Werk

Titel: La structure des copolyèdres au sens de Stamm.

Autor: Demers, Luc

Jahr: 1971

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0122|log47

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 122, 285–293 (1971)
© by Springer-Verlag 1971

La structure des copolyèdres au sens de Stamm

Luc Demers

0. Introduction

Dans [4], Stamm a défini la notion de copolyèdre et étudié les propriétés homotopiques de ces espaces. La plus importante est que leurs groupes d'homotopie sont isomorphes aux groupes d'homologie d'un certain complexe différentiel associé. Nous allons montrer ici que tout copolyèdre a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (Propositions 2.2 et 3.1, corollaire). Ce résultat ne sera prouvé toutefois que pour les véritables copolyèdres et non pour les copolyèdres généralisés („verallgemeinerte Copolyeder"). Dans ce dernier cas, on montrera seulement que le copolyèdre généralisé associé à un complexe différentiel par le foncteur T de Stamm a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (Proposition 4.1).

Nous nous servirons uniquement de groupes d'homotopie à coefficients entiers; les définitions de copolyèdre et de copolyèdre généralisé données plus bas seront donc légèrement plus générales que celles de Stamm.

1. Généralités

Définition 1.1. Un *copolyèdre* est une suite $X_0 \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} X_2 \xrightarrow{p_3} \cdots$ d'espaces et d'applications telle que pour tout k,

1) X_k est un polyèdre connexe par arcs,

2) p_k est un fibré,

3) la fibre de p_k, notée Ker p_k, est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K(Q_k, k)$, où Q_k est abélien,

4) $\pi_{k-1}(X_k)=0$.

S'il existe une telle suite avec $X=X_0$, on dira par abus de langage que X est un copolyèdre; si $X_k=*$ pour $k>m$, on dira que le copolyèdre est fini, de longueur m.

Définition 1.2. Le *complexe différentiel associé à un copolyèdre* $X_0 \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} X_2 \xrightarrow{p_3} \cdots$ est le complexe $\mathbf{Q}$: $Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \xleftarrow{q_3} Q_3 \xleftarrow{q_4} \cdots$ où $Q_k = \pi_k(\text{Ker } p_k)$ et q_k est la composée de i_{k*}: $\pi_k(\text{Ker } p_k) \to \pi_k(X_{k-1})$ et de δ: $\pi_k(X_{k-1}) \to \pi_{k-1}(\text{Ker } p_{k-1})$.

Le premier homomorphisme est induit par l'inclusion de Ker p_k dans X_{k-1} et le deuxième vient de la suite exacte du fibré Ker $p_{k-1} \to X_{k-2} \to X_{k-1}$. Il est alors facile de vérifier que $\mathbf{Q}$ est bien un complexe différentiel et que $H_k(\mathbf{Q})=\pi_k(X_0)$.

Lemme 1.1. *Si* $X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots$ *est un copolyèdre,* $\pi_j(X_k)=0$ *pour tout* k *et tout* $j \leqq k$.

Démonstration. Nous allons utiliser l'induction sur k.

Pour $k=0$, on a $\pi_0(X_0)=0$ par définition d'un copolyèdre.

Supposons maintenant que $k>0$ et que $\pi_j(X_{k-1})=0$ pour tout $j \leqq k-1$. Il s'agit de montrer que $\pi_j(X_k)=0$ pour tout $k \geqq j$. Puisque $\pi_0(X_k)=0$, on peut supposer que $j>0$. On a alors une suite exacte de groupes:

$$\cdots \to \pi_j(K(Q_k, k)) \to \pi_j(X_{k-1}) \to \pi_j(X_k) \to \pi_{j-1}(K(Q_k, k)).$$

Si $j \leqq k-1$, $\pi_{j-1}(K(Q_k, k))=0$, et $\pi_j(X_{k-1})=0$ par hypothèse d'induction. On a donc $\pi_j(X_k)=0$.

Pour compléter l'induction, il suffit maintenant de montrer que $\pi_k(X_k)=0$. Or le fibré $p_{k+1}: X_k \to X_{k+1}$ nous donne une suite exacte

$$\cdots \to \pi_k(K(Q_{k+1}, k+1)) \to \pi_k(X_k) \to \pi_k(X_{k+1}) \to \cdots$$

où $\pi_k(K(Q_{k+1}, k+1))=0$ et $\pi_k(X_{k+1})=0$ par définition d'un copolyèdre. D'où $\pi_k(X_k)=0$. C.Q.F.D.

2. Les copolyèdres finis

Nous démontrerons dans cette section qu'un copolyèdre fini a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (Proposition 2.2). Ce fait servira de base aux preuves des propositions des sections 3 (copolyèdres infinis) et 4 (copolyèdres généralisés).

Définition 2.1 ([1], p. 39–40). Deux fibrés $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ et $F' \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} B'$ sont *algébriquement équivalents* s'il existe des équivalences d'homotopie β: $B \to B'$, ε: $E \to E'$ et φ: $F \to F'$ telles que le diagramme suivant soit homotopiquement commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & B \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ F' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & B' \end{array}$$

Diagramme 1

Lemme 2.1. *Les fibrés* $\Omega B \to X(f) \to X$ *et* $\Omega B \to X(g) \to X$ *induits de* $\Omega B \xrightarrow{i} EB \xrightarrow{p} B$ *par deux applications homotopes* f, g: $X \to B$ *sont algébriquement équivalents.*

Démonstration. Comme le dual de ce lemme est démontré en [1] (Proposition 6.7), nous en esquisserons seulement la preuve.

Par définition du fibré induit par une application, on a

$$X(f)=\{(x, \lambda) \in X \times EB \mid f(x)=p(\lambda)\} \quad \text{et} \quad X(g)=\{(x, \lambda) \in X \times EB \mid g(x)=p(\lambda)\}.$$

Soit h: $X \times I \to B$, une homotopie de f à g, et h': $X \to B^I$, l'application définie par l'équation $h'(x)(t)=h(x, t)$. On a alors $h'(x)(0)=f(x)$ et $h'(x)(1)=g(x)$.

Définissons H: $X(f)\to X(g)$ comme $H(x,\lambda)=(x, h'(x)\cdot\lambda)$ où le point dénote la composition de $h'(x)$ et de λ dans B^I.

On peut vérifier alors que H ainsi que les applications identiques de ΩB et de X définissent une équivalence algébrique de fibrés. C.Q.F.D.

Proposition 2.1. *Soient*

$$X_0 \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} \cdots \xrightarrow{p_m} X_m \xrightarrow{p_{m+1}} * \quad \textit{et} \quad Y_0 \xrightarrow{r_1} Y_1 \xrightarrow{r_2} \cdots \xrightarrow{r_m} Y_m \xrightarrow{r_{m+1}} *$$

deux copolyèdres de longueur m ayant le même complexe associé $\mathbf{Q}$. *Il existe alors une suite d'applications f_k: $X_k\to Y_k$, $k=0,1,\ldots,m$ définissant, pour tout $k=1,\ldots,m$, une équivalence algébrique de fibrés*

$$\begin{array}{ccccc} K(Q_k,k) & \longrightarrow & X_{k-1} & \longrightarrow & X_k \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_k} \\ K(Q_k,k) & \longrightarrow & Y_{k-1} & \longrightarrow & Y_k \end{array}$$

Diagramme 2

Démonstration. Nous allons construire les f_k par induction décroissante sur k. Par définition d'un copolyèdre, $X_m=\operatorname{Ker} p_{m+1}$ et $Y_m=\operatorname{Ker} r_{m+1}$ ont tous deux le type d'homotopie de $K(Q_{m+1}, m+1)$. Choisissons alors une équivalence d'homotopie quelconque f_m: $X_m\to Y_m$.

Supposons maintenant qu'on a construit f_i: $X_i\to Y_i$ pour tout $i\geqq k$. On veut construire f_{k-1} donnant une équivalence de fibrés

$$\begin{array}{ccccc} K(Q_k,k) & \longrightarrow & X_{k-1} & \longrightarrow & X_k \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_k} \\ K(Q_k,k) & \longrightarrow & Y_{k-1} & \xrightarrow{r_k} & Y_k \end{array}$$

Diagramme 3

Pour faciliter la discussion, nous supposerons que pour $i\geqq k$, $X_i=Y_i$, $p_i=r_i$, et $f_i=\mathrm{id}$. La preuve ne perdra pas de généralité, car cette condition peut être remplie en remplacant les r_j par des fibrés équivalents.

D'après [1], Theorem 7.1, le fibré p_k: $X_{k-1}\to X_k$ est induit par une application φ_k: $X_k\to K(Q_k,k+1)$ telle que l'homomorphisme φ_{k*}: $\pi_{k+1}(X_k)\to \pi_{k+1}(K(Q_k,k+1))$ soit égal à l'homomorphisme δ_k: $\pi_{k+1}(X_k)\to\pi_k(\operatorname{Ker} p_k)=Q_k$ de la suite exacte du fibré $\operatorname{Ker} p_k\to X_{k-1}\to X_k$. Ceci est même valable pour $k=1$ puisque X_1 est 1-connexe (Lemme 1.1).

Par définition du complexe associé à un copolyèdre, $\varphi_{k*}i_*=\delta_k i_*=q_k$, où i: $\operatorname{Ker} p_{k-1}\to X_k$ est l'inclusion. De façon analogue, le fibré r_k: $Y_{k-1}\to Y_k=X_k$ est induit par une application ψ_k: $X_k\to K(Q_k,k+1)$ telle que $\psi_{k*}i_*=q_k$. Or i_*: $\pi_{k+1}(\operatorname{Ker} p_{k+1})\to\pi_{k+1}(X_k)$ est un épimorphisme puisque la suite

$$\cdots\to\pi_{k+1}(\operatorname{Ker} p_{k+1})\to\pi_{k+1}(X_k)\to\pi_{k+1}(X_{k+1})\to\cdots$$

est exacte et que $\pi_{k+1}(X_{k+1})=0$ (Lemme 1.1). Les égalités $\varphi_{k*}i_*=q_k=\psi_{k*}i_*$ impliquent donc que $\varphi_{k*}=\psi_{k*}$.

De plus, puisque X_k est k-connexe (Lemme 1.1), le théorème d'isomorphisme de Hurewicz et le théorème des coefficients universels en cohomologie nous permettent de conclure à l'existence d'un isomorphisme

$$\eta\colon [X_k, K(Q_k, k+1)] \to \mathrm{Hom}(\pi_{k+1}(X_k), Q_k)$$

donné par la formule $\eta([f])=f_*$.

Puisque $\varphi_{k*}=\psi_{k*}$, les applications φ_k et ψ_k sont alors homotopes, et les fibrés qu'elles induisent sont algébriquement équivalents (Lemme 2.1). C.Q.F.D.

Etant donné un complexe différentiel fini $\mathbf{Q}$, soit $T(\mathbf{Q})$ le copolyèdre associé à $\mathbf{Q}$ par la construction de Stamm ([4], section 3a). T est un foncteur de la catégorie des complexes différentiels finis à celle des copolyèdres finis, et $\mathbf{Q}$ est le complexe associé à $T(\mathbf{Q})$ selon la Définition 1.2.

Proposition 2.2. *Si $X \to X_1 \to \cdots \to X_m \to *$ est un copolyèdre fini de longueur m, X a le type d'homotopie du produit cartésien $\prod_{k=1}^{m+1} K(\pi_k(X), k)$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{Q}$ le complexe différentiel associé à X. Il est alors facile de montrer qu'il existe un complexe différentiel

$$Q'\colon Q'_1 \xleftarrow{q'_2} Q'_2 \leftarrow \cdots \xleftarrow{q'_{m-2}} Q'_{m+2}$$

de groupes abéliens libres et un morphisme de complexes $\tau\colon \mathbf{Q}' \to \mathbf{Q}$ tel que $\tau_*\colon H_k(\mathbf{Q}') \to H_k(\mathbf{Q})$ soit un isomorphisme pour tout $k=1, \ldots, m+2$ (on pose $Q_{m+2}=0$). (Voir [3], p. 225, Lemme 12.)

Définissons un nouveau complexe $\mathbf{H}$: $H_1 \xleftarrow{h_2} H_2 \xleftarrow{h_3} \cdots \xleftarrow{h_{m-2}} H_{m-2}$ comme suit: $H_k=H_k(\mathbf{Q}')$ et $h_k=0$ pour tout $k=1, 2, \ldots, m+2$. Puisque les groupes Q'_k sont libres, on peut construire un morphisme $\sigma\colon \mathbf{Q}' \to \mathbf{H}$ induisant des isomorphismes $\sigma_*\colon H_k(\mathbf{Q}') \to H_k(\mathbf{H})=H_k$ pour tout k.

Puisque X et $T(\mathbf{Q})$ ont le même complexe associé, X a le type d'homotopie de $T(\mathbf{Q})_0$ (Proposition 2.1). D'autre part, puisque τ et σ induisent des isomorphismes en homologie, on obtient, pour tout k, des isomorphismes $T(\tau)_*\colon \pi_k(T(\mathbf{Q}')_0) \to \pi_k(T(\mathbf{Q})_0)$ et $T(\sigma)_*\colon \pi_k(T(\mathbf{Q}')_0) \to \pi_k(T(H)_0)$. Comme $T(\mathbf{Q}')_0$, $T(\mathbf{Q})_0$ et $T(\mathbf{H})_0$ sont des polyèdres connexes par arcs (Définition 1.1, 1)), $T(\tau)_0\colon T(\mathbf{Q}')_0 \to T(\mathbf{Q})_0$ et $T(\sigma)_0\colon T(\mathbf{Q}')_0 \to T(\mathbf{H})_0$ sont des équivalences d'homotopie.

X a donc le type d'homotopie de $T(\mathbf{H})_0$. Or si l'on construit $T(\mathbf{H})$ de la façon dont le fait Stamm, il est immédiat que $T(\mathbf{H})_0$ a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Il suffit de noter pour cela que le fibré induit par une application triviale est lui-même trivial. C.Q.F.D.

3. Les copolyèdres infinis

Lemme 3.1. *Soit $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$, un fibré de base connexe par arcs dont la fibre est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K(G, m)$. Soient $\varepsilon\colon E \to E(n)$ et $\beta\colon B \to B(n)$, les n-ièmes termes de systèmes de Postnikov de E et de B respectivement. Soit $p(n)\colon E(n) \to B(n)$ une application telle que $p(n)\varepsilon$ soit homotope*

à βp. En transformant au besoin l'espace $E(n)$, faisons de $p(n)$ un fibré dont la fibre sera notée $F(n)$. Alors $F(n)$ est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K(H,m)$ pour un groupe H.

Démonstration. Soit $i(n)$: $F(n)\to E(n)$, l'inclusion, et soit φ: $F\to F(n)$ une application telle que εi soit homotope à $i(n)\varphi$.

On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_j(F) & \longrightarrow & \pi_j(E) & \longrightarrow & \pi_j(B) \\
\downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} \\
\pi_j(F(n)) & \longrightarrow & \pi_j(E(n)) & \longrightarrow & \pi_j(B(n))
\end{array}$$

Diagramme 4

Si $j<n$, ε_* et β_* sont des isomorphismes, de sorte que φ_* est un isomorphisme par le lemme des 5. Notons également que si $j>n$, $\pi_j(E(n))=0=\pi_j(B(n))$, de sorte que $\pi_j(F(n))=0$.

Supposons maintenant que $m<n$, alors puisque φ_* est un isomorphisme en dimensions inférieures à n, $\pi_m(F(n))=G$ et $\pi_j(F(n))=0$ si $j\neq m$ et $j<n$. Il reste donc à vérifier dans ce cas que $\pi_n(F(n))=0$. Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_{n+1}(B) & \longrightarrow & \pi_n(F) & \longrightarrow & \pi_n(E) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_*} & & \downarrow{\scriptstyle \beta_*} \\
0 & \longrightarrow & \pi_n(F(n)) & \longrightarrow & \pi_n(E(n)) & \xrightarrow{p(n)_*} & \pi_n(B(n))
\end{array}$$

Diagramme 5

Par hypothèse, $\pi_n(F)=0$; p_* est donc un monomorphisme. Cela est également vrai de $p(n)_*$, puisque ε_* et β_* sont des isomorphismes. Ainsi $\pi_n(F(n))=\operatorname{Ker} p(n)_*=0$.

Si $m>n$, $\pi_j(F(n))=0$ pour $j<n$, puisque φ_* est alors un isomorphisme. De plus, $\pi_n(F(n))=0$, par un raisonnement analogue au précédent et on a déjà noté que $\pi_j(F(n))=0$ pour $j>n$.

Si $m=n$, il est facile de voir que $\pi_j(F(n))=0$ pour tout j différent de n. C.Q.F.D.

Proposition 3.1. *Soit $X\xrightarrow{p_1}X_1\xrightarrow{p_2}X_2\to\cdots$ un copolyèdre, et soit ξ: $X\to X(n)$ le n-ième terme d'un système de Postnikov de X. Alors $X(n)$ admet une décomposition copolyédrale de longueur $n-1$.*

Démonstration. Soit ξ_k: $X_k\to X(n)_k$ le n-ième terme d'un système de Postnikov de X_k. Soit $p(n)_k$: $X(n)_{k-1}\to X(n)_k$ une application telle que $p(n)_k\,\xi_{k-1}$ soit homotope a $\xi_k\,p_k$. On obtient alors un diagramme homotopiquement

commutatif

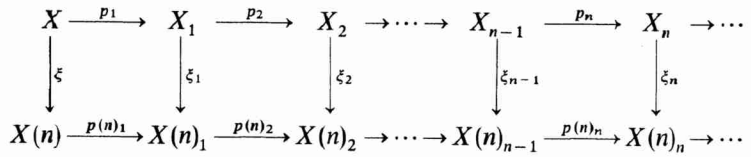

Diagramme 6

D'après le Lemme 1.1, $X(n)_k = *$ pour tout $k \geqq n$. La suite du bas est donc finie, et on peut s'arranger pour que les $p(n)_k$ soient tous des fibrés. D'après le Lemme 3.1, on obtient ainsi une décomposition copolyédrale de $X(n)$ de longueur $n-1$. C.Q.F.D.

Corollaire. *Si* $X \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} X_2 \to \cdots$ *est un copolyèdre,* X *a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

Démonstration. Il suffit de montrer que X possède un système de Postnikov. Les Propositions 2.2 et 3.1 impliquent en effet que pour tout n, le n-ième terme d'un système de Postnikov de X a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

Il suffit donc de démontrer que pour tout $x \in X$ et tout entier n, l'opération de $\pi_1(X, x)$ sur $\pi_n(X, x)$ est triviale. C'est vrai pour $n=1$, puisque $\pi_1(X, x)$ est abélien. Pour $n>1$, on se sert du fait que l'opération de π_1 sur π_n est naturelle. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) \times \pi_n(X,x) & \xrightarrow{\mu} & \pi_n(X,x) \\ \downarrow{\scriptstyle p_{1*} \times p_{1*}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{1*}} \\ \pi_1(X_1,x_1) \times \pi_n(X_1,x_1) & \xrightarrow{\mu_1} & \pi_n(X_1,x_1) \end{array}$$

où $x_1 = p_1(x)$ et où μ et μ_1 dénotent l'opération de π_1 sur π_n, evaluée en X et X_1. Comme $\pi_1(X_1, x_1) = 0$, on a

$$p_{1*}\,\mu(\alpha, \beta) = p_{1*}\,\beta.$$

Mais p_{1*} est un monomorphisme pour $n=2$, et un isomorphisme pour $n>2$, car on a un fibré

$$K(Q_1, 1) \to X \to X_1$$

avec Q_1 abélien. Par conséquent $\mu(\alpha, \beta) = \beta$. C.Q.F.D.

4. Les copolyèdres généralisés

Considérons le diagramme commutatif suivant

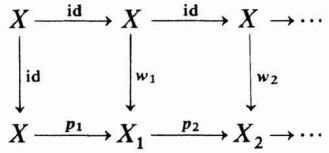

Diagramme 7

Définition 4.1. Un tel diagramme est appelé un *copolyèdre généralisé* („verallgemeinerter Copolyeder" en [3]) si

1) pour tout n, Ker p_n est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K(Q_n, n)$, où Q_n est abélien,

2) pour tout $n \geqq 1$, $\pi_{n-1}(X_n)=0$,

3) pour tout $n \geqq 2$, on a suite exacte

$$0 \to \pi_n(\operatorname{Ker} w_n) \xrightarrow[\sigma_n]{} \pi_n(\operatorname{Ker} p_n) \xrightarrow[\delta_n]{} \pi_{n-1}(\operatorname{Ker} w_{n-1}) \to \pi_{n-1}(X) \to 0.$$

Proposition 4.1. *Soit* $\mathbf{Q}$: $Q_1 \leftarrow Q_2 \leftarrow \cdots$ *un complexe différentiel et soit* $T(\mathbf{Q})$ *le copolyèdre généralisé associé à* $\mathbf{Q}$ (construction 3 b) *de* [3]). *Alors* $T(\mathbf{Q})_0$ *a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane.*

Démonstration. Le copolyèdre généralisé $T(\mathbf{Q})_0 \to T(\mathbf{Q})_1 \to \cdots$ est obtenu à partir d'un diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
X_{00} & \xrightarrow{i_{01}} & X_{01} & \xrightarrow{i_{02}} & X_{02} & \to \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p_{11}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{12}} & & \\
 & & X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12} & \to \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{22}} & & \\
 & & & & X_{22} & \to \cdots
\end{array}$$

Diagramme 8

On a en particulier $T(\mathbf{Q})_0 = \lim \operatorname{dir} X_{0n}$; et dans sa construction, Stamm fait la remarque que pour tout n, X_{0n} a le type d'homotopie d'un espace X''_{0n} qui est un copolyèdre de longueur n. Il s'ensuit que X_{0n} a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (Proposition 2.2).

Soient τ_n: $X_{0n} \to T(\mathbf{Q})_0$, les injections canoniques dans la limite directe. Selon [3], Satz 3.2, $\tau_{n\#}: \pi_s(X_{0n}) \to \pi_s(T(\mathbf{Q})_0)$ est un isomorphisme pour $s \leqq n-2$ et $0 \leqq n$. Fixons $s>1$ et soit n tel que $s<n-2$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\pi_s(X_{0n}) & \xrightarrow{\tau_{n\#}} & \pi_s(T\mathbf{Q})_0) \\
\downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\
H_s(X_{0n}) & \xrightarrow{\tau_{n*}} & H_s(T(\mathbf{Q})_0)
\end{array}$$

Diagramme 9

où h et h' sont les homomorphismes de Hurewicz. On notera que τ_{n*} est un isomorphisme, puisque $\tau_{n\#}$ est un isomorphisme en dimensions inférieures ou égales à $n-2$ et que $s<n-2$.

D'après le lemme qui suit, h' a un inverse à gauche k'. Comme $\tau_{n\#}$ et τ_{n*} sont des iromorphismes, h a aussi un inverse à gauche k. Puisque ceci est vrai

pour tout s, $T(\mathbf{Q})_0$ a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane (Lemme 4.1). C.Q.F.D.

Lemme 4.1. *Un polyèdre 0-connexe X a le type d'homotopie d'un produit cartésien d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane si et seulement si l'homomorphisme de Hurewicz h: $\pi_k(X) \to H_k(X)$ a un inverse à gauche pour tout k.* (Si X est 1-connexe, ce lemme se déduit de [2], 1.3 Corollary.)

Démonstration. Soit $K_k = K(\pi_k(X), k)$ et supposons d'abord que $X = \prod_{k=1}^{\infty} K_k$. Soient i_k: $K_k \to X$ et p_k: $X \to K_k$ l'injection, respectivement la projection. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_k(K_k) & \underset{p_{k\#}}{\overset{i_{k\#}}{\rightleftarrows}} & \pi_k(X) \\ \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ H_k(K_k) & \underset{p_{k*}}{\overset{i_{k*}}{\rightleftarrows}} & H_k(X) \end{array}$$

Diagramme 10

où h et h' sont les homomorphismes de Hurewicz. h' est un isomorphisme et $i_{k\#}$ est évidemment un isomorphisme avec inverse $p_{k\#}$. Puisque $p_{k*} i_{k*} = \mathrm{id}$, il est clair que h a un inverse à gauche.

Supposons maintenant que pour tout j, h_j: $\pi_j(X) \to H_j(X)$ ait un inverse à gauche k_j. D'après la formule des coefficients universels en cohomologie, on a une courte suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{j-1}(X), \pi_j(X)) \to [X, K_j] \xrightarrow{\eta} \mathrm{Hom}(H_j(X), \pi_j(X)) \to 0.$$

Choisissons alors f_j: $X \to K_j$ telle que $\eta([f_j]) = k_j$. Les f_j définissent une application f: $X \to \prod_{j=1}^{\infty} K_j$ et on obtient, pour tout j, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \pi_j(X) & \xrightarrow{f_\#} & \pi_j\left(\prod_{j=1}^{\infty} K_j\right) & \underset{i_{j\#}}{\overset{p_{j\#}}{\rightleftarrows}} & \pi_j(K_j) \\ {\scriptstyle h_j}\uparrow\downarrow{\scriptstyle k_j} & & \downarrow{\scriptstyle h_j''} & & \downarrow{\scriptstyle h_j'} \\ H_j(X) & \xrightarrow{f_*} & H_j\left(\prod_{j=1}^{\infty} K_j\right) & \underset{i_{j*}}{\overset{p_{j*}}{\rightleftarrows}} & H_j(K_j) \end{array}$$

Diagramme 11

où h_j, h_j' et h_j'' sont les homomorphismes de Hurewicz. $p_{j\#} f_\# = f_{j\#} = h_j''^{-1} p_{j*} f_* h = h_j'^{-1} f_{j*} h$; de plus, par définition de η, $\eta[f_j] = h'^{-1} f_{j*}$. D'où $p_{j\#} f_\# = f_{j\#} h = k_j h_j$ id. Comme $p_{j\#}$ est un isomorphisme avec inverse $i_{j\#}$, $f_\#$ est un isomorphisme; puisque ceci est vrai pour tout j, f est une équivalence d'homotopie. C.Q.F.D.

Bibliographie

1. Hilton, P.J.: Homotopy theory and duality. New York: Gordon and Breach 1965.
2. Meyer, J. P.: Whitehead products and Postnikov systems. Amer. J. Math. **82**, 271 – 280 (1960).
3. Spanier, E.: Algebraic topology. New York: MacGraw-Hill 1966.
4. Stamm, E.: Über die Homotopiegruppen gewisser Faserungen. Math. Z. **86**, 215 – 254 (1964).

Prof. L. Demers
Département de Mathématiques
Université d'Ottawa
Ottawa 2
Canada

(Reçu le 20 mai 1968)