 und es existiert daher ein $C^\infty$-Diffeomorphismus $\chi: B \to B$, der $\tau_B$ in $\sigma_B$ überführt: $\chi * \tau_B = \sigma_B$. Mit Hilfe von $\chi$ kann man einen $C^\infty$-Diffeomorphismus von $M \times N$ auf sich definieren, indem man in lokalen Koordinaten

$$\psi(y, z) = \gamma_i^{-1}(\alpha_i(y), \chi \circ \beta(z)) \quad \text{für } (y, z) \in O_i \times N$$

setzt. $\psi$ ist also die Identität in der ersten Komponente ($M$) und ist in der zweiten Komponente ($N$) durch die Transformation des Parameterbereichs bestimmt. Der Diffeomorphismus $\psi$ transformiert das Volumen-

element $\tau$ in ein Volumenelement $\rho = \psi * \tau$, für welches die Beziehung

$$\int\limits_{M \times \beta^{-1}(A)} \sigma = \int\limits_{M \times \beta^{-1}(A)} \rho$$

gilt ($A$ ist eine beliebige Borelmenge in $B$).

Sind $u \in U$, $v \in B$ die Koordinaten für eine Karte mit dem Parameterbereich $U \times B$, so besitzen $\rho$ und $\sigma$ Darstellungen der Form

$$\rho = g\, du_1 \dots du_m\, dv_1 \dots dv_n$$
$$\sigma = h\, du_1 \dots du_m\, dv_1 \dots dv_n$$

mit positiven $C^\infty$-Funktionen $g$ und $h$. Soll $\rho$ in einer anderen Karte durch

$$\rho = g'\, du_1' \dots du_m'\, dv_1' \dots dv_n'$$

dargestellt sein, so transformiert sich $g$ nach der Beziehung

$$g'(u_1', \dots, u_m', v_1', \dots, v_n') \cdot \det\left(\frac{\partial u_i'}{\partial u_k}\right) = g(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n),$$

denn die Koordinatentransformation für die $v_j'$ hat die spezielle Form $v_j' = v_j$, $j = 1, \dots, n$. Man schließt daraus, daß $g\, du_1 \dots du_m$ für festes $v \in B$ ein $m$-dimensionales $C^\infty$-Volumenelement $\rho_v$ auf der Untermannigfaltigkeit $M \times \{\beta^{-1}(v)\}$ darstellt.

Aus der Definition für $\rho_v$ bzw. $\sigma_v$ ist ersichtlich, daß

$$\int\limits_{C \times \beta^{-1}(A)} \rho = \int\limits_A dv_1 \dots dv_n \int\limits_{C \times \{\beta^{-1}(v)\}} \rho_v$$

für beliebige Borelmengen $A \subset B$, $C \subset M$. Mit Hilfe der Gleichung

$$\int\limits_{M \times \beta^{-1}(A)} \rho = \int\limits_{M \times \beta^{-1}(A)} \sigma$$

läßt sich daraus die Integralbedingung

$$\int\limits_{M \times \{\beta^{-1}(v)\}} \rho_v = \int\limits_{M \times \{\beta^{-1}(v)\}} \sigma_v$$

herleiten.

Der Satz von Moser wird nun auf die Mannigfaltigkeit $M$ mit den $C^\infty$-Volumenelementen $\rho_v$ und $\sigma_v$ angewandt. Die Diffeomorphismen $\phi_v \colon M \to M$, welche $\rho_v$ in $\sigma_v = \phi_v * \rho_v$ überführen, werden als Abbildungen von $M \times \{\beta^{-1}(v)\}$ auf sich interpretiert. Die Abbildung $\phi \colon M \times N \to M \times N$, welche auf $M \times \{\beta^{-1}(v)\}$ mit $\phi_v$ übereinstimmt, ist ein $C^\infty$-Diffeomorphismus. Für Borelmengen $A \subset B$, $C \subset M$ erhält man:

$$\begin{aligned}\int\limits_{C \times \beta^{-1}(A)} \rho &= \int\limits_A dv_1 \dots dv_n \int\limits_{C \times \{\beta^{-1}(v)\}} \rho_v \\ &= \int\limits_A dv_1 \dots dv_n \int\limits_{\phi_v(C) \times \{\beta^{-1}(v)\}} \sigma_v = \int\limits_{\phi(C \times \beta^{-1}(A))} \sigma,\end{aligned}$$

es gilt also $\phi * \rho = \sigma$. Der Diffeomorphismus $\phi \circ \psi$ erfüllt nun alle Forderungen von Satz 2.

## 3. Eine Verallgemeinerung

Unter einer Einbettung einer $m$-dimensionalen $C^\infty$-Mannigfaltigkeit $M'$ in die ($m$-dimensionale) $C^\infty$-Mannigfaltigkeit $M$ versteht man einen $C^\infty$-Diffeomorphismus $\psi\colon M' \to M$. Wir betrachten zusammenhängende Mannigfaltigkeiten $M$, die „zerlegt" werden können: Es existieren endlich viele kompakte $(m-1)$-dimensionale $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten $N_i$ $i = 1, \ldots, k$ und Einbettungen $\psi_i\colon N_i \times (-1, 1) \to M$ derart, daß für alle $a_i \in (-1, 1)$ $i = 1, \ldots, k$

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(N_i \times (a_i, 1))$$

kompakt und zusammenhängend ist und der relative Rand von

$$\bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(N_i \times (a_i, 1))$$

in $M$ aus

$$\bigcup_{i=1}^{k} \psi_i(N_i \times \{a_i\})$$

besteht.

Die im zweiten Abschnitt behandelten Produktmannigfaltigkeiten können alle zerlegt werden. Als weiteres Beispiel sei erwähnt: Ist $M$ eine kompakte, zusammenhängende berandete $C^\infty$-Mannigfaltigkeit mit den (endlich vielen) Randkomponenten $\partial M_i$ $i = 1, \ldots, k$, dann ist

$$M \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \partial M_i$$

eine $C^\infty$-Mannigfaltigkeit, die zerlegt werden kann. Man vergleiche in diesem Zusammenhang auch mit der Arbeit von Banyaga [1], in welcher der Satz von Moser auf kompakte berandete zusammenhängende $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten ausgedehnt wird.

**Satz 3.** *Sind $\sigma$ und $\tau$ zwei positive $C^\infty$-Volumenelemente auf einer zusammenhängenden $C^\infty$-Mannigfaltigkeit $M$, die zerlegt werden kann, so existiert ein $C^\infty$-Diffeomorphismus $\phi$ mit $\phi * \tau = \sigma$, vorausgesetzt daß nur* $\int_M \sigma = \int_M \tau < \infty$.

Der erste Teil unseres Beweises stützt sich auf Satz 2, für den zweiten verwenden wir das Korollar zum Satz von Moser.

Zuerst wird ein positives $C^\infty$-Volumenelement $\sigma_1$ mit den Eigenschaften

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma & \text{in } \psi_1(N_1 \times (c_1, 1)) \\ \tau & \text{in } M \setminus \psi_1(N_1 \times (0, 1)) \end{cases}$$

$$\int_M \sigma_1 = \int_M \tau$$

konstruiert. Die Konstante $c_1 > 0$ wird so gewählt, daß

$$0 < \int_{\psi_1(N_1 \times (c_1, 1))} \sigma < \int_{\psi_1(N_1 \times (0, 1))} \tau .$$

Da $\int_M \sigma < \infty$, existieren immer derartige Konstanten $c_1$. Der Satz 2 kann nun auf die Mannigfaltigkeit $M_1 = \psi(N_1 \times (-1, 1))$ mit den durch $\sigma_1$ und $\tau$ induzierten Volumenelementen angewendet werden. Die Integralbedingung ist erfüllt und aus dem Beweis des Satzes 2 ist ersichtlich, daß die resultierende Abbildung $\phi_1$ für eine klein genuge Konstante $b_1 > -1$ auf $\psi_1(N_1 \times (-1, b_1))$ die Identität ist. Da der relative Rand von $\psi_1(N_1 \times (b_1, 1))$ aus $\psi_1(N_1 \times \{b_1\})$ besteht, kann die Abbildung $\phi_1$ durch die Identität zu einem (wiederum mit $\phi_1$ bezeichneten) $C^\infty$-Diffeomorphismus auf ganz $M$ erweitert werden.

Diese Konstruktion läßt sich wiederholen: Zu vorgegebenen $\sigma_{i-1}$ werden Diffeomorphismen $\phi_i$: $M \to M$ konstruiert mit $\phi_i * (\sigma_{i-1}) = \sigma_i$, $i = 2, \ldots, k$. Es ist nun wesentlich, daß das Volumenelement $\sigma_k$ außerhalb einer kompakten zusammenhängenden Menge in $M$ mit $\sigma$ übereinstimmt. Aus dem Korollar schließt man daher auf die Existenz eines $C^\infty$-Diffeomorphismus $\phi_0$: $M \to M$ mit $\sigma = \phi_0 * (\sigma_k)$. Mit

$$\phi = \phi_0 \circ \phi_k \circ \cdots \circ \phi_1$$

ist der Satz 3 erfüllt.

### 4. Abbildungen zwischen Gebieten in $R^n$, insbesondere in $R^3$

Ist $M$ eine zusammenhängende $n$-dimensionale $C^\infty$-Mannigfaltigkeit, die zerlegt werden kann (s. Abschnitt 3), so bezeichnen wir das beschränkte Bild von $M$ unter einer $C^\infty$-Einbettung in $R^n$ als Normalgebiet $N$. Wir setzen immer $n \geqq 2$ voraus. Beispiele von Normalgebieten sind:

die Kugel $B = \{x \in R^n \mid |x| < 1\}$,

der Torus $T = \left\{ x = (z_1, \ldots, z_{n-2}, r, \varphi) \,\middle|\, (r-2)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} z_i^2 < 1,\ 0 \leqq \varphi < 2\pi \right\}$,

beschränkte Gebiete, die durch endlich viele kompakte $C^\infty$-eingebettete $(n-1)$-dimensionale $C^\infty$-Mannigfaltigkeiten berandet sind.

Ein Homöomorphismus $\psi$ zwischen zwei Gebieten $G$ und $G'$ in $R^n$ ist maßtreu, falls das $n$-dimensionale Maß der meßbaren Mengen $A$ in $G$ erhalten bleibt: $\int\limits_A dm = \int\limits_{\psi(A)} dm$ für alle $A \subset G$. Ein Diffeomorphismus $\psi$ ist genau dann maßtreu, wenn die Funktionaldeterminante im ganzen Gebiet die Konstante $\pm 1$ ist.

**Satz 4.** *Sind $G$ und $G'$ zwei zu einem Normalgebiet $N$ ($C^1$-)diffeomorphe Gebiete in $R^n$ mit gleichem, endlichem, $n$-dimensionalen Maß, so existiert ein maßtreuer $C^\infty$-Diffeomorphismus $\phi$ von $G$ auf $G'$.*

**Korollar.** *Ist $n=2$ oder $n=3$ und sind $G$ und $G'$ zwei zu einem Normalgebiet $N$ homöomorphe Gebiete mit gleichem, endlichem Maß, so existiert ein maßtreuer $C^\infty$-Diffeomorphismus von $G$ auf $G'$.*

Das Korollar ergibt sich aus dem Satz durch Approximation der Homöomorphismen $\chi\colon N \to G$ und $\chi'\colon N \to G'$ durch Diffeomorphismen von $N$ auf $G$ beziehungsweise auf $G'$. Daß derartige Approximationen existieren, ist wohl bekannt für $n=2$. Für $n=3$ wurde dieses Resultat von Munkres bewiesen (s. Munkres [3], Satz 6.3, p. 544; man vergleiche die Anmerkungen zur Entstehung dieses Satzes, loc. cit. p. 544/545).

Für beliebige $n$ lassen sich die $C^1$-Diffeomorphismen $\chi\colon N \to G$ durch $C^\infty$-Diffeomorphismen $\psi$ von $N$ auf $G$ approximieren, s. Munkres [4]. Es kann also vorausgesetzt werden, daß $N$ durch $C^\infty$-Diffeomorphismen $\psi$ und $\psi'$ auf $G$ beziehungsweise $G'$ abgebildet werden kann. Mit $J_\psi$ bezeichnen wir den Absolutbetrag der Funktionaldeterminante von $\psi$. Auf $N$ betrachten wir sodann die $C^\infty$-Volumenelemente $J_\psi\, dm$ und $c\, dm$, wobei die Konstante $c$ durch die Bedingung $\int\limits_N c\, dm = \int\limits_N J_\psi\, dm$ eindeutig festgelegt ist. Nach den Sätzen 2 und 3 existiert nun ein $C^\infty$-Diffeomorphismus $\vartheta\colon N \to N$ mit $\vartheta * (J_\psi\, dm) = c\, dm$. Wird $\vartheta'$ analog definiert, so erfüllt der Diffeomorphismus $\phi = \psi' \circ (\vartheta')^{-1} \circ \vartheta \circ \psi^{-1}$ die Forderungen von Satz 4. Für meßbare Mengen $A \subset N$ ist nämlich

$$\int\limits_A c\, dm = \int\limits_{\vartheta^{-1}(A)} J_\psi\, dm = \int\limits_{\psi \circ \vartheta^{-1}(A)} dm$$

und für $\psi'$ und $\vartheta'$ gelten die entsprechenden Beziehungen. $\phi$ ist also maßtreu.

Erhält man das Normalgebiet $N$ durch Einbettung einer Produktmannigfaltigkeit (im Sinne von Abschnitt 2), so kann man in Satz 4 auf die Forderung, daß die $n$-dimensionalen Maße von $G$ und $G'$ endlich sein sollen, verzichten.

## Literatur

1. Banyaga, A.: Formes-volume sur les variétés à bord. Université de Genève 1972.
2. Moser, J.: On the volume elements on a manifold. Trans. Amer. Math. Soc. **120**, 286 – 294 (1965).
3. Munkres, J.: Obstructions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphisms. Ann. of Math. **72**, 521 – 554 (1960).
4. Munkres, J.: Elementary differential topology. Princeton: University Press 1961, revised edition 1966.

Dr. H. M. Reimann
Mathematisches Institut der Universität
CH-3000 Bern, Siedlerstr. 5
Schweiz

*(Eingegangen am 11. April 1972)*