Werk

Titel: Zur Theorie der M-Gruppen.

Autor: Kerber, Adalbert

Jahr: 1970

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0115|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 115, 4–6 (1970)

Zur Theorie der M-Gruppen

ADALBERT KERBER

Eine endliche Gruppe G heißt *M-Gruppe*, wenn ihre irreduziblen Darstellungen über algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern, deren Charakteristiken in der Ordnung $|G|$ von G nicht aufgehen, sämtlich von eindimensionalen Darstellungen von Untergruppen induziert werden.

In [4, Kapitel V, 18.11] findet sich der Satz, daß jede auflösbare Gruppe in eine M-Gruppe eingebettet werden kann. Für den dort angeführten, von Dade stammenden Beweis dieses Satzes ist der Nachweis der Tatsache entscheidend, daß das Kranzprodukt $G \wr Z_p$ jeder M-Gruppe G mit der regulären Darstellung Z_p der zyklischen Gruppe der Ordnung p (p Primzahl) eine M-Gruppe ist. Als Verallgemeinerung dessen soll hier bewiesen werden:

Satz. *Ist G eine M-Gruppe und sind alle Untergruppen von H M-Gruppen, so ist das Kranzprodukt $G \wr H$ eine M-Gruppe.*

Der Beweis beruht auf der Gestalt der irreduziblen Darstellungen von Kranzprodukten über algebraisch abgeschlossenem Grundkörper [5, 6]. Ist G eine Gruppe, H eine Permutationsgruppe auf der Ziffernmenge $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, so ist die Menge

$$\{(f; h) \mid f \text{ Abbildung von } \Omega \text{ in } G,\ h \in H\}$$

zusammen mit der Multiplikation

$$(f; h)(f'; h') := (ff'_h; hh')$$

eine Gruppe, das *Kranzprodukt* $G \wr H$ von G mit H. (Zu $f\colon \Omega \to G$, $h \in H$, sei die Abbildung $f_h\colon \Omega \to G$ durch $f_h(h(i)) := f(i)$, $\forall i \in \Omega$, definiert, zu zwei Abbildungen $f, f'\colon \Omega \to G$ deren Produkt ff' durch $(ff')(i) := f(i)\, f'(i)$, $\forall i \in \Omega$. Produkte von Permutationen sind hier von rechts nach links zu lesen, also $(hh')(i) := h(h'(i))$, $\forall i \in \Omega$.)

Besonders nützlich für die Herleitung der Darstellungstheorie von $G \wr H$ ist die Bemerkung, daß

$$G^* := \{(f; 1_H) \mid f\colon \Omega \to G\} = G_1 \times \cdots \times G_n$$

mit

$$G_i := \{(f; 1_H) \mid f(j) = 1_G\, \forall j \neq i\} \simeq G.$$

Normalteiler ist in $G \wr H$, die sog. *Basisgruppe* G^* von $G \wr H$. Wendet man Cliffords Theorie der Darstellungen von Gruppen mit Normalteilern ([2], auch [3], Kap. VII, [1], III § 13, [4], V §§ 16, 17) auf G^* an, so läßt sich für geeignete

H die Darstellungstheorie von $G \wr H$ leicht gewinnen. G^* besitzt nämlich ein zu H isomorphes Komplement,

$$H' := \{(e; h) \mid h \in H\} \simeq H,$$

es gilt

$$G \wr H = G^* H', \qquad G^* \cap H' = 1_{G \wr H} = (e; 1_H)$$

($e\colon \Omega \to G$ die Abbildung mit $e(i) = 1_G$, $\forall i \in \Omega$).

Ist der Grundkörper K algebraisch abgeschlossen, so sind die irreduziblen K-Darstellungen von G^* genau die äußeren direkten Produkte

$$D^* := D_1 \# \cdots \# D_n$$

aus irreduziblen K-Darstellungen D_i von G mit den darstellenden Matrizen

$$D^*((f; 1_H)) = D_1(f(1)) \times \cdots \times D_n(f(n)) \qquad \text{(Kroneckerprodukt)}.$$

Ist G endliche Gruppe und $D^1, \ldots, D^r$ ein vollständiges System paarweise inäquivalenter und irreduzibler K-Darstellungen von G in irgendeiner im folgenden jedoch festen Reihenfolge, so heiße D^* vom Typ $(n) = (n_1, \ldots, n_r)$, wenn für $1 \leqq j \leqq r$ genau n_j der Faktoren D_i von D^* zu D^j äquivalent sind. Ist nun S_{n_j} die Untergruppe derjenigen Permutationen aus $S_n (\supseteq H)$, der symmetrischen Gruppe vom Grad n auf Ω, die genau die n_j Indizes der zu D^j äquivalenten Faktoren D_i von D^* vertauschen, so gilt für die *Trägheitsgruppe* $G \wr H_{D^*}$ von D^* (vgl. [5]):

$$G \wr H_{D^*} = G^*(H' \cap S'_{(n)})$$

mit

$$S'_{(n)} := S'_{n_1} \times \cdots \times S'_{n_r}$$

und

$$S'_{n_j} := \{(e; h) \mid h \in S_{n_j}\}.$$

Die Untergruppe

$$H'_{D^*} := H' \cap S'_{(n)}$$

heiße *Trägheitsfaktor* von D^*.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können und wollen wir annehmen, daß äquivalente Faktoren von D^* sogar gleich sind. D^* kann unter dieser Annahme leicht zu einer Darstellung $\tilde{D}^*$ von $G \wr H_{D^*}$ erweitert werden; man braucht nur, wenn

$$D^*((f; 1_H)) = (d^1_{\alpha_1 \beta_1}(f(1)) \ldots d^n_{\alpha_n \beta_n}(f(n)))$$

ist,

$$\tilde{D}^*((f; h)) := (d^1_{\alpha_1 \beta_{h^{-1}(1)}}(f(1)) \ldots d^n_{\alpha_n \beta_{h^{-1}(n)}}(f(n)))$$

zu setzen, wenn $(f; h) \in G \wr H_{D^*}$. Das prüft man leicht nach. Die Einschränkung $\tilde{D}^* \downarrow G^*$ dieser Darstellung auf die Basisgruppe ist offenbar D^*, also ist $\tilde{D}^*$ irreduzible K-Darstellung von $G \wr H_{D^*}$. Ist zudem D'' eine irreduzible K-Darstellung des Trägheitsfaktors H'_{D^*}, D' die ihr gemäß $D'((f; h)) := D''((e; h))$

entsprechende Darstellung von $G \wr H_{D^*}$, so ist die induzierte Darstellung

$$D := (\tilde{D}^* \otimes D') \uparrow G \wr H$$

$((\tilde{D}^* \otimes D')((f; h)) := \tilde{D}^*((f; h)) \times D'((f; h))$, Kroneckerprodukt, $(f; h) \in G \wr H_{D^*})$ irreduzible K-Darstellung von $G \wr H$ und jede irreduzible K-Darstellung von $G \wr H$ ist nach Cliffords Theorie von dieser Form. (Daß hier keine wirklich projektiven Darstellungen betrachtet werden müssen, liegt daran, daß H'_{D^*} Komplement von G^* in $G \wr H_{D^*}$ ist, vgl. [7], S. 235.)

Zum Beweis des Satzes beachten wir jetzt, daß $\tilde{D}^*((f; h))$ aus $D^*((f; 1_H))$ durch Spaltenvertauschung entsteht. Bei M-Gruppen G enthält also mit $D^*((f; 1_H))$ auch $\tilde{D}^*((f; h))$ in jeder Zeile und Spalte genau ein von Null verschiedenes Element, als irreduzible Darstellung von $G \wr H_{D^*}$ ist deshalb auch $\tilde{D}^*$ monomial, wenn G eine M-Gruppe ist (vgl. [4], V 18.9), ebenso $\tilde{D}^* \otimes D'$, wenn H'_{D^*}, wie vorausgesetzt, M-Gruppe ist. Dann ist aber auch die von $\tilde{D}^* \otimes D'$ in $G \wr H$ induzierte Darstellung D monomial, und alles ist bewiesen.

Literatur

1. Boerner, H.: Darstellungen von Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer 1955; 2. Aufl. 1967.
2. Clifford, A. H.: Representations induced in an invariant subgroup. Ann. of Math. **38**, 533–550 (1937).
3. Curtis, C. W., Reiner, I.: Representation theory of finite groups and associative algebras. New York-London: Interscience 1962.
4. Huppert, B.: Endliche Gruppen. I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1967.
5. Kerber, A.: Zur Darstellungstheorie von Kranzprodukten. Canadian J. Math. **20**, 665–672 (1968).
6. – Zur Darstellungstheorie von Symmetrien symmetrischer Gruppen. Mitt. Math. Sem. Gießen **80**, 1–27 (1969).
7. Lomont, J. S.: Applications of finite groups. New York-London: Academic Press 1959.

Dr. Adalbert Kerber
Mathematisches Institut
der Justus Liebig-Universität
D-6300 Gießen, Arndtstraße 2

(Eingegangen am 12. Juli 1969)