Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1970

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0115|log28

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

A 21267 D

Mathematische Zeitschrift

Herausgegeben von **H. Wielandt,** Tübingen

unter Mitwirkung von **B. Eckmann,** Zürich
E. Heinz, Göttingen
R. Nevanlinna, Helsinki
K. Zeller, Tübingen

Wissenschaftlicher Beirat H. Kneser, Tübingen
W. Magnus, New York
G. Pickert, Gießen

Band 115 · Heft 3 · 1970

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Z. 24. VI. 1970

[redacted]
Universitätsbibliothek
Göttingen
30. Juni 1970

Die **„Mathematische Zeitschrift"** wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

„Mathematische Zeitschrift" was founded in 1918 and edited by *L. Lichtenstein* in cooperation with *K. Knopp*, *E. Schmidt* and *I. Schur*; after Lichtenstein's death, 1933, it was edited by *K. Knopp*. The Editorial Committee was increased to include *E. Kamke* and *F. K. Schmidt* in 1933, *R. Nevanlinna* in 1936 and *H. Wielandt* in 1950. The latter became Managing Editor in 1952.

Die Zeitschrift erscheint, um eine rasche Publikation zu ermöglichen, in einzelnen Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Ein Band besteht im allgemeinen aus 5 Heften. Der Preis eines Bandes beträgt DM 108.—.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht auch das Recht der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Von jeder Arbeit werden 75 Sonderdrucke kostenlos zur Verfügung gestellt, weitere können zum Selbstkostenpreis bezogen werden.

In the interest of speedy publications, this journal is issued at frequent intervals according to the material received. As a rule five numbers constitute one volume. The price is DM108.— per volume.

"Mathematische Zeitschrift" is devoted primarily to pure mathematics; papers on theoretical physics and astronomy may be accepted if they present interesting mathematical results. Reviews, problems etc. will not be published.

It is incumbent upon the author to submit no manuscript which has been or will be published elsewhere either at home or abroad. Unless special permission has been granted by the publishers, no photographic reproductions, microfilms, microphotos, or other reproductions of a similar nature may be made of the issues or of individual contributions contained therein or of extracts therefrom.

75 reprints of each paper are provided free of charge; additional copies may be ordered at cost price.

Manuskripte nehmen entgegen/Manuscripts may be sent to:

H. Wielandt, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität
B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule
E. Heinz, 34 Göttingen, Math. Inst. d. Universität
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Computing Center, University of Helsinki, Töölönkatu
K. Zeller, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität

Springer-Verlag

69 Heidelberg 1
Postfach 1780
Fernsprecher (06221) 49101
Fernschreibnummer 04-61723

1 Berlin 33
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher (0311) 822001
Fernschreibnummer 01-83319

Springer-Verlag
New York Inc.
175 Fifth Avenue
New York, N. Y. 10010

Math. Z. 115, 153 – 164 (1970)

An Excision Theorem for Grothendieck Rings *

TSIT-YUEN LAM and IRVING REINER

§ 1. Introduction

In this paper we shall investigate excision properties of relative Grothendieck rings associated with finite groups. The setting is that of modular representation theory: we start with a finite group G, and a field Ω of nonzero characteristic p, and we consider ΩG-modules of finite dimension over Ω (called "G-modules" for short). Now let H be some subgroup of G, and define the *relative Grothendieck ring* $a(G, H)$ as the quotient A/A', where A is the free abelian group generated by the symbols $[M]$ where M ranges over representatives of all isomorphism classes of G-modules, and A' is the subgroup of A generated by all expressions $[M]-[M']-[M'']$ arising from H-split exact sequences of G-modules

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0.$$

The ring structure of $a(G, H)$ is obtained by setting $[M][N]=[M \otimes_\Omega N]$, with G acting diagonally on $M \otimes_\Omega N$. For the case $H=G$, note that $a(G, G)$ is just Green's representation ring; on the other hand when $H=1$, $a(G, 1)$ is the ring of generalized Brauer characters of G. The structure of $a(G, H)$ has been studied in [3 – 7].

In any relative theory dealing with functors on pairs of objects, it is reasonable to expect certain Excision Theorems to hold. This point was first made emphatically by Eilenberg-Steenrod [2] in their axiomatization of algebraic topology, in which the Excision Axiom played a crucial role. Not surprisingly, such a theorem also holds for homotopy theory and topological K-theory for pairs of spaces (see the books by Hu, Atiyah, respectively). Various algebraic versions of the Excision Theorem have also been obtained: for the cohomology theory of pairs of groups, see [9], Theorem 2.2; for algebraic K-theory for rings relative to two-sided ideals, see [1], Chapter 7, § 6 for K_1, and [8], Lemma 6.3 for K_2.

From now on we restrict our attention to relative Grothendieck rings. If K is any normal p-subgroup of G, then by Clifford's Theorem K acts trivially on every irreducible G-module. Consequently there is an isomorphism $a(G, 1) \cong a(G/K, 1)$ between the rings of Brauer characters of G and of G/K. This special instance of an Excision Theorem was considerably generalized in [4], Theorem 3.2. The aim of the present paper is to obtain an even stronger generalization, given in Theorem 3.1 below. Section 4 will be devoted to some applica-

* This research was partially supported by the National Science Foundation.

tions of the excision theorem, the first being a new product isomorphism theorem which refines our earlier result in [6], Theorem 5.1. The second application shows how an important conjecture about restriction maps can always be reduced to the split case.

For a G-module M, its restriction to H is denoted by M_H. On the other hand, if L is any H-module, the induced G-module $\Omega G \otimes_{\Omega H} L$ will be written as L^G. We use the notation $\dot{\bigcup}$ to indicate a disjoint union. Finally, $N_G(H)$ denotes the normalizer of H in G, and $C_G(H)$ the centralizer of H in G.

The present article can be read independently of our earlier work, except for the following two results which are needed.

(1.1) **Pushout Lemma.** *Let $H \subset G$, and let F, M, N be G-modules. Suppose that there exists a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\alpha} & M \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\rho} \quad {\scriptstyle\sigma}\nearrow & \\ N & & \end{array} \qquad \rho\alpha=\beta,\ \sigma\beta=\alpha,$$

where α, β are G-monomorphisms, and ρ, σ are H-homomorphisms. Then the following relation is valid in $a(G, H)$:

$$[M]-[M/\alpha F]=[N]-[N/\beta F].$$

Remark. For the proof, see [3], Lemma 3.5 or [4], Lemma 3.1. This result is a generalization of Schanuel's Lemma, and provides a basic method for obtaining relations in $a(G, H)$.

(1.2) **Theorem.** *Let $C \times E$ be a direct product of groups, and let $H \subset E$. Suppose that Ω is a splitting field for C and all of its subgroups. Then there is a ring isomorphism $a(C \times E, H) \cong a(C, 1) \otimes_{\mathbb{Z}} a(E, H)$.*

Proof. See [4], Theorem 5.1; a generalization is given in [6], Theorem 5.1.

§ 2. Basic Lemmas

Throughout this section let T be a subgroup of the finite group S, and let M be a T-module. By a *quasi-S-structure* on M we mean a family $\{\psi_x : x \in S\}$ of Ω-automorphisms of M such that $\psi_1 = \text{identity}$, and

$$t\psi_y = \psi_z t' \quad \text{whenever} \quad ty = zt', \quad y, z \in S,\ t, t' \in T. \tag{2.1}$$

Taking $y = t' = 1$, this shows that $\psi_t = t$, $t \in T$. The concept of quasi-S-structure was used in [6] for the case where $T \Delta S$.

(2.2) **Lemma.** *Let $S = \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} x_i T$, $x_1 = 1$. Let there be given a family $\{\psi_{x_i} : 1 \leqq i \leqq r\}$ of Ω-automorphisms of the T-module M, such that $\psi_1 = \text{identity}$, and*

$$t\psi_{x_i} = \psi_{x_j} t' \quad \text{whenever} \quad tx_i = x_j t', \quad t, t' \in T. \tag{2.3}$$

For arbitrary $x = x_i t \in S$, $t \in T$, set $\psi_x = \psi_{x_i} t$. Then $\{\psi_x : x \in S\}$ is a quasi-S-structure on M.

Proof. To verify (2.1), let $t\,y = z\,t'$, $t, t' \in T$. If we write $y = x_i\,t_1$, $z = x_j\,t_2$, with $t_1, t_2 \in T$, then

$$\psi_y = \psi_{x_i}\,t_1, \qquad \psi_z = \psi_{x_j}\,t_2, \qquad t\,x_i = x_j\,t_2\,t'\,t_1^{-1},$$

so

$$t\,\psi_y = t\,\psi_{x_i}\,t_1 = \psi_{x_j} \cdot t_2\,t'\,t_1^{-1} \cdot t_1 = \psi_z\,t',$$

as desired, which proves the lemma.

Now let $\{\psi_x\}$ be a quasi-S-structure on the T-module M, and let M_0 be a T-submodule of M. We shall say that M_0 is *suitable* relative to $\{\psi_x\}$ if for all $x, y \in S$,

$$\psi_x(M_0) = M_0, \qquad \psi_{xy} = \psi_x\,\psi_y \text{ on } M_0.$$

Such a suitable T-submodule M_0 can always be made into an S-module by defining $x \cdot m_0 = \psi_x(m_0)$, $x \in S$, $m_0 \in M_0$. Note that for $t \in T$, $\psi_t(m_0) = t\,m_0$, where $t\,m_0$ is calculated by using the fact that M_0 is a T-submodule of M.

In the above situation, then, we are given a T-module M and a T-submodule M_0 which can be made into an S-module in such a way as to preserve the original action of T. Whenever this occurs, we shall refer to M_0 as an (S, T)-*submodule* of the T-module M.

Suppose now that M_0 is any (S, T)-submodule of M. The following construction was introduced in [6], §3: let $M^S = \Omega S \otimes_{\Omega T} M$, and define $\lambda(M_0)$ to be the Ω-subspace of M^S spanned by the set of elements

$$\{x \otimes x^{-1}\,m_0 - 1 \otimes m_0 \colon x \in S,\ m_0 \in M_0\}.$$

Writing $S = \dot{\bigcup_{i=1}^{r}}\, x_i\,T$, $x_1 = 1$, we have for $t \in T$

$$x \otimes x^{-1}\,m_0 = (x_i\,t) \otimes (x_i\,t)^{-1}\,m_0 = x_i \otimes x_i^{-1}\,m_0,$$

so $\lambda(M_0)$ is also spanned by the set

$$\{x_i \otimes x_i^{-1}\,m_0 - 1 \otimes m_0 \colon 2 \leqq i \leqq r,\ m_0 \in M_0\}.$$

Furthermore, $\lambda(M_0)$ is an S-submodule of M^S, since for $y \in S$,

$$y\{x \otimes x^{-1}\,m_0 - 1 \otimes m_0\} = \{y\,x \otimes (y\,x)^{-1}\,y\,m_0 - 1 \otimes y\,m_0\} - \{y \otimes y^{-1}(y\,m_0) - 1 \otimes y\,m_0\} \in \lambda(M_0).$$

Let us put

$$[M_0, M]^{S,T} = \left[\frac{M^S}{\lambda(M_0)}\right] - \left[\left(\frac{M}{M_0}\right)^S\right] \in a(S, T). \tag{2.4}$$

When there is no danger of confusion, we shall omit the superscripts S, T, and write just $[M_0, M]$. The basic properties of this symbol are given in the next three results.

(2.5) **Comparison Theorem.** *Let $M_0 \subset M$ be T-modules, and suppose that M_0 is suitable relative to the quasi-S-structure $\{\psi_x\}$ on M, so that M_0 may be viewed*

as (S, T)-submodule of M. Let X be any S-submodule of M_0, and set $\overline{M}=M/X$, $\overline{M}_0=M_0/X$. Then $\overline{M}_0$ is a suitable submodule of $\overline{M}$ relative to the induced quasi-S-structure $\{\bar{\psi}_x\}$, and

$$[M_0, M]=[X, M]+[\overline{M}_0, \overline{M}] \quad \textit{in} \quad a(S, T).$$

Proof. Clearly X is itself suitable in M relative to $\{\psi_x\}$, whence also $\overline{M}_0$ is suitable in $\overline{M}$. Now $1\otimes X+\lambda(X)=X^S\subset M^S$, so there is an S-exact sequence

$$0\to X\xrightarrow{\varepsilon}\frac{M^S}{\lambda(X)}\to\overline{M}^S\to 0,$$

where $\varepsilon(u)=1\otimes u+\lambda(X)$, $u\in X$. (To verify that ε is an S-homomorphism, observe that for $s\in S$, $u\in X$,

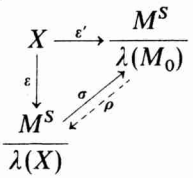
$$\varepsilon(su)=1\otimes su\equiv s\otimes u=s(1\otimes u) \mod \lambda(X).)$$

In the same way, there is another S-exact sequence

$$0\to X\xrightarrow{\varepsilon'}\frac{M^S}{\lambda(M_0)}\to\frac{\overline{M}^S}{\lambda(\overline{M}_0)}\to 0,$$

where $\varepsilon'(u)=1\otimes u+\lambda(M_0)$, $u\in X$.

Now consider the diagram



where σ is the canonical S-epimorphism. To define ρ, note that $M^S=\dot{\sum} x_i\otimes M$, where $S=\dot{\bigcup} x_i T$; now set

$$\rho(x_i\otimes m)=1\otimes\psi_{x_i}m, \quad 1\leqq i\leqq r, \quad m\in M.$$

Let us check that ρ is a T-homomorphism: if $t\in T$, set $tx_i=x_j t'$ with $t'\in T$. Then

$$\begin{aligned}\rho\{t(x_i\otimes m)\}&=\rho\{x_j\otimes t'm\}=1\otimes\psi_{x_j}(t'm)\\&=1\otimes t\psi_{x_i}(m)=t\cdot\rho(x_i\otimes m),\end{aligned}$$

as desired.

Clearly $\sigma\varepsilon=\varepsilon'$, $\rho\varepsilon'=\varepsilon$, so by (1.1) we have in $a(S, T)$

$$\begin{aligned}\left[\frac{M^S}{\lambda(X)}\right]-[\overline{M}^S]&=\left[\frac{M^S}{\lambda(M_0)}\right]-\left[\frac{\overline{M}^S}{\lambda(\overline{M}_0)}\right]\\&=[M_0, M]-[\overline{M}_0, \overline{M}],\end{aligned}$$

since $M/M_0\cong\overline{M}/\overline{M}_0$. The left-hand expression is $[X, M]$, and the theorem is established.

(2.6) **Corollary** (see [6], Theorem 3.1). *Let $X \subset M$ be a pair of S-modules. Then*

$$[M]=[X, M_T]+[M/X] \quad \text{in} \quad a(S, T).$$

Proof. Since M is an S-module, we may define ψ_x on M by $\psi_x(m)=x\,m$, $x \in S$, $m \in M$. Then X is suitable relative to this quasi-S-structure on M_T. Take $M_0=M$ in (2.5), and use the obvious facts that $[M, M_T]=[M]$, $[\overline{M}, \overline{M}_T]=[\overline{M}]$ in $a(S, T)$. Then (2.5) yields the desired result.

(2.7) **Theorem.** *Let X be any (S, T)-submodule of the T-module M, and let M' be any T-direct summand of M containing X. Then $[X, M]=[X, M']$ in $a(S, T)$.*

Proof. Write $M=M' \oplus N$, $N=T$-module. There are S-direct sum decompositions:

$$\frac{M^S}{\lambda(X)} \cong \frac{(M')^S}{\lambda(X)} \oplus N^S, \qquad \left(\frac{M}{X}\right)^S \cong \left(\frac{M'}{X}\right)^S \oplus N^S.$$

Eliminating N^S, we obtain

$$\left[\frac{M^S}{\lambda(X)}\right]-\left[\left(\frac{M}{X}\right)^S\right]=\left[\frac{(M')^S}{\lambda(X)}\right]-\left[\left(\frac{M'}{X}\right)^S\right]$$

in $a(S, T)$, that is, $[X, M]=[X, M']$.

(The proof actually shows that the equation holds in the Green ring $a(S)$.)

§ 3. Excision Theorem

Throughout this section we assume that K is a normal p-subgroup of G such that $H \cap K=1$, where H is some given subgroup of G. Put $\bar{G}=G/K$, $\overline{H}=HK/K \cong H$. Every $\bar{G}$-module N can be viewed as a G-module upon which K acts trivially. The map $[N] \mapsto [N]$ induces a ring homomorphism φ: $a(\bar{G}, \overline{H}) \to a(G, H)$ called the *inflation* map. Our main result is

(3.1) **Excision Theorem.** *Suppose that G is expressible as a disjoint union $\dot{\bigcup_{i=1}^{r}} x_i HK$, $x_1=1$, where the $\{x_i\}$ satisfy*

$$\text{Condition } C: \quad \bigcup_{i=1}^{r} H x_i \subset \dot{\bigcup_{i=1}^{r}} x_i H.$$

Then the inflation map

$$\varphi: a(\bar{G}, \overline{H}) \to a(G, H)$$

is a ring isomorphism.

Before proving the theorem, we record

(3.2) **Corollary**[1]. *If either $G=K \cdot N_G(H)$ or if G is a semidirect product $K \cdot B$, where $K \cap B=1$ and $H \subset B$, then φ: $a(\bar{G}, \overline{H}) \cong a(G, H)$.*

[1] The second part of this corollary is our previous Theorem 3.2 in [4].

Proof of Corollary. If $G = K \cdot N_G(H)$, then the $\{x_i\}$ may be chosen as elements of $N_G(H)$. In this case, $x_i H = H x_i$ for each i, so (C) is obviously true.

On the other hand, if $G = K \cdot B$ is a semidirect product, then the $\{x_i\}$ may be chosen as left coset representatives of H in B. In this case, $\bigcup x_i H = B$, so condition C is again valid.

Turning to the proof of Theorem 3.1, we suppose henceforth that its hypotheses are satisfied. We shall construct an additive homomorphism $\mu: a(G, H) \to a(\bar{G}, \bar{H})$ which will turn out to be the inverse of φ. Since φ is in any case a ring homomorphism, this will imply that both φ and μ are ring isomorphisms. To begin with, for each isomorphism type of G-module M, we shall define an element $\mu(M) \in a(\bar{G}, \bar{H})$. The definition is a recursive one, and proceeds by induction on $\dim M$. Once $\mu(M)$ is defined for each M, we shall prove that μ behaves properly on H-split G-exact sequences, and is therefore well-defined on $a(G, H)$.

Given any G-module M, let M_0 denote the K-socle of M. Since K is a normal p-subgroup of G, M_0 consists of all K-trivial elements of M, and is a G-submodule of M. If $M \neq 0$, then clearly $M_0 \neq 0$. We may view M_0 canonically as a $\bar{G}$-module, and any G-submodule of M_0 as a $\bar{G}$-submodule of M_0.

On the other hand, the isomorphism $H \cong \bar{H}$ permits us to view M_H as an $\bar{H}$-module, which we denote by $M_{\bar{H}}$. It is then clear that M_0 is a $(\bar{G}, \bar{H})$-submodule of $M_{\bar{H}}$ in the sense of §2, and thus the element $[M_0, M_{\bar{H}}]^{G, H}$ in $a(\bar{G}, \bar{H})$ is defined. Indeed, we have explicitly

$$[M_0, M_{\bar{H}}]^{G, H} = [(M_{\bar{H}})^G / \lambda(M_0)] - [\{(M/M_0)_{\bar{H}}\}^G],$$

where $\lambda(M_0)$ is the $\bar{G}$-submodule of $(M_{\bar{H}})^G$ spanned by the elements

$$\{\bar{x} \otimes \bar{x}^{-1} m_0 - 1 \otimes m_0 : \bar{x} \in \bar{G},\ m_0 \in M_0\}.$$

We are now ready to define $\mu(M)$ by induction on $\dim M$. Set $\mu(0) = 0$, and for $M \neq 0$, set

$$\mu(M) = [M_0, M_{\bar{H}}] + \mu(M/M_0) \in a(\bar{G}, \bar{H}). \tag{3.3}$$

(We omit the superscripts $\bar{G}, \bar{H}$ for convenience.) Thus $\mu(M)$ is now defined for every G-module M.

The following lemma is vital.

(3.4) **Lemma.** *Under the hypotheses of* (3.1), *there exists a quasi-$\bar{G}$-structure on the $\bar{H}$-module $M_{\bar{H}}$, such that every $\bar{G}$-submodule X of M_0 is suitable relative to this structure.*

Proof. Note that $\bar{G} = \dot{\bigcup_{i=1}^{r}} \bar{x}_i \bar{H}$, $\bar{x}_1 = 1$. We must construct a family $\{\psi_{\bar{x}} : \bar{x} \in \bar{G}\}$ of Ω-automorphisms of $M_{\bar{H}}$ such that $\psi_1 = \text{identity}$, and

$$t \psi_{\bar{x}_i} = \psi_{\bar{x}_j} t' \quad \text{whenever } t \bar{x}_i = \bar{x}_j t',\ \ t,\ t' \in \bar{H}. \tag{3.5}$$

Let us in fact choose $\psi_{\bar{x}_i}$ to be multiplication by x_i, $1 \leqq i \leqq r$; this is meaningful since M is to start with a G-module. In order to verify (3.5), choose any $h \in H$ mapping onto t; by Condition C, we may write $h x_i = x_j h'$ for some j and some $h' \in H$, in which case $t' = \bar{h}'$. Then t acts as h on M_H, so

$$t \cdot \psi_{\bar{x}_i} = h x_i = x_j h' = \psi_{\bar{x}_j} t',$$

as desired. It is then clear that *every* $\bar{G}$-submodule X of M_0 is suitable for this quasi-$\bar{G}$-structure $\{\psi_{\bar{x}}\}$. This completes the proof of the lemma.

Now suppose that X is any G-submodule of M_0. Then both X and M_0 are $(\bar{G}, \bar{H})$-submodules of M_H, and are suitable relative to the quasi-$\bar{G}$-structure on M_H defined in the preceding lemma. We may then apply the Comparison Theorem 2.5 to conclude that

$$[M_0, M_H] = [X, M_H] + [\overline{M}_0, \overline{M}_H] \quad \text{in} \quad a(\bar{G}, \bar{H}), \tag{3.6}$$

where $\overline{M}_0 = M_0/X$, $\overline{M} = M/X$. We shall use this relation in proving that formula (3.3) remains valid when M_0 is replaced by any of its G-submodules. We claim

(3.7) **Lemma.** *If X is any G-submodule of M_0, then*

$$\mu(M) = [X, M_H] + \mu(M/X) \quad \text{in} \quad a(\bar{G}, \bar{H}).$$

Proof. Use induction on $\dim M$, the result being clear if $\dim M = 0$ or if $X = 0$. Now let $M \neq 0$, let X be any nonzero G-submodule of M_0, and put $\overline{M} = M/X$, $\overline{M}_0 = M_0/X$. Then $\overline{M}_0$ is a K-trivial G-submodule of $\overline{M}$, thus lies in the K-socle of $\overline{M}$. By the induction hypothesis,

$$\mu(\overline{M}) = [\overline{M}_0, \overline{M}_H] + \mu(M/M_0),$$

where we have taken account of the fact that $\overline{M}/\overline{M}_0 \cong M/M_0$. Using (3.6), we obtain

$$\begin{aligned} \mu(M) &= [M_0, M_H] + \mu(M/M_0) = [M_0, M_H] + \mu(\overline{M}) - [\overline{M}_0, \overline{M}_H] \\ &= [X, M_H] + \mu(\overline{M}), \end{aligned}$$

as desired. This proves the lemma.

We are now ready to show that μ induces an additive homomorphism from $a(G, H)$ into $a(\bar{G}, \bar{H})$. We must prove that if $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ is an H-split G-exact sequence, then

$$\mu(M) = \mu(M') + \mu(M'').$$

Let us prove this by induction on $\dim M'$, the result being clear when $M' = 0$. Now let $M' \neq 0$, let X be any nonzero K-trivial G-submodule of M', and set $\overline{M}' = M'/X$, $\overline{M} = M/X$. The sequence

$$0 \to \overline{M}' \to \overline{M} \to M'' \to 0$$

is also H-split G-exact, so by the induction hypothesis

$$\mu(\overline{M})=\mu(\overline{M}')+\mu(M'').$$

By (2.7) we have $[X, M_H]=[X, M'_H]$ in $a(\bar{G}, \bar{H})$, and thus using (3.7) we get

$$\begin{aligned}\mu(M)&=[X, M_H]+\mu(\overline{M})=[X, M'_H]+\mu(\overline{M}')+\mu(M'')\\&=\mu(M')+\mu(M''),\end{aligned}$$

as claimed. This completes the proof that $\mu: a(G, H)\to a(\bar{G}, \bar{H})$ is well-defined.

To prove that $\mu\cdot\varphi=1$, let N be any $\bar{G}$-module. Its inflation $\varphi(N)$ is a K-trivial G-module, again denoted by N. Then N is its own K-socle, so

$$\mu\varphi[N]=[N, N_H]^{G, H}+\mu(N/N)=[N],$$

using (2.6).

Instead of showing directly that $\varphi\cdot\mu=1$, it is easier to complete the proof of the Excision Theorem by showing that φ is epic. We use induction on $\dim M$ to prove that $[M]\in$ image of φ, for each G-module M. As usual, let M_0 be the K-socle of M, and consider the $\bar{G}$-exact sequence

$$0\to M_0\xrightarrow{i'}\frac{(M_H)^G}{\lambda(M_0)}\to\left\{\left(\frac{M}{M_0}\right)_H\right\}^G\to 0,$$

where $i'(m_0)=1\otimes m_0+\lambda(M_0)$. View the above modules as K-trivial G-modules, and consider the diagram

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{i'} & \dfrac{(M_H)^G}{\lambda(M_0)} \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{\sigma}{\nearrow}\ \overset{\rho}{\swarrow} & \\ M & & \end{array}$$

where both i and i' are G-inclusions. Define $\sigma(m)=1\otimes m+\lambda(M_0)$, so σ is an H-homomorphism for which $\sigma i=i'$. On the other hand, define ρ on $(M_H)^G$ by setting

$$\rho(\bar{x}_i\otimes m)=x_i m,\quad 1\leqq i\leqq r,\quad m\in M.$$

Since $\lambda(M_0)$ is defined by viewing M_0 as $(\bar{G}, \bar{H})$-submodule of M_H, it follows that $\lambda(M_0)$ is spanned by the set of elements

$$\{\bar{x}_i\otimes\bar{x}_i^{-1}m_0-1\otimes m_0\colon 2\leqq i\leqq r,\ m_0\in M_0\}.$$

Hence $\rho\{\lambda(M_0)\}=0$, so ρ is well-defined on the quotient $(M_H)^G/\lambda(M_0)$. Clearly $\rho i'=i$, and it remains to check that ρ is an H-homomorphism. For $h\in H$, we may use condition C to write $h x_i=x_j h'$ for some j and some $h'\in H$. Then

$$\begin{aligned}\rho\{h(\bar{x}_i\otimes m)\}&=\rho\{\bar{h}\,\bar{x}_i\otimes m\}=\rho\{\bar{x}_j\otimes h' m\}\\&=x_j\cdot h' m=h\cdot\rho(\bar{x}_i\otimes m),\end{aligned}$$

as claimed. The Pushout Lemma 1.1 then yields the following relation in $a(\bar{G}, \bar{H})$:

$$[M]=\varphi\{[M_0, M_H]^{G, H}\}+[M/M_0].$$

By the induction hypothesis, $[M/M_0]\in$ image of φ. Thus also $[M]\in$ image of φ, so φ is epic, and the proof of Theorem 3.1 is complete.

We suspect that the Excision Theorem is no longer valid if Condition C is waived, but we have no counterexample to support this suspicion. Of course, it is possible that some slightly weaker condition than C would be sufficient. However, it is easy to see that one cannot omit the hypotheses that K be a normal p-subgroup of G such that $H\cap K=1$.

§4. Product Isomorphism Theorem and the Restriction Conjecture

We shall now give two applications of the Excision Theorem. The first refines our earlier Product Isomorphism Theorem 5.1 in [6]; not only is the present proof simpler, but a stronger result is obtained. The second application is concerned with the question as to when the restriction map

$$\text{res}\colon a(G,H)\to a(E,H)$$

is monic, where $H\subset E\triangle G$ and $[G:E]$ is a power of p.

In both applications we shall start with the situation $H\subset E\triangle G$, and suppose that $G=EA$ for some subgroup A such that $E\cap A$ is a p-group. For each $a\in A$, the map $e\to a^{-1}ea=e^a$, $e\in E$, is an automorphism of E. Form the semidirect product

$$\tilde{G}=\{(a,e)\colon a\in A,\ e\in E\},$$

where

$$(a_1,e_1)(a,e)=(a_1a,e_1^a e).$$

Then $\tilde{G}=E_0\cdot A_0$, $E_0\triangle\tilde{G}$, $E_0\cap A_0=1$, where E_0 is the image of E in $\tilde{G}$, and A_0 that of A; let H_0 be the image of H in $\tilde{G}$, so $H_0\subset E_0$.

There is a group epimorphism $f\colon\tilde{G}\to G$ given by $f(a,e)=ae$, with kernel $K=\{(a,a^{-1})\colon a\in E\cap A\}$. The map $a\to(a,a^{-1})$ yields an isomorphism $E\cap A\cong K$, so K is a normal p-subgroup of $\tilde{G}$ such that $\tilde{G}/K\cong G$, and $K\cap H_0=1$. We wish to apply the Excision Theorem, so we must verify that condition C holds for some set of left H_0 K-coset representatives in $\tilde{G}$. Write

$$G=\dot{\bigcup_{k=1}^{s}}a_kE,\qquad E=\dot{\bigcup_{l=1}^{t}}e_lH,\qquad a_k\in A,\qquad a_1=e_1=1.$$

Then $G=\dot{\bigcup}a_ke_lH$, and $[\tilde{G}:H_0K]=[\tilde{G}/K:H_0K/K]=[G:H]=st$. Setting $x_{kl}=(a_k,e_l)\in\tilde{G}$, $1\leqq k\leqq s$, $1\leqq l\leqq t$, it follows readily that the $\{x_{kl}\}$ are a full set of left coset representatives of H_0K in $\tilde{G}$.

Now take any $(1,h)\in H_0$. Then $(1,h)x_{kl}=(1,h)(a_k,e_l)=(a_k,b)$ for some $b\in E$. We may write $b=e_nh'$ for some n and some $h'\in H$, whence

$$(1,h)x_{kl}=(a_k,e_n)(1,h')\in x_{kn}H_0.$$

Therefore

$$\bigcup_{k,l}H_0x_{kl}\subset\bigcup_{k,l}x_{kl}H_0, \tag{4.1}$$

as desired. We may therefore apply the Excision Theorem to get

$$a(\tilde{G}, H_0) \cong a(\tilde{G}/K, H_0K/K) \cong a(G, H). \tag{4.2}$$

Note further that if we set $\tilde{E} = E_0K$, then the elements $\{x_{1l}\}$ are left H_0K-coset representatives in $\tilde{E}$. Analogously to (4.1), we obtain $\bigcup H_0 x_{1l} \subset \bigcup x_{1l} H_0$, so again using the Excision Theorem, we have

$$a(\tilde{E}, H_0) \cong a(E, H). \tag{4.3}$$

We are ready to apply these results. Refining [6], Theorem 5.1, we have

(4.4) **Product Isomorphism Theorem.** *Let $H \subset E \triangle G$, where $G = E \cdot C$ for some subgroup C of $C_G(E)$. Suppose that $C \cap E$ is a p-group, and that Ω is a splitting field for C and all of its subgroups. Then there is a ring isomorphism*

$$a(G, H) \cong a(G/E, 1) \otimes_Z a(E, H).$$

Proof. By (4.2), $a(G, H) \cong a(\tilde{G}, H_0)$ with $A = C$. Since C centralizes E, it is clear that $\tilde{G}$ is a direct product $C \times E_0$, with $H_0 \subset E_0$. Using (1.2) we obtain

$$a(\tilde{G}, H_0) = a(C \times E_0, H_0) \cong a(C, 1) \otimes_Z a(E, H).$$

Finally, $C \cap E$ is a normal p-subgroup of C, and $C/(C \cap E) \cong G/E$. By Clifford's Theorem, we have

$$a(G/E, 1) \cong a\big(C/(C \cap E), 1\big) \cong a(C, 1),$$

and the proof is complete.

(4.5) **Corollary.** *Let $H \subset E \triangle G$, where $G = E \cdot C_G(E)$ and where the greatest common divisor of $[G:E]$ and $[E:1]$ is a power of p, possibly equal to 1. Assume that Ω is a splitting field for $C_G(E)$ and all of its subgroups. Then there is a ring isomorphism*

$$a(G, H) \cong a(G/E, 1) \otimes_Z a(E, H).$$

Proof. It suffices to check that the hypotheses of (4.4) hold in this case. Let $C_0 = C_G(E)$, $T = C_0 \cap E$, so T is an abelian group central in C_0. Write $T = P \times Q$ with P the p-primary component of T, and $[Q:1]$ p-free. Since $[Q:1]$ divides $[E:1]$, and since $[C_0:Q] = [C_0:T_0]\,[P:1] = [G:E]\,[P:1]$, it follows from the hypotheses that $[Q:1]$ is relatively prime to $[C_0:Q]$. Thus Q is a central Hall subgroup of C_0. Let C be a complement of Q in C_0, so $C_0 = Q \times C$. We have $G = EC_0 = EC$, and $E \cap C$ is a p-group since in fact $E \cap C = P$. The corollary now follows from (4.4).

For our second application consider the following

(4.6) *Restriction Conjecture.* Let $H \subset E \triangle G$, where $[G:E]$ is a power of p. Then the restriction map

$$\text{res}: a(G, H) \to a(E, H)$$

is monic [2].

[2] In the case $H = 1$, we have $a(G, 1) \to a(E, 1)$, i.e. restriction of Brauer characters. Since the p-regular elements of G all lie in E, the restriction map is clearly a monomorphism in this case.

Call G a *split extension* of E if $G=EB$ for some subgroup B of G such that $E\cap B=1$. We now prove

(4.7) **Theorem.** *If the restriction conjecture holds whenever G is a split extension of E, then it holds true in general.*

Proof. Let $H\subset E\triangle G$, where G is an arbitrary extension of E, and $[G:E]$ is a power of p. If P is a Sylow p-subgroup of G, then $G=EP$, and $E\cap P$ is obviously a p-group. Hence both of the isomorphisms (4.2) and (4.3) are valid. (Using $A=P$.)

Consider

$$\begin{array}{ccccc} a(G,H) & \xrightarrow{\varphi} & a(\tilde{G},H_0) & & \\ \downarrow{\scriptstyle r_1} & & \downarrow{\scriptstyle r_2} & \searrow{\scriptstyle r_3} & \\ a(E,H) & \xrightarrow{\varphi'} & a(\tilde{E},H_0) & \xrightarrow{r_4} & a(E_0,H_0), \end{array}$$

where φ and φ' are inflation maps, and each r_i is a restriction map. Since the various maps do nothing to the modules involved, only changing their operator domains, the diagram is commutative. Both φ and φ' are isomorphisms, by (4.2) and (4.3). Further, $\tilde{G}$ is a *split* extension of E_0 by A_0, and $\tilde{G}/E_0$ is a p-group; hence r_3 is monic, since we have assumed the validity of the restriction conjecture for split extensions. But then r_1 must also be monic, as claimed, which proves the theorem.

Unfortunately, we are unable to prove the Restriction Conjecture in the split case. We shall merely conclude with two consequences of (4.6).

(4.8) **Corollary.** *Assume* (4.6) *true, and let G be nilpotent. If $H\subset J\subset G$, where $[G:J]$ is a power of p, then* res: $a(G,H)\to a(J,H)$ *is monic.*

Proof. Since G is nilpotent, every proper subgroup of G is properly contained in its normalizer. Hence there is a chain of subgroups $H\subset J=J_0\triangle J_1\triangle\cdots\triangle J_n=G$. By (4.6), each

$$\text{res: } a(J_{i+1},H)\to a(J_i,H),\qquad 0\leqq i\leqq n-1,$$

is monic. Hence so is res: $a(G,H)\to a(J,H)$.

(4.9) **Corollary.** *Assume* (4.6) *true, and G nilpotent. Then $a(G,H)$ is $\mathbb{Z}$-free for all $H\subset G$.*

Proof. Since $a(G,H)$ is unchanged when H is replaced by one of its Sylow p-subgroups, we may assume that H is a p-group. Next, G is the direct product of its Sylow subgroups, so we may write $G=P\times Y$, where P is the Sylow p-subgroup of G, and Y is the product of all the other Sylow subgroups of G. Set $E=H\times Y$, so $H\subset E\subset G$ and $[G:E]$ is a power of p. By (4.8), $a(G,H)\to a(E,H)$ is monic. However, $a(E,H)\cong a(E,E)$ since H is the Sylow p-subgroup of E. Thus $a(G,H)$ is embedded in $a(E,E)$, and the latter is $\mathbb{Z}$-free by virtue of the Krull-Schmidt Theorem.

References

1. Bass, H.: Algebraic K-theory. New York: Benjamin 1969.
2. Eilenberg, S., Steenrod, N.: Foundations of algebraic topology. Princeton University Press 1951.
3. Lam, T.-Y., Reiner, I.: Relative Grothendieck groups. J. Algebra **11**, 213–242 (1969).
4. – – Reduction theorems for relative Grothendieck rings. Trans. Amer. Math. Soc. **142**, 421–435 (1969).
5. – – Relative Grothendieck rings. Bull. Amer. Math. Soc. **75**, 496–498 (1969).
6. – – Restriction maps on relative Grothendieck rings. J. Algebra **14**, 260–298 (1970).
7. – – Finite generation of Grothendieck rings relative to cyclic subgroups. Proc. Amer. Math. Soc. **23**, 481–489 (1969).
8. Milnor, J.: Notes on algebraic K-theory. Mass. Inst. of Technology (1969).
9. Ribes, L.: On a cohomology theory for pairs of groups. Proc. Amer. Math. Soc. **21**, 230–234 (1968).

Prof. T.-Y. Lam
University of California
Berkeley, California 94720
USA

Prof. Irving Reiner
University of Illinois
Urbana, Illinois 61801
USA

(Received December 8, 1969)

Math. Z. 115, 165 – 168 (1970)

Permutation Groups on Unordered Sets

RONALD D. BERCOV and CHARLES R. HOBBY

I. Introduction

From the action of a permutation group G on a set Ω, one may obtain, in a natural way, permutation representations of G on the sets Ω_k of ordered k element subsets of Ω and on the sets Ω^k of unordered k element subsets of Ω. When G and H are groups which act on the same set Ω, Wielandt [7] has made use of the equivalence relation defined by $G \overset{k}{\approx} H$ if G and H have the same orbits on Ω_k. In an analogous way, we define the equivalence $G \overset{k}{\approx} H$ if G and H have the same orbits on Ω^k. It is easy to see (for example by ignoring the kth element) that $G \overset{k}{\approx} H$ implies $G \underset{k-1}{\approx} H$. The corresponding assertion for permutation groups on unordered sets is by no means obvious. Indeed, since the image of an unordered set under a permutation uniquely determines the image of its complement, it is clear that for groups of finite degree n, $G \overset{k}{\approx} H$ holds if and only if $G^n \overset{k}{\approx} H$ holds. Thus it would be unreasonable to expect $G \overset{k}{\approx} H$ to imply $G^k \overset{1}{\approx} H$ when n is not very much larger than k. Livingstone and Wagner [2] have shown that if Ω is finite of size n and if $2k \leqq n$, then a permutation group acts transitively on Ω^k only if it acts transitively on Ω^{k-1}. This is equivalent to the assertion that $G \overset{k}{\approx} S^\Omega$ implies $G^k \overset{1}{\approx} S^\Omega$ for $2k \leqq n$, where S^Ω is the symmetric group of degree n. Their proof is based on the representation theory of the symmetric group. A simpler proof, which is also based on the representation theory of the symmetric group, has been given by Robinson [4], and an elementary proof based on number-theoretic considerations has been given by Wielandt [5]. In all of these proofs Ω is finite.

A number of questions arise from the Livingstone-Wagner result. Is it possible to replace the symmetric group S^Ω by an arbitrary permutation group H on Ω; that is, does $G \overset{k}{\approx} H$ imply $G^k \overset{1}{\approx} H$? If so, is the analogous assertion true when we replace the equivalence relation, $\overset{k}{\approx}$, by the partial ordering, $\overset{k}{\lesssim}$, defined on the equivalence classes of subgroups of S^Ω by $G \overset{k}{\lesssim} H$ if each G-orbit on Ω^k is contained in some H-orbit on Ω^k? Is the hypothesis that Ω is finite really necessary? We answer these questions by showing that if k is any positive integer and Ω is either infinite or finite and sufficiently large relative to k, then $G \overset{k}{\lesssim} H$ implies $G \overset{k-1}{\lesssim} H$. It may be of some interest, since there is now an attempt [6, 7] to unify the largely separate theories of finite and infinite permutation groups, that our combinatorial proof which is based on Ramsey's theorem [3] applies to both the finite and infinite cases.

II. The Combinatorial Results

In both this section and the next, for any set A and any non-negative integer r, A^r will denote the set of all subsets of A of size r. We denote the empty set by $\emptyset$. Thus $A^0=\{\emptyset\}$.

We begin by restating Ramsey's theorem [3, p. 264].

Theorem 1. *Let X be an infinite set, r a positive integer, and let X^r be a finite union of mutually disjoint non-empty classes. Then there is an infinite subset Y of X such that each element of Y^r belongs to the same class.*

Ramsey's theorem also has a finite form [3, p. 267] as follows:

Theorem 1'. *Let X be a set, r and t positive integers, and let X^r be the union of s mutually disjoint non-empty classes. Then there exists a positive integer m which depends on r, s, and t, such that if X has more than m elements, then there is a subset Y of X of size t such that every element of Y^r belongs to the same class.*

We use Ramsey's theorem to deduce the following lemma which is the basis of the proof of the permutation group theorem.

Lemma 1. *Let Ω be an infinite set and k a positive integer. Then there do not exist non-empty disjoint subsets U and V of Ω^{k-1} such that $\{T\in\Omega^k|T^{k-1}\cap U\neq\emptyset\}=\{T\in\Omega^k|T^{k-1}\cap V\neq\emptyset\}$.*

Proof. We induct on k. For $k=1$ and $k=2$ the assertion is trivial. We suppose now that for some $k\geqq 3$ such sets U and V exist and put $W=\Omega^{k-1}-\{U\cup V\}$. By Theorem 1 we have an infinite subset Y of Ω such that Y^{k-1} is contained in one of the sets U, V, or W. It cannot be contained in U or V since then for any subset T of Y of size k, T^{k-1} would intersect only one of the sets U and V, contrary to hypothesis. It follows that Y^{k-1} is contained in W. An easy application of Zorn's lemma shows that a maximal such Y exists. Since U and V are non-empty, Y must be a proper subset of Ω. We choose a fixed α in $\Omega-Y$. We now use the induction hypothesis with Y in place of Ω, $k-1$ in place of k and U' and V' in place of U and V, where

$$U'=\{A\in Y^{k-2}|A\cup\{\alpha\}\in U\}$$

and

$$V'=\{A\in Y^{k-2}|A\cup\{\alpha\}\in V\}.$$

It is clear that an element A common to U' and V' leads to an $A\cup\{\alpha\}$ common to U and V, contrary to hypothesis. The maximality of Y shows that U' and V' are non-empty. To verify that the induction hypothesis is applicable, we consider $T\in Y^{k-1}$. Then if A belongs to $T^{k-2}\cap U'$, $A\cup\{\alpha\}$ belongs to U. It follows that some element of $(T\cup\{\alpha\})^{k-1}$ must belong to V, and this element cannot be T since Y^{k-1} is a subset of W. Thus $B\cup\{\alpha\}$ belongs to V for some B in T^{k-1}, from which it follows that B belongs to V'. The same argument with V and U interchanged completes the demonstration that the hypotheses of the lemma are satisfied. We conclude that U' and V' do not exist, from which it follows that our assumption that U and V exist was wrong.

Since it was not necessary for the proof of the lemma that Y be infinite, Theorem 1′ can be used in place of Theorem 1 to prove

Lemma 1′. *Let Ω be a set and k a positive integer. Then there is a positive integer m which depends only on k such that if Ω has more than m elements, then there do not exist non-empty disjoint subsets U and V of Ω^{k-1} such that* $\{T\in\Omega^k \mid T^{k-1}\cap U\neq\emptyset\}=\{T\in\Omega^k \mid T^{k-1}\cap V\neq\emptyset\}$.

III. The Permutation Group Theorem

Theorem 2. *Let G and H be permutation groups on an infinite set Ω. If k is a positive integer such that $G\overset{k}{\lesssim}H$, then $G\overset{k-1}{\lesssim}H$.*

Proof. If $G\overset{k-1}{\lesssim}H$ does not hold, there must exist A in Ω^{k-1} and g in G such that the H-orbit, A^H, of A is distinct from the H-orbit, A^{gH}, of the image, A^g, of A under g. If T is any element of Ω^k, then $A^H\cap T^{k-1}$ is non-empty if and only if A is contained in T^{h_1} for some h_1 in H. Since $G\overset{k}{\lesssim}H$ holds, any $T^{h_1 g}$ must be equal to T^{h_2} for some h_2 in H. Thus $A^H\cap T^{k-1}$ is non-empty if and only if A is contained in $T^{h_1}=T^{h_2 g^{-1}}$ for some h_1, h_2 in H; which holds if and only if $A^{gh_2^{-1}}$ is contained in T, and $A^{gH}\cap T^{k-1}$ is non-empty. It follows from Lemma 1, with $U=A^H$ and $V=A^{gH}$, that such orbits do not exist. This completes the proof of the theorem.

By using Lemma 1′ in place of Lemma 1 we obtain

Theorem 2′. *Let G and H be permutation groups on a set Ω and k a positive integer such that $G\overset{k}{\lesssim}H$. Then there exists a positive integer m which depends only on k such that if Ω has more than m elements, then $G\overset{k-1}{\lesssim}H$ holds.*

Corollary 1. *A permutation group of infinite or sufficiently large finite degree which acts transitively on unordered sets of size k also acts transitively on unordered sets of size $k-1$.*

Proof. Take G to be the symmetric group.

Corollary 2. *If G and H have infinite or sufficiently large finite degree and $G\overset{k}{\approx}H$, then $G\overset{k-1}{\approx}H$.*

Proof. $G\overset{k-1}{\approx}H$ holds if and only if $G\overset{k-1}{\lesssim}H$ and $H\overset{k-1}{\lesssim}G$ both hold.

IV. Conclusion

We close with three remarks.

Since Corollary 1 holds whenever the degree is finite and at least $2k$, it is reasonable to conjecture that Theorem 2′ is also true for $m=2k$. It seems clear that our method will not give a good estimate for m since good bounds for the Ramsey numbers are not yet known.

If we regard a group H as an approximation to a given group G whenever H and G have the same orbits on Ω^k, then Corollary 2 says that as k increases

our approximations get "better". It seems reasonable to ask how much like G the group H must be in order to approximate G in this sense for all k. Beaumont and Peterson [1] have shown that if Ω is finite with at least 10 elements and G is the symmetric group, then such an H must be either the alternating group or the symmetric group. They showed that there is one other such H for degrees 5 and 6, and two other such groups for degree 9.

Corollary 1 is a generalization to groups of infinite degree of the theorem which Livingstone and Wagner [2] used to show that a group which acts transitively on Ω^k is k-transitive when k is at least 5, and is $(k-1)$-transitive for k less than 5. However, their proof depends in a number of other ways on the assumption that Ω is finite. Indeed, the group of all order preserving permutations of the set of real numbers acts transitively on Ω^k yet intransitively on Ω_k for every k greater than one.

References

1. Beaumont, R. A., Peterson, R. P.: Set-transitive permutation groups. Canadian J. Math. **7**, 35–42 (1955).
2. Livingstone, D., Wagner, A.: Transitivity of finite permutation groups on unordered sets. Math. Z. **90**, 393–403 (1965).
3. Ramsey, F. P.: On a problem of formal logic. Proc. London Math. Soc. **30**, 264–286 (1930).
4. Robinson, G. de B.: Note on a theorem of Livingstone and Wagner. Math. Z. **102**, 351–352 (1967).
5. Wielandt, H.: Endliche k-homogene Permutationsgruppen. Math. Z. **101**, 142 (1967).
6. – Unendliche Permutationsgruppen. Lecture notes. 2nd ed. York University, Toronto (1967).
7. – Permutation groups through invariant relations and invariant functions. Lecture notes, 101 pp. Dept. of Math., Ohio State University, Columbus, Ohio (1969).

Prof. Ronald D. Bercov
The University of Alberta
Edmonton, Alberta
Canada

Prof. Charles R. Hobby
University of Washington
Seattle, Washington 98105
U.S.A.

(Received March 3, 1970)

Math. Z. 115, 169–178 (1970)

Einige Bemerkungen über Flächen beschränkter mittlerer Krümmung

STEFAN HILDEBRANDT

1. Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis von drei einfachen Ergebnissen über Flächen beschränkter mittlerer Krümmung in isothermer Parameterdarstellung. Wir beginnen mit einem bemerkenswerten Maximumprinzip, das ein Resultat von Heinz und Hildebrandt [4] verallgemeinert und im wesentlichen aus dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen folgt. Danach leiten wir einen Existenzsatz her, der auch für Anwendungen auf freie Randwertprobleme von Interesse ist. Zum Abschluß stellen wir einige nützliche Resultate über das Verhalten von Flächen beschränkter mittlerer Krümmung in der Umgebung eines Verzweigungspunktes zusammen.

Im folgenden bezeichnen wir mit $a \cdot b$ bzw. $a \wedge b$ das innere bzw. äußere Produkt zweier Vektoren a, b des dreidimensionalen Euklidischen Raumes E^3, und mit $|a| = \sqrt{a \cdot a}$ die Länge von a. Für die Punkte der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ schreiben wir $w = u + iv$, und eine Fläche in E^3 wird durch $x = x(w) = x(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$ gegeben. Wir setzen $\nabla x = (x_u, x_v)$, $|\nabla x|^2 = |x_u|^2 + |x_v|^2$, und $\Delta x = x_{uu} + x_{vv}$. Ferner sei $B = \{w : |w| < 1\}$, $B_r(w_0) = \{w : |w - w_0| < r\}$, und

$$D(x) = \iint_B |\nabla x|^2 \, du \, dv .$$

Außerdem setzen wir für $G \subset \mathbb{C}$

$$|x|_{0,G} = \sup_{w \in G} |x(w)|,$$

und $H_1(B)$ und $\mathring{H}_1(B)$ stehen für die in [6], I, S. 207 definierten Sobolewräume. Wir verweisen auf die dort gemachten Bemerkungen über die Randwerte von $H_1(B)$-Funktionen. Schließlich sei

$$D_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad D_v = \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial w} = (D_u - i D_v), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}} = (D_u + i D_v).$$

2. Ein Einschließungssatz (Maximumprinzip)

Zunächst betrachten wir eine Klasse von konvexen Funktionen.

Definition 1. Unter einer *Eichfunktion auf* E^3 verstehen wir eine reellwertige Funktion k der Klasse $C^2(E^3)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(α) $\gamma_k(x)=\inf\limits_{|\xi|=1}\sum\limits_{i,j=1}^{3}\dfrac{\partial^2 k(x)}{\partial x^i\partial x^j}\xi^i\xi^j>0$ für alle $x\in E^3$,

(β) $k(0)=0$, $\operatorname{grad} k(0)=0$.

Für eine Eichfunktion k auf E^3 gilt dann, wie man leicht einsieht, das folgende:

1. $k(\alpha x+\beta y)\leqq\alpha k(x)+\beta k(y)$ für $\alpha,\beta\geqq 0$ mit $\alpha+\beta=1$ und für beliebige $x, y\in E^3$.

2. $k(x)>0$, $|\operatorname{grad} k(x)|>0$ für $x\in E^3-\{0\}$.

3. $k(x)\to+\infty$ für $|x|\to+\infty$.

4. Durch

$$K_R(m)=\{x\in E^3: k(x-m)\leqq R\}$$

wird ein kompakter konvexer Körper des E^3 definiert, den wir (die zu k gehörende) *Eichkugel* mit dem Mittelpunkt $m\in E^3$ und dem Radius R nennen wollen. Zur Abkürzung setzen wir noch

$$K=\{x: k(x)\leqq 1\}=K_1(0).$$

Lemma 1. *Sei h eine reelle Zahl mit $0<h<1$, und bezeichne k eine Eichfunktion auf E^3, die den folgenden Bedingungen genügt:*

$$\gamma(k)=\inf_{x\in E^3}\gamma_k(x)>0, \tag{2.1}$$

$$|\operatorname{grad} k|_{0,K}=q<\frac{\gamma(k)}{h}. \tag{2.2}$$

Ferner sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, und bezeichne $x\colon \bar{G}\to E^3$ eine Fläche der Klasse $C^0(\bar{G})\cap C^2(G)$, die der Differentialungleichung

$$|\Delta x|\leqq h|\nabla x|^2 \quad \text{in } G \tag{2.3}$$

und den Nebenbedingungen

$$x(w)\in K \quad \text{für } w\in\bar{G} \tag{2.4}$$

und

$$x(w)\in K_R(m) \quad \text{für } w\in\partial G \tag{2.5}$$

genügt, wobei m ein fester Punkt aus E^3 und $0\leqq R\leqq 1$ ist. Dann gilt

$$x(w)\in K_R(m) \quad \text{für } w\in\bar{G}. \tag{2.6}$$

Beweis. Wir wenden eine Kontinuitätsmethode an, und zwar betrachten wir die Flächenschar

$$x_t(w)=x(w)-t\,m=(1-t)\,x(w)+t\{x(w)-m\} \tag{2.7}$$

für $t\in[0,1]$. Wegen der Konvexität von k folgt

$$k(x_t)\leqq(1-t)\,k(x)+t\,k(x-m). \tag{2.8}$$

Mittels (2.4) und (2.5) ergibt sich hieraus

$$k(x_t(w)) \leqq 1 \quad \text{für } w \in \partial G \text{ und } t \in [0,1]. \tag{2.9}$$

Andererseits ist $k \circ x_t$ von der Klasse $C^0(\bar{G}) \cap C^2(G)$ und genügt für alle $t \in [0,1]$ der Differentialungleichung

$$\begin{aligned} \Delta k(x_t) &= \sum_{i,j=1}^{3} k_{x^i x^j}(x_t)\{D_u x_t^i D_u x_t^j + D_v x_t^i D_v x_t^j\} + \sum_{i=1}^{3} k_{x^i}(x_t)\, \Delta x_t^i \\ &\geqq \gamma(k)\,|\nabla x|^2 - |\operatorname{grad} k(x_t)|\,|\Delta x| \quad \text{in } G. \end{aligned}$$

Wegen (2.3) folgt dann

$$\Delta k(x_t) \geqq \{\gamma(k) - h\,|\operatorname{grad} k(x_t)|\}\,|\nabla x|^2 \quad \text{auf } G. \tag{2.10}$$

Wir setzen

$$\varphi(t) = |\operatorname{grad} k(x_t)|_{0,G}. \tag{2.11}$$

Nach (2.10) ist also $k \circ x_t$ in G subharmonisch, falls $\varphi(t) \leqq \gamma(k)\, h^{-1}$, und wegen (2.9) folgt dann aus dem Maximumprinzip $k(x_t(w)) \leqq 1$ für alle $w \in \bar{G}$; somit ergibt sich $\varphi(t) \leqq q$ aufgrund von (2.2). Daher gilt folgende Alternative: Entweder ist $\varphi(t) \leqq q < \gamma(k)\, h^{-1}$, oder es ist $\varphi(t) > \gamma(k)\, h^{-1}$. Andererseits ist $\varphi(t)$ offensichtlich stetig für $0 \leqq t \leqq 1$, und wegen (2.2) und (2.4) gilt $\varphi(0) \leqq q$, so daß schließlich $\varphi(1) \leqq q$ folgt. Also ist $k(x(w) - m)$ auf G subharmonisch, und aus (2.5) ergibt sich mit dem Maximumprinzip die Behauptung (2.6).

Im Falle $k(x) = |x|^2$ fällt der obige Hilfssatz gerade mit dem in [4] bewiesenen Lemma 1 zusammen, das zum Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung (vgl. [4], Theorem 1) für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung benötigt wurde.

Eine weitere interessante *Anwendung von Lemma* 1 ergibt sich, wenn wir k als eine positiv definite quadratische Form wählen. Dann ist $K = \{x : k(x) \leqq 1\}$ ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt 0, dessen Hauptachsen mit a, b, c bezeichnet seien, $a \geqq b \geqq c > 0$. Wir erhalten

$$\gamma(k) = \frac{2}{a^2} > 0 \tag{2.12}$$

und

$$|\operatorname{grad} k(x)| \leqq \frac{2}{c}\sqrt{k(x)} \quad \text{für alle } x \in E^3. \tag{2.13}$$

Setzen wir also

$$h < \frac{c}{a^2} \tag{2.14}$$

voraus, so folgt

$$|\operatorname{grad} k|_{0,K} \leqq \frac{2}{c} < \frac{2}{a^2 h} = \frac{\gamma(k)}{h}.$$

Unter der Voraussetzung (2.14) erfüllt daher k die Voraussetzungen von Lemma 1.

Als geometrische Anwendung von Lemma 1 erhalten wir einen *Einschließungssatz (Maximumprinzip)* für Lösungen x der Differentialgleichung

$$\Delta x = 2\mathscr{H}(w)(x_u \wedge x_v),$$

insbesondere also für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung $\mathscr{H}(w)$ in konformer Parameterdarstellung.

Satz 1. *Sei G ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, ferner sei $\mathscr{H}$ eine auf G stetige reellwertige Funktion mit $h = \sup_{w \in G} |\mathscr{H}(w)| < 1$, und bezeichne $x\colon \bar{G} \to E^3$ eine Fläche der Klasse $C^0(\bar{G}) \cap C^2(G)$, die der Differentialgleichung*

$$\Delta x = 2\mathscr{H}(w)(x_u \wedge x_v) \quad \text{in } G \tag{2.15}$$

genügt. Schließlich sei k eine die Bedingungen (2.1) *und* (2.2) *erfüllende Eichfunktion. Dann ergibt sich aus*

$$x(w) \in K \text{ für } w \in \bar{G}, \quad \text{und} \quad x(w) \in K_R(m) \text{ für } w \in \partial G, \quad 0 \leqq R \leqq 1,$$

sogar

$$x(w) \in K_R(m) \quad \text{für alle } w \in \bar{G}.$$

Insbesondere gilt die Behauptung des Satzes, wenn man k als positiv definite quadratische Form wählt und wenn für die Hauptachsen a, b, c $(a \geqq b \geqq c > 0)$ des zugeordneten Ellipsoides $K = \{x\colon k(x) \leqq 1\}$ die Bedingung

$$h < \frac{c}{a^2} \tag{2.14}$$

erfüllt ist.

3. Ein Existenzsatz

In diesem Abschnitt skizzieren wir den Beweis einer Erweiterung des in [6], I, gegebenen Existenzsatzes für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung.

Lemma 2. *Sei H^* eine reellwertige Funktion der Klasse $C^1(E^3)$ mit dem zugeordneten Vektorpotential*

$$Q^*(x) = \frac{4}{3}\left(\int_0^{x^1} H^*(\tau, x^2, x^3)\, d\tau, \int_0^{x^2} H^*(x^1, \tau, x^3)\, d\tau, \int_0^{x^3} H^*(x^1, x^2, \tau)\, d\tau\right), \tag{3.1}$$

und sei k eine Eichfunktion auf E^3, die den Bedingungen

$$|Q^*(x)| \leqq 2q^* \quad \text{für alle } x \in E^3, \quad 0 < q^* < 1, \tag{3.2}$$

und

$$|\operatorname{grad} k(x)|\, |H^*(x)| \leqq \gamma_k(x) \quad \text{für alle } x \in E^3 \tag{3.3}$$

genügen. Weiter bezeichne B die Kreisscheibe $\{w: |w|<1\}$. *Dann hat das Variationsproblem*

$$P^*: \quad \begin{cases} E^*(z)=\iint\limits_B \{|\nabla z|^2+Q^*(z)\cdot(z_u\wedge z_v)\}\,du\,dv\to Min \\ \text{unter allen } z\in H_1(B) \text{ mit } z-f\in \mathring{H}_1(B) \end{cases}$$

für jedes $f\in H_1(B)\cap C^0(\partial B)$ *mit* $\max\limits_{\partial B} k\circ f\leqq 1$ *eine Lösung* $x\in C^0(\bar{B})\cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta\in(0,1)$, *die das Dirichletproblem*

$$\Delta x=2H^*(x)(x_u\wedge x_v) \quad \text{in } B, \qquad x=f \quad \text{auf } \partial B \tag{3.4}$$

löst und der Ungleichung

$$\max_B k\circ x\leqq 1 \tag{3.5}$$

genügt.

Beweis. Aus (3.2) folgt

$$(1-q^*)\,|\nabla x|^2\leqq|\nabla x|^2+Q^*(x)\cdot(x_u\wedge x_v)\leqq(1+q^*)\,|\nabla x|^2, \qquad 0<q^*<1,$$

und daher

$$(1-q^*)\,D(x)\leqq E^*(x)\leqq(1+q^*)\,D(x)$$

für beliebiges $x\in H_1(B)$. Mittels wohlbekannter Schlüsse von Morrey (vgl. [7], Lemma 1.9.2, Theorem 1.9.1, 1.10.2, 1.10.3, 1.10.4) und einem Regularitätssatz von Heinz und Tomi (vgl. [10]) folgt, daß das Variationsproblem P^* für jedes $f\in H_1(B)\cap C^0(\partial B)$ eine Lösung $x\in C^0(\bar{B})\cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta\in(0,1)$, hat, die das Dirichletproblem (3.4) löst und daher insbesondere der Differentialungleichung

$$|\Delta x|\leqq|H^*(x)|\,|\nabla x|^2 \quad \text{in } B \tag{3.6}$$

genügt. Andererseits gilt

$$\Delta k(x)=\sum_{i,j=1}^{3} k_{x^ix^j}(x)\{x^i_u x^j_u+x^i_v x^j_v\}+\sum_{i=1}^{3} k_{x^i}(x)\,\Delta x^i.$$

Hieraus folgt wegen (3.3) und (3.6)

$$\Delta k(x)\geqq\{\gamma_k(x)-|\operatorname{grad} k(x)|\,|H^*(x)|\}\,|\nabla x|^2\geqq 0 \quad \text{in } B,$$

d.h. $k\circ x\in C^0(\bar{B})\cap C^2(B)$ ist in B subharmonisch. Aus $\max\limits_{\partial B} k\circ f\leqq 1$ folgt dann mittels des Maximumprinzips auch $\max\limits_B k\circ x\leqq 1$, womit das Lemma bewiesen ist.

Aus Lemma 2 ergibt sich nunmehr

Satz 2. *Bezeichne k eine Eichfunktion auf* E^3 *mit der Eichkugel* $K=\{x: k(x)\leqq 1\}$, *und sei H eine reellwertige Funktion der Klasse* $C^1(K)$, *die den Bedingungen*

$$|\operatorname{grad} k(x)|\,|H(x)|\leqq\gamma_k(x) \quad \text{für alle } x\in K \tag{3.7}$$

und

$$h=\max_{x\in K}|H(x)|<\tfrac{3}{2}\cdot\{\max_{x\in K}|x|\}^{-1} \tag{3.8}$$

genügt. Ferner bezeichne

$$Q(x)=\frac{4}{3}\left(\int_0^{x^1}H(\tau,x^2,x^3)\,d\tau,\ \int_0^{x^2}H(x^1,\tau,x^3)\,d\tau,\ \int_0^{x^3}H(x^1,x^2,\tau)\,d\tau\right)$$

das H zugeordnete Vektorpotential der Klasse $C^1(K)$, und es sei $B=\{w:|w|<1\}$.

(i) **Dirichletproblem.** *Für jedes $f\in H_1(B)\cap C^0(\partial B)$ mit $\max_{\partial B}k\circ f\leqq 1$ hat das Variationsproblem*

$$P:\quad\begin{cases}E(z)=\iint_B\{|\nabla z|^2+Q(z)\cdot(z_u\wedge z_v)\}\,du\,dv\to Min\\ \text{unter allen } z\in H_1(B) \text{ mit } z-f\in\mathring{H}_1(B) \text{ und } \operatorname{ess.max}_B k\circ z\leqq 1\end{cases}$$

eine Lösung $x\in C^0(\bar{B})\cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta\in(0,1)$, die auch

$$\Delta x=2H(x)\,x_u\wedge x_v \quad in\ B,\qquad x=f \quad auf\ \partial B$$

löst und $\max_B k\circ x\leqq 1$ genügt.

(ii) **Plateauproblem.** *Bezeichne Γ eine in der Eichkugel K gelegene geschlossene Jordankurve des E^3, und sei $\mathfrak{C}(\Gamma)$ die Klasse aller $x\in H_1(B)\cap C^0(\partial B)$ mit $\operatorname{ess.max}_B k\circ x\leqq 1$, die ∂B schwach monoton auf Γ abbilden. Wenn $\mathfrak{C}(\Gamma)$ nichtleer ist, so hat das Variationsproblem*

$$\mathfrak{P}:\ E(z)\to\text{Min}\qquad \text{unter allen } z\in\mathfrak{C}(\Gamma)$$

eine Lösung $x\in\mathfrak{C}(\Gamma)\cap C^0(\bar{B})\cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta\in(0,1)$, die ∂B sogar topologisch auf Γ abbildet und in B den Gleichungen

$$\Delta x=2\ H(x)(x_u\wedge x_v),\qquad |x_u|=|x_v|,\qquad x_u\cdot x_v=0$$

genügt.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß anstelle von (3.7) sogar

$$|\text{grad}\,k(x)|\,|H(x)|<\gamma_k(x)\qquad \text{für } x\in K \tag{3.7*}$$

gilt (der allgemeinere Fall (3.7) kann aus (3.7*) ähnlich wie in [6], I, durch eine Approximationsmethode gewonnen werden). Dann können wir eine „Fortsetzung" $H^*\in C^1(E^3)$ von H finden, die auf K mit H übereinstimmt, außerhalb einer geeigneten Eichkugel $K_{1+\varepsilon}(0)$, $\varepsilon>0$, verschwindet und die Bedingungen (3.2) und (3.3) erfüllt (die hierzu nötigen Überlegungen verlaufen ähnlich wie im Beweis von Satz 2 aus [6], Teil I). Nunmehr folgt aus Lemma 2 die Behauptung (i) des Satzes; der Beweis von (ii) ergibt sich dann leicht aus (i) (vgl. [6], I).

Eine interessante Anwendung findet das soeben bewiesene Ergebnis in der Theorie der freien Randwertprobleme für Flächen vorgegebener mittlerer Krümmung $H=H(x)$ (vgl. [6], II). Es zeigt nämlich, daß man unter gewissen Voraussetzungen über H und das konvexe „Gefäß" K Flächen $x=x(w)$ der vorgeschriebenen mittleren Krümmung H mit freiem Rand auf der Gefäßwand ∂K finden kann, die ganz im Gefäß K liegen.

4. Verzweigungspunkte

Abschließend wollen wir eine bei geometrischen Anwendungen[1] nützliche „Normalform" für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung in der Umgebung eines Verzweigungspunktes herleiten, die für Minimalflächen von Chen [1] (vgl. auch [8], S. 235) bewiesen wurde. Der Teil (i) des folgenden Satzes stammt von Heinz (vgl. z. B. [3]).

Satz 3. *Sei G ein Gebiet der komplexen Ebene, $\mathscr{H}\in C^0(G)$ eine reellwertige Funktion, und sei $x\colon G\to E^3$ eine Fläche der Klasse $C^2(G)$ mit $x\not\equiv\text{const}$ auf G, die in G den Gleichungen*

$$\Delta x=2\mathscr{H}(w)(x_u\wedge x_v) \tag{4.1}$$

und

$$|x_u|=|x_v|,\qquad x_u\cdot x_v=0 \tag{4.2}$$

genügt. Weiter bezeichne $w_0\in G$ einen Verzweigungspunkt von x, d.h. es gelte $x_u(w_0)=x_v(w_0)=0$.

(i) *Dann gibt es einen Vektor $a\in\mathbb{C}^3$ mit $a\neq 0$ und*

$$(a)^2=\sum_{j=1}^{3}(a^j)^2=0,$$

sowie eine natürliche Zahl $\nu\geqq 1$, so daß

$$x_w=x_u-i\,x_v=a(w-w_0)^\nu+o(|w-w_0|^\nu)\quad \text{für } w\to w_0. \tag{4.3}$$

(ii) *Ferner existieren eine reelle Zahl $A>0$ und eine orthogonale Abbildung O von E^3 auf sich mit $\det O=1$, so daß für $z=O(x-x_0)$, $x_0=x(w_0)$, die asymptotische Darstellung*

$$\begin{aligned} z^1+i\,z^2&=A(w-w_0)^{\nu+1}+o(|w-w_0|^{\nu+1})\\ z^3&=\qquad\qquad o(|w-w_0|^{\nu+1}) \end{aligned}\qquad \text{für } w\to w_0 \tag{4.4}$$

besteht.

Beweis. 1. Zunächst nehmen wir an, daß $G=B=\{w\colon |w|<1\}$, $x\in C^2(\bar{B})$ und $x\not\equiv\text{const}$ auf B ist. Dann ergibt sich (i), wie Heinz bemerkt hat, mit einer Schlußweise von Hartman und Wintner [2]. Der Vollständigkeit halber

[1] Vgl. z. B. Serrin [9], und Heinz/Hildebrandt [4].

wiederholen wir das Argument. Ist nämlich $B^* \subset B$ ein glattberandetes Gebiet, so gilt für beliebiges $\Phi \in C^1(\bar{B}^*)$

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial B^*} x_w \cdot \Phi \, dw = \iint_{B^*} (x_w \cdot \Phi_{\bar{w}} + x_{w\bar{w}} \cdot \Phi) \, du \, dv.$$

Andererseits folgt aus (4.1) und $x \in C^2(\bar{B})$ eine Differentialungleichung der Form

$$|x_{w\bar{w}}| \leqq \alpha |x_w| \quad \text{in } B$$

mit einer geeigneten Konstanten α, und somit

$$\tfrac{1}{2} \Big| \oint_{\partial B^*} x_w \cdot \Phi \, dw \Big| \leqq \iint_B \{|\Phi_{\bar{w}}| + \alpha |\Phi|\} \, |x_w| \, du \, dv$$

für alle $\Phi \in C^1(\bar{B}^*)$. Nach [2], S. 455–458, ergibt sich dann die Behauptung von (i).

Zum Beweis von (ii) nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_0 = 0$ und $x_0 = x(w_0) = 0$ an. Dann erhalten wir aus (4.3) und

$$x(w) = x(u, v) = \int_0^1 [u \, x_u(t\,u, t\,v) + v \, x_v(t\,u, t\,v)] \, dt$$

die Relation

$$x(w) = \frac{1}{\nu+1} \operatorname{Re} a \, w^{\nu+1} + o(|w|^{\nu+1}), \quad (w \to 0). \tag{4.5}$$

Setzen wir $\dfrac{a}{\nu+1} = \alpha - i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, so folgt

$$x(w) = \alpha \operatorname{Re} w^{\nu+1} + \beta \operatorname{Im} w^{\nu+1} + o(|w|^{\nu+1}), \quad (w \to 0). \tag{4.6}$$

Andererseits gilt nach (4.3)

$$\frac{1}{\nu+1} x_u(w) = (\alpha \operatorname{Re} w^\nu + \beta \operatorname{Im} w^\nu) + o(|w|^\nu),$$

$$\frac{1}{\nu+1} x_v(w) = (-\alpha \operatorname{Im} w^\nu + \beta \operatorname{Re} w^\nu) + o(|w|^\nu).$$

Setzen wir insbesondere $w = u \in \mathbb{R}$, so ergibt sich hieraus wegen (4.2)

$$|\alpha| = |\beta|, \quad \alpha \cdot \beta = 0, \tag{4.7}$$

und damit folgt $2|\alpha|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \dfrac{|a|^2}{(\nu+1)^2} > 0$ oder $|\alpha| > 0$. Also gibt es zwei Vektoren $e_1, e_2 \in E^3$ und eine reelle Zahl $A > 0$ mit

$$\alpha = A\,e_1, \quad \beta = A\,e_2, \quad |e_1| = |e_2| = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = 0$$

und

$$x(w)=A\,e_1\,\mathrm{Re}\,w^{\nu+1}+A\,e_2\,\mathrm{Im}\,w^{\nu+1}+o(|w|^{\nu+1}). \tag{4.8}$$

Mittels einer geeigneten orthogonalen Abbildung O des E^3 mit $\det O=1$ können wir dann für $z=O\,x$ die asymptotische Darstellung

$$\begin{aligned} z^1(w)&=A\,\mathrm{Re}\,w^{\nu+1}+o(|w|^{\nu+1})\\ z^2(w)&=A\,\mathrm{Im}\,w^{\nu+1}+o(|w|^{\nu+1}) \quad \text{für } w\to 0\\ z^3(w)&=\qquad\qquad +o(|w|^{\nu+1}) \end{aligned}$$

erreichen, woraus (4.4) folgt.

2. Aufgrund von 1. ergibt sich die Behauptung des Satzes auch für ein beliebiges Gebiet $G\subset\mathbb{C}$, sobald gezeigt ist, daß aus „$x\not\equiv$ const auf G" auch „$x\not\equiv$ const auf U" für jedes Teilgebiet $U\subseteqq G$ folgt.

Zum Beweis des letzteren nehmen wir an, daß $x(w)=c=$ const auf einem Teilgebiet $U\subseteqq G$ ist. Dann bezeichne U_c das maximale, U enthaltende Teilgebiet von G, auf dem $x(w)=c$ gilt. Wegen $x\not\equiv$ const auf G ist U_c ein echtes Teilgebiet von G. Somit gibt es einen Punkt $w_0\in\partial U_c\cap G$, der Verzweigungspunkt von x sein muß wegen $x_w=0$ auf U_c. Nach Konstruktion von U_c ist dann $x\not\equiv$ const auf jeder Kreisscheibe $B_r(w_0)\subset G$, so daß wir die Ergebnisse von 1. anwenden dürfen. Aus der asymptotischen Darstellung (4.4) von x in der Nähe von w_0 ergibt sich aber $|x(w)-x(w_0)|>0$, und somit insbesondere $x(w)\neq c$, wenn nur $0<|w-w_0|<\varepsilon$ ausfällt und $\varepsilon>0$ hinreichend klein gewählt wird. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zu $x(w)=c$ für w aus der nichtleeren Menge $B_\varepsilon(w_0)\cap U_c$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Bemerkungen und Folgerungen

1. Der Satz bleibt richtig, wenn man (4.1) durch die allgemeineren, von Heinz in [3] betrachteten Systeme ersetzt.

2. Ein entsprechendes Resultat gilt für die auf ∂G liegenden Verzweigungspunkte einer Lösung von (4.1), (4.2), die ∂G auf eine geschlossene Jordankurve der Klasse C^2 im E^3 abbildet. Hierbei ist der fundamentale Regularitätssatz von Heinz [3] heranzuziehen.

3. Aus der Normalform (4.3) und (4.4) ergibt sich insbesondere:

(a) Die Verzweigungspunkte w_0 sind isoliert.

(b) Für hinreichend kleines $\varepsilon>0$ gibt es eine Konstante $A^*>0$, so daß $|x(w)-x(w_0)|\geqq A^*|w-w_0|^{\nu+1}>0$, falls $0<|w-w_0|<\varepsilon$ ist und w_0 einen Verzweigungspunkt von x bezeichnet.

(c) In jeder Umgebung eines Verzweigungspunktes w_0 von x gibt es zwei Punkte w_1 und w_2 mit $w_1\neq w_2$ und $x(w_1)=x(w_2)$. Ein Beweis hierfür findet sich bei Chen [1] oder bei Serrin [9].

(d) Der Normalenvektor

$$\mathfrak{N}(w)=\frac{x_u(w)\wedge x_v(w)}{|x_u(w)\wedge x_v(w)|}$$

konvergiert für $w\to w_0$ gegen einen Grenzwert. Entsprechend konvergiert die Tangentialebene gegen eine Grenzlage.

Literatur

1. Chen, Y. W.: Branch points, poles, and planar points of minimal surfaces in R^3. Ann. of Math. **49**, 790 – 806 (1948).
2. Hartman, P., Wintner, A.: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. **75**, 449 – 476 (1953).
3. Heinz, E.: Über das Randverhalten quasilinearer elliptischer Systeme mit isothermen Parametern. Math. Z. **113**, 99 – 105 (1970).
4. – Hildebrandt, S.: On the number of branch points of surfaces of bounded mean curvature. J. Differential Geometry. Erscheint demnächst.
5. Hildebrandt, S.: Über Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Math. Z. **112**, 107 – 144 (1969).
6. – Randwertprobleme für Flächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung und Anwendungen auf die Kapillaritätstheorie. I. Math. Z. **112**, 205 – 213 (1969).
7. Morrey, C. B.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
8. Nitsche, J. C. C.: On new results in the theory of minimal surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 195 – 270 (1965).
9. Serrin, J.: On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve. Math. Z. **112**, 77 – 88 (1969).
10. Tomi, F.: Ein einfacher Beweis eines Regularitätssatzes für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Math. Z. **112**, 214 – 218 (1969).

Prof. Stefan Hildebrandt
Mathematisches Institut der
Universität Mainz
D-65 Mainz, Saarstraße 21

(Eingegangen am 15. Februar 1970)

Math. Z. 115, 179 – 187 (1970)

Some Theorems on Saturated Homomorphs of Soluble Lie Algebras

DONALD W. BARNES and MARTIN L. NEWELL

1. Introduction

In [1], the first author proved by homological means the following three theorems.

1.1. **Theorem.** *Let L be a soluble Lie algebra and let A be a minimal ideal of L. Suppose that the centraliser $\mathscr{C}_L(A)=A$. Then L splits over A and, if U, V are complements of A in L, there exists $a\in A$ such that $V=U(1+\dot{a})$, where $\dot{a}$ denotes the inner derivation of L given by a.*

1.2. **Theorem.** *Let A, B be ideals of the Lie algebra L such that $A\leqq B\cap\Phi(L)$. Suppose B/A is nilpotent. Then B is nilpotent.*

1.3. **Theorem.** *Suppose M is an ideal of L, $M\leqq\Phi(L)$ and that L/M is supersoluble. Then L is supersoluble.*

These theorems were used in [3]. Theorem 1.1 is basic for the theory of $\mathfrak{H}$-projectors[1] for a saturated homomorph $\mathfrak{H}$. Theorem 1.2 is used in the proof that a locally defined formation is saturated[2]. Theorem 1.3 shows that the formation of supersoluble algebras is saturated. The rest of the theory of saturated homomorphs and projectors is elementary. The main purpose of this paper is to provide elementary proofs of these three theorems. We do this in § 2. Theorem 2.5 is a common generalisation of Theorems 1.2 and 1.3. The proof of Theorem 2.5 suggests the possibility of a characterisation of the supersoluble projectors analogous to the characterisation of Cartan subalgebras as minimal Engel subalgebras. (See [2], Theorem 1.) We investigate this in § 3. The form of Theorem 2.5 raises the question whether the classes of nilpotent and supersoluble algebras could be replaced in Theorem 2.5 by an arbitrary non-zero saturated homomorph. Theorem 4.3 asserts that they can be, but to prove it, we have to resort to homological methods again. Theorem 4.3 is not a generalisation of Theorem 2.5 as it does not assert that the classes of nilpotent and supersoluble algebras are saturated.

All algebras considered are finite dimensional over the ground field F. $|F|$ is the number of elements in F. We write $A\subseteq L$, $A\leqq L$, $A\trianglelefteq L$, $A\trianglelefteq\trianglelefteq L$ for A is a subset, subalgebra, ideal, subnormal subalgebra respectively of L. $\mathscr{C}_L(A)$ denotes the centraliser of A in L, $\Phi(L)$ is the Frattini subalgebra of L, L'

[1] Called $\mathfrak{H}$-subalgebras in [3]. We use here the terminology which has become standard in the theory of finite soluble groups.

[2] Lemma 4.4 of [3] is essentially the same as Theorem 1.2.

is the derived algebra and $\mathscr{Z}(L)$ is the centre of L. If $a \in L$, we denote by $\dot{a}$ the inner derivation of L defined by $x\dot{a} = xa$ for all $x \in L$. $E_L(a)$ denotes the Fitting null component $\{x \in L | x\dot{a}^n = 0 \text{ for some } n\}$ of $\dot{a}$, and $L\dot{a}^\infty$ denotes the complementary Fitting component. $\mathfrak{N}$ and $\mathfrak{U}$ denote the classes of all nilpotent and all supersoluble algebras respectively. If V is a vector space and $v_1, \ldots, v_n \in V$, we denote by $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ the subspace spanned by $v_1, \ldots, v_n$.

2. The Elementary Proofs

We note first, without proof, the following well-known elementary result.

2.1. **Lemma.** *Suppose A is an abelian minimal ideal of L and $U < L$ such that $A + U = L$. Then U is a maximal subalgebra of L and $A \cap U = 0$.*

2.2. *Proof of Theorem* 1.1. If $L = A$, the result holds, so we suppose $L > A$. Let B/A be a minimal ideal of L/A. Since $\mathscr{Z}(B) \trianglelefteq L$, $\leqq \mathscr{C}_L(A) = A$ and $B \nleqq \mathscr{C}_L(A)$, we have $\mathscr{Z}(B) = 0$ and B is not nilpotent. Therefore there exists $u \in B$ such that $\dot{u}|B \to B$ is not nilpotent. But $L\dot{u}^2 \subseteq A$. By Fitting's Lemma, $L = E_L(u) + A$. Put $U = E_L(u)$. Then $U < L$ and by Lemma 2.1, U complements A in L. It follows that $L\dot{u}^\infty = A$ and so we have $A\dot{u} = A$.

Let V be another complement of A in L. There is a unique element $v = u + c \in V$, $c \in A$ in the coset $u + A$. Since $c \in A = A\dot{u}$. there exists $a \in A$ such that $a\dot{u} = -c$, that is, such that $u(1 + \dot{a}) = v$. But $(1 + \dot{a})$ is an automorphism of L and therefore

$$U(1 + \dot{a}) = E_L(u)(1 + \dot{a}) = E_L(v) \geqq V$$

since v corresponds to u in the isomorphism $V \to L/A \to U$. But both $E_L(v)$ and V are complements of A in L, so $E_L(v) = V$.

2.3. *Definition.* Let L be a Lie algebra over F, $a \in L$ and let V be an F-subspace of the algebraic closure of F. We define the *V-splitting subalgebra* $S_L(a, V)$ of a in L to be

$$S_L(a, V) = \left\{ x \in L \,\middle|\, x \prod_{i=1}^{n} (\dot{a} - \lambda_i 1) = 0 \text{ for some } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in V, \text{ some } n \right\}.$$

If $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are the eigenvalues of $\dot{a}$ which lie in V and r_i is the multiplicity of λ_i, we put $f(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \lambda_i)^{r_i}$. Then $S_L(a, V) = \{x \in L | x f(\dot{a}) = 0\}$ and $K_L(a, V) = L f(\dot{a})$ is a complementary $\dot{a}$-stable subspace of L. If $x \prod_i (\dot{a} - \lambda_i 1) = 0$ and $y \prod_j (\dot{a} - \mu_j 1) = 0$, then $(xy) \prod_{i,j} (\dot{a} - (\lambda_i + \mu_j) 1) = 0$. Thus $S_L(a, V)$ is a subalgebra of L. $S_L(a, 0) = E_L(a)$. If L is supersoluble, then $S_L(a, F) = L$ for all $a \in L$. That the converse is not true is shown by the existence of non-abelian simple algebras over algebraically closed fields.

2.4. **Lemma.** *Suppose L' is nilpotent and $S_L(a, F) = L$ for all $a \in L$. Then L is supersoluble.*

Proof. Let A be a minimal ideal of L contained in L'. By induction on $\dim L$, L/A is supersoluble. Since L' is nilpotent, $A \leqq Z(L')$. Thus A is an irre-

ducible L/L'-module. But L/L' is abelian and the eigenvalues of the representing linear transformations all lie in F. This implies that the linear transformations have a common eigenvector. Since A is irreducible, this implies that $\dim A = 1$ and L is supersoluble.

There are well-known examples (e.g. 3.5 below) of soluble Lie algebras over algebraically closed fields of non-zero characteristic which are not supersoluble. Thus if $\operatorname{char} F \neq 0$, the condition "$L'$ nilpotent" cannot be weakened to "L soluble".

2.5. **Theorem.** *Suppose* $A \trianglelefteq B \trianglelefteq\trianglelefteq L$, $A \leqq \Phi(L)$ *and that* $B/A \in \mathfrak{H}$ *where* $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ *or* $\mathfrak{U}$. *Then* $B \in \mathfrak{H}$.

Proof. Suppose $B = B_0 \lhd B_1 \lhd \cdots \lhd B_n = L$. Then for all $u \in B$, $L\dot{u}^n \subseteq B$. For the case $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$, we take $V = 0$. For the case $\mathfrak{H} = \mathfrak{U}$, we take $V = F$. We then have $K_L(u, V) \subseteq A$ for all $u \in B$. This implies $L = A + S_L(u, V)$. But $A \leqq \Phi(L)$ and $S_L(u, V)$ is a subalgebra of L. Therefore $S_L(u, V) = L$ for all $u \in B$.

Case 1. $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$. We have $E_B(u) = B$ for all $u \in B$, and B is nilpotent by Engel's Theorem.

Case 2. $\mathfrak{H} = \mathfrak{U}$. Since B/A is supersoluble, $(B/A)'$ is nilpotent. Thus $B'/B' \cap A$ is nilpotent, so B' is nilpotent by Case 1. By Lemma 2.4, B is supersoluble.

3. $\mathfrak{U}$-Projectors

3.1. **Lemma.** *Suppose* L *is soluble and* $U \leqq L$. *Then* U *is a* $\mathfrak{U}$*-projector of* L *if and only if*

1. U *is supersoluble, and*
2. $U \leqq A < B \leqq L$ *implies* $\dim B - \dim A > 1$.

Proof. a) Suppose U is a $\mathfrak{U}$-projector of L. Then U is supersoluble. If $U \leqq A < B \leqq L$, then U is a $\mathfrak{U}$-projector of B. We may suppose that A is a maximal subalgebra of B. Let K be a minimal ideal of B. If $K \leqq A$, then $U + K/K \leqq A/K < B/K$ and $U + K/K$ is a $\mathfrak{U}$-projector of B/K. By induction on $\dim L$, we then have $\dim B - \dim A = \dim B/K - \dim A/K > 1$. Suppose $K \not\leqq A$. Then A complements K in B and $\dim B - \dim A = \dim K$. If $\dim K = 1$, then $K + U$ is supersoluble contrary to U being a $\mathfrak{U}$-projector of $K + U$.

b) Suppose U has the properties (1) and (2). Let K be a minimal ideal of L. By induction on $\dim L$, $U + K/K$ is a $\mathfrak{U}$-projector of L/K. If $U + K < L$, then by induction, U is a $\mathfrak{U}$-projector of $U + K$. By [3] Lemma 1.8, this implies that U is a $\mathfrak{U}$-projector of L. Suppose $U + K = L$. If $U = L$, the result holds, so we may suppose $U \not\geqq K$. Then U complements K in L and $\dim K = \dim L - \dim U > 1$. Since $L/K \in U$, $L \notin U$ and U complements K in L, U is a $\mathfrak{U}$-projector of L by [3] Lemma 1.12.

3.2. *Remark.* We note that a subalgebra $U = S_L(u, F)$ automatically satisfies the condition (2) of Lemma 3.1, since the linear transformation of B/A induced by $\dot{u}$ has no eigenvalues in F.

3.3. **Lemma.** *Suppose L' is nilpotent and $U \leqq L$. Suppose $k \in U$ is such that $K = S_L(k, F)$ is minimal in $\{S_L(u, F) | u \in U\}$ and $K \geqq U$. Suppose further that $|F| > \frac{1}{2}(\dim L - \dim K)$. Then $S_L(k, F) \leqq S_L(u, F)$ for all $u \in U$.*

Proof. Take $u \in U$ and let V be the subalgebra generated by k and u. Let A be a V-composition factor of L considered as V-module. Since L' is nilpotent, L' is in the kernel of the representation of L on any L-composition factor of L, and it follows that A is an irreducible V/V'-module. Suppose $v_1, v_2 \in V/V'$ are linearly independent and that each induces a linear transformation in A with an eigenvalue in F. Since these transformations commute, they have a common eigenvector. Since $\langle v_1, v_2 \rangle = V/V'$, this implies $\dim A = 1$. Thus for any V-composition factor A of L, either

1. $\dim A = 1$, or

2. for at most one ratio $\alpha : \beta$ (where $\alpha, \beta \in F$), does the linear transformation of A induced by $\alpha k + \beta u$ have an eigenvalue in F.

Let $A_1, \ldots, A_r$ be the factors of a V-composition series from L to K. Then $\dim A_i > 1$ and $r \leqq \frac{1}{2}(\dim L - \dim K) < |F|$. For each i, there exists at most one $\alpha_i \in F$ such that $u + \alpha_i k$ induces on A_i a transformation with an eigenvalue in F. Thus there exists $\alpha \in F$ such that for no i does the transformation induced by $u + \alpha k$ on A_i have an eigenvalue in F. This implies $S_L(u + \alpha k, F) \leqq K$. By the minimality of $S_L(k, F)$, we have $S_L(u + \alpha k, F) = S_L(k, F)$ and for any V-composition factor A of K, both k and $u + \alpha k$ induce transformations with an eigenvalue in F. This implies $\dim A = 1$ for all V-composition factors of K, and so $S_L(u, F) \geqq K$.

3.4. **Theorem.** *Suppose $|F| \geqq \frac{1}{2}(\dim L - 3)$, L' is nilpotent and $U \leqq L$. Then U is a $\mathfrak{U}$-projector of L if and only if U is a minimal member of $\{S_L(a, F) | a \in L\}$.*

Proof. a) Suppose $U = S_L(k, F)$ is minimal in $\{S_L(a, F) | a \in L\}$. We have to prove that U is a $\mathfrak{U}$-projector of L. By Lemma 3.1 and Remark 3.2, this holds if U is supersoluble. By Lemma 2.4, it is sufficient to prove $S_L(u, F) \geqq U$ for all $u \in U$. If $k \in L'$, then $U = L$ and L is supersoluble. Since $S_L(u + a, F) = S_L(u, F)$ if $a \in L'$, we need only consider the case where $\dim U/U' \geqq 2$ and so we may assume $\dim U \geqq 4$. We then have $|F| \geqq \frac{1}{2}(\dim L - 3) > \frac{1}{2}(\dim L - \dim U)$ and the result follows by Lemma 3.3.

b) Suppose U is a $\mathfrak{U}$-projector of L. Take $k \in U$ such that $K = S_L(k, F)$ is minimal in $\{S_L(u, F) | u \in U\}$. We have to prove $K = U$. Suppose $K > U$. We prove first that $S_L(u, F) \geqq S_L(k, F)$ for all $u \in U$. This holds trivially if $\dim U = 1$, so we may suppose $\dim U > 1$. By Lemma 3.1, $\dim K - \dim U > 1$. Hence $\dim K \geqq 4$, $|F| > \frac{1}{2}(\dim L - \dim K)$ and the assertion follows by Lemma 3.3.

Let A be a minimal ideal of L. Either $A \leqq L'$ or $A \leqq \mathfrak{Z}(L)$, so A is in the kernel of the representation of L on any principal factor of L. It follows that $S_L(x + a, F) = S_L(x, F)$ for all $x \in L$, $a \in A$. Thus

$$S_{L/A}(\bar{u}, F) = A + S_L(u, F)/A \geqq A + S_L(k, F)/A = S_{L/A}(\bar{k}, F)$$

for all $\bar{u}=u+A\in U+A/A$. Since $U+A/A$ is a $\mathfrak{U}$-projector of L/A, by induction over dim L, we have $U+A=S_L(k,F)+A$. Put $V=U+A$. Then

$$S_V(u,F)=V\cap S_L(u,F)\geqq S_L(k,F)$$

for all $u\in U$. If $V<L$, then by induction $U=S_V(k,F)=S_L(k,F)$. Suppose $U+A=L$. Then L/A is supersoluble. If L is supersoluble, then $U=L=S_L(k,F)$, so we may suppose L not supersoluble. Then U complements A in L and is a maximal subalgebra of L. If $S_L(k,F)>U$, then $S_L(k,F)=L$ and so $S_L(u,F)=L$ for all $u\in U$. But $L=A+U$ and therefore $S_L(x,F)=L$ for all $x\in L$. This implies that L is supersoluble contrary to assumption. Therefore $S_L(k,F)=U$.

If L is a soluble Lie algebra over a field F of characteristic O, then the conditions L' nilpotent and $|F|\geqq\frac{1}{2}(\dim L-3)$ are automatically satisfied. If char $F=p$, neither condition can be omitted as is shown by the following examples.

3.5. *Example.* Take F algebraically closed of characteristic p, $L=\langle x,y,z,e_0,e_1,\ldots,e_{p-1}\rangle$ with multiplication $xy=z$, $xz=yz=0$, $e_ie_j=0$, $e_ix=e_{i+1}$, $e_iy=ie_{i-1}$, $e_iz=e_i$ (subscripts taken mod p). Then L is soluble but not supersoluble and therefore the $\mathfrak{U}$-projectors of L are proper subalgebras. However, $S_L(u,F)=L$ for all $u\in L$.

3.6. *Example.* Suppose $|F|=q$. There exists an irreducible polynomial $t^2+\alpha t+\beta$ over F. Put $U=\langle u,v\rangle$, $uv=0$, and we define $q+1$ 2-dimensional U-modules A_ϑ for $\vartheta\in F\cup\{*\}$. On A_ϑ for $\vartheta\in F$, u is represented by a linear transformation with matrix $M=\begin{pmatrix}0&1\\-\beta&-\alpha\end{pmatrix}$ and $\vartheta u+v$ is represented by the identity. On A_*, u is represented by the identity and v is represented by a transformation with matrix M. Put $A=\bigoplus_\vartheta A_\vartheta$ and let L be the split extension of A by U. Then U is a $\mathfrak{U}$-projector of L but $S_L(x,F)>U$ for all $x\in U$.

Suppose U is a $\mathfrak{U}$-projector of L. If L' is nilpotent and $|F|\geqq\dim L$, then $U=S_L(u,F)\geqq E_L(u)$ for some $u\in U$. Thus U contains a minimal Engel subalgebra of L and so a Cartan subalgebra of L. This suggests

3.7. **Theorem.** *Suppose $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{R}$ are saturated homomorphs, $H\leqq L$ and L' is nilpotent. Then H is an $\mathfrak{H}$-projector of L if and only if H is an $\mathfrak{H}$-projector of some $\mathfrak{R}$-projector K of L.*

Proof. The result is trivial if $\mathfrak{H}$ is the zero formation, so we may suppose $\mathfrak{H}\supseteq\mathfrak{N}$.

a) Suppose H is an $\mathfrak{H}$-projector of K and K is a $\mathfrak{R}$-projector of L. Let A be any minimal ideal of L. Then $H+A/A$ is an $\mathfrak{H}$-projector of L/A by induction over dim L. If $K+A<L$, then by induction on dim L, H is an $\mathfrak{H}$-projector of $K+A$ and so of $H+A$. This implies that H is an $\mathfrak{H}$-projector of L by [3] Lemma 1.8. Thus we may suppose $K+A=L$ for all minimal ideals A of L. If $K=L$, the result holds, so we suppose $K<L$. Then K complements a minimal ideal A of L and $K\cap\mathscr{C}_L(A)=0$. K is faithfully and irreducibly represented on A.

But L' is nilpotent and therefore $L' \leqq \mathscr{C}_L(A) = A$, K is abelian and so $H = K$, $L/A \in \mathfrak{H}$. Since $L \notin \mathfrak{R}$, $L \notin \mathfrak{H}$ and so K is an $\mathfrak{H}$-projector of L.

b) Suppose H is an $\mathfrak{H}$-projector of L. Let A be a minimal ideal of L. By induction over $\dim L$, there exists a $\mathfrak{R}$-projector M/A of L/A such that $M \geqq H + A$. If $M < L$, then by induction, there exists a $\mathfrak{R}$-projector K of M such that $K \geqq H$. But K is a $\mathfrak{R}$-projector of L. Thus we may suppose $M = L$. Then $L/A \in \mathfrak{R}$. The result holds if $L \in \mathfrak{R}$, so suppose $L \notin \mathfrak{R}$. Then there exists a complement K to A in L and K is a $\mathfrak{R}$-projector of L. Put $T = K \cap (H + A)$. Then T is an $\mathfrak{H}$-projector of K and so by a) of L.

Since $L/L' \in \mathfrak{H}$, $H + L' = L$. Since L' is in the kernel of the representation on A, this implies that A is an irreducible H-module. Either $H > A$ or $H \cap A = 0$. Since T is an $\mathfrak{H}$-projector of $T + A = H + A$, $H + A \notin \mathfrak{H}$ and therefore $H \cap A = 0$. Since $H + A/A \in \mathfrak{H}$ and H, T are complements of the minimal ideal A of $H + A$, by [3] Lemma 1.11, there exists $a \in A$ such that $H = T(1 + \dot{a})$. Since $(1 + \dot{a})$ is an automorphism of L, $K(1 + \dot{a})$ is a $\mathfrak{R}$-projector of L containing H.

If the ground field F has characteristic p, the condition L' nilpotent cannot be weakened to L soluble, as is shown by

3.8. *Example.* Put $L = \langle u, v, e_0, \ldots, e_{p-1} \rangle$, $u v = u$, $e_i e_j = 0$, $e_i u = e_{i+1}$, $e_i v = i e_i$, where the subscripts are taken mod p and F is the field of p elements. Then all $\mathfrak{U}$-projectors of L are conjugate to $U = \langle u, v \rangle$ since $A = \langle e_0, \ldots, e_{p-1} \rangle$ is a minimal ideal of L with $L \notin \mathfrak{U}$ but $L/A \in \mathfrak{U}$. The $\mathfrak{N}$-projectors of U are $\langle v - i u \rangle$ for $i = 0, 1, \ldots, p-1$. The linear transformation of A given by $v - i u$ has 0 as eigenvalue with multiplicity 1, so there exists $w_i \in A$, unique up to scalar multiples, such that $w_i(v - i u) = 0$. Thus $\langle v - i u \rangle$ is not an $\mathfrak{N}$-projector of L, U contains no $\mathfrak{N}$-projector of L and the $\mathfrak{N}$-projectors of L are not contained in $\mathfrak{U}$-projectors.

The group theory analogue of Theorem 3.7 may be proved using essentially the above argument, but the additional assumption that $\mathfrak{H}$ contains all nilpotent groups is required, as is shown by the following example.

3.9. *Example.* Let p, q, r be distinct primes such that $p q$ divides $r - 1$. Let $\mathfrak{H}$ be the saturated formation locally defined[3] by $\mathfrak{H}(p) = \emptyset$, $\mathfrak{H}(r) =$ class of all q-groups, and $\mathfrak{H}(s) = \{1\}$ for all other primes s. Let $\mathfrak{R}$ be the saturated formation locally defined by $\mathfrak{R}(r) =$ class of all q-groups and $\mathfrak{R}(s) = \{1\}$ for all other primes s. Take K a cyclic group of order $p q$ acting faithfully on a cyclic group A of order r. Let G be the split extension of A by K. Then K is a $\mathfrak{R}$-projector of G, and the subgroup H of K of order q is an $\mathfrak{H}$-projector of K, but $AH \in \mathfrak{H}$ and is an $\mathfrak{H}$-projector of G.

4. A Frattini Property of Saturated Homomorphs

For convenience of reference, we restate here Lemma 1 of Zassenhaus [6].

4.1. **Lemma.** *Suppose $M \trianglelefteq\trianglelefteq L$ and that V is an irreducible L-module. Then all composition factors of V as M-module are isomorphic.*

[3] See Gaschütz [4] for an explanation of local definition.

Lemma 4.1 serves to some extent as a substitute for Clifford's Theorem on the restriction of an irreducible representation of a finite group to a normal subgroup. A precise analogue of Clifford's Theorem holds if we impose further conditions. We work modulo the kernel of the representation of L on V. For notational convenience, we suppose that the representation is faithful. If $x \in \mathscr{C}_L(M)$ and A is an M-submodule of V, then Ax is also an M-submodule. Suppose there exist $x_1, \ldots, x_r \in \mathscr{C}_L(M)$ such that $L = \langle x_1, \ldots, x_r, M \rangle$. Take A a minimal M-submodule. Then $V = A + \sum_{i=1}^{r} Ax_i$ and V is completely reducible as M-module. Thus V is completely reducible as M-module if $M + C_L(M) = L$. This is always the case if char $F = 0$ by Jacobson [5] p. 81 Theorem 10.

4.2. **Lemma.** *Suppose A is an abelian minimal ideal of L, $A \leqq B \trianglelefteq\trianglelefteq L$. Suppose M is a maximal B-submodule of A such that B acts non-trivially on A/M, $H^1(B/A, A/M) = 0$ and B/M splits over A/M. Then L splits over A.*

Proof. Let $B = L_0 \lhd L_1 \lhd \cdots \lhd L_n = L$. We prove that there exists a maximal L_1-submodule M_1 of A such that L_1 acts non-trivially on A/M_1, $H^1(L_1/A, A/M_1) = 0$ and L_1/M_1 splits over A/M_1. The result then follows by induction over n.

Let U be any L_1-composition factor of A. Then all B-composition factors of U are isomorphic to A/M by Lemma 4.1, and it follows by the homology exact sequence, that $H^1(B/A, U) = 0$. L_1 acts non-trivially on U since B acts non-trivially. Since also $H^0(B/A, U) = U^B = 0$, it follows by the Hochschild-Serre spectral sequence that $H^1(L_1/A, U) = 0$. If $N < A$ is an L_1-submodule such that L_1/N splits over A/N, we can take M_1 any maximal submodule containing N. We prove the existence of such an N.

Since $H^1(B/A, A) = 0$, the Hochschild-Serre spectral sequence gives the exact sequence

$$0 \to H^2(L_1/B, A^B) \to H^2(L_1/A, A) \xrightarrow{\text{res}} H^2(B/A, A)^{L_1} \to H^3(L_1/B, A^B).$$

Since $A^B = 0$, the restriction map res: $H^2(L_1/A, A) \to H^2(B/A, A)$ is a monomorphism. Let $u \in H^2(L_1/A, A)$ be the characteristic class of L_1 as extension of A by L_1/A. Put $v = \text{res}\, u$. Then v is the characteristic class of B as extension of A by B/A.

For any B-submodule K of A, we denote by i_K, η_K the inclusion $K \to A$ and the natural map $A \to A/K$ respectively. Since $H^1(B/A, A/K) = 0$, the sequence

$$0 \to H^2(B/A, K) \xrightarrow{i_K^*} H^2(B/A, A) \xrightarrow{\eta_K^*} H^2(B/A, A/K)$$

is exact. Let C be a B-submodule of A, minimal with respect to having the property that B/C splits over A/C. Then $C \neq A$, and $\eta_C^*(v) = 0$. This implies $v = i_C^*(w)$ for some $w \in H^2(B/A, C)$. Let f be a representative cocycle of w. Then $g = i_C f$ is a representative cocycle of v. For $x \in L_1$, v^x is the cohomology class of g^x, which is defined by

$$g^x(b_1, b_2) = g(b_1, b_2)\, x - g(b_1 x, b_2) - g(b_1, b_2 x)$$

for $b_1, b_2 \in B/A$. Let φ: $C \to D = Cx + C/C$ be the B-module epimorphism defined by $\varphi(c) = cx + C$ for $c \in C$, and put $K = \ker \varphi$. Since

$$i_D \varphi f(b_1, b_2) = \eta_C g^x(b_1, b_2),$$

we have

$$i_D^* \varphi^*(w) = \eta_C^*(v^x).$$

But $v \in H^2(B/A, A)^{L_1}$ and therefore $v^x = 0$ for all $x \in L_1$. Therefore $i_D^* \varphi^*(w) = 0$. But i_D^*: $H^2(B/A, D) \to H^2(B/A, A/C)$ is a monomorphism, and therefore $\varphi^*(w) = 0$. The exact sequence

$$0 \to K \xrightarrow{j} C \xrightarrow{\varphi} D \to 0$$

induces the exact sequence

$$0 \to H^2(B/A, K) \xrightarrow{j^*} H^2(B/A, C) \xrightarrow{\varphi^*} H^2(B/A, D).$$

Thus there exists $p \in H^2(B/A, K)$ such that $j^*(p) = w$, that is $v = i_C^* j^*(p) = i_K^*(p)$ and $\eta_K^*(v) = \eta_K^* i_K^*(p) = 0$. Thus B/K splits over A/K. By the minimality of C, $K = C$ and $Cx \subseteq C$ for all $x \in L_1$. Thus C is an L_1-submodule of A. As before,

$$\text{res}: H^2(L_1/A, A/C) \to H^2(B/A, A/C)$$

is a monomorphism. Since $\eta_C^*(v) = 0$, this implies $\eta_C^*(u) = 0$ and L_1/C splits over A/C.

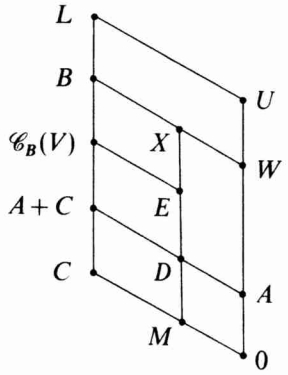
4.3. **Theorem.** *Let $\mathfrak{H}$ be a non-trivial saturated homomorph of soluble Lie algebras. Suppose $A \trianglelefteq B \trianglelefteq\trianglelefteq L$, $A \leqq \Phi(L)$ and $B/A \in \mathfrak{H}$. Then $B \in \mathfrak{H}$.*

Proof. Let L be a minimal counterexample. Then L is not simple since $0 \neq A \leqq \Phi(L) \neq L$ and $A \trianglelefteq\trianglelefteq L$. Let C be a minimal ideal of L. Then $A + C/C$, $B + C/C$, L/C satisfy the conditions of the theorem. Therefore $B + C/C \in \mathfrak{H}$. Since $B \notin \mathfrak{H}$, there exists $K \lhd B$ such that $P = B/K$ is a primitive algebra not in $\mathfrak{H}$. As $B/B \cap C \in \mathfrak{H}$, $K \ngeq B \cap C$ and $(B \cap C) + K/K$ contains the unique minimal ideal of P. Thus P is the split extension of a B-composition factor V of $B \cap C$ by $B/\mathscr{C}_B(V)$. Since $\mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{N}$, B acts non-trivially on V. By Lemma 4.1, all B-composition factors of C are isomorphic to V.

Suppose $B \ngeq C$. Since $B \lhd\lhd B + C$, there exists $D \lhd B + C$, $D \geqq B$. But then $B + C/C \cap D = C/C \cap D \oplus D/C \cap D$. Thus D and therefore also B centralises $C/C \cap D$ contrary to the fact that B acts non-trivially on every B-composition factor of C. Therefore $B \geqq C$. By Theorem 2.5, it follows from $A \lhd\lhd L$ and $A \leqq \Phi(L)$ that A is nilpotent. Thus B is soluble and so C is abelian.

Since $C + K/K$ is an abelian ideal of P, $C + K/K$ is irreducible as B-module and therefore $M = C \cap K$ is a maximal B-submodule of C. Since $B/C \in \mathfrak{H}$ but $B/M \notin \mathfrak{H}$, B/M splits over C/M and $H^1(B/C, C/M) = 0$. By Lemma 4.2, L splits over C. Let U be a complement to C in L. Then U is a maximal subalgebra

of L by Lemma 2.1. Since $A \leqq \Phi(L)$, $U \geqq A$. Therefore $A \cap C = 0$ and so $A \leqq \mathscr{C}_B(V)$.



Put $W = U \cap B$, $D = M + A$, $X = W + D$. Then $D \lhd B$, $A + C/D \simeq V$ as B-module and X/D complements $A + C/D$ in B/D. Put $E = X \cap \mathscr{C}_B(V)$. Then $E \lhd B$ and B/E is the split extension of V by $B/\mathscr{C}_B(V)$, that is $B/E \simeq P$. But $E \geqq A$ and $B/A \in \mathfrak{H}$. Therefore $P \in \mathfrak{H}$ contrary to the choice of K.

References

1. Barnes, D.W.: On the cohomology of soluble Lie algebras. Math. Z. **101**, 343 – 349 (1967).
2. – On Cartan subalgebras of Lie algebras. Math. Z. **101**, 350 – 355 (1967).
3. – Gastineau-Hills, H.M.: On the theory of soluble Lie algebras. Math. Z. **106**, 343 – 354 (1968).
4. Gaschütz, W.: Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. Math. Z. **80**, 300 – 305 (1963).
5. Jacobson, N.: Lie Algebras. New York: Interscience 1962.
6. Zassenhaus, H.: On trace bilinear forms on Lie-algebras. Proc. Glasgow Math. Assoc. **14**, 62 – 72 (1959).

Dr. Donald W. Barnes
Dept. of Pure Mathematics
University of Sydney
Sydney, N.S.W. 2006
Australia

Dr. Martin L. Newell
Dept. of Mathematics
University College
Galway
Ireland

(Received January 22, 1970)

Math. Z. 115, 188 – 196 (1970)

Fixed Points of Generalized P-Compact Operators

KLAUS DEIMLING

Introduction

In a recent paper, Petryshyn and Tucker [10] introduced the concept of a P_γ-compact ("generalized P-compact") operator, acting on some subset of a Banach space with projectionally complete system, and they proved general existence theorems for fixed points of such operators. The purpose of our paper is to establish conditions which ensure that the set of fixed points of a P_γ-compact mapping is a continuum, i.e. a compact and connected set. If it cannot be assured that a given operator has a unique fixed point, the general idea consists in approximating this operator by more "regular" ones, in a sense which will be made precise below.

In case of completely continuous or proper mappings on a general Banach space this question had been investigated e.g. by Aronszajn [1], Stampacchia [11], Krasnosel'skii and Sobolevskii [7], Browder and Gupta [2] and Vidossich [12]. Some applications to Volterra integral- and hyperbolic partial differential equations are given in [5] and [6], while [7] includes some results for parabolic equations.

In § 1 we introduce some basic definitions to be used in this paper. § 2 includes a relation between P_1-compact and demicompact mappings that can be used in particular to simplify the proofs of some propositions in [10]. In § 3 we prove our first main result which is concerned with the set of fixed points of a P_1-compact operator on a bounded closed convex set, while in the last paragraph this theorem is extended to an arbitrary bounded region by means of the degree of an A-proper mapping recently developped by Browder and Petryshyn [3].

In the main, our notation is like that in [10].

The author is indebted to Prof. W. V. Petryshyn who called his attention to A-proper mappings and to Prof. G. Stampacchia for having made a preliminary draft of [12] available to him.

1. Basic Definitions

If nothing else is stated, X will always be a real Banach space such that there exists a pair of sequences $\{X_n\}$, $\{P_n\}$, where each X_n is a finite dimensional subspace of X and P_n is a linear projection of X onto X_n such that $P_n x \to x$ for each x in X. The system $(\{X_n\}, \{P_n\})$ is then called projectionally complete. Let us note that the uniform boundedness principle implies the existence of a constant $K \geqq 1$ such that $\|P_n\| \leqq K$ for all n.

If $D \subset X$ and T is a mapping of D into X then $D_n = D \cap X_n$ and $T_n = P_n T$. If $D \subset X$ then $\bar{D}$, ∂D and D^0 stand for the closed hull, the boundary and the set of all interior points of D respectively.

$B(x_0, r)$ will be the closed ball of center x_0 and radius $r > 0$, $\rho(x, D)$ denotes the distance of x from the set D and $\emptyset$ stands for the empty set.

The identity operator is denoted by I, while $F(T)$ stands for the set of all fixed points in $D \subset X$ of an operator T defined in D.

"Convergence" will allways be the strong convergence, i.e. in the norm topology.

The operators to be studied in this paper are described by the following.

Definition 1. Let T be a nonlinear operator on $D \subset X$ into X. Then T is called

(a) *A-proper*, if for any bounded sequence $\{x_m\}$ with $x_m \in D_m$ the convergence of the sequence $\{P_m T x_m\}$ implies the existence of a convergent subsequence $\{x_{m_i}\}$ and an element $x \in D$ such that $x_{m_i} \to x$ and $P_{m_i} T x_{m_i} \to Tx$ as $m_i \to \infty$.

(b) *P_γ-compact*, if T_n is continuous in X_n for all sufficiently large n and if there is a constant $\gamma \geqq 0$ such that for any p dominating γ (i.e. $p \geqq \gamma$ if $\gamma > 0$ and $p > 0$ if $\gamma = 0$) $T - pI$ is A-proper.

(c) *Bounded*, if it maps bounded sets in D into bounded sets in X.

(d) *Completely continuous*, if it is continuous and maps every bounded set in D into a precompact set in X.

(e) *Demicompact*, if any bounded sequence $\{x_n\} \subset D$ such that $\{Tx_n - x_n\}$ is convergent has a convergent subsequence.

(f) *Nonexpansive*, if $\|Tx - Tx'\| \leqq \|x - x'\|$ for all $x, x' \in D$.

Various classes of nonlinear operators that are included by the class of P_γ-compact operators are listed in [8]. In particular, every completely continuous operator is P_0-compact.

2. Demicompact and P_1-Compact Operators

Lemma 1. *Let D be a subset of X such that $D = \overline{D^0}$ and T a continuous, P_γ-compact mapping of D into X. Then λT is demicompact for each $\lambda \in [0, 1/\gamma]$ (if $\gamma = 0$, then $0 \leqq \lambda < \infty$).*

Proof. Obviously, it is sufficient to consider $\gamma > 0$ and $0 < \lambda \leqq 1/\gamma$. Let $\{y^n\} \subset D$ be a bounded sequence such that $\lambda T y^n - y^n \to z$ for some $z \in X$. Since T is continuous there is a $\delta_n > 0$ so that $\|Ty^n - Ty\| \leqq 1/n$ for each $y \in D \cap B(y^n, \delta_n)$. Our assumption on D implies the existence of a sequence $(x^n\} \subset D^0$ such that $\|y^n - x^n\| \leqq \min(1/n, \frac{1}{2}\delta_n)$; hence $Tx^n - p\,x^n \to p\,z$ as $n \to \infty$, where $p = 1/\lambda$. Taking in account that $x^n \in D^0$ and $P_m x \to x$ for each $x \in X$, we find an index m_n such that $x_n = P_{m_n} x^n$ lies in D and $\|x_n - x^n\| \leqq \min(1/n, \frac{1}{2}\delta_n)$, hence

$$\|x_n - y^n\| \leqq 2/n \quad \text{and} \quad \|Tx_n - Tx^n\| \leqq 2/n \quad \text{for all } n. \tag{1}$$

This implies

$$\|P_{m_n} Tx_n - p\,x_n - p\,z\| \leqq \frac{2}{n} K + K\|Tx^n - p\,x^n - p\,z\| + \|P_{m_n} z - z\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

where K is a uniform bound for $\|P_n\|$. Since $p \geqq \gamma$, $T - pI$ is A-proper, hence there is a subsequence $\{x_{n_i}\}$ convergent to some $x \in D$. It follows from (1) that $y^{n_i} \to x$, which completes the proof.

Remark 1. The proof of Lemma 1 shows in particular that T is demicompact if it is continuous and such that $T - I$ is A-proper.

An immediate consequence of Lemma 1 is the following

Corollary 1. *Let D, T and λ be as in Lemma* 1.

(a) *$\lambda T - I$ maps every bounded closed subset of D into a closed subset of X.*

(b) *If $\gamma \leqq 1$ and D is bounded and $F(T)$, the set of all fixed points of T, is not empty, then $F(T)$ is compact.*

(c) *Let D be bounded, $\gamma \leqq 1$ and D_1 a proper closed subset of D such that $x \neq Tx$ for each $x \in D - D_1$. If $R(D_1, \alpha) = \{x \in D\colon \rho(x, D_1) \geqq \alpha > 0\}$ then there exists an $\varepsilon(\alpha) > 0$ such that $\|x - Tx\| \geqq \varepsilon(\alpha)$ for each $x \in R(D_1, \alpha)$.*

Proof. (a) is obvious since λT is continuous and demicompact. To prove (b), let $\{x_n\}$ be a sequence in $F(T)$, i.e. $Tx_n - x_n = 0$ for each n. Since T is demicompact and D is bounded there exists a subsequence $\{x_{n_i}\}$ convergent to some $x \in D$; moreover, $x = Tx$ since T is continuous. To prove (c), we observe that $R(D_1, \alpha)$ is non-void if $\alpha > 0$ is sufficiently small since $(D - D_1) \cap D^0 \neq \emptyset$. Let such an α be fixed and suppose that there is a sequence $\{x_n\} \subset R(D_1, \alpha)$ such that $\|Tx_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Since T is demicompact there exists $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ with $x_{n_i} \to x \in R(D_1, \alpha)$ (since $R(D_1, \alpha)$ is closed), hence $x = Tx$ contradicting the fact that $x \neq Tx$ for each $x \in D - D_1$.

Remark 2. In (b) and (c) of Corollary 1 we only used that $T - I$ is continuous and A-proper; part (a) with $\lambda = 1$ holds for such mappings too.

A particular case of Corollary 1 (a) is Lemma 6.1 (a) in [10]: $D = X$!, T nonexpansive and P_1-compact. Lemma 6.1 (b) in [10] reads as follows: If $\|P_n\| = 1$ for all n, $D = B(0, r)$, $T\colon D \to X$ nonexpansive and P_1-compact, then $I - T$ maps every closed subset of D into a closed subset of X. Corollary 1 (a) shows that "$\|P_n\| = 1$ for each n" is superfluous. Since a bounded closed convex set D with $D^0 \neq \emptyset$ satisfies $D = \overline{D^0}$, Corollary 1 (c) implies Lemma 6.2 in [10]: $\gamma = 1$, $D_1 \subset D^0$ closed and convex.

Our next lemma is another consequence of Lemma 1.

Lemma 2. *Let $D \subset X$ be a bounded set with $D = \overline{D^0}$; $T\colon D \to X$ a continuous P_1-compact mapping such that the condition*

($\Pi_1^<$): *If for some $x_0 \in D^0$ the equation $Tx - x_0 = \lambda(x - x_0)$ holds for some $x \in \partial D$, then $\lambda < 1$.*

is satisfied; $T(\partial D)$ a bounded set; $\{T^n\}$ a sequence of mappings of D into X such that $\delta_n = \sup\{\|T^n x - Tx\|\colon x \in \partial D\} \to 0$ as $n \to \infty$.

Then there exists n_0 such that T^n satisfies ($\Pi_1^<$) for each $n \geqq n_0$.

Proof. $T^n(\partial D)$ is bounded uniformly with respect to n, say by $M>0$. Hence, $T^n x-x_0=\lambda(x-x_0)$ for $x\in\partial D$ implies $|\lambda|\leqq\alpha^{-1}(M+\|x_0\|)=M_0<\infty$, where $\alpha=\rho(x_0,\partial D)$. If the assertion of Lemma 2 were wrong, there would exist sequences $\{T^k\}\subset\{T^n\}$, $\{x_k\}\subset\partial D$ and $\{\lambda_k\}\subset[1,M_0]$ such that $T^k x_k-x_0=\lambda_k(x_k-x_0)$ for each k. Since $\{\lambda_k\}$ is bounded we may assume that $\lambda_k\to\lambda_0$ for some $\lambda_0\geqq 1$. Since D is bounded we have

$$\|Tx_k-\lambda_0 x_k-(1-\lambda_0)x_0\|\leqq\delta_k+|\lambda_k-\lambda_0|\,\|x_k-x_0\|\to 0 \quad \text{as } k\to\infty,$$

hence $\lambda Tx_k-x_k\to(\lambda-1)x_0$, where $\lambda=1/\lambda_0\leqq 1$. By Lemma 1 there is a subsequence $\{x_{k_i}\}$ that converges to some $x\in\partial D$, hence $Tx-x_0=\lambda_0(x-x_0)$ contradicting the fact that T satisfies $(\Pi_1^<)$.

3. Fixed Points of P_1-Compact Operators on Convex Sets

We are now in position to prove our first main result.

Theorem 1. *Let $D\subset X$ be a bounded, closed, convex set with nonempty interior; $T\colon D\to X$ a continuous, P_1-compact mapping such that $T(\partial D)$ is bounded and condition $(\Pi_1^<)$ of Lemma 2 is satisfied; $\{T^n\}$ a sequence of continuous, P_1-compact mappings of D into X such that the conditions*

(2) $$\delta_n=\sup\{\|T^n x-Tx\|: x\in D\}\to 0 \quad \text{as } n\to\infty.$$

(3) *The equation $x=T^n x+y$ has at most one solution if $\|y\|\leqq\delta_n$*

hold. Then $F(T)$, the set of all fixed points of T, is a continuum.

Proof. $F(T)$ is nonempty by Theorem 4.4 and Remark 4.1 in [10], while Corollary 1 (b) implies that $F(T)$ is compact. Hence, we have to show that $F(T)$ is connected. If this assertion were wrong, we have $F(T)=V\cup W$, $V\cap W=\emptyset$, V and W nonempty and compact, hence in particular $\rho(V,W)=\alpha>0$. Introducing the functional

$$\Phi(x)=\rho(x,V)-\rho(x,W) \quad \text{for } x\in X,$$

we have $\Phi(x)\leqq-\alpha$ for each $x\in V$ and $\Phi(x)\geqq\alpha$ for each x in W, i.e. $\Phi(x)\neq 0$ for all $x\in F(T)$. Let $x'\in V$, $x''\in W$, $\lambda\in[0,1]$ and

(4) $$T_\lambda^n x=T^n x+\lambda(x'-T^n x')+(1-\lambda)(x''-T^n x'') \quad x\in D.$$

Since $x'=Tx'$ and $x''=Tx''$, (2) implies $\|T_\lambda^n x-Tx\|\leqq 2\delta_n$ for each $x\in D$ and $\lambda\in[0,1]$. Thus, by Lemma 2, T_λ^n satisfies $(\Pi_1^<)$ if $n\geqq n_0$ and since T^n is P_1-compact, so is T_λ^n. Hence T_λ^n has a fixed point $x_\lambda^n\in D^0$ and (4) implies

(5) $$x_\lambda^n-T^n x_\lambda^n=\lambda(x'-T^n x')+(1-\lambda)(x''-T^n x'').$$

Since the right side in (5) has norm $\leqq\delta_n$, x_λ^n is unique. Hence x_λ^n is continuous in λ (n fixed). In fact, let $\lambda_k\to\lambda_0$ and suppose $\|x_{\lambda_k}^n-x_{\lambda_0}^n\|\geqq\varepsilon_0>0$ for all k; by (5) we have

$$x_{\lambda_k}^n-T^n x_{\lambda_k}^n\to\lambda_0(x'-T^n x')+(1-\lambda_0)(x''-T^n x'') \quad \text{as } k\to\infty;$$

since T^n is demicompact there is a subsequence $\{y_k\} \subset \{x^n_{\lambda_k}\}$ convergent to some y_0, hence $y_0 - T^n y_0 = \lambda_0(x' - T^n x') + (1-\lambda_0)(x'' - T^n x'')$; condition (3) implies $y_0 = x^n_{\lambda_0}$ in contradiction to

$$\|y_0 - x^n_{\lambda_0}\| = \lim_{k\to\infty} \|y_k - x^n_{\lambda_0}\| \geqq \varepsilon_0.$$

Since x^n_λ is continuous in λ, so is $\phi(\lambda) = \Phi(x^n_\lambda)$; moreover, we have $x^n_0 = x''$ and $x^n_1 = x'$, i.e. $\phi(0) \geqq \alpha$ and $\phi(1) \leqq -\alpha$. Hence there exists a $\lambda_n \in (0,1)$ such that $\Phi(x^n_{\lambda_n}) = 0$. Let us write x_n instead of $x^n_{\lambda_n}$. We conclude from (5) and (2) that $\|x_n - Tx_n\| \leqq 2\delta_n \to 0$ as $n \to \infty$. By the demicompactness of T there exists $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ such that $x_{n_i} \to x$ for some $x \in D$. Hence $x = Tx$ and $\Phi(x) \neq 0$ contradicting the fact that $\Phi(x) = \lim_{i\to\infty} \Phi(x_{n_i}) = 0$. Therefore, $F(T)$ is connected and the proof is complete.

The following propositions are some variants of Theorem 1.

Proposition 1. *Let D and T be as in Theorem 1 and $\{T^n\}$ a sequence of mappings of D into X such that condition (2) holds. If in addition $(I - T^n)^{-1}$ is defined in $B(0, \delta_n)$ and continuous on line segments (for each $n \geqq n_0$), then $F(T)$ is a continuum.*

Proof. Going through the proof of Theorem 1, we arrive at (4) without any change. Since now $\lambda(x' - T^n x') + (1-\lambda)(x'' - T^n x'') \in B(0, \delta_n) \subset (I - T^n)(D)$, there exists a unique fixed point x^n_λ of T^n_λ which depends continuously on λ. The remaining steps are as in the proof of Theorem 1.

Proposition 2. *Let $T\colon X \to X$ be a nonexpansive mapping that satisfies $(\Pi_1^<)$ on the boundary of some bounded closed convex set $D \subset X$ with $D^0 \neq \emptyset$ and one of the following conditions.*

(a) *T is demicompact and $\|P_n\| = 1$ for all n.*

(b) *T is P_1-compact.*

Then $F(T)$ is a continuum.

Proof. Suppose first that (a) holds. Since T is nonexpansive and $\|P_n\| = 1$ for each n, T is P_γ-compact for each $\gamma > 1$ by Theorem 2.2 of [10]. Since T satisfies $(\Pi_1^<)$, it clearly satisfies $(\Pi_\gamma^<)$, i.e.: $Tx - x_0 = \lambda(x - x_0)$ for some $x \in \partial D$ implies $\lambda < \gamma$. Moreover, $T(\partial D)$ is bounded. Hence by Theorem 4.4 in [10] there is an element $x_\gamma \in D^0$ such that $Tx_\gamma - x_0 = \gamma(x_\gamma - x_0)$. Let $\{\gamma_n\}$ be a sequence such that $\gamma_n > 1$ and $\gamma_n \to 1$ as $n \to \infty$. We have

$$\|Tx_{\gamma_n} - x_{\gamma_n}\| \leqq (\gamma_n - 1)(\|x_0\| + \|x_{\gamma_n}\|) \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

Thus, we may assume that $x_{\gamma_n} \to x \in D$ and we have $x = Tx$, i.e. $F(T) \neq \emptyset$.

The proof of Corollary 1 (b) shows that $F(T)$ is compact. To prove the connectedness of $F(T)$, let us consider a sequence $\{k_n\}$ such that $0 < k_n < 1$ and $k_n \to 1$ as $n \to \infty$. Then $T^n = k_n T$ converges to T, uniformly on D. Repeating the first conclusion of this proof, we see that T^n is P_1-compact for each n; moreover, condition (3) of Theorem 1 is obviously satisfied. Hence we are given all condi-

tions of Theorem 1 except the P_1-compactness of T, but all we needed to prove the connectedness of $F(T)$ has been the demicompactness of T.

If on the other hand T is P_1-compact, then $T^n = k_n T$ is P_1-compact, hence every condition of Theorem 1 is satisfied.

Proposition 2 is related to Lemma 1 in [9] which says that if X is a (general) strictly convex Banach space and T a nonexpansive mapping of a bounded, closed, convex set D into D such that $(I-T)(D)$ is closed, then $F(T)$ is closed and convex, hence connected. It is also related to Theorem 2.1 in [12]: if X is a general Banach space then $F(T)$ is a continuum if $T: X \to X$ is nonexpansive and compact (i.e.: $T(X)$ precompact).

To finish this section we want to prove a proposition in case T has a unique fixed point.

Proposition 3. *Let $D \subset X$ be a bounded convex set with $D = \overline{D^0}$; $T: D \to X$ a continuous, P_1-compact mapping satisfying $(\Pi_1^<)$; T have at most one fixed point in D; $T(\partial D)$ be a bounded set; $\{T^n\}$ be a sequence of P_1-compact mappings of D into X that converges to T, uniformly on D. Then T has a unique fixed point $x_0 \in D$ and there is an index n_0 such that T^n has a fixed point $x_n \in D^0$ for each $n \geqq n_0$ so that $x_n \to x_0$.*

Proof. By Theorem 4.4 and Remark 4.1 of [10], T has a fixed point $x_0 \in D^0$, which is unique by assumption. By Lemma 2, T^n satisfies $(\Pi_1^<)$ for all $n \geqq n_0$. Hence there is $x_n \in D^0$ such that $x_n = T^n x_n$ for each $n \geqq n_0$ (note that in Theorem 4.4 T is not assumed to be continuous!). This implies $\|x_n - Tx_n\| \leqq \delta_n \to 0$ as $n \to \infty$. If $\{x_{n_i}\}$ is any subsequence of $\{x_n\}$ then there exists a subsequence of $\{x_{n_i}\}$, convergent to some $x \in D$ (since T is demicompact) and we have $x = Tx$, hence $x = x_0$. Thus, the whole sequence $\{x_n\}$ must converge to x_0.

Proposition 3 is a generalization of the first part of Theorem 6.2 in [10]; on account of Lemma 1 its proof is simpler than that given in [10], where one had to assume: $D = X$, T bounded and P_0-compact with $(\Pi_1^<)$ on $\partial B(0, r)$ for some $r > 0$, T^n bounded and P_0-compact.

4. Fixed Points of P_1-Compact Operators on Bounded Open Sets

Our second main result involves the degree of A-proper mappings. Let us recall the following

Definition 2. Let X be a Banach space with projectionally complete system $(\{X_n\}, \{P_n\})$, where the X_n are oriented; $D \subset X$ a bounded set with $D = \overline{D^0}$; T a continuous, A-proper mapping of D into X; $y \notin T(\partial D)$; Z the set of all integers and $Z' = Z \cup \{-\infty, \infty\}$.

Then $\mathrm{Deg}(T, D, y)$, *the degree of T on D over y*, is the subset of Z' given by

(α) $m \in Z$ lies in $\mathrm{Deg}(T, D, y)$ if there exists a sequence $n_j \to \infty$ (positive integers) such that $\deg(T_{n_j}, D_{n_j}, P_{n_j} y) = m$ for each j, where $\deg(.)$ is the classical Brouwer degree (see [4, p. 31]).

(β) $\pm\infty$ lies in $\mathrm{Deg}(T, D, y)$ if there exists $n_j \to \infty$ such that $\deg(T_{n_j}, D_{n_j}, P_{n_j} y) \to \pm\infty$ as $j \to \infty$.

In [3], $\mathrm{Deg}(T, D, y)$ had been defined in case T maps D into another Banach space Y and $X_n \subset X_{n+1}$ for each n; but going through the proof of Theorem 1 in [3], we see that the latter condition is not necessary.

Lemma 3. *Let X, D, T and y be as in Definition 2. Then we have*

(a) *If $\mathrm{Deg}(T, D, y) \neq \{0\}$ then there exists an $x \in D^0$ such that $Tx = y$.*

(b) *If $D = D_1 \cup D_2$, $D_1^0 \cap D_2^0 = \emptyset$, $D_i = \overline{D_i^0}$ for $i = 1, 2$ and $y \notin T(\partial D) = T(\partial D_1) \cup T(\partial D_2)$, then $\mathrm{Deg}(T, D, y) \subset \mathrm{Deg}(T, D_1, y) + \mathrm{Deg}(T, D_2, y)$, with equality holding if either $\mathrm{Deg}(T, D_1, y)$ or $\mathrm{Deg}(T, D_2, y)$ is a singleton integer (by convention: $\infty + (-\infty) = Z'$).*

This lemma is a particular case of Theorem 1 in [3].

With these tools we shall prove the following

Theorem 2. *Let $D \subset X$ be a bounded set with $D = \overline{D^0}$; $T: D \to X$ a continuous mapping such that $T - I$ is A-proper and $\mathrm{Deg}(T - I, D, 0) \neq \{0\}$; $\{T^n\}$ a sequence of continuous mappings such that $T^n - I$ is A-proper and conditions (2) and (3) of Theorem 1 are satisfied. Then $F(T)$ is a continuum.*

Proof. $F(T)$ is not empty by Lemma 3 (a) and compact by Remark 2. If $F(T)$ were not connected then $F(T) = V \cup W$, $V \cap W = \emptyset$, V and W nonempty and compact, in particular $\rho(V, W) > 0$. Let $S = T - I$ and $S^n = T^n - I$. Since $\rho(V, W) > 0$ and $F(T) \subset D^0$, there are closed neighborhoods D_1 and D_2 of V and W respectively such that $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $D_1 \cup D_2 \subset D^0$ and $D' = D - (D_1^0 \cup D_2^0) \subset \{x \in D: \rho(x, F(T)) \geqq \alpha\}$ for some $\alpha > 0$. Since $Sx \neq 0$ in D', $\mathrm{Deg}(S, D_1, 0)$ and $\mathrm{Deg}(S, D_2, 0)$ are well defined and there is a constant $\beta > 0$ such that $\|Sx\| \geqq \beta$ for each $x \in D'$ (Remark 2). Moreover, $\mathrm{Deg}(S, D', 0) = \{0\}$ by Lemma 3 (a), hence

$$\mathrm{Deg}(S, D, 0) = \mathrm{Deg}(S, D_1 \cup D_2, 0) \subset \mathrm{Deg}(S, D_1, 0) + \mathrm{Deg}(S, D_2, 0). \tag{6}$$

We shall prove that the last two degrees are both $\{0\}$. To this end, let $x_1 \in V$, $x_2 \in W$ and

$$S_1^n x = S^n x - S^n x_1 \quad \text{for } x \in D. \tag{7}$$

Obviously, S_1^n is continuous, A-proper and such that

$$\|S_1^n x\| \geqq \|Sx\| - 2\delta_n \geqq \beta/2 \quad \text{for each } x \in D' \text{ and } n \geqq n_0.$$

Hence $\mathrm{Deg}(S_1^n, D_i, 0)$ is well defined for $i = 1, 2$ and $n \geqq n_0$. In addition there is a $\beta > 0$ and an index m_0 such that

$$\|P_m S x\| \geqq \beta_1 \quad \text{for each } m \geqq m_0 \text{ and } x \in D'_m = D' \cap X_m$$

(indirect proof; S is A-proper!). Let $m \geqq m_0$ be fixed and define

$$H_m(x, t) = t P_m S_1^n x + (1 - t) P_m S x \quad (x, t) \in D_m \times [0, 1].$$

We have $H_m(x,0)=P_mSx$, $H_m(x,1)=P_mS_1^nx$, $H_m(x,t)$ continuous in (x,t) and

$$\|H_m(x,t)\| \geqq \|P_mSx\| - 2K\delta_n \geqq \tfrac{1}{2}\beta_1$$

for each $x\in D_m'$, $t\in[0,1]$, $m\geqq m_0$ and $n\geqq n_1\geqq n_0$ ($K\geqq 1$ is a uniform bound for $\|P_n\|$).

This implies that P_mS and $P_mS_1^n$ are homotopic, hence $\deg(P_mS, D_{im}, 0)=\deg(P_mS_1^n, D_{im}, 0)$ for each $m\geqq m_0$, $n\geqq n_1$ and $i=1,2$. Thus, by Definition 2

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{Deg}(S, D_i, 0)=\mathrm{Deg}(S_1^n, D_i, 0) \qquad i=1,2 \text{ and } n\geqq n_1.$$

Let an arbitrary $n\geqq n_1$ be fixed. (7) implies that $x_1\in D_1$ satisfies $S_1^nx=0$, i.e. $x=T^nx+Tx_1-T^nx_1$; since $\|Tx_1-T^nx_1\|\leqq\delta_n$, x_1 is the only point with $S_1^nx=0$ (condition (3)). Hence $\mathrm{Deg}(S_1^n, D_2, 0)=\{0\}$ by Lemma 3 (a) and $\mathrm{Deg}(S, D_2, 0)=\{0\}$ by (8). Repeating the same argument with

$$S_2^nx=S^nx-S^nx_2, \qquad x_2\in W\subset D_2,$$

instead of S_1^n, we arrive at $\mathrm{Deg}(S_2^n, D_1, 0)=\mathrm{Deg}(S, D_1, 0)=\{0\}$. Hence $\mathrm{Deg}(T-I, D, 0)=\{0\}$ by (6), contradicting our condition $\mathrm{Deg}(T-I, D, 0)\neq\{0\}$. Thus, $F(T)$ is connected and the proof is complete.

Let us note that our proof is modelled on that given in [7] in case X is a general Banach space and T, T^n are completely continuous. But we had not been able to use the homotopy principle (Theorem 1 (c) in [3]) directly since the sum of two A-proper mappings is not A-proper in general. For this reason we have considered $H_m(x,t)$ instead of $H(x,t)=tS_1^nx+(1-t)Sx$.

Our last proposition is an immediate consequence of Theorem 2.

Proposition 4. (a) *Theorem 2 holds if "$T-I$ and T^n-I are A-proper" is replaced by "T and T^n are P_1-compact".*

(b) *If $D\subset X$ is bounded with $D=\overline{D^0}$ and T: $D\to X$ is P_1-compact, nonexpansive and such that* $\mathrm{Deg}(T-I, D, 0)\neq\{0\}$, *then $F(T)$ is a continuum.*

Proof. (a) is obvious, while (b) follows from Theorem 2 since $T^n=k_nT$, $0<k_n<1$ and $k_n\to 1$ as $n\to\infty$, satisfy all conditions.

References

1. Aronszajn, N.: Le correspondent topologique de l'unicité dans la théorie des équations differentielles. Ann. of. Math. **43**, 730–738 (1942).
2. Browder, F.E., Gupta, C.P.: Topological degree and nonlinear mappings of analytic type in Banach spaces. J. Math. Analysis Appl. **26**, 390–402 (1969).
3. – Petryshyn, W.V.: The topological degree and Galerkin approximations for noncompact operators in Banach spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **74**, 641–646 (1968).
4. Cronin, J.: Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. Math. Surveys No. 11. Providence, Amer. Math. Soc. (1964).
5. Deimling, K.: Eigenschaften der Lösungsmenge eines Systems von Volterra-Integralgleichungen. Manuscripta Math. (submitted).
6. – On the set of solutions of a system of Volterra integral equations. Ann. Mat. Pura Appl. (in print).

7. Krasnosel'skii, M.A., Sobolevskii, P.E.: Structure of the set of solutions of an equation of parabolic type. Doklady Akad. Nauk SSSR **146**, 26–29 (1962) and Ukrain. Math. Žurn. **16**, 319–333 (1964).
8. Petryshyn, W.V.: Further remarks on nonlinear P-compact operators in Banach space. J. Math. Analysis Appl. **16**, 243–253 (1966).
9. – Iterative construction of fixed points of contractive type mappings in Banach space. C.I.M.E. Lecture notes, Ispra, Italy (1967).
10. – Tucker, T.S.: On the functional equations involving nonlinear generalized P-compact operators. Trans. Amer. Math. Soc. **135**, 343–373 (1969).
11. Stampacchia, G.: Le trasformazioni funzionali che presentano il fenomeno di Peano. Rend. Accad. Lincei **7**, 80–84 (1949).
12. Vidossich, G.: On Peano phenomenon. Boll. Un. Mat. Ital. (to appear).

Dr. Klaus Deimling
Mathematisches Institut der Universität
D-75 Karlsruhe
Englerstr. 2

(Received March 16, 1970)

Math. Z. 115, 197–200 (1970)

Charakterisierungen der primitiven Klassen arithmetischer Ringe

HEINRICH WERNER und RUDOLF WILLE

Diese Note ist als Fortsetzung von [1] zu verstehen. Es wird folgende Erweiterung von Satz 2 aus [1] bewiesen:

Satz 2. *Für eine primitive Klasse $\mathfrak{R}$ von Ringen sind folgende Bedingungen äquivalent*[1]*:*

a) *$\mathfrak{R}$ wird von einer endlichen Menge endlicher Körper erzeugt.*

b) *Jeder Ring aus $\mathfrak{R}$ ist arithmetisch.*

c) *In jedem Ring aus $\mathfrak{R}$ liegt jedes endlich erzeugte Ideal in einem Hauptideal.*

d) *In jedem Ring aus $\mathfrak{R}$ ist die Summe zweier Hauptideale stets wieder ein Hauptideal.*

e) *Es gibt eine endliche Menge P von Primzahlen und zu jeder Primzahl $p \in P$ eine endliche Menge $N(p)$ von natürlichen Zahlen, so daß $\mathfrak{R}$ die Klasse aller der Ringe ist, in denen folgende Gleichungen gelten:*

$$\sum_{p\in P}\Big(\prod_{q\in P\setminus\{p\}} q\Big)^{(p^{n(p)}-1)}\cdot x^{p^{n(p)}} = x \quad \text{mit} \quad n(p) := \prod_{n\in N(p)} n, \tag{1}$$

$$x\cdot\prod_{p\in P}\prod_{n\in N(p)}(x^{p^n}-x)=0. \tag{2}$$

Wie in [1] soll zum Beweis von Satz 2 ein Satz der Allgemeinen Algebra herangezogen werden. Es würde den Rahmen dieser Note sprengen, wollte man hier die notwendigen Begriffe und Ergebnisse der Allgemeinen Algebra anführen. Der Leser wird deshalb auf die Arbeit [2] verwiesen. Aus den allgemeinen Resultaten über „Sätze vom Mal'cev Typ" in [2] (Satz 6.1, Zusatz 6.2 und 7.2) bekommt man als Spezialfall folgenden

Satz 1. *Für eine primitive Klasse $\mathfrak{A}$ von Algebren mit Konstante 0 und vertauschbaren Kongruenzrelationen sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *In jeder Algebra aus $\mathfrak{A}$ liegt jede endlich erzeugte Kongruenzklasse, die $\{0\}$ echt enthält, in einer Kongruenzklasse, die von 0 und einem weiteren Element erzeugt wird.*

---

[1] Herr G. M. Bergman teilte uns weitere äquivalente Bedingungen mit (vgl. [1], Hilfssatz 2):
f) *Jeder Ring aus $\mathfrak{R}$ ist halbeinfach.*
g) *Jeder Ring aus $\mathfrak{R}$ besitzt keine nilpotenten Elemente ungleich Null.*

b) *Es gibt eine 2-stellige, algebraische Operation* $\bar{t}$ *und zwei 3-stellige, algebraische Operationen* $\bar{r}$ *und* $\bar{s}$ *von* $\mathfrak{A}$ *mit*

$$\bar{r}(x, y, 0)=0, \qquad \bar{s}(x, y, 0)=0,$$
$$\bar{r}(x, y, \bar{t}(x, y))=x, \qquad \bar{s}(x, y, \bar{t}(x, y))=y.$$

Da in Ringen die Kongruenzrelationen stets vertauschbar sind, gilt der folgende Spezialfall von Satz 1:

Satz 1′. *Für eine primitive Klasse* $\mathfrak{R}$ *von Ringen sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *In jedem Ring aus* $\mathfrak{R}$ *liegt jedes endlich erzeugte Ideal in einem Hauptideal.*

b) *Es gibt ganzzahlige Polynome* $r(x, y, z)$, $s(x, y, z)$ *und* $t(x, y)$ *ohne absolutes Glied, so daß in jedem Ring aus* $\mathfrak{R}$ *folgende Gleichungen gelten:*

$$r(x, y, 0)=0 \quad \textit{und} \quad s(x, y, 0)=0, \tag{3}$$
$$r(x, y, t(x, y))=x \quad \textit{und} \quad s(x, y, t(x, y))=y. \tag{4}$$

Zum Beweis von Satz 2 wird neben Satz 1′ noch ein Hilfssatz benötigt, der in [1] mit den Hilfssätzen 2, 3 und 4 bewiesen wurde.

Hilfssatz. *Ist* $\tilde{t}(x)$ *ein ganzzahliges Polynom ohne absolutes und lineares Glied und gilt in einem Ring* R *die Gleichung* $\tilde{t}(x)=x$, *dann ist* R *isomorph zu einem subdirekten Produkt einer endlichen Menge von Potenzen endlicher Körper.*

Beweis von Satz 2. Die Äquivalenz der Bedingungen (a) und (b) wurde schon in [1] bewiesen. Daß die Bedingungen (c) und (d) äquivalent sind, sieht man folgendermaßen: Zunächst sei (c) vorausgesetzt. Für Hauptideale I und J in $R \in \mathfrak{R}$ (von i und j erzeugt) liegt $\{i, j\}$ nach (c) in einem Hauptideal von $I+J$ (von k erzeugt). $I+J$ ist das von k erzeugte Hauptideal in R. $\mathfrak{R}$ erfüllt somit (d). Umgekehrt folgt leicht durch Induktion, daß (d) stets (c) nach sich zieht.

(e) $\Rightarrow$ (c). R sei ein Ring, in dem die Gln. (1) und (2) gelten. Die Gl. (1) hat die Form $t(x)=x$, wobei $t(x)$ ein ganzzahliges Polynom ohne absolutes und lineares Glied ist. Nach dem Hilfssatz ist R somit isomorph zu einem subdirekten Produkt einer endlichen Menge von Potenzen endlicher Körper, deren Charakteristik wegen (2) nur eine Primzahl aus P sein kann. Es gilt deshalb in R die Gleichung $(k+1)\,x=0$, wenn $k := \prod_{p \in P} p-1$ definiert wird. Wichtig ist noch, daß es ein ganzzahliges Polynom $u(x)$ ohne absolutes Glied gibt, für das $x \cdot u(x)=t(x)=x$ in R gilt. Um Satz 1′ anwenden zu können, werden folgende ganzzahlige Polynome definiert:

$$r(x, y, z) := x \cdot z, \qquad s(x, y, z) := y \cdot z, \qquad t(x, y) := u(x)+u(y)+k\,u(x)\,u(y).$$

In R gilt offenbar $r(x, y, 0)=0$ und $s(x, y, 0)=0$; weiterhin hat man

$$r\big(x, y, t(x, y)\big)=x\cdot u(x)+x\cdot u(y)+x\cdot k\,u(x)\,u(y)=x+(k+1)\cdot x\cdot u(y)=x,$$
$$s\big(x, y, t(x, y)\big)=y\cdot u(x)+y\cdot u(y)+y\cdot k\,u(x)\,u(y)=y+(k+1)\cdot y\cdot u(x)=y.$$

Nun kann man mit Satz 1′ schließen, daß aus (e) stets (c) folgt.

(c) $\Rightarrow$ (a). Nach Satz 1′ gibt es ganzzahlige Polynome $r(x, y, z)$, $s(x, y, z)$ und $t(x, y)$ ohne absolutes Glied, so daß in jedem Ring aus $\mathfrak{R}$ die Gln. (3) und (4) gelten. Diese Polynome lassen sich folgendermaßen schreiben:

$$r(x, y, z)=r_1(x)+r_2(y)+r_3(z)+r_4(x, y)+r_5(x, z)+r_6(y, z)+r_7(x, y, z),$$
$$s(x, y, z)=s_1(x)+s_2(y)+s_3(z)+s_4(x, y)+s_5(x, z)+s_6(y, z)+s_7(x, y, z),$$
$$t(x, y)=t_1(x)+t_2(y)+t_3(x, y);$$

dabei sollen in jedem Glied eines Polynoms, das rechts von den Gleichheitszeichen steht, alle die Variablen auftreten, die in Klammern hinter dem Polynomzeichen angegeben sind. Setzt man in (3) $x=0$ bzw. $y=0$, so erhält man

$$r_1(x)=s_1(x)=0 \quad \text{bzw.} \quad r_2(y)=s_2(y)=0.$$

Damit bekommt man aus (3) auch

$$r_4(x, y)=s_4(x, y)=0.$$

Die Gln. (4) ergeben nun

$$x=r\big(x, 0, t(x, 0)\big)=r_3\big(t_1(x)\big)+r_5\big(x, t_1(x)\big), \tag{5}$$
$$x=s\big(0, x, t(0, x)\big)=s_3\big(t_2(x)\big)+s_6\big(x, t_2(x)\big), \tag{6}$$
$$0=r\big(0, x, t(0, x)\big)=r_3\big(t_2(x)\big)+r_6\big(x, t_2(x)\big). \tag{7}$$

Seien n_r, n_s bzw. n_t die Koeffizienten der linearen Glieder von r_3, s_3 bzw. t_2. Bringt man nun in (6) und (7) die linearen Glieder auf die linke Seite des Gleichheitszeichens, dann bleiben auf der rechten Seite Polynome $p_1(x)$ und $p_2(x)$ ohne lineares Glied stehen, für die gilt

$$x-n_s n_t x=p_1(x), \tag{6′}$$
$$n_r n_t x=p_2(x). \tag{7′}$$

Aus (6′) erhält man $n_r x-n_r n_s n_t x=n_r p_1(x)$ und damit wegen (7′) $n_r x=n_r p_1(x)+n_s p_2(x)$. Definiere

$$\tilde{t}(x):=r_3\big(t_1(x)\big)-n_r t_1(x)+n_r p_1\big(t_1(x)\big)+n_s p_2\big(t_1(x)\big)+r_5\big(x, t_1(x)\big).$$

$\tilde{t}(x)$ ist gleich einem Polynom ohne absolutes und lineares Glied und in jedem Ring aus $\mathfrak{R}$ gilt wegen (5) die Gleichung $\tilde{t}(x)=x$. Nach dem Hilfssatz ist dann jeder Ring aus $\mathfrak{R}$ isomorph zu einem subdirekten Produkt einer endlichen Menge von Potenzen endlicher Körper. Da alle diese Körper zu $\mathfrak{R}$ gehören, kann ihre Mächtigkeit nicht größer als der Grad von $t(x)-x$ sein. $\mathfrak{R}$ wird also von einer endlichen Menge endlicher Körper erzeugt.

(a) $\Rightarrow$ (e). $\mathfrak{K}$ sei eine endliche Menge endlicher Körper, die $\mathfrak{R}$ erzeugt. Für jede Primzahl p definiere

$$N(p) := \{n | \mathfrak{K} \textit{ enthält einen Körper der Mächtigkeit } p^n\};$$

sei ferner

$$P := \{p | p \textit{ ist eine Primzahl mit } N(p) \neq \emptyset\}.$$

$\mathfrak{R}'$ sei die primitive Klasse aller der Ringe, in denen die Gln. (1) und (2) für die oben definierten Mengen P und $N(p)$ gelten. Von diesen Gleichungen gilt offenbar (2) in jedem Körper aus $\mathfrak{K}$. Daß auch (1) in jedem Körper aus $\mathfrak{K}$ gilt, sieht man an folgendem: Ist K ein Körper aus $\mathfrak{K}$ der Mächtigkeit p^n, so gilt in K

$$\Big(\prod_{q \in P \setminus \{p\}} q\Big)^{(p^{n(p)}-1)} \cdot x^{p^{n(p)}} = 1 \cdot x^{p^{n(p)}} = x$$

und für jedes $r \in P$ mit $p \neq r$

$$\Big(\prod_{q \in P \setminus \{r\}} q\Big)^{(r^{n(r)}-1)} \cdot x^{r^{n(r)}} = 0.$$

Man hat also $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{R}'$ und damit $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}'$. Wegen (e) $\Rightarrow$ (a) gibt es eine endliche Menge $\mathfrak{K}'$ von endlichen Körpern, die $\mathfrak{R}'$ erzeugt. Jeder Körper aus $\mathfrak{K}'$ erfüllt die Gl. (2) für die oben definierten Mengen P und $N(p)$ und ist deswegen isomorph zu einem Unterkörper eines Körpers aus $\mathfrak{K}$. Man hat also $\mathfrak{K}' \subseteq \mathfrak{R}$ und damit $\mathfrak{R}' \subseteq \mathfrak{R}$.

Literatur

1. Michler, G., Wille, R.: Die primitiven Klassen arithmetischer Ringe. Math. Z. **113**, 369–372 (1970).
2. Wille, R.: Kongruenzklassengeometrien. Lecture Notes in Mathematics **113**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1970.

Heinrich Werner und Dr. Rudolf Wille
Mathematisches Institut der Universität
D-53 Bonn
Wegelerstr. 10

(Eingegangen am 17. November 1969)

Math. Z. 115, 201 – 226 (1970)

Ein Anfangswertproblem für hyperbolische Gleichungen mit nichtlinearem elliptischen Hauptteil

WOLF VON WAHL

0. Einleitung, Bezeichnungen und vorbereitende Bemerkungen

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, ein Anfangswertproblem für nichtlineare Wellengleichungen der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u + \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m, \\ |\beta| \leqq m}} D^\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x, t, u)\, D^\beta u\right) = F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, D^1 u, \ldots, D^m u\right) u, \qquad A_{\alpha\beta} = \bar{A}_{\alpha\beta,\, |\alpha| = |\beta| = m}, \quad A_{\alpha\beta} = \bar{A}_{\beta\alpha}, \tag{a}$$

über einem „unendlichen Zylinder" $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ zu lösen, falls der nichtlineare Operator

$$A(u)\, u = \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m, \\ |\beta| \leqq m}} D^\alpha \left(A_{\alpha\beta}(x, t, u)\, D^\beta u\right)$$

für $t \to \infty$ asymptotisch linear ist und F bezüglich t in gewisser Weise abfällt. Die Lösung soll dabei eine Randbedingung im Unendlichen erfüllen, d.h. in $L^2(\mathbb{R}^n)$ liegen.

Falls die beteiligten Funktionen $A_{\alpha\beta}$ und F sowie die Anfangswerte $u(0, x) = \varphi$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi$ hinreichend regulär sind, besteht unser Hauptergebnis im folgenden Resultat: Die $A_{\alpha\beta}$ mögen einer Abschätzung ($z = \xi + i\eta$)

$$\left|D^{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial \eta} A_{\alpha\beta}(x, t, z)\right| + \left|D^{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial \xi} A_{\alpha\beta}(x, t, z)\right| + \left|D^{\alpha_3} \frac{\partial}{\partial t} A_{\alpha\beta}(x, t, z)\right| \leqq A(t, |z|) \tag{b}$$

und F einer Abschätzung

$$|D^{\alpha_4} F(t, x, z_1, \ldots, z_{m+2})| \leqq F(t, |(z_1, \ldots, z_{m+2})|) \tag{c}$$

genügen mit stetigen Funktionen A, F, für die $\sup\limits_{0 \leqq y \leqq \text{const}} A(t, y)$ und $\sup\limits_{0 \leqq y \leqq \text{const}} F(t, y)$ in $L^1(\mathbb{R}^+)$ liegen. $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ sind Multiindizes, die in einem von n und m abhängigen Bereich variieren sowie keine Differentiation nach t enthalten (bezüglich der komplexen Veränderlichen ist die Differentiation nach Real- und Imaginärteil auszuführen). Weiter sei der Operator $A(u) > 0$ und elliptisch im

folgenden Sinn: Es ist

$$\sum_{\substack{|\alpha|=m,\\ |\beta|=m}} A_{\alpha\beta}(x,t,u)\,\xi^{\alpha}\,\xi^{\beta} \geqq c(u)\,|\xi|^{2m}, \qquad t\in\mathbb{R}^{+},\ x\in\mathbb{R}^{n},\ \xi\in\mathbb{R}^{n},$$

mit einer von u abhängigen stetigen Funktion $c(u)>0$. Unter diesen Voraussetzungen existiert eine klassische Lösung unseres Anfangswertproblems auf $\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{n}$, falls gewisse Sobolev-Normen von φ und ψ hinreichend klein sind.

Falls T_0 eine hinreichend kleine positive Zahl ist, so läßt sich dasselbe Problem im Zylinder $[0, T_0]\times\mathbb{R}^{n}$ ohne die Voraussetzungen (b), (c) und die Kleinheitsbedingung an die Anfangswerte klassisch lösen. Ein solcher Satz wurde bereits von Fateeva [2] für ein Rand-Anfangswertproblem für

$$f(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u-\sum_{i,j} a_{ij}(x,t,u)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i} b_i(x,t,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}$$
$$+\,b(x,t,u)\,\frac{\partial u}{\partial t}+c(x,t,u)\,u$$

angegeben, wobei u.a. in einem Randstreifen eine Ungleichung

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,t,z)\,\xi_i\,\xi_j \geqq c(z)\,|\xi|^2$$

mit einer von z abhängigen Konstante $c(z)>0$ bestehen muß. Allerdings müssen die Anfangsdaten verschwinden.

Unser Vorgehen besteht in geeigneter Anwendung eines Iterationsverfahrens auf eine (a) zugeordnete Integralgleichung. Zu diesem Zweck ist es erforderlich, den Definitionsbereich gewisser in $L^2(G)$ selbstadjungierter Potenzen $A^{k/2}(u)$, k positiv und ganz, sowie deren zeitlicher Ableitung zu charakterisieren und entsprechende Abschätzungen herzuleiten, ohne daß die bei geradem k auftretenden Koeffizientenfunktionen die üblichen Regularitätsvoraussetzungen erfüllen wie sie etwa bei Browder [1] gefordert werden. Unser Vorgehen hat den Vorteil, Lösungen zu liefern, die in denselben Sobolevräumen liegen wie die Anfangswerte. Das Haupthilfsmittel hierbei besteht in den Sobolevschen Einbettungssätzen und einer Arbeit von Heinz [4]. Außerdem spielen die in [8] entwickelten Methoden zur Lösung abstrakter nichtlinearer Evolutionsgleichungen eine wesentliche Rolle.

In dieser Arbeit sind $\mathbb{R}^{+}$ die Menge aller nichtnegativen, $\mathbb{R}^{++}$ die Menge aller positiven Zahlen. Hinsichtlich der verwendeten Differentialoperatoren sei

$$D_j=\frac{1}{i}\,\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1\leqq j\leqq n.$$

Für n-Tupel $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen, die wir auch als Multiindizes des $\mathbb{R}^{n}$ bezeichnen, sei

$$|\alpha|=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j, \qquad D^{\alpha}=\prod_{j=1}^{n} D^{\alpha_j}.$$

Für m aus $\mathbb{N} \cup \{0\}$ verstehen wir unter $H^m(G)$ und $\mathring{H}^m(G)$ die üblichen aus $L^2(G)$ abgeleiteten Sobolevräume, G ein Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit glattem Rand. Ihre Norm bezeichnen wir mit $\| \cdot \|_m$.

Sei X ein Banachraum, $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$. Unter

$$C^\nu([a, b], X)$$

verstehen wir den Banachraum aller ν-Mal stetig differenzierbaren Abbildungen $u\colon [a, b] \to X$ mit endlicher Norm

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} \sup_{t \in [a,b]} \left\| \left(\frac{d^\lambda}{dt^\lambda} u \right)(t) \right\|.$$

$C_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, X)$ ist lediglich die Menge aller ν-Mal stetig differenzierbaren Abbildungen $u\colon \mathbb{R}^+ \to X$. Entsprechend sei $L^\infty([a, b], X)$ der Banachraum aller wesentlich beschränkten meßbaren Abbildungen $u\colon [a, b] \to X$ mit der Norm $\operatorname{ess\,sup}_{t \in [a,b]} \|u(t)\|$. $\mathscr{L}(X, X)$ bezeichnet die Menge aller beschränkten linearen Transformationen von X in sich.

Ist K eine geeignete Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, so ist $C^\nu(K)$ der Banachraum aller auf K bis zur Ordnung ν stetig differenzierbaren und mit ihren Ableitungen bis zur Ordnung ν beschränkten komplexwertigen Funktionen.

Sei C eine Teilmenge der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$. $C_{\mathrm{loc}}(K, C)$ ist die Menge aller auf K bis zur Ordnung ν stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in C. Den Grenzwert einer normkonvergenten Folge $\{x_n\}$ von Elementen eines Banachraums bezeichnen wir mit $\lim_{n \to \infty} x_n$, den einer schwachkonvergenten Folge $\{x_n\}$ mit $w\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n$.

Es sei bemerkt, daß wir beim Operator $A(u)$ stets seine ausdifferenzierte Form

$$\sum_{|\alpha| \leqq 2m} A_\alpha(x, t, u, D^1 u, \ldots, D^m u)\, D^\alpha$$

verwenden. Einige Abschätzungen werden auch für Operatoren der Gestalt

$$\sum_{|\alpha| \leqq 2m} A_\alpha \left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial t}, D^1 u, \ldots, D^m u \right) D^\alpha$$

hergeleitet. Dies bezieht sich besonders auf die im ersten Kapitel enthaltenen, für das Folgende grundlegenden Abschätzungen, die dann im Anhang verfeinert werden.

Das Zeichen A vor einer Zahl bedeutet, daß es sich hierbei um einen Satz oder eine Gleichung des Anhangs handelt. Um auszudrücken, daß die A_α beim Einsetzen einer Funktion u von $\partial u/\partial t$ unabhängig sein sollen, fordern wir, die A_α mögen von z_2 unabhängig sein. Unter dem Sobolevschen Einbettungssatz verstehen wir die Aussage, daß $H^m(G)$ stetig in $C^k(\bar{G})$ einbettbar ist, falls $m > n/2 + k$ ist. $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$ sind sich aus Einbettungskonstanten ergebende positive Konstanten.

I. Einige Abschätzungen über elliptische Differentialoperatoren

Es seien k, m und n aus $\mathbb{N}$. Es gelte die Ungleichung

$$2km =: 2\bar{m} > \frac{n}{2} + 1.$$

Weiter sei G ein Innen- oder Außengebiet des $\mathbb{R}^n$, das unendlich regulär im Sinne von Definition 1 aus [1] ist, oder der $\mathbb{R}^n$. Für alle Multiindizes α des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha| \leqq 2m$ seien

$$A_\alpha\colon\ \bar{G}_\delta \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^N \to \mathbb{C} \quad (\mathbb{R} \text{ für } |\alpha| = 2m)$$

auf ihrem Definitionsbereich stetige, auf $\bar{G}_\delta \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ $6km = 6\bar{m}$-Mal stetig differenzierbare Funktionen[1]. $N-1$ gibt dabei die Anzahl der Multiindizes α des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha| \leqq m$ an. Für die Funktionen A_α gelte

$$\sum_{|\alpha|=2m} A_\alpha(x, t, z_1, \ldots, z_N)\, \xi^\alpha \geqq c(t, z)\, |\xi|^{2m}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad (x, t, z) \in \bar{G}_\delta \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{C}^N,$$

$$|D^\beta A_\alpha(x, t, z)| \leqq b(t, z), \qquad |\beta| \leqq 6\bar{m},$$

mit von $t, z_1, \ldots, z_N$ stetig abhängigen Funktionen $b(t, z)$, $c(t, z) > 0$.

Weiter seien die Differentialoperatoren

$$\sum_{|\alpha| \leqq 2m} A_\alpha\big(x, t, w_1(t, x), \ldots, w_N(t, x)\big)\, D^\alpha, \qquad w_1, \ldots, w_N \in C^\infty([0, T] \times \bar{G}_\delta)$$

formal selbstadjungiert, und es sei

$$\sum_{|\alpha| \leqq 2m} (A_\alpha D^\alpha \varphi, \varphi) \geqq d(t, z)\, \|\varphi\|_m, \qquad \varphi \in C_0^{2m}(G),$$

mit einer von $t, z_1, \ldots, z_N$ stetig abhängigen Konstante $d(t, z) > 0$.

Satz 1. *Sei $T > 0$. Sei eine Abbildung*

$$w\colon\ [0, T] \to L^2(G) \tag{E$_1$}$$

gegeben mit folgenden Eigenschaften:

$$w(.) \in C^1([0, T], L^2(G)), \tag{E$_2$}$$

$$w(.) \in C^0([0, T], H^{4\bar{m}+m}(G)), \tag{E$_3$}$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)(.) \in C^0([0, T], H^{4\bar{m}}(G)), \tag{E$_4$}$$

$$w(.) \in C^2([0, T], L^2(G)),$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dt^2}\right)(.) \in C^0([0, T], H^{4\bar{m}-m}(G)). \tag{E$_5$}$$

[1] Differenzierbarkeit bezieht sich auf Real- und Imaginärteil der auftretenden komplexen Variablen. Überdies ist

$$G_\delta := \{y \mid |y - x| < \delta, x \in G\}, \qquad \delta > 0.$$

Sei ferner

$$A_w(t) := \sum_{|\alpha| \leqq 2m} A_\alpha \left(x, t, w(t,x), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t,x), D^1 w(t,x), \ldots, D^m w(t,x) \right) D^\alpha \ ^2$$

gesetzt. Dann erfüllt die Operatorenschar $\{-\hat{A}_w(t) | t \geqq 0\}$, *wobei* $\hat{A}_w(t)$ *der Matrixoperator*

$$\begin{pmatrix} -i A_w^{\frac{1}{2}}(t) & 0 \\ 0 & i A_w^{\frac{1}{2}}(t) \end{pmatrix}$$

in der direkten Summe $\hat{H} := L^2(G) \oplus L^2(G)$ *ist, die Voraussetzung* (C_1) *bis* (C_3) *von Kato* [6], *die hier die Existenz des zugehörigen Evolutionsoperators* $\hat{U}_w(t,s)$ *garantieren.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Selbstadjungiertheit von $A_w(t)$ auf $H^{2m}(G) \cap \mathring{H}^m(G)$ in $L^2(G)$, $T \geqq t \geqq 0$. Dazu beschäftigen wir uns erstlich mit der Regularität der Koeffizientenfunktionen

$$A_\alpha \left(x, t, w(t,x), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t,x), D^1 w(t,x), \ldots, D^m w(t,x) \right).$$

Nach v. Wahl [8], Hilfssatz 8, ist

$$\left(\frac{d^\nu}{dt^\nu} w\right)(t,x) = \left(\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} w\right)(t,x) \in C^{2-\nu}([0,T] \times \bar{G}), \qquad \nu = 0, 1, 2,$$

(im zitierten Hilfssatz ist zwar diese Aussage nur bewiesen, falls G durch den $\mathbb{R}^n$ ersetzt wird, doch läßt sich der Beweis mit Hilfe des Sobolevschen Einbettungssatzes wörtlich übertragen). Weiter ist nach dem Sobolevschen Einbettungssatz

$$w(t) \in C^{2\bar{m}+m}(\bar{G}), \qquad t \in [0,T],$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)(t) \in C^{2\bar{m}}(\bar{G}), \qquad t \in [0,T],$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dt^2}\right)(t) \in C^{2\bar{m}-m}(\bar{G}), \qquad t \in [0,T].$$

Da nach Lions-Magenes [7], S. 45,

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t,x) = W_t^{(1)}(x)|_{\bar{G}}, \qquad W_t^{(1)} \in H^{4\bar{m}}(\mathbb{R}^n), \qquad t \in [0,T],$$

$$w(t,x) = W_t^{(2)}(x)|_{\bar{G}}, \qquad W_t^{(2)} \in H^{4\bar{m}+m}(\mathbb{R}^n), \quad t \in [0,T],$$

ist, so erfüllt $A_w(t)$ alle Voraussetzungen des Theorems 5 von Browder [1], S. 57, und ist somit unter Null-Dirichlet-Bedingungen auf G selbstadjungiert und besitzt als Definitionsbereich $H^{2m}(G) \cap \mathring{H}^m(G)$.

Auf Grund der Regularitätseigenschaften von w ist

$$A_w(t) f, \qquad f \in H^{2m}(G) \cap \mathring{H}^{2m}(G),$$

[2] Diese Schreibweise bedeutet, daß die A_α Funktionen von $x, t, w, \partial w/\partial t$ und sämtlicher Ableitungen von w nach den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ von der Ordnung 1 bis zur Ordnung m sind.

stetig nach t in der $L^2(G)$-Norm differenzierbar. Daher ist nach v. Wahl [8], Satz 8, der Definitionsbereich der positiven Quadratwurzel $A_w^{\frac{1}{2}}(t)$ von t unabhängig und $A_w^{\frac{1}{2}}(t) f, f \in D(A_w^{\frac{1}{2}}(0))$ stetig in der $L^2(G)$-Norm differenzierbar. Dieselben Beweisschritte wie bei v. Wahl [8], S. 279, ergeben, daß ($L_{w,T}$ eine positive Konstante)

$$\left\|\left(A_w^{\frac{1}{2}}(t) - A_w^{\frac{1}{2}}(r)\right) A_w^{-\frac{1}{2}}(s)\right\| \leqq L_{w,T}|t-r|, \qquad 0 \leqq t, r, s \leqq T,$$

ist. Hieraus folgt, daß auch (v. Wahl [8], S. 244)

$$\left\|\left(I + \hat{A}_w(t) - I - \hat{A}_w(r)\right)\left(I + \hat{A}_w(s)\right)^{-1}\right\| \leqq \hat{L}_{w,T}|t-r|, \qquad 0 \leqq t, r, s \leqq T,$$

ist, $\hat{L}_{w,T}$ eine positive Konstante. Da auch noch trivialerweise

$$\left\|\left(I + \alpha \hat{A}_w(t)\right)^{-1}\right\| \leqq 1, \qquad \alpha > 0,$$

ist, folgt in der Tat nach Kato [6], Theorem 3, die Existenz des Evolutionsoperators $\hat{U}_w(t, s)$, $T \geqq t \geqq s \geqq 0$, mit den bei v. Wahl [8], S. 244, angegebenen Eigenschaften (E_1) bis (E_6).

Der nächste Satz macht eine Aussage über die Operatoren $A_w(t)$ und $A_w^{2k}(t)$.

Satz 2. *Es gibt positive Konstanten $M_{w,T}^{(1)}$ und $M_{w,T}^{(2)}$ mit*

$$\left\|\left(A_w(t) - A_w(r)\right) A_w^{-1}(s)\right\| \leqq M_{w,T}^{(1)}|t-r| \tag{L 1}$$

und

$$\left\|\left(A_w^{2k}(t) - A_w^{2k}(r)\right) A_w^{-2k}(s)\right\| \leqq M_{w,T}^{(2)}|t-r| \quad \text{für } G = \mathbb{R}^n,\ 0 \leqq t, r, s \leqq T. \tag{L 2}$$

Beweis. Auf Grund der Regularitätseigenschaften von w ist die Ungleichung (L 1) trivial. Wir brauchen uns daher nur noch mit (L 2) zu befassen. Die Regularitätseigenschaften von w liefern nach [1], Theorem 5, bzw. wie beim Beweis von Satz A.1, daß die formal auf $H^{2\bar{m}}(G) \cap \mathring{H}^{\bar{m}}(G)$ bzw. auf $H^{4\bar{m}}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}}(G)$ gebildeten Operatoren $A_w^k(t)$ und $A_w^{2k}(t)$, die wir auch mit ${}_f A_w^k(t)$ bzw. ${}_f A_w^{2k}(t)$ bezeichnen, dort selbstadjungiert sind sowie die Darstellung

$$\begin{aligned}
{}_f A_w^{2k}(t)\, u = & \sum_{\substack{|\alpha| = 2\bar{m} \\ |\beta| = 2\bar{m}}} \bar{A}_\alpha\left(x, t, w(x,t), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t)\right) \\
& \cdot \bar{A}_\beta\left(x, t, w(x,t), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t)\right) D^{\alpha+\beta} u \\
& + \sum_{\substack{|\eta|, |\alpha| \leqq 2\bar{m} \\ 1 \leqq |\gamma|, \gamma \leqq \alpha}} \bar{A}_\alpha\left(x, t, w(x,t), D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^{2\bar{m}-m} w(x,t)\right) \\
& \cdot D^\gamma \bar{A}_\eta\left(x, t, w(x,t), D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^{2\bar{m}-m} w(x,t)\right) \\
& \cdot D^{\eta+\alpha-\gamma} u \ [3]
\end{aligned}$$

---

[3] $\bar{A}_\alpha\left(x, t, w, D^{2(\bar{m}-m)}\frac{\partial w}{\partial t}, D^1 w, \ldots, D^{2\bar{m}-m} w\right)$ sind die Koeffizientenfunktionen von $A_w^k(t)$, die von allen x-Ableitungen von w bis zur Ordnung $2\bar{m}-m$ und von $\partial w/\partial t$ bis zur Ordnung $2(\bar{m}-m)$ abhängen, falls $|\alpha| \leqq 2\bar{m}-1$ ist.

gilt. Betrachten wir die Differenz

$$D^{\gamma}\bar{A}_{\eta}\left(x,t,w(x,t),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t),D^{1}w(x,t),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(x,t)\right)$$
$$-\bar{A}_{\eta}\left(x,r,w(x,r),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,r),D^{1}w(x,r),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(x,r)\right)D^{\eta+\alpha-\gamma}u,$$

so erkennt man leicht, daß diese endliche Summe von Ausdrücken der Gestalt

$$(D^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta})\left(x,t,w(t),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t),D^{1}w(t),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(t)\right)$$
$$-(D^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta})\left(x,r,w(r),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(r),D^{1}w(r),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(r)\right) \tag{1}$$
$$\cdot\prod_{\lambda=1}^{N}D^{\alpha_\lambda}w_\lambda D^{\alpha+\eta-\gamma}u,$$

$$(D^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta})\left(x,r,w(r),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(r),D^{1}w(r),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(r)\right)$$
$$\cdot\prod_{\lambda=1}^{\mu-1}D^{\alpha_\lambda}w'_\lambda(D^{\alpha_\mu}w'_\mu-D^{\alpha_\mu}w_\mu)\prod_{\lambda=\mu+1}^{N}D^{\alpha_\lambda}w_\lambda, \tag{2}$$

$$(D^{\tilde{\alpha}}\bar{A}_{\eta})\left(x,t,w(t),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t),D^{1}w(t),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(t)\right)$$
$$-(D^{\tilde{\alpha}}\bar{A}_{\eta})\left(x,r,w(r),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(r),D^{1}w(r),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(r)\right) \tag{3}$$

ist. Dabei sind $\tilde{\alpha},\alpha_1,\ldots,\alpha_N$ Multiindizes des $\mathbb{R}^n$ mit $|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_N|=|\gamma|$, $|\alpha_\lambda|\geqq 1$, $1\leqq\lambda\leqq N$, $|\gamma|\geqq|\tilde{\alpha}|\geqq 1$, α_0 ist ein Multiindex des $\mathbb{R}^{n+\tilde{N}}$ mit $|\gamma|\geqq|\alpha_0|\geqq 1$.[4] Weiter ist $w_\lambda\in\left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}w(t),\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}D^{2(\bar{m}-m)}\frac{\partial w}{\partial t}(t),\ldots,\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}D^{2\bar{m}-m}w(t)\right\}$ und w'_λ das entsprechende Element aus $\left\{\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}w(r),\begin{matrix}\mathrm{Re}\\ \mathrm{Im}\end{matrix}D^{2(\bar{m}-m)}\frac{\partial w}{\partial t}(r),\ldots\right\}$. Nun ist

$$\left|(D^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta})\left(x,t,w(t),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t),D^{1}w(t),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(t)\right)\right.$$
$$\left.-(D^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta})\left(x,r,w(r),D^{2(\bar{m}-m)}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(r),D^{1}w(r),\ldots,D^{2\bar{m}-m}w(r)\right)\right|$$
$$\leqq\sup_{\substack{1\leqq\nu\leqq\tilde{N},\,x\in\bar{G},\,0\leqq t\leqq T\\ |\xi_\nu|,|\eta_\nu|\leqq c_2\sup\limits_{0\leqq t\leqq T}\left(\left\|\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t)\right\|_{4\bar{m}-2m}+\|w(t)\|_{4\bar{m}-m}\right)}}\left\{\left|\frac{\partial A^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta}}{\partial t}\right|+\left|\frac{\partial D^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta}}{\partial\xi_\nu}\right|+\left|\frac{\partial D^{\alpha_0}\bar{A}_{\eta}}{\partial\eta_\nu}\right|\right\}$$
$$\cdot\left\{|t-r|+\left\|\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t)-\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(r)\right\|_{4\bar{m}-2m}+\|w(t)-w(r)\|_{4\bar{m}-m}\right\}.$$

[4] $\tilde{N}$ = Anzahl der Variablen der $\bar{A}_\alpha-(n+1),|\alpha|\leqq 2\bar{m}-1$.

Außerdem ist nach v. Wahl [8], Hilfssatz 6,[5]

$$\left\| \prod_{\lambda=1}^{N} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda D^{\alpha+\eta-\gamma} u \right\| \leqq c_1 \prod_{\lambda=1}^{N} \|w_\lambda\|_{2\bar{m}} \|u\|_{4\bar{m}}$$

und entsprechend

$$\left\| \prod_{\lambda=1}^{\mu-1} D^{\alpha_\lambda} w'_\lambda (D^{\alpha_\mu} w'_\mu - D^{\alpha_\mu} w_\mu) \prod_{\lambda=\mu+1}^{N} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda D^{\alpha+\eta-\gamma} u \right\|$$
$$\leqq c_2 \prod_{\lambda=1}^{\mu} \|w'_\lambda\|_{2\bar{m}} \|w'_\mu - w_\mu\|_{2\bar{m}} \prod_{\lambda=\mu+1}^{N} \|D^{\alpha_\lambda} w_\lambda\|_{2\bar{m}} \|u\|_{4\bar{m}}.$$

Da die Abschätzung von (3) unter die Ungleichung (4) subsumiert werden kann, folgt jetzt mit den Regularitätseigenschaften von w die Ungleichung (L 2), da $A_w^k(t) = {}_f A_w^k(t)$ und $A_w^{2k}(t) = {}_f A_w^{2k}(t)$ ist[6], $G = \mathbb{R}^n$.

Sei im folgenden $\bar{A}_w(t) := A_w^k(t)$, $\bar{\sigma} := 4k+1$. Dann gilt der

Satz 3. *Es ist sogar* $(G = \mathbb{R}^n)$

$$A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\, A_w^{-\bar{\sigma}/2}(s) \in \mathscr{L}\big(L^2(G), L^2(G)\big)$$

und

$$\big\|\big(A_w^{\bar{\sigma}/2}(t) - A_w^{\bar{\sigma}/2}(r)\big) A_w^{-\bar{\sigma}/2}(s)\big\| \leqq M_{w,T}^{(3)} |t-r|$$

mit einer positiven Konstante $M_{w,T}^{(3)}$, $0 \leqq t, r, s \leqq T$.

Beweis. Zunächst ist

$$H^{4\bar{m}+m}(G) = D\big(A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\big) = D\big(A_0^{\bar{\sigma}/2}(0)\big),$$
$$\tilde{c}_1(T,w) \|u\|_{4\bar{m}+m} \leqq \|A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\, u\| \leqq \tilde{c}_2(T,w) \|u\|_{4\bar{m}+m}, \qquad u \in D\big(A_0^{\bar{\sigma}/2}(0)\big),$$

mit positiven Konstanten $\tilde{c}_1(T,w)$ und $\tilde{c}_2(T,w)$.[7] Daher ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen in der Tat $A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\, A_w^{-\bar{\sigma}/2}(r)$ aus $\mathscr{L}\big(L^2(G), L^2(G)\big)$. Weiter ist für u aus $D\big(A_0^{\bar{\sigma}/2}(0)\big)$

$$\big\|\big(A_w^{\bar{\sigma}/2}(t) - A_w^{\bar{\sigma}/2}(r)\big) u\big\| \leqq \big\|\big(A_w^{\frac{1}{2}}(t) - A_w^{\frac{1}{2}}(r)\big) \bar{A}_w^2(t)\, u\big\| + \big\|A_w^{\frac{1}{2}}(r)\big(\bar{A}_w^2(t) - \bar{A}_w^2(r)\big) u\big\|. \quad (4)$$

Beim ersten Summanden benutzen wir zunächst die bereits bewiesene Lipschitzstetigkeit von $\big\|\big(A_w^{\frac{1}{2}}(t) - A_w^{\frac{1}{2}}(r)\big) A_w^{-\frac{1}{2}}(t)\big\|$. Sodann ist

$$\|A_w^{\frac{1}{2}}(t)\, u\|^2 \leqq \sup_{\substack{|\beta| \leqq m,\ |\alpha| \leqq 2m \\ x \in \bar{G},\ 0 \leqq t \leqq T}} \|u\|_m^2$$
$$\|w(t)\|_{C^{2m}(\bar{G})},\ \big\|\big(\tfrac{\partial w}{\partial t}\big)(t)\big\|_{C^m(\bar{G})} \leqq c_3 \sup_{0 \leqq t \leqq T} \Big(\|w(t)\|_{4\bar{m}} + \big\|\big(\tfrac{\partial w}{\partial t}\big)(t)\big\|_{3\bar{m}}\Big)$$
$$\cdot \left|D^\beta A_\alpha\left(x, t, w(x,t), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t)\right)\right|,$$

[5] Hilfssatz 6 ist dort zwar nur für den $\mathbb{R}^n$ bewiesen, doch läßt sich der Beweis wörtlich auf den Fall beliebiger Gebiete G mit hinreichend glattem Rand übertragen.

[6] Nach Browder [1], Theorem 4, ist $D(A_w^k(t)) \subseteq H^{2\bar{m}}(G)$, und wie bei Hilfssatz A.1 zeigt man: $D(A_w^{2k}(t)) \subseteq H^{4\bar{m}}(G)$, so daß man eine symmetrische Fortsetzung z.B. von $A_w^{2k}(t)$ auf $H^{4\bar{m}}(G)$ konstruieren kann.

[7] Für den Beweis s. Anhang, Satz A.2.

$u\in D(A_w(0))$. Wir differenzieren nun $\bar{A}_w^2(t)u$, $u\in H^{4\bar{m}+m}(G)\cap D(\bar{A}_w^2(0))$ formal bis zur Ordnung m und bilden die $L^2(G)$-Norm. Dies liefert ganz ähnliche Ausdrücke wie die beim Beweis von Satz 2 behandelten, nur hat man jetzt von Ungleichungen

$$\left\|\prod_{\lambda=1}^{N} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda D^{\alpha+\alpha_{N+1}} u\right\| \leqq c_4 \|u\|_{4\bar{m}+m} \cdot \prod_{\lambda=1}^{N} \|w_\lambda\|_{2\bar{m}+m}$$

Gebrauch zu machen, wobei $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N+1}$ Multiindizes des $\mathbb{R}^n$ sind mit $1\leqq|\alpha_\lambda|$, $1\leqq\lambda\leqq N$, $|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_{N+1}|\leqq 2\bar{m}+m$, $|\alpha|\leqq 2\bar{m}$. Da $D(A_w^{\bar{\sigma}/2}(0))\subseteq H^{4\bar{m}+m}(G)$ ist, ist wegen

$$\|(A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)-A_w^{\bar{\sigma}/2}(r))A_w^{-\bar{\sigma}/2}(s)\| \leqq \|(A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)-A_w^{\bar{\sigma}/2}(r))A_w^{-\bar{\sigma}/2}(0)\|\,\|A_w^{\bar{\sigma}/2}(0)A_w^{-\bar{\sigma}/2}(s)\|$$

und der Normstetigkeit von $A_w^{\bar{\sigma}/2}(0)A_w^{-\bar{\sigma}/2}(s)$, die aus der soeben gezeigten von $A_w^{\bar{\sigma}/2}(s)A_w^{-\bar{\sigma}/2}(0)$ folgt, in der Tat der erste Summand in (4) passend abgeschätzt. Der zweite kann analog behandelt werden und führt auf Ungleichungen

$$\left\|\prod_{\lambda=1}^{\mu-1} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda'(D^{\alpha_\mu} w_\mu' - D^{\alpha_\mu} w_\mu) \prod_{\lambda=\mu+1}^{N} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda D^{\alpha+\alpha_{N+1}} u\right\|$$
$$\leqq c_5 \|u\|_{4\bar{m}+m} \prod_{\lambda=1}^{\mu} \|w_\lambda'\|_{2\bar{m}+m} \|w_\mu'-w_\mu\|_{2\bar{m}+m} \prod_{\lambda=\mu+1}^{N} \|w_\lambda\|_{2\bar{m}+m}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Corollar zu den Sätzen 2 und 3. *Es ist*

$$\hat{A}_w^\nu(t)\,\hat{U}_w(t,s)\,\hat{A}_w^{-\nu}(s)\in\mathscr{L}(L^2(G),L^2(G)), \qquad \nu=1,2,4k,4k+1,\ 0\leqq s\leqq t\leqq T,$$

und

$$\|\hat{A}_w(t)\,\hat{U}_w(t,s)\,\hat{A}_w^{-1}(s)\| \leqq e^{L_{w,T}(t-s)},$$

$$\|\hat{A}_w^\nu(t)\,\hat{U}_w(t,s)\,\hat{A}_w^{-\nu}(s)\| \leqq \begin{cases} e^{M_{w,T}^{(1)}(t-s)}, & \nu=2,\\ e^{M_{w,T}^{(2)}(t-s)}, & \nu=4k,\\ e^{M_{w,T}^{(3)}(t-s)}, & \nu=4k+1,\end{cases}$$

wobei für $\nu\geqq 4k$ $G=\mathbb{R}^n$ sei.

Beweis. Siehe v. Wahl [8], Beweis von Satz 1.

Der Beweis des folgenden Satzes wird im Anhang erbracht:

Satz 4. *Es ist, falls die A_α nicht von z_2 abhängen, und $G=\mathbb{R}^n$ ist,*

$$\sup_{\substack{r-t<\varepsilon,\\ r\geqq t}} \frac{1}{|t-r|}\|A_w^{\bar{\sigma}/2}(r)A_w^{-\bar{\sigma}/2}(t)-I\| \leqq \sup_{\substack{r-t<\varepsilon\\ t\leqq\sigma\leqq r}} \|(A_w^{\frac{1}{2}}(\sigma))'A_w^{-\frac{1}{2}}(t)\|$$
$$+\|A_w^{\frac{1}{2}}(t)(\bar{A}_w^2(t))'A_w^{-\bar{\sigma}/2}(t)\|+\delta(\varepsilon)$$

mit einer auf $[0,T]$ nur von ε abhängigen Größe $\delta(\varepsilon)$, die die Eigenschaft: $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon)=0$ *besitzt. Dabei ist $\bar{A}_w^2(t)x$, $x\in D(\bar{A}_w^2(0))$, stetig nach t differenzierbar,*

$(\bar{A}_w^2(t))' x := \frac{d}{dt}(\bar{A}_w^2(t)x)$, *und* $(\bar{A}_w^2(t))' \bar{A}_w^{-2}(t)$ *sowie* $A_w^{\frac{1}{2}}(t)(\bar{A}_w^2(t))' A_w^{-\bar{\sigma}/2}(t)$ *sind beschränkte Operatoren; weiter ist*

$$\lim_{\substack{r \to t \\ r \geqq t}} \frac{1}{|t-r|} \| \bar{A}_w^2(r) \bar{A}_w^{-2}(t) - I \| = \| (\bar{A}_w^2(t))' \bar{A}_w^{-2}(t) \|,$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig auf $[0, T]$. *Endlich ist*

$$\hat{U}_w^{\tilde{\gamma}}(t,s) := e^{-\int_s^t \tilde{\gamma}\left(\sigma, \|w(\sigma)\|_{4\bar{m}+m} + \|(\frac{dw}{d\sigma})(\sigma)\|_{4\bar{m}}\right) d\sigma} \hat{U}_w(t,s)$$

der zu

$$-\hat{A}_w(t) + \tilde{\gamma}\left(t, \|w(t)\|_{4\bar{m}+m} + \left\|\left(\frac{dw}{dt}\right)(t)\right\|_{4\bar{m}}\right)$$

gehörige Evolutionsoperator, falls $\tilde{\gamma}(.,.) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *ist. Wenn darüber hinaus noch*

$$\|(A_w^{\frac{1}{2}}(t))' A_0^{-\frac{1}{2}}(0)\| \leqq c_T^{(1)}(w) H(t), \tag{A}$$

$$\begin{aligned} \gamma(t,w) &:= c_T^{(2)}(w) \tilde{\gamma}\left(t, \|w(t)\|_{4\bar{m}+m} + \left\|\left(\frac{dw}{dt}\right)(t)\right\|_{4\bar{m}}\right) \\ &\geqq c_T^{(1)}(w) H(t) \sup_{0 \leqq t \leqq T} \|A_0^{\frac{1}{2}}(0) A_w^{-\frac{1}{2}}(t)\| + \|A_w^{\frac{1}{2}}(t)(\bar{A}_w^2(t))' A_w^{-\bar{\sigma}/2}(t)\| \\ &\quad + \|(\bar{A}_w^2(t))' \bar{A}_w^{-2}(t)\| \end{aligned} \tag{B}$$

mit Konstanten $c_T^{(1)}(w), c_T^{(2)}(w) > 0$ *und einem Element* $H(.)$ *aus* $C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ *ist, so ist*

$$\|A_w^{\bar{\sigma}/2}(t) \hat{U}_w^{\gamma}(t,s) A_w^{-\bar{\sigma}/2}(s)\| \leqq 1$$

und

$$\|\bar{A}_w^2(t) \hat{U}_w^{\gamma}(t,s) \bar{A}_w^{-2}(s)\| \leqq 1.$$

Für $c_T^{(1)}(w)$ *und* $c_T^{(2)}(w)$ *können wir stetige Abbildungen des mit der üblichen Norm ausgestatteten Banachraums* X^T *der Funktionen w ohne Eigenschaft* (E_5) *in* $\mathbb{R}^{++}$ *wählen, die auf beschränkten Mengen eine positive obere und untere Schranke besitzen, so daß mit geeigneten Funktionen H und* γ (A) *und* (B) *erfüllt sind.*

II. Die Lösung nichtlinearer Wellengleichungen für kleine t

Für dieses und das folgende Kapitel seien die A_α von z_2 unabhängig, $G = \mathbb{R}^n$.

Sei $\hat{\varphi} \in D(\hat{A}_0^{\bar{\sigma}}(0))$. Wir betrachten die lineare Integralgleichung (vgl. v. Wahl [8], Satz 2 und 3, Gleichung (II))

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \hat{U}_w^{\gamma}(t,0)\hat{\varphi} + \tfrac{1}{2}\int_0^t \hat{U}_w^{\gamma}(t,\sigma) \begin{pmatrix} (A_w^{\frac{1}{2}}(\sigma))' A_w^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(u_1(\sigma) - u_2(\sigma)) \\ -(A_w^{\frac{1}{2}}(\sigma))' A_w^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(u_1(\sigma) - u_2(\sigma)) \end{pmatrix} d\sigma \\ &\quad + \int_0^t \hat{U}_w^{\gamma}(t,\sigma) \gamma(\sigma, w) \hat{u}(\sigma)\, d\sigma \end{aligned} \tag{I}$$

in $\hat{H}=L^2(G)\oplus L^2(G)$. u_1 und u_2 sind die Komponenten von $\hat{u}\in\hat{H}$. Sei

$$\hat{X}^T:=\left\{\hat{w}\,|\,\hat{w}(t)=\begin{pmatrix} iA_0^{\frac{1}{2}}(0)\,w(t)+\dfrac{dw}{dt}(t)\\ -iA_0^{\frac{1}{2}}(0)\,w(t)+\dfrac{dw}{dt}(t)\end{pmatrix},\ t\in[0,T],\right.$$
$$\left.\begin{aligned} w(.)&\in C^1([0,T],L^2(G)),\\ w(.)&\in C^0([0,T],H^{4\bar{m}+m}(G))\\ \frac{dw}{dt}(.)&\in C^0([0,T],H^{4\bar{m}}(G))\end{aligned}\right\}.$$

$\hat{X}^T$ ist vermöge der Norm

$$\|\hat{w}\|_{\hat{X}^T}:=\sup_{0\leqq t\leqq T}\|\hat{A}_0^{4k}(0)\,\hat{w}(t)\|$$

ein Banachraum.

Ordnen wir jedem $\hat{w}\in\hat{X}^T$ den zur Lösung $\hat{u}$ der Integralgleichung (I) gehörenden Ausdruck (vgl. [8], (13), (15))

$$\begin{pmatrix} iA_0^{\frac{1}{2}}(0)\big(-iA_w^{-\frac{1}{2}}(t)\big)\big(u_1(t)-u_2(t)\big)+u_1(t)+u_2(t)\\ -iA_0^{\frac{1}{2}}(0)\big(-iA_w^{-\frac{1}{2}}(t)\big)\big(u_1(t)-u_2(t)\big)+u_1(t)+u_2(t)\end{pmatrix}$$

zu, so haben wir damit nach (A.3), nach den Sätzen 2, 3 nebst Corollar, A.3, A.4, 4 sowie nach v. Wahl [8], Satz 3 und Hilfssatz 2 eine Abbildung

$$\hat{\psi}:\ \hat{X}^T\to\hat{X}^T$$

erklärt. Ebenfalls nach diesen Sätzen, nach (A.3) und Bemerkung (A) gilt für die in X^T enthaltene Menge

$$\hat{K}_\rho^T:=\Big\{\hat{w}\,|\,\hat{w}\in\hat{X}^T,\ w(.)\in C^2([0,T],L^2(G)),$$
$$\left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}w\right)(.)\in C^0([0,T],H^{4\bar{m}+2m-\nu m}(G)),\qquad \nu=0,1,2,$$
$$\sup_{0\leqq t\leqq T}\|\hat{A}_0^{4k+1}(0)\,\hat{w}(t)\|\leqq\rho_1,\ \sup_{0\leqq t\leqq T}\left\|\hat{A}_0^{4k}(0)\frac{d\hat{w}}{dt}(t)\right\|\leqq\rho_2,\ \hat{w}(0)=\hat{\hat{\varphi}}\Big\},$$
$$\rho:=(\rho_1,\rho_2),$$

wobei ρ_1,ρ_2 von $\hat{\hat{\varphi}}$ abhängige positive Konstanten sind, bei geeignetem $\hat{\varphi}$ die Beziehung

$$\hat{\psi}(\hat{K}_\rho^T)\subset\hat{K}_\rho^T,$$

falls T hinreichend klein ist (T hängt dabei nur von ρ_1 und der Nichtlinearität ab). Für zwei zu $\hat{w}_1,\hat{w}_2\in\hat{K}_\rho^T$ gehörige Lösungen der Integralgleichung gilt, wenn $u^{(1)},u^{(2)}$ die zugehörigen Lösungen der Wellengleichung bezeichnen, die

Ungleichung (Energieungleichung):

$$\left\|\frac{d}{dt}(u^{(1)}-u^{(2)})\right\|^2+\|A_{w_1}^{\frac{1}{2}}(t)(u^{(1)}-u^{(2)})\|^2\leqq 2\int_0^t\left(\|(A_{w_1}(\sigma)-A_{w_2}(\sigma))\,u^{(2)}(\sigma)\|\right.$$
$$\left.\cdot\left\|\frac{d}{d\sigma}(u^{(1)}(\sigma)-u^{(2)}(\sigma))\right\|+|((A_{w_1}(\sigma))'(u^{(1)}(\sigma)-u^{(2)}(\sigma)),u^{(1)}(\sigma)-u^{(2)}(\sigma))|\right)d\sigma.$$

Hieraus folgt: Falls T hinreichend klein ist, die Schranke hängt wieder nur von ρ_1 und ρ_2 ab, kann man mit Hilfe des Verfahrens der sukzessiven Approximation eine Folge von Elementen $\hat{v}_n\in\hat{K}_\rho^T$, $n=1,\ldots$ gewinnen mit folgenden Eigenschaften:

$$\hat{v}_n\to\hat{v}\quad\text{in der } C^0([0,T],\hat{H})\text{-Norm},$$
$$\hat{v}(t)\in D(\hat{A}_0^{4k+1}(0)),\quad 0\leqq t\leqq T,$$
$$\hat{A}_0^{4k+1}(0)\,\hat{v}(t)=w\text{-}\lim_{n\to\infty}\hat{A}_0^{4k+1}(0)\,\hat{v}_n(t),$$
$$\sup_{0\leqq t\leqq T}\left\|\hat{A}_0^{4k}(0)\left(\frac{d\hat{v}_n}{dt}\right)(t)\right\|\leqq\rho_2.$$

Hieraus folgt zunächst, daß sogar

$$\hat{A}_0^{4k}(0)\,\hat{v}(.)\in C^0([0,T],\hat{H})$$

ist. Für die Bestandteile $v(t)$ und $\left(\frac{dv}{dt}\right)(t)$ von $\hat{v}$ in $\hat{X}^T$ folgt mit denselben Beweisschritten wie bei Hilfssatz 8 aus [8]: Für $|\alpha|\leqq m$ ist $D^\alpha v$ aus $C^1([0,T]\times\mathbb{R}^n)$. Überdies gilt:

$$-\int_0^T\left(\frac{dv}{d\sigma}(\sigma),\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)\right)d\sigma+\int_0^T(A_v(\sigma)\,v(\sigma),\varphi(\sigma))\,d\sigma=\left(\left(\frac{dv}{dt}\right)(0),\varphi(0)\right),$$
$$\varphi(.)\in C^1([0,T],H^m(G)),\quad \varphi(T)=0.$$

Für die Lösung $\hat{f}$ der linearen Integralgleichung

$$\hat{f}(t)=\hat{U}_\delta^\gamma(t,0)\,\hat{\varphi}+\tfrac{1}{2}\int_0^t\hat{U}_\delta^\gamma(t,\sigma)\begin{pmatrix}(A_v^{\frac{1}{2}}(\sigma))'A_v^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(f_1(\sigma)-f_2(\sigma))\\-(A_v^{\frac{1}{2}}(\sigma))'A_v^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(f_1(\sigma)-f_2(\sigma))\end{pmatrix}+2\gamma(\sigma,v)\,\hat{f}(\sigma))\,d\sigma$$

gilt sodann die Gleichung (f ist die Lösung der zugehörigen Wellengleichung)

$$-\int_0^T\left(\frac{d(v-f)}{d\sigma}(\sigma),\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)\right)+\int_0^T(A_v(\sigma)(v(\sigma)-f(\sigma)),\varphi(\sigma))\,d\sigma=0,$$
$$(\hat{\psi}(\hat{f}))(0)=\hat{v}(0).$$

Mit denselben Beweisschritten wie in [7], S. 291, zeigt man dann:

$$v(t)=f(t),\quad\text{also }\hat{v}(t)=(\hat{\psi}(\hat{f}))(t).$$

$\hat{v}$ ist somit Fixpunkt unserer Abbildung $\hat{\psi}$. Hieraus folgt sofort

$$\hat{v}(.)\in C^1([0,T],\hat{H}),$$

$$\frac{d\hat{v}}{dt}(t)\in D\big(\hat{A}_0^{4k-1}(0)\big),\qquad 0\leqq t\leqq T,$$

$$\hat{A}_0^{4k-1}(0)\frac{d\hat{v}}{dt}(.)\in C^0([0,T],\hat{H}).$$

Da nach dem Satz von Dunford-Pettis

$$\hat{A}_0^{4k+1}(0)\,\hat{v}(.)\in L^\infty([0,T],\hat{H})$$

ist, folgt sogar:

$$\frac{d\hat{v}}{dt}(t)\in D\big(\hat{A}_0^{4k}(0)\big),\qquad 0\leqq t\leqq T,$$

$$\hat{A}_0^{4k}(0)\left(\frac{d\hat{v}}{dt}\right)(.)\in L^\infty([0,T],\hat{H}).$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 5. *Seien* $\varphi\in H^{4\bar{m}+2m}(\mathbb{R}^n)$, $\psi\in H^{4\bar{m}+m}(\mathbb{R}^n)$. *Dann existiert, falls* T *eine von* $C\geqq\|\varphi\|_{4\bar{m}+2m}+\|\psi\|_{4\bar{m}+m}$ *abhängige Schranke nicht überschreitet, eine Abbildung*

$$u(.)\in C^2\big([0,T],L^2(\mathbb{R}^n)\big)$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\frac{d^\nu u}{dt^\nu}(t)\in H^{4\bar{m}+2m-\nu m}(\mathbb{R}^n),\qquad 0\leqq t\leqq T,\ \nu=0,1,2,$$

$$\left(\frac{d^\nu u}{dt^\nu}\right)(.)\in C^0\big([0,T],H^{4\bar{m}+m-\nu m}(\mathbb{R}^n)\big)\cap L^\infty\big([0,T],H^{4\bar{m}+2m-\nu m}(\mathbb{R}^n)\big),\quad \nu=0,1,2,$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+A_u(t)\,u=0,\qquad 0\leqq t\leqq T,$$

$$u(0)=\varphi,\qquad \left(\frac{du}{dt}\right)(0)=\psi.$$

Hilfssatz 8 aus [8] und der Sobolevsche Einbettungssatz liefern das

Corollar zum Satz 5. *u ist nach allen Variablen zweimal stetig differenzierbar, es ist*

$$\left(\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}u\right)(t,x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}u\right)(t,x_1,\ldots,x_n),\qquad \nu=0,1,2,$$

und

$$u(t)\in C^{2m}(\mathbb{R}^n),\qquad 0\leqq t\leqq T.$$

Bemerkung 1. Sei

$$F(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_N)\, y_1$$

eine Funktion aus $C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N)$, die bezüglich der letzten N Veränderlichen holomorph, bezüglich der $x_1, \ldots, x_n$ $4\bar{m}+m+1$-Mal stetig differenzierbar ist, bei der alle partiellen Ableitungen nach diesen Variablen bis zur Ordnung $4\bar{m}+m+1$ stetig sind und einer Ungleichung

$$|D^\alpha F(t, x, y)| \leqq |G(t, |y|)|, \qquad (t, x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^N \tag{6}$$

genügen mit $G(.,.) \in C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Dann liefern die Analoga zu den Ungleichungen (9) bis (12) aus [9], daß

$$F\left(t, x, w(t), \left(\frac{dw}{dt}\right)(t), D^1 w(t), \ldots, D^m w(t)\right) u(t), \qquad t \in [0, T],$$

in $D(A_0^{\bar{\sigma}/2}(0))$ bzw. $D(\bar{A}_0^2(0))$ liegt, falls gilt:

$$u(t) \in D(A_0^{\bar{\sigma}/2}(0)), \quad t \in [0, T], \quad u(.) \in C^0([0, T], H^{4\bar{m}+m}(G)),$$
$$w(.) \in C^1([0, T], L^2(G)),$$
$$w(.) \in C^0([0, T], H^{4\bar{m}+\nu m}(G)),$$
$$\left(\frac{dw}{dt}\right)(.) \in C^0([0, T], H^{4\bar{m}+(\nu-1)m}(G)), \qquad \nu = 2, 1,$$

ist (der Beweis erfolgt durch Approximation von u mit geeigneten Elementen aus $D(A_0^{\bar{\sigma}/2}(0))$ bzw. $D(\bar{A}_0^2(0))$), und, daß

$$\left\| F\left(t, x, w(t), \left(\frac{dw}{dt}\right)(t), D^1 w(t), \ldots, D^m w(t)\right) u(t) \right\|_{\nu\bar{m}}$$
$$\leqq \tilde{G}\left(t, \|w(t)\|_{(\nu+m/\bar{m})\bar{m}} + \left\|\left(\frac{dw}{dt}\right)(t)\right\|_{\nu\bar{m}}\right) \|u(t)\|_{\nu\bar{m}}, \qquad \nu = 4, 4 + m/\bar{m},$$

ist mit einer Funktion $\tilde{G}(.,.) \in C^0_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Die Betrachtung der Integralgleichung

$$\hat{u}(t) = \hat{U}^\gamma_w(t, 0)\, \hat{\varphi} + \tfrac{1}{2} \int_0^t \hat{U}^\gamma_w(t, \sigma)$$
$$\cdot \left(\begin{pmatrix} (A_w^{\frac{1}{4}}(\sigma))' A_w^{-\frac{1}{4}}(\sigma)(u_1(\sigma) - u_2(\sigma)) \\ -(A_w^{\frac{1}{4}}(\sigma))' A_w^{-\frac{1}{4}}(\sigma)(u_1(\sigma) - u_2(\sigma)) \end{pmatrix} + 2\gamma(\sigma, w)\, \hat{u}(\sigma) \right) d\sigma$$
$$+ \tfrac{1}{2} \int_0^t \hat{U}^\gamma_w(t, \sigma)$$
$$\cdot \begin{pmatrix} -F\left(\sigma, x, w(\sigma), \left(\frac{dw}{d\sigma}\right)(\sigma), D^1 w(\sigma), \ldots, D^m w(\sigma)\right) i\, A_w^{-\frac{1}{4}}(\sigma)(u_1(\sigma) - u_2(\sigma)) \\ -F\left(\sigma, x, w(\sigma), \left(\frac{dw}{d\sigma}\right)(\sigma), D^1 w(\sigma), \ldots, D^m w(\sigma)\right) i\, A_w^{-\frac{1}{4}}(\sigma)(u_1(\sigma) - u_2(\sigma)) \end{pmatrix} d\sigma$$

liefert dann wie eben ein genaues Analogon zum Satz 5 für die nichtlineare Wellengleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}u + A_u(t)\,u = F\left(t, x, u, \frac{du}{dt}, D^1 u, \ldots, D^m u\right) u.$$

Bemerkung 2. Zur rechten Seite der letzten Gleichung darf man natürlich noch eine feste Funktion $f(t, x)$ addieren, die geeigneten Regularitäts- und Randbedingungen im Unendlichen genügt.

Bemerkung 3. Es sei darauf hingewiesen, daß man, falls die A_α von z_2 unabhängig sind, $4\bar{m}$ durch $2\bar{m}$ und entsprechend $A_w^{2k}(t)$ durch $A_w^k(t)$ ersetzen kann. Man erhält dann mit ähnlichen Schlußweisen für Anfangswerte

$$\varphi \in H^{2\bar{m}+2m}(G), \qquad \psi \in H^{2\bar{m}+m}(G)$$

ebenfalls eine klassische Lösung unseres Anfangswertproblems, die so regulär ist wie ihre Anfangswerte.

Bemerkung 4. Die Eindeutigkeit unseres Fixpunktes u zu vorgegebenen Anfangsdaten folgt aus der Energieungleichung

$$\begin{aligned}\left\|\frac{d}{dt}(u_1-u_2)\right\|^2 + \|A_{u_1}^{\frac{1}{2}}(t)(u_1-u_2)\|^2 \leqq 2\int_0^t \Bigg(\Bigg(&\|(A_{u_1}(\sigma)-A_{u_2}(\sigma))\,u_2(\sigma)\| \\ &+ \Bigg\|F\left(\sigma, x, u_1(\sigma), \left(\frac{du_1}{d\sigma}\right)(\sigma), D^1 u_1(\sigma), \ldots, D^m u_1(\sigma)\right) u_1(\sigma) \\ &- F\left(\sigma, x, u_2(\sigma), \left(\frac{du_2}{d\sigma}\right)(\sigma), D^1 u_2(\sigma), \ldots, D^m u_2(\sigma)\right) u_2(\sigma)\Bigg\|\Bigg) \\ &\cdot \left\|\frac{d}{d\sigma}(u_1(\sigma)-u_2(\sigma))\right\| + |((A_{u_1}(\sigma))'(u_1(\sigma)-u_2(\sigma)), u_1(\sigma)-u_2(\sigma))|\Bigg) d\sigma\end{aligned}$$

für zwei Fixpunkte u_1, u_2 mit denselben Anfangsdaten und den in Satz 5 angegebenen Regularitätseigenschaften.

Wir merken noch die folgende Definition an: Sei $C>0$. Dann verstehen wir unter $\mathfrak{M}_C$ die Menge

$$\{f \mid f(.,.) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+), \sup_{0 \leqq x \leqq C} |f(t, x)| \in L^1(\mathbb{R}^+)\}.$$

III. Klassische Lösungen im Großen bei asymptotischem Verhalten des nichtlinearen Hauptteils

Sei $G = \mathbb{R}^n$. Die Funktionen $c(t, z)$ und $d(t, z)$ des ersten Kapitels seien von t unabhängig und es gelte (A.7) aus Satz A.5. Von der im ersten Kapitel eingeführten Funktion

$$\tilde{\gamma}\left(t, \|w(t)\|_{4\bar{m}+m} + \left\|\left(\frac{dw}{dt}\right)(t)\right\|_{4\bar{m}}\right)$$

setzen wir voraus, daß

$$\begin{aligned} \gamma(t,w) &= c_T^{(2)}(w)\,\tilde{\gamma}\left(t, \|w(t)\|_{4\bar{m}+m} + \left\|\left(\frac{dw}{dt}\right)(t)\right\|_{4\bar{m}}\right) \\ &\leqq c_T^{(2)}(w)\,\tilde{\tilde{\gamma}}\left(t, \|w(t)\|_{4\bar{m}+m} + \left\|\left(\frac{dw}{dt}\right)(t)\right\|_{4\bar{m}}\right) \end{aligned} \tag{II}$$

ist mit einer Funktion $\tilde{\tilde{\gamma}}(.)\in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)\cap\mathfrak{M}_1$. Außerdem sei auch die Funktion G der Ungleichung (6) aus Kapitel II aus $\mathfrak{M}_1$. Endlich sei mit den Abbildungen $c_T^{(5)}(w)$, $c_T^{(6)}(w)$ aus Satz A.4

$$\left\|\bar{A}_w^2(t)\left(A_w^{\frac{1}{2}}(t)\right)' A_w^{-\bar{\sigma}/2}(t)\right\| \leqq c_T^{(5)}(w)\, f_1\left(t, \|w\|_{4\bar{m}+m} + \left\|\frac{dw}{dt}\right\|_{4\bar{m}}\right) \tag{III}$$

und

$$\left\|A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\left(A_w^{\frac{1}{2}}(t)\right)' A_w^{-(\bar{\sigma}+1)/2}(t)\right\| \leqq c_T^{(6)}(w)\, f_2\left(t, \|w\|_{4\bar{m}+2m} + \left\|\frac{dw}{dt}\right\|_{4\bar{m}+m}\right),^{8} \tag{IV}$$

falls sogar

$$w(.)\in C^1([0,T], L^2(G)),$$

$$\left(\frac{d^\nu w}{dt^\nu}\right)(.)\in C^0([0,T], H^{4\bar{m}+2m-\nu m}(G)), \qquad \nu=0,1,$$

ist, wobei die Funktionen f_1, f_2 dieselben Eigenschaften besitzen mögen wie $\tilde{\tilde{\gamma}}$. Beispiele, die diesen Voraussetzungen genügen, werden wir noch angeben.

Sei $\hat{X}_{\mathrm{loc}}$ der lokalkonvexe Raum

$$\left\{\hat{w}\,|\,\hat{w}(t)=\begin{pmatrix} iA_0^{\frac{1}{2}}(0)\,w(t)+\dfrac{dw}{dt}(t) \\ -iA_0^{\frac{1}{2}}(0)\,w(t)+\dfrac{dw}{dt}(t)\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}^+, \quad w(.)\in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2(G)),\right.$$

$$\left.\left(\frac{d^\nu w}{dt^\nu}\right)(.)\in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^{4\bar{m}+m-\nu m}(G)), \quad \nu=0,1\right\},$$

ausgestattet mit den der Norm von $\hat{X}^T$ entsprechenden Halbnormen. Dann betrachten wir die Menge

$$\begin{aligned} \hat{K}^{\rho_1,\rho_2}_{\mathrm{loc}} := \Big\{ & \hat{w}\,|\,\hat{w}\in\hat{X}_{\mathrm{loc}}, w(.)\in C^2(\mathbb{R}^+, L^2(G)), \\ & \left(\frac{d^\nu w}{dt^\nu}\right)(.)\in C^0(\mathbb{R}^+, H^{4\bar{m}+2m-\nu m}(G)), \quad \nu=0,1,2, \\ & \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|\hat{A}_0^{4k+1}(0)\,\hat{w}(t)\|\leqq\rho_1, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}^+}\left\|\hat{A}_0^{4k}(0)\left(\frac{d\hat{w}}{dt}\right)(t)\right\|\leqq\rho_2\Big\}, \quad \rho_1,\rho_2>0. \end{aligned}$$

[8] Es sei $\|w\|_\mu := \sup_{t\in[0,T]}\|w(t)\|_\mu$, $\mu=4\bar{m}, 4\bar{m}+1, \ldots, 4\bar{m}+2m$.

Sei F eine Funktion wie sie in Kapitel II eingeführt worden ist.

Ebenfalls wie im zweiten Kapitel läßt sich dann eine Abbildung

$$\hat{\psi}\colon \hat{X}_{\mathrm{loc}} \to \hat{X}_{\mathrm{loc}}$$

erklären, indem man jedem $\hat{w} \in \hat{X}_{\mathrm{loc}}$ den zur Lösung $\hat{u}$ der Integralgleichung

$$\hat{u}(t) = \hat{U}_w^\gamma(t,0)\,\hat{\varphi} + \int_0^t \tfrac{1}{2}\,\hat{U}_w^\gamma(t,\sigma)\left(\begin{pmatrix} (A_w^{\frac{1}{2}}(\sigma))'\,A_w^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(u_1(\sigma)-u_2(\sigma)) \\ -(A_w^{\frac{1}{2}}(\sigma))'\,A_w^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(u_1(\sigma)-u_2(\sigma)) \end{pmatrix} + 2\gamma(\sigma,w)\,\hat{u}(\sigma)\right) d\sigma + \int_0^t \tfrac{1}{2}\,\hat{U}_w^\gamma(t,\sigma)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} -F\left(\sigma,x,w(\sigma),\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)(\sigma),D^1w(\sigma),\ldots,D^mw(\sigma)\right) i\,A_w^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(u_1(\sigma)-u_2(\sigma)) \\ -F\left(\sigma,x,w(\sigma),\left(\frac{dw}{d\sigma}\right)(\sigma),D^1w(\sigma),\ldots,D^mw(\sigma)\right) i\,A_w^{-\frac{1}{2}}(\sigma)(u_1(\sigma)-u_2(\sigma)) \end{pmatrix} d\sigma$$

gehörenden Ausdruck

$$\begin{pmatrix} i\,A_0^{\frac{1}{2}}(0)\big(-i\,A_w^{\frac{1}{2}}(t)\big)(u_1(t)-u_2(t)) + u_1(t) + u_2(t) \\ -i\,A_0^{\frac{1}{2}}(0)\big(-i\,A_w^{\frac{1}{2}}(t)\big)(u_1(t)-u_2(t)) + u_1(t) + u_2(t) \end{pmatrix}$$

zuordnet. Durch Vergleich mit der für hinreichend kleine Anfangswerte kleinen Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung des Typs

$$y' = g(x)\,y,$$

wobei $g(.) \in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$ ist, gewinnt man leicht die Aussage, daß für geeignete c_4, $c_5 > 0$

$$\lambda\,\hat{\psi}(\hat{K}^{c_4,c_5}_{\mathrm{loc}}) \subset \hat{K}^{c_4,c_5}_{\mathrm{loc}}$$

ist, falls λ eine hinreichend kleine positive Zahl ist. (Die Schranke hängt nur von der Nichtlinearität ab.) Hierzu hat man lediglich die $c_T^{(\nu)}(w)$ durch die Größen $c_\infty^{(\nu)}(w)$ zu ersetzen, die den $c_T^{(\nu)}(w)$ entsprechen, wenn man die Betrachtungen über $\mathbb{R}^+$ statt über $[0,T]$ durchführt, und dazu Bemerkung A sowie Satz A.5 zu berücksichtigen. Die letzte Inklusion liefert dann in Verbindung mit dem Satz 5 und der Fortsetzungsmethode den

Satz 6. *Seien*

$$\varphi \in H^{4\bar{m}+2m}(\mathbb{R}^n), \qquad \psi \in H^{4\bar{m}+m}(\mathbb{R}^n),$$

$$\begin{pmatrix} i\,A_\varphi^{\frac{1}{2}}(0)\,\varphi + \psi \\ -i\,A_\varphi^{\frac{1}{2}}(0)\,\varphi + \psi \end{pmatrix} \in \{\hat{w}(0) \mid \hat{w} \in \hat{\psi}(\hat{K}^{c_4,c_5}_{\mathrm{loc}})\}.$$

Sei λ eine hinreichend kleine positive Zahl (die Schranke hängt nur von der Nichtlinearität ab). Dann existiert eine Abbildung

$$u(.) \in C^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^n)),$$

mit

$$\left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}u\right)(.)\in C^0\left(\mathbb{R}^+, H^{4\bar m+m-\nu m}(\mathbb{R}^n)\right)\cap L^\infty\left(\mathbb{R}^+, H^{4\bar m+2m-\nu m}(\mathbb{R}^n)\right),\qquad \nu=0,1,2,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}u+A_u(t)\,u=F\left(t,x,u,\frac{du}{dt},D^1u,\ldots,D^mu\right)u,\qquad t\in\mathbb{R}^+,$$

$$u(0)=\lambda\varphi,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)(0)=\lambda\psi.$$

Wie in Kapitel II folgt das

Corollar zum Satz 6. *u ist nach allen Variablen zweimal stetig differenzierbar, es ist $u(t)\in C^{2m}(\mathbb{R}^n)$, $t\in\mathbb{R}^+$, und*

$$\left(\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}u\right)(t,x_1,\ldots,x_n)=\left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}u\right)(t,x_1,\ldots,x_n),\qquad \nu=1,2.$$

Ein einfaches Beispiel für das Erfülltsein der Voraussetzungen dieses Kapitels bietet ein elliptischer Operator

$$A_w(t)=\sum_{\substack{|\alpha|\leqq m,\\ |\beta|\leqq m}}D^\alpha\left(A_{\alpha\beta}(x,t,w)\,D^\beta\right),\qquad A_{\alpha\beta}=\bar A_{\beta\alpha},$$

von Divergenzstruktur, der neben den zu Beginn des ersten Kapitels angeführten Bedingungen und den Voraussetzungen des Satzes A.7 noch den folgenden Bedingungen genügt: Es ist

$$|D^{\eta_1}A_{\alpha\beta}(x,t,y)|+\left|\frac{\partial}{\partial t}D^{\eta_2}A_{\alpha\beta}(x,t,y)\right|\leqq\hat G(t,|z|)\tag{7}$$

für alle Multiindizes η_1,η_2 des $\mathbb{R}^{n+1+2N}$ mit folgenden Eigenschaften: η_1,η_2 enthalten keine Ableitungen nach t, die letzten $2N$ Komponenten von η_1 verschwinden nicht alle gleichzeitig, es ist

$$|\eta_1|\leqq 4\bar m+m,$$

$$|\eta_2|\leqq 4\bar m.$$

Endlich ist G aus $\mathfrak{M}_1$.

Indem wir die Darstellung (A.3) und die Definition von $\gamma(t,w)$ heranziehen, erkennen wir, daß zum Nachweis der Gültigkeit der Voraussetzungen (II) bis (IV) die folgende Abschätzung hinreicht: Es gilt mit

$$\hat{\hat G}_\nu(t,w):=\hat{\hat G}_\nu\left(t,|||w|||_{4\bar m+\nu m}+\left|\left|\left|\frac{dw}{dt}\right|\right|\right|_{4\bar m+(\nu-1)m}\right)$$

$$:=\sup_{|y|\leqq|||w|||_{4\bar m+\nu m}+|||\frac{dw}{dt}|||_{4\bar m+(\nu-1)m}}\hat G(t,|y|)$$

die Ungleichung

$$\left\|\left(1/\hat{\hat G}_\nu(t,w)\right)\left(A_w^{\frac12}(t)\right)'x\right\|\leqq c_T^{(7)}(w)\,\|A_0^{\frac12}(0)\,x\|,\qquad x\in D\left(A_0^{\frac12}(0)\right)$$

mit einer stetigen Abbildung $c_T^{(7)}(w)$ von X^T in $\mathbb{R}^{++}$ wie $c_T^{(1)}(w)$. Dies zeigt man, indem man (7) benutzt, mit denselben Beweisschritte wie Satz 8 des Anhangs aus [8].

Anhang

Sei $\bar{\rho} := 2k+1$. Dann gilt der

Satz A.1. *$A_w^{\bar{\rho}}(t)$ ist auf $H^{4\bar{m}+2m}(\mathbb{R}^n)$ selbstadjungiert, und es gelten die Ungleichungen*

$$c^{(3)} \|u\|_{4\bar{m}+2m} \leqq \|A_w^{\bar{\rho}}(t)\, u\| \leqq c^{(4)} \|u\|_{4\bar{m}+2m}$$

mit zwei positiven, von w und T abhängigen Konstanten $c^{(3)} = c_T^{(3)}(w)$ und $c^{(4)} = c_T^{(4)}(w)$.

Beweis. Sei zunächst $u \in H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G)$. Dann ist dort $({}_f A_w^{\bar{\rho}}(t)$ ist der formal gebildete Operator $A_w^{\bar{\rho}}(t))$

$$\|{}_f A_w^{\bar{\rho}}(t)\, u\| \leqq c_T^{(4)}(w) \|u\|_{4\bar{m}+2m}.$$

Der Beweis wird nach dem Muster der Beweise von Satz 2 und 3 geführt: Wenn man formal differenziert und Hilfssatz 6 aus [8] (für G statt $\mathbb{R}^n$) anwendet, so treten im wesentlichen die folgenden Ungleichungen auf:

$$\left\| \prod_{\lambda=1}^{N} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda\, D^{\alpha+\alpha_{N+1}} u \right\| \leqq d_1 \|u\|_{4\bar{m}+2m} \prod_{\lambda=1}^{N} \|w_\lambda\|_{4\bar{m}},$$

wobei die $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N+1}$ Multiindizes des $\mathbb{R}^n$ sind mit $1 \leqq |\alpha_\lambda|$, $1 \leqq \lambda \leqq N$, $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{N+1}| \leqq 4\bar{m}$, $|\alpha| \leqq 2m$.

Für die Ungleichung $c^{(3)} \|u\|_{4\bar{m}+2m} \leqq \|{}_f A_w^{\bar{\rho}}(t)\, u\|$ ist eine genauere Betrachtung erforderlich.

Nun ist $(\tilde{A}_\beta, |\beta| \leqq 4\bar{m}$ seien die Koeffizienten von ${}_f \bar{A}_w^2(t))$

$$\begin{aligned} D^\alpha {}_f \bar{A}_w^2(t)\, u = & \sum_{|\beta|=4\bar{m}} \tilde{A}_\beta \left(x, t, w(x,t), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), \right. \\ & \left. D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t) \right) D^{\beta+\alpha} u \\ & + \sum_{\substack{|\beta|=4\bar{m} \\ 1 \leqq |\gamma|,\, \gamma \leqq \alpha}} D^\gamma \tilde{A}_\beta \left(x, t, w(x,t), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), \right. \\ & \left. D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t) \right) D^{\beta+\alpha-\gamma} u \\ & + \sum_{\substack{|\beta| \leqq 4\bar{m}-1 \\ 1 \leqq |\gamma|,\, \gamma \leqq \alpha}} D^\gamma \tilde{A}_\beta \left(x, t, w(x,t), D^{4\bar{m}-2m} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t), \right. \\ & \left. D^1 w(x,t), \ldots, D^{4\bar{m}-m} w(x,t) \right) D^{\beta+\alpha-\gamma} u, \end{aligned} \tag{A.1}$$

da die führenden Koeffizienten von ${}_f \bar{A}_w^2(t)$ nur von $x, t, w, \dfrac{\partial w}{\partial t}, D^1 w, \ldots, D^m w$ abhängen.

Anwendung des Hilfssatzes 6 aus v. Wahl [8] liefert bei den Summanden der letzten Summe eine Abschätzung in der $L^2(G)$-Norm nach oben, die im wesentlichen (bis auf beschränkte Faktoren) aus einer Ungleichung

$$\left\| \prod_{\lambda=1}^{N} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda D^{\beta+\alpha-\gamma} u \right\| \leqq d_2 \|u\|_{4\bar{m}+2m-1} \prod_{\lambda=1}^{N} \|w_\lambda\|_{4\bar{m}},$$

wobei die $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ Multiindizes des mit $1 \leqq |\alpha_\lambda|$, $1 \leqq \lambda \leqq N$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N \leqq \gamma$, sind, besteht.

Da die restlichen Koeffizientenfunktionen aus $C^1([0,T] \times \bar{G})$ sind, folgt mit Hilfe des Theorems 2 von Browder und einer Abschätzung des Typs

$$\|u\|_{4\bar{m}+2m-1} \leqq \varepsilon \|u\|_{4\bar{m}+2m} + d_3(\varepsilon) \|u\|, \qquad \varepsilon > 0,$$

die man ebenfalls bei Browder, Lemma 6, findet, eine Ungleichung

$$\|{}_f A_w^{\bar{\rho}}(t)\, u\| \geqq d_4(w,T) \|u\|_{4\bar{m}+2m} - d_5(w,T) \|u\|$$

mit positiven Konstanten $d_5(w,T)$, $d_4(w,T)$.

Da ${}_f A_w^{\bar{\rho}}(t)$ strikt positiv definit ist, folgt hieraus, daß

1. Der formal auf $H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G) \cap D(A_w^{\bar{\rho}}(t))$ gebildete Operator ${}_f A_w^{\bar{\rho}}(t)$ dort mit dem abstrakt definierten selbstadjungierten übereinstimmt.

2. Auf $H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G)$ der Ungleichung des Satzes genügt und somit abgeschlossen ist.

Wie noch gezeigt wird, ist der formal definierte Operator ${}_f A_w^{\bar{\rho}}(t)$ auf $H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G)$ auch symmetrisch.

Bekanntlich läßt sich $w(t,x)$ durch endliche Linearkombinationen

$$w_\mu(t) = \sum_{i=1}^{N_\mu} \psi_{i_\mu}(t)\, v_{i_\mu}, \qquad \mu \in \mathbb{N},$$

in der Norm $\sup_{t\in[0,T]} \|w(t)\|_{4\bar{m}+m}$ approximieren. Dabei sind die v_{i_μ} aus $C^{6\bar{m}}(\bar{G})$ und die ψ_{i_μ} aus $C^\infty([0,T], \mathbb{R})$. Dasselbe gilt von $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t,x)$ bezüglich der Norm

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(t) \right\|_{4\bar{m}}.$$

Die Approximierenden seien im letzten Fall mit $\tilde{\tilde{w}}_\mu(t)$ bezeichnet.

Die zu den eben eingeführten Approximierenden gehörigen Koeffizientenfunktionen A_α bzw. $\tilde{A}_\beta$ werden mit $A_\alpha^{(\mu)}$ bzw. $\tilde{A}_\beta^{(\mu)}$ bezeichnet, die zugehörigen Operatoren mit $A_w^{(\mu)}(t)$ bzw. $\bar{A}_w^{(\mu)2}(t)$. Nach Browder, Theorem 5(iii), ist für $\mu \geqq \mu_0$ der formal gebildete Operator

$$A_w^{(\mu)\bar{\rho}}(t)$$

auf $H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G)$ selbstadjungiert. Dieselben Abschätzungsmethoden wie die eben verwandten zeigen, daß ebenfalls für hinreichend große μ eine

Ungleichung

$$d_6 \|u\|_{4\bar{m}+2m} \leqq \|A_w^{(\mu)\bar{\rho}}(t)\, u\| \leqq d_7 \|u\|_{4\bar{m}+2m}$$

mit von μ unabhängigen Konstanten $d_7, d_6 > 0$, besteht.

Für die Differenz ${}_fA_w^{\bar{\rho}}(t) - A_w^{(\mu)\bar{\rho}}(t)$ gilt auf $H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G)$ eine Abschätzung

$$\left\|\left({}_fA_w^{\bar{\rho}}(t) - A_w^{(\mu)\bar{\rho}}(t)\right) u\right\| \leqq \rho(\mu) \|u\|_{4\bar{m}+2m}, \tag{A.2}$$

wobei $\{\rho(\mu)\}$ eine Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwert 0 ist. Um dies einzusehen, hat man ebenfalls von den bereits verwendeten Abschätzungsmethoden Gebrauch zu machen, die hier im wesentlichen auf Ungleichungen

$$\left\|\prod_{\lambda=1}^{\tilde{\mu}-1} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda (D^{\alpha_{\tilde{\mu}}} w_{\tilde{\mu}} - D^{\alpha_{\tilde{\mu}}} \tilde{w}_{\tilde{\mu}}) \prod_{\lambda=\tilde{\mu}+1}^{N} D^{\alpha_\lambda} \tilde{w}_\lambda\, D^{\beta+\alpha-\gamma} u\right\|$$

$$\leqq d_8 \|u\|_{4\bar{m}+2m-1} \|w_{\tilde{\mu}} - \tilde{w}_{\tilde{\mu}}\|_{4\bar{m}} \prod_{\substack{\lambda=1 \\ \lambda \neq \tilde{\mu}}} (\|w_\lambda\|_{4\bar{m}} + \|\tilde{w}_\lambda\|_{4\bar{m}})$$

führen. Die Bezeichnungen sind die schon bei (A.1) benutzten, $\tilde{w}_\lambda$ sind die w_λ entsprechenden Elemente der Menge $\{w_\mu, \tilde{\tilde{w}}_\mu, D^1 w_\mu, \ldots, D^m w_\mu\}$.

Aus der Abschätzung (A.2) folgt insbesondere, daß

$$s\text{-}\lim_{\mu \to \infty} A_w^{(\mu)\bar{\rho}}(t)\, u = {}_fA_w^{\bar{\rho}}(t)\, u, \qquad u \in H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G),$$

ist. Daher ist ${}_fA_w^{\bar{\rho}}(t)$ auf $H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G)$ symmetrisch.

Weiter liefert (A.2), daß dort

$$\left\|\left({}_fA_w^{\bar{\rho}}(t) - A_w^{(\mu)\bar{\rho}}(t)\right) u\right\| \leqq \rho(\mu) \frac{1}{d_6} \|A_w^{(\mu)\bar{\rho}}(t)\, u\|$$

ist, $\mu \geqq \mu_0$. Nach Heinz [4], Satz 2, § 3, folgt, daß ${}_fA_w^{\bar{\rho}}(t)$ auch auf $H^{4\bar{m}+2m}(G) \cap \mathring{H}^{2\bar{m}+m}(G)$ selbstadjungiert ist.

Offenbar haben wir unseren Satz vollständig bewiesen, wenn wir den

Hilfssatz A.1. *Es ist*

$$D\left(A_w^{\bar{\rho}}(t)\right) \subseteq H^{4\bar{m}+2m}(G),$$

zeigen können, da wir dann $A_w^{\bar{\rho}}(t)$ symmetrisch auf den linearen Raum $H^{4\bar{m}+2m}(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen können.

Beweis von Hilfssatz A.1. Wir führen einen Induktionsbeweis und führen die ersten beiden Schnitte durch: Zunächst zeigen wir die Implikation:

Aus

$$u \in D\left(\bar{A}_w^2(t)\right)$$

$$f = \bar{A}_w^2(t)\, u \in H^1(G)$$

folgt

$$u \in H^{4\bar{m}+1}(G).$$

Es ist für $\nu \in \mathbb{N}$, $1 \leqq \nu \leqq n$,

$$D_\nu \sum_{|\alpha|=4\bar{m}} \tilde{A}_\alpha \left(x, t, w(x,t), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t)\right) D^\alpha u$$
$$= D_\nu f - \sum_{|\alpha| \leqq 4\bar{m}-1} D_\nu \left(\tilde{A}_\alpha \left(x, t, w(x,t), \left(D^{4\bar{m}-2m} \frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^{4\bar{m}-m} w(x,t)\right) D^\alpha u\right).$$

Die zu differenzierenden Ausdrücke rechts hinter dem Summenzeichen sind von der Form (bis auf beschränkte Faktoren)

$$\prod_{\lambda=1}^{N} D^{\alpha_\lambda} w_\lambda \, D^{\eta+\alpha_{N+1}} u$$

mit $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{N+1}| \leqq 4\bar{m} - 2m$, $|\eta| \leqq 2m-1$. Damit folgt, daß die rechte Seite in $L^2(G)$ liegt. Da die Funktionen $\tilde{A}_\alpha$, $|\alpha| = 4\bar{m}$, in $C^1([0,T] \times \bar{G})$ liegen, folgt nach Browder [1], Theorem 4, daß u in $H^{4\bar{m}+1}(G)$ liegt.

Falls f in $H^2(G)$ liegt, so liegt auf Grund derselben Argumentation wie eben die rechte Seite von

$$D_\nu \sum_{|\alpha|=4\bar{m}} \tilde{A}_\alpha \left(x, t, w(x,t), \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t)\right) D^\alpha D_\nu u$$
$$= D_\nu^2 f - \sum_{|\alpha| \leqq 4\bar{m}-1} D_\nu^2 \left(\tilde{A}_\alpha \left(x, t, w(x,t), \left(D^{4\bar{m}-2m} \frac{\partial w}{\partial t}\right)(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^{4\bar{m}-m} w(x,t)\right) D^\alpha u\right)$$
$$- \sum_{|\alpha|=4\bar{m}} D_\nu \left(D_\nu \tilde{A}_\alpha \left(x, t, w(x,t), \frac{\partial w}{\partial t}(x,t), D^1 w(x,t), \ldots, D^m w(x,t)\right) D^\alpha u\right)$$

in $L^2(G)$, so daß mit Browder [1], Theorem 4, wieder folgt, daß u in $H^{4\bar{m}+2}(G)$ liegt. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert dann die Behauptung des Hilfssatzes.

Satz A.2. *$A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)$ besitzt einen von t und w unabhängigen Definitionsbereich, falls $G = \mathbb{R}^n$ ist. Es ist dann*

$$D\left(A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\right) = H^{4\bar{m}+m}(G)$$

und

$$\tilde{c}_1 \|u\|_{4\bar{m}+m} \leqq \|A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\, u\| \leqq \tilde{c}_2 \|u\|_{4\bar{m}+m}$$

mit zwei von w und T abhängigen positiven Konstanten $\tilde{c}_1(T, w)$ und $\tilde{c}_2(w, T)$.

Beweis. Die Aussage des Satzes wird im nächsten Satz mitbewiesen.

Für das Folgende sei wieder $G=\mathbb{R}^n$.

Satz A.3. *Sei*

$$\rho\in\{\tfrac{1}{2}/(2k+1),\,1/(2k+1),\,\tfrac{3}{2}/(2k+1),\,\ldots,\,2k/(2k+1),\,(2k+1)/(2k+1)\}.$$

Dann ist

$$D\big(A_w^{(2k+1)\rho}(t)\big)=D\big((-\Delta)^{m\rho(2k+1)}\big)$$

und für

$$u\in D\big((-\Delta)^{m\rho(2k+1)}\big)$$

gilt:

$$\big(c_T^{(0)}(w)\big)^{-\rho}\,\|u\|_{\rho(4\bar m+2m)}\leqq\|A_w^{(2k+1)\rho}(t)\,u\|$$
$$\leqq\left(c\left(T,\,\|w\|_{4\bar m+m}+\left\|\left\|\frac{dw}{dt}\right\|\right\|_{4\bar m}\right)\right)^{\rho}\|u\|_{\rho(4\bar m+2m)}.$$

Dabei ist $c(.,.)\in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ *und* $c_T^{(0)}$ *ist eine stetige Abbildung des mit der Norm* $\|w\|_{4\bar m+m}+\left\|\left\|\frac{dw}{dt}\right\|\right\|_{4\bar m}$ *ausgestatteten Banachraumes*

$$X^T=\Big\{w\,|\,w(.)\in C^1\big([0,T],L^2(G)\big),$$
$$\left(\frac{d^\nu}{dt^\nu}w\right)(.)\in C^0\big([0,T],H^{4\bar m+m-\nu m}(G)\big),\ \nu=0,1\Big\}\quad in\ \mathbb{R}^{++}.$$

Beweis. Nach Heinz [4], Satz 3, müssen wir diesen Satz nur für $\rho=1$ beweisen. Hierbei ist die rechte Seite der Ungleichung des Satzes trivial. Da die Abbildung

$$X^T\ni w\to A_w^{2k+1}(t)(-\Delta+I)^{-(2\bar m+m)}\in\mathscr{L}\big(C^0([0,T],L^2(G)),C^0([0,T],L^2(G))\big)$$

eine stetige Abbildung zwischen zwei Banachräumen vermittelt, folgt auch die linke Seite der Ungleichung (s. etwa Hille [5], S. 92).

Wie man durch Induktion über κ und Anwendung der Methoden des Beweises von Hilfssatz 3 in [8] sowie der Produktregel leicht zeigt, ist für $x\in L^2(G)$

$$A_w^\kappa(t)\big(A_w^{\frac12}(t)\big)'A_w^{-(\kappa+\frac12)}(t)\,x=\big(A_w^{\frac12}(t)\big)'A_w^{-\frac12}(t)\,x$$
$$+\sum_{\substack{\nu,\mu\in\mathbb{N},\\ \nu\leqq\kappa,\mu\leqq\kappa,\\ \nu+\mu\leqq\kappa}}c_{\nu\mu}\big(A_w^\nu(t)\big)'A_w^\mu(t)\,A_w^{-(\nu+\mu)}(t)\,x \tag{A.3}$$
$$+\sum_{\substack{\gamma,\mu\in\mathbb{N},\\ \gamma\leqq2\kappa,\mu\leqq\kappa,\\ \gamma/2+\mu\leqq\kappa+\frac12}}d_{\gamma\mu}A_w^{\gamma/2}(t)\big(A_w^\mu(t)\big)'A_w^{-(\gamma+2\mu)/2}(t)\,x,\qquad\kappa\leqq2k$$

mit Konstanten $c_{\nu\mu}$, $d_{\gamma\mu}$. Die formale Ausführbarkeit der Differentiation nach t von $A_w^\mu(t)\,x$, $x\in D\big(A_0^\mu(0)\big)$, sowie die Lipschitzstetigkeit aller Potenzen $A_w^{\gamma/2}(t)$ zeigt man analog zum Beweis von Satz 2 bzw. 3.

Die Gültigkeit einer entsprechenden Formel für

$$A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\big(A_w^{\frac{1}{2}}(t)\big)' A_w^{-\bar{\rho}}(t)\,x, \qquad x\in L^2(G),$$

zeigt u.a. der nächste Satz. Von jetzt an seien die Funktionen A_α wieder von z_2 unabhängig.

Satz A.4. *Es ist* $\|\bar{A}_w^2(t)\big(A_w^{\frac{1}{2}}(t)\big)' A_w^{-\bar{\sigma}/2}(t)\| = f\left(T, \|w\|_{4\bar{m}+m}, \left\|\frac{dw}{dt}\right\|_{4\bar{m}}\right)\cdot c_T^{(5)}(w)$ *mit einer Funktion* $f\in C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$. $c_T^{(5)}$ *ist eine stetige Abbildung von* X^T *in* $\mathbb{R}^{++}$. *Ist sogar*

$$w(.)\in C^0\big([0,T], H^{4\bar{m}+2m}(G)\big),$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)(.)\in C^0\big([0,T], H^{4\bar{m}+m}(G)\big),$$

so ist $A_w^{\bar{\rho}}(t)\,A_w^{-\bar{\rho}}(r)$ *in t lipschitzstetig und*

$$\|A_w^{\bar{\sigma}/2}(t)\big(A_w^{\frac{1}{2}}(t)\big)' A_w^{-\bar{\rho}}(t)\| \leqq g\left(T, \|w\|_{4\bar{m}+2m}, \left\|\frac{dw}{dt}\right\|_{4\bar{m}+m}\right) c_T^{(6)}(w),$$

wobei wieder g eine Funktion aus $C^0_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ *ist und die Größen* $(\nu=0,1)$ $\|w\|_{4\bar{m}+2m-\nu m}$, $\left\|\frac{dw}{dt}\right\|_{4\bar{m}+m-\nu m}$ *wie in* III *erklärt sind.* $c_T^{(6)}(w)$ *ist wieder eine stetige Abbildung von* X^T *in* $\mathbb{R}^{++}$.

Beweis. Der Beweis macht von Hilfssatz 3 in [8] und (A. 10) in [8] Gebrauch. Die dabei benötigten Abschätzungen werden mit den in den vorhergehenden Sätzen 2, 3, A.1 entwickelten Methoden bewiesen. Da hierbei nichts wesentlich Neues auftritt, wird auf die genaue Durchführung verzichtet. – Bei diesem Vorgehen beweist man mit, daß $M_{w,T}^{(2)}$, $M_{w,T}^{(3)}$ ebenfalls stetige Abbildungen von X^T in $\mathbb{R}^{++}$ sind.

Wir kommen jetzt zum Beweis von Satz 4:

Beweis von Satz 4. Die erste Ungleichung und die Limesbeziehung werden mit den in Satz 2 und 3 entwickelten Methoden behandelt. Die Gleichmäßigkeitsaussagen folgen aus der gleichmäßigen Stetigkeit von $D^\alpha\frac{d}{dt}w$ auf $[0,T]$, $|\alpha|\leqq 4m$, und der Beziehung

$$D^\alpha\frac{d}{dt}w=\frac{d}{dt}D^\alpha w,$$

die man durch Integration des Ausdrucks $\left(D^\alpha\frac{d}{dt}w,\varphi\right)$, $\varphi\in C_0^\infty(G)$, beweist. Somit verbleiben nur die beiden letzten Ungleichungen. Wir beschränken uns auf die zweite, da der Beweis der ersten ebenso verläuft: Die Ungleichung

folgt aus der zweiten Limes-Beziehung und der Darstellung (s. [8], Gl. (7))

$$\hat{A}_w^{4k}(t)\,\hat{U}_w^{\gamma}(t,s)\,\hat{A}_w^{-4k}(s)\,\hat{x}$$
$$= w\text{-}\lim_{n\to\infty} \prod_{j=n-1}^{0} \hat{A}_w^{4k}(t_{j+1})\,\hat{A}_w^{-4k}(t_j)\,e^{-(t_{j+1}-t_j)(\hat{A}_w(t_j)+\gamma(t_j,w))},$$

$\hat{x}\in\hat{H}$. Der Rest folgt mit Hilfe von Satz A.3 und (A.10) aus [8].

Bemerkung A. Das schon bei dem Beweis von Satz A.3 verwendete Argument zeigt, daß wir von den Größen $c_T^{(\nu)}(w)$ als Normen der Bilder von Abbildungen

$$X^T \to \mathscr{L}\big(C^0([0,T],L^2(G)),\,C^0([0,T],L^2(G))\big)$$

o.E. die Eigenschaft

$$c_{T'}^{(\nu)}(w') \leqq c_T^{(\nu)}(w)$$

voraussetzen können, falls $T'\leqq T$ und w' die Einschränkung von w auf $[0,T']$ ist. Der Beweis von Satz A.1 und Theorem 2 aus [1] zeigen, daß die Größen $c_T^{(\nu)}(w)$ auf beschränkten Mengen in X^T eine positive obere und untere Schranke besitzen. Dasselbe gilt von den entsprechend den $c_T^{(\nu)}(w)$ zu X^T zu

$$X_C^{\infty} = \Big\{ w \,|\, w(.)\in C^1\big(\mathbb{R}^+, L^2(G)\big),$$
$$\Big(\frac{d^\nu}{dt^\nu} w\Big)(.)\in C^0\big(\mathbb{R}^+, H^{4\bar{m}+\nu m-m}(G)\big), \quad \nu=0,1,$$
$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\Big\|\Big(\frac{d^\nu}{dt^\nu} w\Big)(t)\Big\|_{4\bar{m}+\nu m-m} \leqq C,\ \nu=0,1\Big\}, \quad C>0,$$

gebildeten Größen $c_\infty^{(\nu)}(w)$, sofern diese existieren (dasselbe wie für die Größen $c^{(\nu)}$ gilt natürlich für die Größen $M_{w,T}^{(2)}$, $M_{w,T}^{(3)}$ bzw. $M_{w,\infty}^{(2)}$, $M_{w,\infty}^{(3)}$), u.U. auf X_C^{∞}. Das beim Beweis von Satz A.3 verwendete Argument zeigt, daß unter der Voraussetzung des folgenden Satzes die Größen $c_\infty^{(\nu)}(w)$ und $M_{w,\infty}^{(\nu)}$ existieren sowie positive untere und obere Schranken besitzen.

Satz A.5. *Seien die Funktionen c und d aus Kapitel I von t unabhängig und*

$$|D^\gamma A_\alpha(x,t,\zeta)| \leqq \tilde{\tilde{G}}(\zeta), \quad x\in\bar{G},\ t\in\mathbb{R}^+,\ \zeta\in\mathbb{C}^N,\ |\zeta|\leqq M \tag{A.7}$$

mit einer stetigen Funktion $\tilde{\tilde{G}}$ und einer positiven Konstante M. Dabei ist γ ein Multiindex des $\mathbb{R}^{n+1+2N}$ mit $|\gamma|\leqq 4\bar{m}+m$, der keine Differentiation nach t enthält. Dann gilt für w aus $X_{C(M)}^{\infty}$, $C(M)$ eine geeignete von M abhängige positive Konstante, die Ungleichung

$$c_1\,\|u\|_{4\bar{m}+2m} \leqq \|A_w^{\beta}(t)\,u\| \leqq c_2\,\|u\|_{4\bar{m}+2m}, \quad u\in H^{4\bar{m}+2m}(G)$$

mit zwei nur von $C(M)$ abhängigen positiven Konstanten c_1, c_2.

Beweis. Der Beweis verläuft unter Zuhilfenahme des Theorems 2 von Browder [1] ebenso wie der Nachweis der Abschätzungen nach unten und oben des Satzes A.1.

Literatur

1. Browder, F. E.: On the spectral theory of elliptic partial differential operators I. Math. Ann. **142**, 22 – 130 (1961).
2. Fateeva, G. M.: The Cauchy problem and boundary value problem for linear and quasilinear degenerative second-order hyperbolic equations. Soviet. Math. Doklady **8**, 281 – 284 (1967).
3. Fichera, G.: Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Lecture Notes in Mathematics **8**. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.
4. Heinz, E.: Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **123**, 415 – 438 (1951).
5. Hille, E.: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **XXXI** (1948).
6. Kato, T.: Integration of the equation of evolution in a Banach space. J. Math. Soc. Japan **5**, 208 – 234 (1953).
7. Lions, J. L., Magenes, E.: Problèmes aux limites non homogènes et applications. Paris: Dunod 1966.
8. Wahl, W. v.: Klassische Lösungen nichtlinearer Wellengleichungen im Großen. Math. Z. **112**, 241 – 279 (1969).
9. – Klassische Lösungen nichtlinearer gedämpfter Wellengleichungen im Großen. Manuscripta math. (erscheint demnächst).

Dr. Wolf von Wahl
Mathematisches Institut der Universität
D-34 Göttingen
Bunsenstr. 3 – 5

(Eingegangen am 24. März 1970)

Math. Z. 115, 227 – 230 (1970)

Zu dem Satz von Krull-Remak-Schmidt-Azumaya

SIGURD ELLIGER

In dieser Note beweisen wir den

Satz. *Ein Modul M_A besitze eine direkte Zerlegung*

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

und für jedes M_i gelte

a) $\mathrm{End}_A(M_i)$ *ist ein lokaler Ring,*

b) M_i *ist endlich erzeugt.*

Dann existiert zu jeder direkten Zerlegung

$$M=N\oplus N'$$

eine Partition $I=I_1\cup I_2$ und ein Automorphismus t von M_A mit $N=(\bigoplus_{i\in I_1} M_i)\,t$, $N'=(\bigoplus_{i\in I_2} M_i)\,t$.

Die Frage nach der Gültigkeit dieses Satzes wurde erstmals von Azumaya [2, S. 123] gestellt. Um ihn zu beweisen, genügt es nach Azumayas Ergebnissen, zu zeigen, daß N direkte Summe direkt unzerlegbarer direkter Summanden ist.

Den Spezialfall $M_i\simeq A_A$, A ein lokaler Ring, für alle $i\in I$, hat Kaplansky [3] bewiesen: jeder projektive Modul über einem lokalen Ring ist frei.

Der Beweis erfolgt nicht direkt an M_A, sondern an dem folgendermaßen definierten Modul ${}_BL$: Sei $B=\mathrm{End}(M_A)$ der Endomorphismenring von M_A und $\{e_i,\ i\in I\}$ die Projektionen $e_i\colon M\to M_i$. Dann sei ${}_BL=\bigoplus_{i\in I} Be_i$. Um zu zeigen, daß die Richtigkeit des Satzes für die Moduln M_A und ${}_BL$ gleichwertig ist, zitieren wir zwei Lemmas, die bereits in [1] S. 537 benutzt werden und deren zweites von Fitting stammt.

Lemma 1. *Seien $e^2=e$, $f^2=f$ Idempotente aus dem Endomorphismenring $B=\mathrm{End}(M_A)$. Dann gilt*

$$\mathrm{Hom}_A(Me, Mf)\simeq eBf\simeq \mathrm{Hom}_B(Be, Bf);$$

insbesondere ist

$$\mathrm{End}_A(Me)\simeq eBe\simeq \mathrm{End}_B(Be).$$

Lemma 2 (Fitting). *Unter den Voraussetzungen von Lemma* 1 *sind die Bedingungen äquivalent:*

a) $Me\simeq Mf$.

b) $Be\simeq Bf$.

c) $eB\simeq fB$.

Lemma 1 zeigt, daß ${}_BL$ Eigenschaft a) des Satzes erfüllt. Wegen der endlichen Erzeugbarkeit der M_i besitzen M_A und ${}_BL$ denselben Endomorphismenring B: $\mathrm{End}({}_BL)$ [bzw. $\mathrm{End}(M_A)$] ist der Ring der reihenendlichen Matrizen $(\mathrm{Hom}_B(Be_i, Be_k))$ [bzw. $(\mathrm{Hom}_A(Me_i, Me_k))$], deren Elemente der i-ten Zeile und k-ten Spalte die Elemente aus $\mathrm{Hom}_B(Be_i, Be_k)$ [bzw. $\mathrm{Hom}_A(Me_i, Me_k)$] sind, und beide sind nach Lemma 1 isomorph $(e_i B e_k)$.

Gilt nun für einen direkten Summanden ${}_BP = Lf$, $f^2 = f$, von ${}_BL$, daß $Lf \simeq Le$, $e = \prod_{i \in I_1} e_i$, so folgt nach Lemma 2, $Be \simeq Bf$, also nochmals nach Lemma 2, $Me \simeq Mf$.

Der Rest des Beweises erfolgt in engem Anschluß an [3]. Sei also

$$ {}_BL = P \oplus Q. $$

Behauptung. Jedes $x \in P$ ist in einem endlich erzeugten direkten Summanden von P enthalten.

Beweis. In Analogie zu dem Beweis in [3, S. 374] nennen wir eine Menge $\{f_k,\ k \in K\}$ paarweise orthogonaler primitiver Idempotenter aus B, für die ${}_BL = \bigoplus_{k \in K} Bf_k$ gilt, eine „Basis" von ${}_BL$.

Nach dem Satz von Krull-Remak-Schmidt-Azumaya [2] gilt: Für jedes Element f_k einer „Basis" existiert ein $i \in I$ mit $Bf_k \simeq Be_i$, also ist insbesondere $f_k B f_k$ ein lokaler Ring. Wir nehmen an, die „Basis" $\{e_i, i \in I\}$ sei so gewählt, daß

$$ x = \sum_1^n b_i e_i \tag{1} $$

eine kürzeste Darstellung ist bezüglich der Zahl der Summanden $b_i e_i \neq 0$. Dann ist kein b_i rechts über B von den übrigen b_j linear abhängig: Denn angenommen,

$$ b_n = b_1 \beta_1 + \cdots + b_{n-1} \beta_{n-1}, \tag{2} $$

so wäre

$$ x = b_1(e_1 + \beta_1 e_n) + \cdots + b_{n-1}(e_{n-1} + \beta_{n-1} e_n). \tag{3} $$

Sei $e_i + \beta_i e_n = e_i'$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Zu zeigen:

$$ {}_BL = Be_1' \oplus \cdots \oplus Be_{n-1}' \oplus \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq 1, \ldots, n-1}} Be_i. \tag{4} $$

Denn gilt (4) und ist $Be_i \simeq Be_i'$, dann gibt es eine „Basis" $\{f_1, \ldots, f_{n-1}, e_n, \ldots\}$ mit $Be_i' = Bf_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, d.h. (3) liefert bezüglich dieser Basis eine kürzere Darstellung. Angenommen also, es existiert eine Gleichung

$$ c_1 e_1' + \cdots + c_{n-1} e_{n-1}' + c_n e_n = 0, $$

so folgt

$$ c_1 e_1 = \cdots c_{n-1} e_{n-1} = (c_1 \beta_1 + \cdots + c_{n-1} \beta_{n-1} + c_n) e_n = 0. $$

Wegen $e_i^2 = e_i$ kann ohne Einschränkung $b_i = b_i e_i$, also auch $\beta_i = e_i \beta_i$ angenommen werden. Dann folgt aus $c_i e_i = 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n-1$, daß $c_i \beta_i =$

$c_i e_i \beta_i = 0$ ist, also ist $c_n e_n = 0$ und $c_i e_i' = 0$. Andrerseits wird ${}_BL$ durch $e_1', \ldots, e_{n-1}', e_n, e_{n+1}, \ldots$ erzeugt. Also gilt (4). Wegen $\beta_i = e_i \beta_i$ ist $e_i' = e_i(1+\beta_i e_n)$, also definiert $b e_i \to b e_i'$ einen Homomorphismus h von Be_i auf Be_i'. Da Be_i' projektiv und Be_i direkt unzerlegbar ist, ist $\operatorname{Ker} h = 0$, also $Be_i \simeq Be_i'$. Damit ist die Annahme (2) zu einem Widerspruch geführt.

Sei p die Projektion $L \to P$. Aus (1) folgt dann

$$x = x p = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i p.$$

Sei

$$e_i p = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} e_j + t_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

wobei t_i Linearkombination der übrigen e_k ist, so folgt

$$x = \sum_{i,j=1}^{n} b_i c_{ij} e_j + b_i t_i,$$

also

$$\sum_{i=1}^{n} b_i c_{ij} e_j = b_j e_j, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

oder unter Verwendung des Kroneckersymbols δ_{ij}

$$\sum_{i=1}^{n} b_i (c_{ij} - \delta_{ij}) e_j = 0.$$

Wegen (1) kann $b_i = b_i e_i$ und wegen (5) $c_{ij} = e_i c_{ij}$ angenommen werden, d.h. es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} b_i e_i (c_{ij} - \delta_{ij}) e_j = 0. \tag{7}$$

Um den Beweis des Satzes zu Ende zu führen, benötigen wir eine Bemerkung über die Struktur der Moduln Be_i. Nach [1, Theorem 7] ist Be_i ein lokaler B-Modul in dem Sinne, daß Be_i genau einen maximalen Teilmodul $\operatorname{Ra}(Be_i) = (\operatorname{Ra} B) e_i$ besitzt ($\operatorname{Ra} B$ bezeichne das Jacobson-radikal von B). Anders formuliert, für jedes $g \notin (\operatorname{Ra} B) e_i$ gilt $Be_i = Bg$. Hieraus schließt man, daß $s = e_i(c_{ij} - \delta_{ij}) e_j \in \operatorname{Ra} B$ liegt für alle $i, j = 1, \ldots, n$: andernfalls wäre s nach Lemma 1 ein Isomorphismus von Be_i auf Be_j für ein Paar i, j. Multiplikation von (7) mit der inversen Abbildung $s' \in B$ ergäbe eine Gl. (2), was nicht sein darf.

Setzt man $e = e_1 + \cdots + e_n$, so ist nach Lemma 1 $\operatorname{End}_B(Be) \simeq eBe$ und $\operatorname{Ra}(eBe) = e \operatorname{Ra} Be$. Also liegt die Matrix $(e_i(c_{ij} - \delta_{ij}) e_j) = m \in \operatorname{Ra} eBe$, d.h. $m + e = (e_i c_{ij} e_j)$ ist invertierbar in eBe.[1] Das bedeutet

$$L = Be_1 p \oplus \cdots \oplus Be_n p \oplus \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq 1, \ldots, n}} Be_i.$$

Als direkter Summand von L ist Bep auch direkter Summand von P. Damit ist die Behauptung bewiesen, und nach der Schlußweise von [3] folgt der Satz.

[1] Dem Referenten verdanke ich die Bemerkung, daß die Invertierbarkeit der Matrix $(e_i c_{ij} e_j)$ auch aus (6) und einem Satz von I.G. Connell (Trans. Amer. Math. Soc. **132**, 350 (1968), Prop. A) gefolgert werden kann.

Literatur

1. Azumaya, G.: On generalized semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's theorem. Japanese J. Math. **19**, 525 – 547 (1948).
2. – Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem. Nagoya Math. J. **1**, 117 – 124 (1950).
3. Kaplansky, I.: Projective modules. Ann. of Math. **68**, 372 – 377 (1958).

Dr. Sigurd Elliger
Mathematisches Institut
der Ruhr-Universität Bochum
D-463 Bochum

(Eingegangen am 9. Oktober 1969)