Werk

Titel: Jordan-Triplesysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren.

Autor: Meyberg, Kurt

Jahr: 1970

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0115|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 115, 58 – 78 (1970)

Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren*

KURT MEYBERG

Einleitung

Das Anliegen der vorliegenden Arbeit ist es, die Koechersche Konstruktion von Lie-Algebren wie sie in [6] angegeben ist, näher zu untersuchen. Die allgemeine Koecher-Konstruktion sieht folgendermaßen aus:

Gegeben sind eine Lie-Algebra $\mathfrak{H}$, zwei $\mathfrak{H}$-Lie-Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und eine lineare Abbildung $S: \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \to \mathfrak{H}$. In $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ wird ein Produkt definiert, mit dem $\mathfrak{L}$ genau dann zu einer Lie-Algebra wird, wenn für S gewisse Eigenschaften erfüllt sind. In [6] wird im wesentlichen nur der Spezialfall untersucht, in dem $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ eine Jordan-Algebra ist. Es hat sich aber als nützlich herausgestellt, die Konstruktion im allgemeinen Rahmen zu untersuchen. In § 2 geben wir Zusammenhänge an mit Lie-Tripelsystemen und mit Jordan-Algebren. Interessant ist hier auch eine Formel (vgl. Satz 2.2), die im Spezialfall die sog. Fundamentalformel in Jordan-Algebren liefert. Der Beweis der Verallgemeinerung ist wesentlich einfacher als die bisher bekannten Beweise für den Spezialfall.

In § 3 werden die Ideale der Lie-Algebra $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ untersucht und insbesondere werden für die Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ Radikale erklärt, die so sind, daß genau dann das Radikal von $\mathfrak{L}$ Null ist, wenn dies für $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt.

Bei den weiteren Untersuchungen wird man zwangsläufig zu Jordan-Tripelsystemen geführt; das sind Moduln, in denen eine trilineare innere Komposition erklärt ist, die gewissen Eigenschaften genügt. Jordan-Tripelsysteme bilden eine sinnvolle Verallgemeinerung von Jordan-Algebren, denn jede Jordan-Algebra ist mit $(a, b, c) \mapsto a(bc) - b(ac) + (ab)c$ ein Jordan-Tripelsystem. Etliche Zusammenhänge der Struktur der Jordan-Tripelsysteme mit der Struktur der daraus nach der Koecher-Konstruktion erhaltenen Lie-Algebren werden angegeben. Es werden auch gewisse Strukturaussagen gemacht, die keinen Bezug auf die Lie-Algebra nehmen, so z. B. daß ein endlichdimensionales Jordan-Tripelsystem über einem Körper der Charakteristik $\neq 2, 3$ genau dann die direkte Summe einfacher Tripelideale ist, wenn eine gewisse Spurform nicht ausgeartet ist (vgl. § 6).

Die Untersuchung wichtiger Beispiele und der dazugehörigen Lie-Algebren und eine erste Klassifizierung der Jordan-Tripelsysteme sollen an anderer Stelle erscheinen.

---

* Dies ist ein Teil einer Arbeit, die unter dem gleichen Titel von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität München im Herbst 1969 als Habilitationsschrift angenommen wurde.

§ 1. Bezeichnungen und Grundlagen

1. Es sei K ein kommutativer Ring mit Einselement und $\mathfrak{T}$ ein unitärer K-Modul. Gibt es eine K-trilineare Abbildung $(x, y, z)\mapsto [x\,y\,z]$ von $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{T}$ mit den Eigenschaften

$$\text{(1.1)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad [x\,x\,y]=0,\\ &\text{b)}\quad [x\,y\,z]+[y\,z\,x]+[z\,x\,y]=0,\\ &\text{c)}\quad [u\,v[x\,y\,z]]=[[u\,v\,x]\,y\,z]+[x[u\,v\,y]\,z]+[x\,y[u\,v\,z]] \end{aligned}$$

für alle $x, y, z, u, v\in\mathfrak{T}$, dann heißt $\mathfrak{T}$ zusammen mit dieser Komposition ein *Lie-Tripelsystem* (*= LT-System*) ([3, 10, 14]).

Ein K-Endomorphismus des LT-Systems $\mathfrak{T}$ heißt eine *Derivation* von $\mathfrak{T}$, wenn

$$D[x\,y\,z]=[(Dx)\,y\,z]+[x(Dy)\,z]+[x\,y(Dz)]$$

für alle $x, y, z\in\mathfrak{T}$ gilt. Bezeichnen wir mit L die lineare Abbildung von $\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{T}$ in $\mathrm{Hom}_K\mathfrak{T}$, die durch

$$L(x\otimes y)\,z=[x\,y\,z]$$

definiert ist, so ist aus (1.1c) ersichtlich, daß die $L(x\otimes y)$ Derivationen von $\mathfrak{T}$ sind und ein Ideal in der Lie-Algebra $\mathrm{Der}\,\mathfrak{T}$ aller Derivationen von $\mathfrak{T}$ aufspannen.

Ein Untermodul $\mathfrak{U}$ des LT-Systems $\mathfrak{T}$ heißt ein *Untersystem*, wenn $[\mathfrak{U}\mathfrak{U}\mathfrak{U}]\subset\mathfrak{U}$ gilt. $\mathfrak{U}$ heißt ein *Ideal* von $\mathfrak{T}$, falls $[\mathfrak{U}\mathfrak{T}\mathfrak{T}]\subset\mathfrak{U}$. Wie üblich heißt auch ein LT-System *einfach*, wenn es keine nichttrivialen Ideale enthält. Man sieht leicht ein, *daß $\mathfrak{T}$ einfach ist, wenn $L(\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{T})$ irreduzibel auf $\mathfrak{T}$ operiert.*

2. Von besonderer Bedeutung ist, daß man LT-Systeme recht einfach in Lie-Algebren einbetten kann. Hierfür betrachten wir eine Lie-Algebra $\mathfrak{H}$ über K und einen K-Modul $\mathfrak{T}$ (unitär), der zugleich $\mathfrak{H}$-Lie-Modul ist und eine K-lineare Abbildung $L\colon \mathfrak{T}\otimes\mathfrak{T}\to\mathfrak{H}$. Für Elemente $X_i=H_i\oplus a_i$ $(i=1, 2)$ aus der direkten Summe

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}(\mathfrak{H}, \mathfrak{T}, L)=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{T}$$

definiert man

$$\text{(1.2)}\qquad [X_1, X_2]:=[H_1, H_2]+L(a_1\otimes a_2)+H_1\cdot a_2-H_2\cdot a_1,$$

wobei $[H_1, H_2]$ das Produkt in $\mathfrak{H}$ und $(H, a)\mapsto H\cdot a$ die Moduloperation bezeichnen. Es gilt, wenn wir mit ρ die Darstellung von $\mathfrak{H}$ in $\mathrm{Hom}\,\mathfrak{T}$ bezeichnen,

$\mathfrak{G}$ ist mit der Verknüpfung (1.2) *genau dann eine Lie-Algebra, wenn $\mathfrak{T}$ mit $[x\,y\,z]:=\rho(L(x\,y))\,z$ ein LT-System ist und $\rho(\mathfrak{H})$ eine Teilalgebra der Derivationsalgebra von $\mathfrak{T}$ ist* ([7, 10, 14]).

Beschränkt man sich auf $\mathfrak{H}=L(\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{T})\subset\mathrm{Hom}\,\mathfrak{T}$, so heißt die zum LT-System $\mathfrak{T}$ gehörige Lie-Algebra

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{T}, L)=L(\mathfrak{T}\otimes\mathfrak{T})\oplus\mathfrak{T}$$

mit der Multiplikation (1.2) die *Standard-Einbettung* von $\mathfrak{T}$.

3. Die im folgenden zitierten Eigenschaften von LT-Systemen findet man z.B. in [10] für Körper der Char 0 angegeben, die dortigen Beweise dieser Eigenschaften funktionieren aber auch für Ringe. Man kann aber auch andere sehr einfache Beweise angeben, die sich aus einer Analyse von [6] und [7] ergeben, denn die dortigen Schlüsse sind „eigentlich" Schlüsse aus der Theorie der LT-Systeme. (Hierzu vgl. auch [13].)

Zu einem Untermodul $\mathfrak{U}$ des LT-Systems $\mathfrak{T}$ betrachtet man

$$\mathfrak{j}(\mathfrak{U}) := \{H \in L(\mathfrak{T} \otimes \mathfrak{T}),\quad H\mathfrak{T} \subset \mathfrak{U}\}$$

und

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{U}) := \mathfrak{j}(\mathfrak{U}) \oplus \mathfrak{U}$$

und zeigt, daß $\mathfrak{J}(\mathfrak{U})$ ein Ideal der Standard-Einbettung $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{T}$ ist, wenn $\mathfrak{U}$ ein Ideal des LT-Systems $\mathfrak{T}$ ist. Somit ist insbesondere $\mathfrak{T}$ einfach, wenn $\mathfrak{G}(\mathfrak{T}, L)$ eine einfache Lie-Algebra ist. Ist hingegen $\mathfrak{T}$ einfach, so zeigt man, daß dann $\mathfrak{G}(\mathfrak{T}, L)$ einfach ist oder direkte Summe zweier isomorpher einfacher Ideale von $\mathfrak{G}$.

Zu einem Ideal $\mathfrak{U}$ des LT-Systems $\mathfrak{T}$ definiert man $\mathfrak{i}(\mathfrak{U}) := L(\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{T})$ (wobei wir $\mathfrak{U} \otimes \mathfrak{T}$ als Untermodul von $\mathfrak{T} \otimes \mathfrak{T}$ auffassen)

$$\mathfrak{U}^{\langle 0\rangle} = \mathfrak{U}, \qquad \mathfrak{U}^{\langle k+1\rangle} = \mathfrak{i}(\mathfrak{U}^{\langle k\rangle})\,\mathfrak{U}^{\langle k\rangle} \tag{1.3}$$

und zeigt, daß die $\mathfrak{U}^{\langle k\rangle}$ Ideale von $\mathfrak{T}$ sind. Das Ideal $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}$ heißt *auflösbar*, wenn es ein $k \geqq 0$ gibt mit $\mathfrak{U}^{\langle k\rangle} = 0$. Ist $\mathfrak{T}$ noethersch, so gibt es ein eindeutig bestimmtes maximales auflösbares Ideal $\operatorname{Rad}\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{T}$, das *Radikal*. Ist $\operatorname{Rad}\mathfrak{T} = 0$, so heißt $\mathfrak{T}$ *halbeinfach*. Bezeichnet $\operatorname{Rad}\mathfrak{G}$ das Radikal der Lie-Algebra $\mathfrak{G}(\mathfrak{T}, L)$, so gilt

$$\operatorname{Rad}\mathfrak{G} = \mathfrak{J}(\operatorname{Rad}\mathfrak{T}), \tag{1.4}$$

insbesondere ist $\mathfrak{G}$ halbeinfach genau dann, wenn $\mathfrak{T}$ halbeinfach ist.

§ 2. Die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren und Zusammenhänge mit Jordan-Algebren und LT-Systemen

1. In [6] gibt Koecher eine Konstruktion von Lie-Algebren an, die wir zunächst in unsere Schreibweise übertragen hier wiedergeben wollen.

Sei K ein kommutativer Ring mit 1, $\mathfrak{H}$ eine Lie-Algebra über K und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ unitäre K-Moduln, die zugleich $\mathfrak{H}$-Lie-Moduln sind. Die Lie-Modul-Struktur von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ kennzeichnen wir durch $(H, a) \mapsto H \cdot a$ für $H \in \mathfrak{H}$, $a \in \mathfrak{A}$, bzw. $(H, b) \mapsto H \cdot b$ für $b \in \mathfrak{B}$. Sei ferner $S\colon \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \to \mathfrak{H}$ eine K-lineare Abbildung. Für Elemente $X_i = H_i \oplus a_i \oplus b_i$ $(i = 1, 2)$ aus dem K-Modul

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$$

definiert man

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] := [H_1, H_2] + S(a_1 \otimes b_2 - a_2 \otimes b_1)\\ \oplus H_1 \cdot a_2 - H_2 \cdot a_1 \oplus H_1 \cdot b_2 - H_2 \cdot b_1.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Es gilt

Satz 2.1 ([6], Lemma 4). $\mathfrak{L}$ *ist mit der Multiplikation* (2.1) *genau dann eine Lie-Algebra, wenn gilt:*

$$\text{(2.2)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad [H, S(a\otimes b)] = S\big((H\cdot a)\otimes b + a\otimes(H\cdot b)\big),\\ &\text{b)}\quad S(a\otimes b)\cdot a' = S(a'\otimes b)\cdot a,\\ &\text{c)}\quad S(a\otimes b)\cdot b' = S(a\otimes b')\cdot b \end{aligned}$$

für alle $H\in\mathfrak{H}$, $a, a'\in\mathfrak{A}$, $b, b'\in\mathfrak{B}$.

2. Ein Modulpaar $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$, zu dem es eine Lie-Algebra $\mathfrak{H}$ und eine lineare Abbildung $S\colon \mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}\to\mathfrak{H}$ gibt, so daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{H}$-Lie-Moduln sind und S die Eigenschaften (2.2) hat, nennen wir ein *verbundenes Paar*, die Lie-Algebra $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ heißt die *Standard-Einbettung* dieses Paares. (Beachte: Zu einem verbundenen Paar gehört die Angabe von $\mathfrak{H}$ und S.)

Wir setzen für $a, b\in\mathfrak{A}$, $u, v\in\mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} \{a\,u\,b\} &= S(a\otimes u)\cdot b = \big[[a,u],b\big],\\ \langle u\,a\,v\rangle &= -S(a\otimes u)\cdot v = \big[[u,a],v\big] \end{aligned}$$

und interpretieren dies folgendermaßen:

Man hat K-trilineare Abbildungen $(a,u,b)\mapsto\{a\,u\,b\}$ von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ und $(u,a,v)\mapsto\langle u\,a\,v\rangle$ von $\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften

$$\text{(2.3)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \{a\,u\,b\} = \{b\,u\,a\},\\ &\text{b)}\quad \langle u\,a\,v\rangle = \langle v\,a\,u\rangle,\\ &\text{c)}\quad \{a\,u\{b\,v\,c\}\} - \{b\,v\{a\,u\,c\}\} = \{\{a\,u\,b\}\,v\,c\} - \{b\langle u\,a\,v\rangle\,c\},\\ &\text{d)}\quad \langle u\,a\langle v\,b\,w\rangle\rangle - \langle v\,b\langle u\,a\,w\rangle\rangle = \langle\langle u\,a\,v\rangle\,b\,w\rangle - \langle v\{a\,u\,b\}\,w\rangle \end{aligned}$$

für alle $a, b, c\in\mathfrak{A}$, $u, v, w\in\mathfrak{B}$.

Die Formeln (2.3a und b) sind äquivalent zu (2.2b und c). Wenden wir (2.2a) mit $H=S(a\otimes u)$, $a\to b$, $b\to v$, an auf $c\in\mathfrak{A}$ bzw. $w\in\mathfrak{B}$, so erhält man (2.3c und d).

Hat man andererseits Moduln $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ und K-trilineare Abbildungen $(a,u,b)\mapsto\{a\,u\,b\}$ von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ und $(u,a,v)\mapsto\langle u\,a\,v\rangle$ von $\mathfrak{B}\times\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften (2.3) und setzt $S(a\otimes u)\cdot b=\{a\,u\,b\}$ und $S(a\otimes u)\cdot v=\langle u\,a\,v\rangle$, so erkennt man leicht, daß dann $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ in bezug auf die Lie-Algebra Bild S ein verbundenes Paar bildet.

Da die linken Seiten von (2.3c und d) antisymmetrisch sind in (a, u) und (b, v), haben wir auch

$$\text{(2.4)}\quad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \{\{a\,u\,b\}\,v\,c\} - \{b\langle u\,a\,v\rangle\,c\} = \{a\langle v\,b\,u\rangle\,c\} - \{\{b\,v\,a\}\,u\,c\},\\ &\text{b)}\quad \langle\langle u\,a\,v\rangle\,b\,w\rangle - \langle v\{a\,u\,b\}\,w\rangle = \langle u\{b\,v\,a\}\,w\rangle - \langle\langle v\,b\,u\rangle\,a\,w\rangle. \end{aligned}$$

In (2.3c) setzen wir $a=b=c$:

$$2\{av\{aua\}\}-\{au\{ava\}\}=\{a\langle uav\rangle a\};$$

da die rechte Seite in u und v symmetrisch ist, erhalten wir, falls K durch 3 teilbar ist, für $a\in\mathfrak{A}$, $u, v\in\mathfrak{B}$,

$$\{av\{aua\}\}=\{au\{ava\}\}=\{a\langle uav\rangle a\}, \tag{2.5}$$

analog aus (2.3d) für $u\in\mathfrak{B}$, $a, b\in\mathfrak{A}$,

$$\langle ua\langle ubu\rangle\rangle=\langle ub\langle uau\rangle\rangle=\langle u\{aub\}u\rangle. \tag{2.5'}$$

Satz 2.2. *Es sei* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *ein verbundenes Paar, in dem* (2.5) *und* (2.5') *erfüllt sind*[1]*, dann gelten in* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *die „Fundamentalformeln"*

$$\{\{ava\}u\{ava\}\}=\{a\langle v\{aua\}v\rangle a\},$$
$$\langle\langle uau\rangle b\langle uau\rangle\rangle=\langle u\{a\langle ubu\rangle a\}u\rangle$$

für alle $a, b\in\mathfrak{A}$, $u, v\in\mathfrak{B}$.

Beweis. In (2.3c) setzen wir $a\to\{ava\}$, $b=c=a$, und erhalten

$$\{\{ava\}u\{ava\}\}=2\{av\{\{ava\}ua\}\}-\{a\langle u\{ava\}v\rangle a\}.$$

Aus (2.4b) erhalten wir, wenn wir $b=a$ und $w=v$ setzen,

$$\langle u\{ava\}v\rangle=2\langle va\langle uav\rangle\rangle-\langle v\{aua\}v\rangle.$$

Hiermit gehen wir in den zweiten Term auf der rechten Seite der vorhergehenden Formel:

$$\{\{ava\}u\{ava\}\}=2\{av\{\{ava\}ua\}\}-2\{a\langle va\langle uav\rangle\rangle a\}+\{a\langle v\{aua\}v\rangle a\}.$$

Mit (2.5) gilt aber

$$\{a\langle va\langle uav\rangle\rangle a\}=\{av\{a\langle uav\rangle a\}\}=\{av\{au\{ava\}\}\}$$

und daraus folgt mit der vorhergehenden Gleichung die erste Formel des Satzes; völlig analog beweist man die andere Formel. (Man kann aber auch sagen, daß dann die andere Formel aus Symmetriegründen gilt.)

Bemerkung. Wir werden später sehen (vgl. § 4.2), daß die angegebenen Formeln eine Verallgemeinerung der Fundamentalformel in Jordan-Ringen darstellen. Der angegebene Beweis ist wesentlich einfacher als alle bekannten Beweise dieser Formel für Jordan-Ringe (vgl. [2, 5]), jedoch nur für durch 3 teilbaren Ring K, bzw. (2.5), (2.5') vorausgesetzt. Selbst wenn wir diese Hilfsformeln für Jordan-Ringe (durch 2 teilbar) zusätzlich beweisen, was in [12] durchgeführt wird, bleibt dieser Beweis der Fundamentalformel noch äußerst einfach (und kurz).

[1] Also bereits wenn K durch 3 teilbar ist.

3. Betrachten wir bei festem $v \in \mathfrak{B}$ die Abbildung $(a,b) \mapsto ab := \{a\,v\,b\}$ von $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$, dann wird $\mathfrak{A}$ mit dieser Komposition zu einer kommutativen Algebra, die wir mit $\mathfrak{A}_v$ bezeichnen. Entsprechend wird $\mathfrak{B}$ mit $(u,v) \mapsto u\,v := \langle u\,a\,v \rangle$ bei festem $a \in \mathfrak{A}$ zu einer kommutativen Algebra $\mathfrak{B}_a$.

Satz 2.3. *Es sei* $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ *ein verbundenes Paar über einem durch* 3 *teilbaren Ring. Für jedes* $v \in \mathfrak{B}$ $(a \in \mathfrak{A})$ *ist* $\mathfrak{A}_v$ $(\mathfrak{B}_a)$ *eine Jordan-Algebra.*

Der Beweis dieses Satzes ist bereits in [9], S. 19, dargestellt.

Bemerkung. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung der Aussage, daß eine Mutation einer Jordan-Algebra wieder eine Jordan-Algebra ist (vgl. [2, 5]).

4. Es sei $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ein verbundenes Paar über K mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{H}$ und linearer Abbildung S: $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B} \to \mathfrak{H}$. Sei $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ die Standard-Einbettung dieses Paares wie in § 2.1. Ferner müssen wir nun voraussetzen, daß der Ring K durch 2 teilbar ist.

Aus (2.1) ist ersichtlich, daß die Abbildung

$$X = H \oplus a \oplus b \mapsto X' = H \oplus -a \oplus -b$$

ein involutorischer Automorphismus von $\mathfrak{L}$ ist mit Minusraum $\mathfrak{T} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$. Somit haben wir: $\mathfrak{T} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ *ist mit* $(x,y,z) \mapsto [[x,y],z]$ *ein LT-System.* (Das Lie-Produkt ist in $\mathfrak{L}$ zu nehmen.) Aus (2.1) ermitteln wir diese Komposition. Da es zweckmäßig ist, die Matrizenschreibweise heranzuziehen, wollen wir für $x = x_1 \oplus x_2 \in \mathfrak{T}$ auch $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{T}$ schreiben. So seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ aus $\mathfrak{T}$, wobei $x_1, y_1, z_1 \in \mathfrak{A}$ und $x_2, y_2, z_2 \in \mathfrak{B}$ sind. Mit (2.1) ist

$$[x,y] = S(x_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes x_2)$$

und

$$[S(x_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes x_2), z] = S(x_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes x_2) \cdot z_1 \oplus S(x_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes x_2) \cdot z_2 .$$

Setzen wir

$$L(x \otimes y) := \begin{pmatrix} \rho(S(x_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes x_2)) & 0 \\ 0 & \rho'(S(x_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes x_2)) \end{pmatrix}$$

und

$$[x\,y\,z] = L(x \otimes y)\,z = \begin{pmatrix} S(x_1\,y_2 - y_1\,x_2) \cdot z_1 \\ S(x_1\,y_2 - y_1\,x_2) \cdot z_2 \end{pmatrix},$$

wobei ρ und ρ' die Darstellungen von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ bedeuten, dann ist also $\mathfrak{T} = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ mit dieser Komposition ein LT-System. Bei treuen Darstellungen ρ, ρ' ist offensichtlich die Abbildung

$$L(x \otimes y) \oplus z \mapsto S(x_1 \otimes y_2 - y_1 \otimes x_2) \oplus z_1 \oplus z_2$$

ein injektiver Homomorphismus der Standard-Einbettung des LT-Systems $\mathfrak{T}$ in die Lie-Algebra $\mathfrak{L}$. Falls $\mathfrak{H} =$ Bild S gilt, dann ist das ein Isomorphismus (bei treuen Darstellungen).

5. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Ideal des LT-Systems $\mathfrak{T}=\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$; das bedeutet (vgl. § 1.**1**)

$$L(u\otimes x)\,y=\begin{pmatrix}S(u_1\otimes x_2)\cdot y_1-S(x_1\otimes u_2)\cdot y_1\\ S(u_1\otimes x_2)\cdot y_2-S(x_1\otimes u_2)\cdot y_2\end{pmatrix}\in\mathfrak{K}$$

für alle $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}\in\mathfrak{K}$ und $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathfrak{T}$.

Es folgt

$$S(u_1\otimes x_2)\cdot y_1-S(x_1\otimes u_2)\cdot y_1\in P_1\mathfrak{K}$$

und

$$S(u_1\otimes x_2)\cdot y_2-S(x_1\otimes u_2)\cdot y_2\in P_2\mathfrak{K},$$

wobei P_1 (bzw. P_2) die Projektion von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) längs $\mathfrak{B}$ (bzw. $\mathfrak{A}$) bedeutet. Wählen wir in beiden Bedingungen einmal $x_1=0$, dann $x_2=0$, so sehen wir mit (2.2), daß gilt:

Ist $\mathfrak{K}$ ein Ideal des LT-Systems $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$, dann sind $P_1\mathfrak{K}$, $P_2\mathfrak{K}$ $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$-invariante Teilmoduln von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und es gilt

$$S(P_1\mathfrak{K}\otimes\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}\subset P_2\mathfrak{K},\qquad S(\mathfrak{A}\otimes P_2\mathfrak{K})\,\mathfrak{A}\subset P_1\mathfrak{K}.$$

Haben wir andererseits $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$-invariante Untermoduln $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mit $S(\mathfrak{A}_0\otimes\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}_0$, $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}_0)\,\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}_0$, dann ist $\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$ ein Ideal des LT-Systems $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$.

Wir führen folgende Bezeichnung ein: Zu einem Untermodul $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{B}$ setzen wir

$$\overline{\mathfrak{A}}_0=S(\mathfrak{A}_0\otimes\mathfrak{B})\,\mathfrak{B},\qquad \overline{\mathfrak{B}}_0=S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}_0)\,\mathfrak{A}\ ^{2}.$$

Wir nennen einen Untermodul $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{T}$ split, wenn $P_i\mathfrak{U}\subset\mathfrak{U}$ $(i=1,2)$. Mit diesen Bezeichnungen haben wir aus obigen Betrachtungen

Lemma 2.4. *Ein split Untermodul $\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ ist genau dann ein LT-Ideal, wenn gilt*

a) *$\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ sind $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$-invariante Untermoduln von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$,*

b) *$\overline{\mathfrak{B}}_0\subset\mathfrak{A}_0$ und $\overline{\mathfrak{A}}_0\subset\mathfrak{B}_0$.*

Lemma 2.5. a) *Ist $\mathfrak{A}_0$ ein $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$-invarianter Untermodul von $\mathfrak{A}$, dann ist $\overline{\mathfrak{A}}_0$ ein invarianter Untermodul von $\mathfrak{B}$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}_0\subset\mathfrak{A}_0$.*

b) *Ist $\mathfrak{B}_0$ ein $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$-invarianter Untermodul von $\mathfrak{B}$, dann ist $\overline{\mathfrak{B}}_0$ ein invarianter Untermodul von $\mathfrak{A}$ mit $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_0\subset\mathfrak{B}_0$.*

Beweis. Nach (2.2a) und der Tatsache, daß $\mathfrak{B}$ ein $\mathfrak{H}$-Lie-Modul ist, folgt für $a\in\mathfrak{A}_0$, $b,b'\in\mathfrak{B}$ und $S(A)\in S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$

$$S(A)\,S(a\otimes b)\,b'=S(a\otimes b)\,S(A)\,b'-S\big(S(A)\,a\otimes b+a\otimes S(A)\,b\big)\,b'.$$

Da mit a nach Voraussetzung auch $S(A)\,a\in\mathfrak{A}_0$, sehen wir, daß rechts ein Element von $\overline{\mathfrak{A}}_0$ steht. Weiter ist zu zeigen, daß mit $v=S(u\otimes b)\,b'$, $u\in\mathfrak{A}_0$, $b,b'\in\mathfrak{B}$

[2] $\mathfrak{A}_0\otimes\mathfrak{B}$ ist als Untermodul von $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}$ aufzufassen.

auch $S(a\otimes v)\,a'=S\big(a\otimes S(u\otimes b)\,b'\big)\,a'$, $a, a'\in\mathfrak{A}$, in $\mathfrak{A}_0$ liegt. Nach (2.2a) ist

$$\begin{aligned}&S(u\otimes b)\,S(a\otimes b')\,a'-S(a\otimes b')\,S(u\otimes b)\,a'\\&\quad=S\big(S(u\otimes b)\,a\otimes b'\big)\,a'+S\big(a\otimes S(u\otimes b)\,b'\big)\,a'.\end{aligned}$$

Wegen (2.2b) folgt hieraus

$$\begin{aligned}S\big(a\otimes S(u\otimes b)\,b'\big)\,a'=S\big(S(a\otimes b')\,a'\otimes b\big)\,u-S(a\otimes b')\,S(a'\otimes b)\,u\\-S(a'\otimes b')\,S(a\otimes b)\,u.\end{aligned}$$

Da $\mathfrak{A}_0$ invariant ist, liegt auch das Element auf der linken Seite in $\mathfrak{A}_0$. Teil b) geht völlig analog.

Korollar 1. *Sind* $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0$ $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$*-invariante Teilmoduln von* $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\mathfrak{B}$*, dann sind*

$$\mathfrak{A}_0\oplus\overline{\mathfrak{A}}_0,\qquad \overline{\mathfrak{B}}_0\oplus\mathfrak{B}_0$$

Ideale im LT-System $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$.

Korollar 2. *Ist* $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ *ein einfaches LT-System, dann operiert* $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ *irreduzibel auf* $\mathfrak{A}$ *und auf* $\mathfrak{B}$.

Es operiere andererseits $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ irreduzibel auf $\mathfrak{A}$ und auf $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{K}$ ein Ideal des LT-Systems $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$, dann folgt aus Lemma 2.4, daß nur $P_1\mathfrak{K}=0$ oder $P_1\mathfrak{K}=\mathfrak{A}$ und $P_2\mathfrak{K}=0$ oder $P_2\mathfrak{K}=\mathfrak{B}$ in Frage kommen. Ist $P_1\mathfrak{K}=0$, so folgt nach Teil b) des gleichen Lemmas $S(x\otimes w)\,y=0$ für alle $w\in P_2\mathfrak{K}$ und alle $x, y\in\mathfrak{A}$. Sei $P_2\mathfrak{K}=\mathfrak{B}$, dann gilt $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})\,\mathfrak{A}=0$, also liegt $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ im Kern der Darstellung ρ, die zum $\mathfrak{H}$-Modul $\mathfrak{A}$ gehört. Völlig analog folgt aus $P_2\mathfrak{K}=0$ und $P_1\mathfrak{K}=\mathfrak{A}$, daß $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ im Kern von ρ' liegt (ρ' gehört zu $\mathfrak{B}$). Falls beide Darstellungen nicht trivial auf $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ sind, bleibt nur noch die Möglichkeit $P_1\mathfrak{K}=\mathfrak{A}$ und $P_2\mathfrak{K}=\mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{B}$ invariant unter $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ sind, gilt entweder $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{A}=\mathfrak{A}$, was $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{K}$, also auch $\mathfrak{B}\subset\mathfrak{K}$ und somit $\mathfrak{K}=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ nach sich zieht (ebenso impliziert $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{B}=\mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{K}=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$), oder es gilt $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{A}=0$, $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{B}=0$. Es gibt also eine Bijektion $a\mapsto\varphi(a)$ von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, so daß $\mathfrak{K}=\{a\oplus\varphi(a), a\in\mathfrak{A}\}$ gilt; denn wären $a\oplus b$, $a'\oplus b$ in $\mathfrak{K}$, $a\neq a'$, dann wäre $\mathfrak{K}\cap\mathfrak{A}\neq 0$. Ist $\mathfrak{K}=\{a\oplus\varphi(a), a\in\mathfrak{A}\}$ ein Ideal, dann ist auch $\mathfrak{K}'=\{a\oplus-\varphi(a), a\in\mathfrak{A}\}$ ein Ideal des LT-Systems und $\mathfrak{T}=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}=\mathfrak{K}\oplus\mathfrak{K}'$. Wir haben bewiesen:

Lemma 2.6. *Operiert* $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ *irreduzibel auf* $\mathfrak{A}$ *und auf* $\mathfrak{B}$ *und sind* $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})\,\mathfrak{A}\neq 0$ *und* $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}\neq 0$*, dann ist das LT-System* $\mathfrak{T}=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ *einfach oder direkte Summe zweier isomorpher einfacher Ideale; ist darüberhinaus jedes Ideal von* $\mathfrak{T}$ *split, dann ist* $\mathfrak{T}$ *einfach.*

Da die Standard-Einbettung einer direkten Summe einfacher LT-Systeme eine direkte Summe einfacher Algebren ist, haben wir das

Korollar. *Operiert* $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ *irreduzibel und nicht trivial auf* $\mathfrak{A}$ *und auf* $\mathfrak{B}$*, dann ist die Standard-Einbettung des LT-Systems* $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ *eine direkte Summe von einfachen Idealen.*

§ 3. Ideale und Radikale

1. Als nächstes wollen wir die Ideale der Lie-Algebra $\mathfrak{L}=\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ untersuchen. Zunächst wiederholen wir einige Tatsachen aus [6].

Es seien $H\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{H}$, $A\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{A}$, $B\colon \mathfrak{L}\to\mathfrak{B}$ die Projektionen von $\mathfrak{L}$ auf die entsprechenden Moduln, definiert durch $HX=T$, $AX=a$, $BX=b$, falls $X=T\oplus a\oplus b\in\mathfrak{L}$. Sei $\mathfrak{M}$ ein Ideal von $\mathfrak{L}$, dann sieht man leicht mit (2.1), daß $H\mathfrak{M}$ ein Ideal von $\mathfrak{H}$, $A\mathfrak{M}$ und $B\mathfrak{M}$ jeweils $\mathfrak{H}$-invariante Untermoduln von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sind, und daß gilt

$$H\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{A}\subset A\mathfrak{M},\qquad H\mathfrak{M}\cdot\mathfrak{B}\subset B\mathfrak{M},$$
$$S(A\mathfrak{M}\otimes\mathfrak{B})\subset H\mathfrak{M},\qquad S(\mathfrak{A}\otimes B\mathfrak{M})\subset H\mathfrak{M}.$$

Betrachtet man andererseits ein Ideal $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}$-invariante Untermoduln $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mit

$$\text{(3.1)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \mathfrak{H}_0\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}_0,\qquad \mathfrak{H}_0\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}_0,\\ &\text{b)}\quad S(\mathfrak{A}_0\otimes\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}_0)\subset\mathfrak{H}_0,\end{aligned}$$

dann ist $\mathfrak{M}_0:=\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$ ein Ideal von $\mathfrak{L}$.

Zu einem Untermodul $\mathfrak{M}$ definiert man einen Modul $\hat{\mathfrak{M}}=H\mathfrak{M}\oplus A\mathfrak{M}\oplus B\mathfrak{M}$. Es ist $\mathfrak{M}\subset\hat{\mathfrak{M}}$, aber im allgemeinen $\mathfrak{M}\neq\hat{\mathfrak{M}}$. Ist $\mathfrak{M}$ ein Ideal, dann ist auch $\hat{\mathfrak{M}}$ ein Ideal. $\mathfrak{M}$ ist split, wenn $\mathfrak{M}=\hat{\mathfrak{M}}$.

2. Nun seien $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ Untermoduln von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Wir definieren

$$i(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0):=S(\mathfrak{A}_0\otimes\mathfrak{B})+S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}_0),$$
$$j(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0):=\{T\in\mathfrak{H},\rho(T)\colon \mathfrak{A}\to\mathfrak{A}_0 \text{ und } \rho'(T)\colon \mathfrak{B}\to\mathfrak{B}_0\}$$

mit den Darstellungen ρ, ρ'.

Aus $[T,S(x\otimes y)]=S(Tx\otimes y+x\otimes Ty)$ und $[T,T']x=TT'x-T'Tx$ sieht man, daß $i(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0)$ und $j(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0)$ Ideale von $\mathfrak{H}$ sind, falls $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ $\mathfrak{H}$-invariante Untermoduln sind. Zusammen mit (3.1) haben wir

Lemma 3.1. *Der split Untermodul $\mathfrak{H}_0\oplus\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{L}$ ist genau dann ein Ideal in $\mathfrak{L}$, wenn $\mathfrak{H}_0$ ein Ideal in $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0$ $\mathfrak{H}$-invariante Untermoduln von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sind und wenn gilt*

$$i(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0)\subset\mathfrak{H}_0\subset j(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0).$$

Korollar 1. *Für $\mathfrak{H}$-Untermoduln $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ mit $S(\mathfrak{A}_0\otimes\mathfrak{B})\,\mathfrak{B}\subset\mathfrak{B}_0$ und $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B}_0)\,\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}_0$ sind*

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0):=i(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0)\oplus\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$$

und

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0):=j(\mathfrak{A}_0,\mathfrak{B}_0)\oplus\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$$

Ideale von $\mathfrak{L}$.

Beweis. Da $S(\mathfrak{A}_0 \otimes \mathfrak{B})\,\mathfrak{A} = S(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})\,\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_0$ und

$$S(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}_0)\,\mathfrak{B} = S(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})\,\mathfrak{B}_0,$$

gilt mit den Voraussetzungen $i(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0) \subset j(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0)$.

Mit $\overline{\mathfrak{A}}_0$, $\overline{\mathfrak{B}}_0$ wie in § 2.5 haben wir

Korollar 2. *Für $\mathfrak{H}$-Untermoduln $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sind*

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{A}_0, \overline{\mathfrak{A}}_0), \quad \mathfrak{I}(\mathfrak{A}_0, \overline{\mathfrak{A}}_0), \quad \mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{B}}_0, \mathfrak{B}_0), \quad \mathfrak{I}(\overline{\mathfrak{B}}_0, \mathfrak{B}_0)$$

Ideale in $\mathfrak{L}$.

Korollar 3. *Ist $\mathfrak{L} = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ einfach, dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einfache $\mathfrak{H}$-Moduln.*

3. In $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wollen wir nun Radikale definieren, die dann in vernünftiger Beziehung zum LT-System $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ und damit nach (1.4) zum Radikal der Standard-Einbettung des LT-Systems stehen. (Bei treuen Darstellungen und $\mathfrak{H} = S(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$ ist das die Standard-Einbettung des Paares $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$.)

Wir nennen nun einen $\mathfrak{H}$-Untermodul $\mathfrak{A}_0$ ($\mathfrak{B}_0$) von $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) *auflösbar*, wenn $\mathfrak{A}_0 \oplus \overline{\mathfrak{A}}_0$ ($\overline{\mathfrak{B}}_0 \oplus \mathfrak{B}_0$) im LT-System $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ auflösbar ist.

Lemma 3.2. *Das LT-Ideal $\mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{B}_0$ ist auflösbar in $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{B}_0$ auflösbar in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ sind.*

Beweis. Da $\mathfrak{A}_0 \oplus \overline{\mathfrak{A}}_0$ und $\overline{\mathfrak{B}}_0 \oplus \mathfrak{B}_0$ nach Lemma 2.4 Untermoduln von $\mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{B}_0$ sind, sind mit $\mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{B}_0$ auch diese auflösbar, d. h. $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ auflösbar. Sind andererseits $\mathfrak{A}_0 \oplus \overline{\mathfrak{A}}_0$ und $\overline{\mathfrak{B}}_0 \oplus \mathfrak{B}_0$ auflösbar, dann auch die Summe ([10]), also auch $\mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{A}_0 \oplus \overline{\mathfrak{A}}_0) + (\overline{\mathfrak{B}}_0 \oplus \mathfrak{B}_0)$, diese Gleichheit gilt wegen $\overline{\mathfrak{A}}_0 \subset \mathfrak{B}_0$, $\overline{\mathfrak{B}}_0 \subset \mathfrak{A}_0$.

Der eben verwendete Schluß, daß die Summe zweier auflösbarer LT-Ideale wieder auflösbar ist, zeigt auch:

Lemma 3.3. *Die Summe zweier auflösbarer Untermoduln aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ ist auflösbar.*

Wir nehmen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ noethersch an und nennen den maximalen auflösbaren Untermodul von $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) das *Radikal* von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. (Bezeichnung: Rad $\mathfrak{A}$, Rad $\mathfrak{B}$.)

Lemma 3.4. *Ein Ideal $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{B}_0$ ist genau dann auflösbar in $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$, wenn $\hat{\mathfrak{U}} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{B}_0$ auflösbar ist.*

Beweis. Seien P_i ($i = 1, 2$) die Projektionen auf $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, dann zeigt man leicht durch Induktion $P_i\,\mathfrak{U}^{\langle k \rangle} = P_i\,\hat{\mathfrak{U}}^{\langle k \rangle}$, daraus folgt die Behauptung.

Korollar. Rad$(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$ *ist ein split Ideal in $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$.*

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ noethersch, ist $\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}$ noethersch und es existiert Rad$(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$. Nach dem Lemma ist $\widehat{\text{Rad}(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})}$ auflösbar, also in Rad$(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$ enthalten. Da aber $\mathfrak{U} \subset \hat{\mathfrak{U}}$ für jedes Ideal $\mathfrak{U}$ gilt, folgt die Behauptung.

Satz 3.5. Rad$(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B}) =$ Rad $\mathfrak{A} \oplus$ Rad $\mathfrak{B}$.

Beweis. Nach obigem Korollar ist $\mathrm{Rad}(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B})=\mathfrak{U}\oplus\mathfrak{V}$. Nach Lemma 3.2 sind dann $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ auflösbar in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, also $\mathfrak{U}\subset\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{V}\subset\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}$ und damit $\mathrm{Rad}(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B})\subset\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}\oplus\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}$. Nach Lemma 2.5 ist $\overline{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}}\oplus\overline{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}}$ ein Untermodul von $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}\oplus\overline{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}}$, also auflösbar, d.h. $\overline{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}}$ ist auflösbar in $\mathfrak{B}$ und damit $\overline{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}}\subset\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}$. Ebenso zeigt man $\overline{\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}}\subset\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}$; damit ist $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}\oplus\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}$ ein LT-Ideal (vgl. Lemma 2.4). Man kann somit Lemma 3.2 anwenden, also ist $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}\oplus\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}$ auflösbar, folglich hat man die andere Inklusion $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}\oplus\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}\subset\mathrm{Rad}(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B})$.

Sind nun $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ so, daß auch $\mathfrak{L}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},S)=\mathrm{S}(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})\oplus\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ noethersch ist, und operiert $S(\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{B})$ treu auf $\mathfrak{A}$ und auf $\mathfrak{B}$, dann hat man wegen der Isomorphie von $\mathfrak{L}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},S)$ und der Standard-Einbettung des LT-Systems $\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$, wegen (1.4)

Korollar 1. $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{L}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},S)=j(\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A},\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B})\oplus\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}\oplus\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}$.

Nennen wir auch hier $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$) *halbeinfach*, wenn $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{A}=0$ ($\mathrm{Rad}\,\mathfrak{B}=0$), so haben wir das

Korollar 2. $\mathfrak{L}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},S)$ *ist genau dann halbeinfach, wenn* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *halbeinfach sind.*

4. Ist $\mathfrak{L}$ endlichdimensional über einem Körper der Char $\neq 2$ und die Killingform σ auf $\mathfrak{L}$ nicht ausgeartet, dann überlegt man sich leicht, daß dann $\mathfrak{B}$ der bezüglich σ zu $\mathfrak{A}$ kontragrediente $\mathfrak{H}$-Modul ist. Da außerdem Bild $S\oplus\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$ ein Ideal von $\mathfrak{L}$ ist (vgl. Korollar 1 zu Lemma 3.1), werden wir uns im folgenden auf Bild $S=\mathfrak{H}$ beschränken und auch weiterhin annehmen, daß Bild $S\subset\mathrm{Hom}(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$ gilt. Dies dient lediglich zur Vereinfachung der Schreibweise, da man sonst oft den Kern der entsprechenden Darstellung ausfaktorisieren müßte. Eine andere Motivierung für die vorgesehenen Spezialisierungen ergibt sich aus der Betrachtung von Jordan-Tripelsystemen.

§ 4. Jordan-Tripelsysteme

1. So wie man die LT-Systeme einführte, um die Unterräume von Lie-Algebren zu charakterisieren, die abgeschlossen sind bei $[x[yz]]$, möchte man auch eine entsprechende Charakterisierung solcher Unterräume für Jordan-Algebren gewinnen. Von Jacobson stammt ein erster Ansatz [3], der allerdings noch nicht sehr weit führt, da nicht die „richtige" Identität zugrunde gelegt wird. Wichtig ist nun folgende Beobachtung: Ein Unterraum einer Jordan-Algebra, der abgeschlossen ist bei $x(yz)$ ist natürlich auch abgeschlossen bei

$$\{xyz\}:=x(yz)-y(xz)+(xy)z.$$

Hat man andererseits einen Unterraum, der abgeschlossen ist bei $\{xyz\}$, dann auch bei $(xy)z$, falls durch 2 dividiert werden darf. Der Vorteil dieser Betrachtungsweise liegt darin, daß man für $\{xyz\}$ eine „schöne" Formel hat, was für $x(yz)$ nicht der Fall ist. In einer Jordan-Algebra gilt nämlich [5, 6]

$$\{xy\{uvw\}\}-\{uv\{xyw\}\}=\{\{xyu\}vw\}-\{u\{yxv\}w\}.$$

Diese Formel gilt natürlich auch in jedem Unterraum, der abgeschlossen ist bei $x(yz)$ bzw. bei $\{x\,y\,z\}$. Damit hat man eine Motivierung für folgende

Definition. Ein Modul $\mathfrak{A}$ (unitär) über dem Ring K (mit 1) heißt ein *Jordan-Tripelsystem* ($=JT$-*System*), wenn es eine K-trilineare Abbildung $(x, y, z)\mapsto \{x\,y\,z\}$ von $\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}$ gibt mit folgenden Eigenschaften:

$$\text{(4.1)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad \{x\,y\,z\}=\{z\,y\,x\}\\ &\text{b)}\quad \{x\,y\{u\,v\,w\}\}-\{u\,v\{x\,y\,w\}\}=\{\{x\,y\,u\}\,v\,w\}-\{u\{y\,x\,v\}\,w\}\end{aligned}$$

für alle $x, y, z, u, v, w\in\mathfrak{A}$.

Insbesondere ist also jede Jordan-Algebra mit $\{x\,y\,z\}=x(yz)-y(xz)+(xy)z$ ein JT-System.

Wir setzen

$$L(x, y)\,z=\{x\,y\,z\}$$

und sehen aus (4.1)

$$\text{(4.2)}\qquad \begin{aligned} &\text{a)}\quad L(x, y)\,z=L(z, y)\,x,\\ &\text{b)}\quad [L(x, y), L(u, v)]=L\big(L(x, y)\,u, v\big)-L\big(u, L(y, x)\,v\big).\end{aligned}$$

Hieraus ersehen wir, daß der von den $L(x, y)$ erzeugte Untermodul von Hom $\mathfrak{A}$ mit dem Kommutatorprodukt eine Lie-Algebra ist. Weiter sieht man, daß $\mathfrak{A}$ auch vermöge $L(x, y)\cdot a=-L(y, x)\,a$ zu einem treuen Lie-Modul wird. Diesen Modul bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{A}}$. Fassen wir nun $L(x, y)$ auf als Bild einer Abbildung $S\colon \mathfrak{A}\otimes\tilde{\mathfrak{A}}\to \operatorname{Hom}\mathfrak{A}$, $S(x\otimes\tilde{y})=L(x, y)$, so zeigt ein Vergleich von (4.2) mit (2.2), daß $(\mathfrak{A}, \tilde{\mathfrak{A}})$ mit $\mathfrak{H}=\operatorname{Bild} S$ ein verbundenes Paar ist. Damit gibt jedes JT-System Anlaß zur Konstruktion einer Lie-Algebra

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{A})=S(\mathfrak{A}\otimes\tilde{\mathfrak{A}})\oplus\mathfrak{A}\oplus\tilde{\mathfrak{A}}$$

mit

$$\begin{aligned}[X_1, X_2]=[S(A_1), S(A_2)]+S(a_1\otimes\tilde{b}_2-a_2\otimes\tilde{b}_1)\oplus S(A_1)\,a_2-S(A_2)\,a_1\\ \oplus S(A_1)\cdot\tilde{b}_2-S(A_2)\cdot\tilde{b}_1\end{aligned}$$

falls $X_i=S(A_i)\oplus a_i\oplus\tilde{b}_i$ $(i=1, 2)$ aus $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. Wir nennen $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ die *Standard-Einbettung* des JT-Systems $\mathfrak{A}$.

Diese Lie-Algebren und Verallgemeinerungen hiervon in Richtung Lie-Algebren von rationalen Funktionen werden auch in [8] und [9] untersucht.

2. Den Zusammenhang mit Jordan-Algebren liefert § 2. Die dort durch $\langle u\,a\,v\rangle$ auf $\mathfrak{B}=\tilde{\mathfrak{A}}$ gekennzeichnete Komposition ist hier $\langle u\,a\,v\rangle=-S(a\otimes u)\cdot v=S(u\otimes a)\,v=\{u\,a\,v\}$. Bezeichnen wir nun noch

$$P(x)\,a=\{x\,a\,x\},$$

so haben wir mit Satz 2.2

Satz 4.1. *In einem JT-System $\mathfrak{A}$ über einem durch 3 teilbaren Ring*[3] *gilt*

$$P(P(x)\,y)=P(x)\,P(y)\,P(x)$$

für alle $x, y\in\mathfrak{A}$.

Bemerkung. Ist $\mathfrak{A}$ das JT-System einer Jordan-Algebra, dann ist $P(x)$ die quadratische Darstellung von x in $\mathfrak{A}$ und die Formel des Satzes die bekannte Fundamentalformel.

Betrachten wir im JT-System $\mathfrak{A}$ bei festem $v\in\mathfrak{A}$ die Abbildung $(x, y)\mapsto x\,y=\{x\,v\,y\}$, so wird $\mathfrak{A}$ mit diesem Produkt zu einer kommutativen Algebra, die wir mit $\mathfrak{A}_v$ bezeichnen. Satz 2.3 zeigt

Satz 4.2. *Es sei $\mathfrak{A}$ ein JT-System über einem durch 3 teilbaren Ring. Für jedes $v\in\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A}_v$ eine Jordan-Algebra.*

3. Für die Komposition $(x, y, z)\mapsto\{x\,y\,z\}$ im JT-System definieren wir „Potenzen" durch

$$x^{(1)}:=x,\qquad x^{(k+2)}:=\{x^{(k)}\,x\,x\}\quad\text{für ungerades } k.$$

Es bezeichne $a^{(n,v)}$ die n-te Potenz des Elementes a in der Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_v$. (K wird als durch 2 und 3 teilbar vorausgesetzt.) Mit Induktion sieht man sofort

$$x^{(n,x)}=x^{(2n-1)}\qquad(n\geqq 1).\tag{4.3}$$

Satz 4.3. *Das JT-System $\mathfrak{A}$ über einem durch 2 und 3 teilbaren Ring ist potenz-assoziativ in dem Sinne, daß*

$$\{x^{(k)}\,x^{(l)}\,x^{(m)}\}=x^{(k+l+m)}$$

für ungerade $k, l, m\in\mathbb{N}$ und alle $x\in\mathfrak{A}$ gilt.

Beweis. Sei $x\in\mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{A}_x$ nach Satz 4.2 eine Jordan-Algebra, insbesondere also potenz-assoziativ. Für x gilt somit $\{x^{(n,x)}\,x\,x^{(m',x)}\}=x^{(n+m',x)}$. Wegen (4.3) folgt hieraus $\{x^{(k)}\,x\,x^{(m)}\}=x^{(k+m+1)}$ für $k=2n-1$, $m=2m'-1$; das ist die Behauptung für $l=1$.

In (4.1 b) setzen wir $y=x$, $u=x^{(k)}$, $v=x^{(l)}$, $w=x^{(m)}$. Dies ergibt die Induktion von l auf $l+2$.

4. Ein Untermodul $\mathfrak{U}$ eines JT-Systems $\mathfrak{A}$ heißt ein *Ideal* von $\mathfrak{A}$, wenn gilt

$$\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{A}\}\subset\mathfrak{U}\quad\text{und}\quad\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\}\subset\mathfrak{U}.$$

Ein JT-System $\mathfrak{A}$ heißt *einfach*, wenn es keine nicht trivialen Ideale enthält und wenn $\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\}\neq 0$.

Ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ einfach, dann ist nach § 1 das LT-System $\mathfrak{A}\oplus\check{\mathfrak{A}}$ einfach und damit nach § 2, Korollar 2, auch das JT-System $\mathfrak{A}$.

[3] Benötigt wird nur $\{a\,v\{a\,u\,a\}\}=\{a\,u\{a\,v\,a\}\}=\{a\{u\,a\,v\}\,a\}$.

Nun sei das JT-System $\mathfrak{A}$ einfach und $\mathfrak{A}_0+\tilde{\mathfrak{B}}_0\neq 0$ ein LT-Ideal in $\mathfrak{A}\oplus\tilde{\mathfrak{A}}$. Nach § 2.5 gilt dann

$$\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_0\}\subset\mathfrak{A}_0,\quad \{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_0\}\subset\mathfrak{B}_0,$$
$$\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}\}\subset\mathfrak{B}_0,^4\quad \{\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_0\,\mathfrak{A}\}\subset\mathfrak{A}_0.$$

Betrachten wir $\mathfrak{U}=\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_0+\mathfrak{B}_0$, so sehen wir aus den angegebenen Eigenschaften, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ Ideale des JT-Systems $\mathfrak{A}$ sind. Also ist $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}$. Ist $\mathfrak{U}=0$, so haben wir $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$, falls $\mathfrak{U}=\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{B}_0=\mathfrak{A}$. Soweit ergeben diese Betrachtungen zunächst

Satz 4.4. *Ist $\mathfrak{A}$ ein einfaches JT-System, dann operiert $S(\mathfrak{A}\otimes\tilde{\mathfrak{A}})$ irreduzibel auf $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}$ ist direkte Summe zweier irreduzibler Teilsysteme $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\oplus\mathfrak{A}_2$ mit $\{\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_i\}=0$ $(i=1,2)$. Ist $\mathfrak{A}$ endlichdimensional über K der* Char 0, *dann ist* $\dim\mathfrak{A}_1=\dim\mathfrak{A}_2$.

Beweis. Sei $0\neq\mathfrak{A}_0\neq\mathfrak{A}$ ein $S(\mathfrak{A}\otimes\tilde{\mathfrak{A}})$-invarianter Untermodul von $\mathfrak{A}$, dann ist nach Korollar 1 zu Lemma 2.5 $\mathfrak{A}_0\oplus\tilde{\mathfrak{B}}_0$ mit $\mathfrak{B}_0=\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}\}$ ein LT-Ideal in $\mathfrak{A}\oplus\tilde{\mathfrak{A}}$. Nach obigen Überlegungen ist dann $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$ mit invariantem $\mathfrak{B}_0$. Nun ist $\{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\}\subset\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{B}_0=0$. Analog erhält man $\{\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_0\}=0$. Ferner ist klar, daß $\mathfrak{A}_0$ irreduzibel ist, denn für invariantes $0\neq\mathfrak{A}_0'\subset\mathfrak{A}_0$ erhält man wie oben $\mathfrak{A}_0'\oplus\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_0'\,\mathfrak{A}\}=\mathfrak{A}_0\oplus\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}\}$, also $\mathfrak{A}_0'=\mathfrak{A}_0$. Entsprechend findet man, daß $\mathfrak{B}_0$ irreduzibel ist. Wegen $\{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\}=\{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\}+\{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\}\subset\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{B}_0=0$ sehen wir $S(\mathfrak{A}_0\otimes\tilde{\mathfrak{A}}_0)=0$, ähnlich $S(\mathfrak{B}_0\otimes\tilde{\mathfrak{B}}_0)=0$.

Wir betrachten nun die Abbildung D: $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})\to\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$, definiert durch D: $S(A)\oplus(a_0+b_0)\oplus(\tilde{a}_1+\tilde{b}_1)\mapsto a_0\oplus-\tilde{b}_1$. Man verifiziert leicht, daß D eine Derivation von $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ ist. Da $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ halbeinfach ist (vgl. den folgenden Satz) und Char $K=0$, ist $D=\operatorname{ad}X$. Aus der Definition ersieht man nun, daß X aus dem Zentrum von Bild S ist, mit $\operatorname{ad}X|_{\mathfrak{A}_0}=\mathrm{Id}|_{\mathfrak{A}_0}$, $\operatorname{ad}X|_{\mathfrak{B}_0}=-\mathrm{Id}|_{\mathfrak{B}_0}$. Ist $\mathfrak{A}$ endlichdimensional, so kann man Spuren betrachten. Da $\operatorname{ad}X\in[\operatorname{ad}\mathfrak{A},\operatorname{ad}\tilde{\mathfrak{A}}]$, hat man $\operatorname{Spur}(\operatorname{ad}X)=0$. Hieraus folgt wegen $\operatorname{ad}X|_{\text{Bild }S}=0$ dann $\dim\mathfrak{A}_0=\dim\mathfrak{B}_0$. (Ein solcher Schluß wurde von Lister für LT-Systeme verwendet.)

Satz 4.5. *Ist $\mathfrak{A}$ ein einfaches JT-System, dann ist die Lie-Algebra $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ direkte Summe von einfachen Idealen.*

Beweis. Ist $\mathfrak{A}$ irreduzibel, so liefert das Korollar zu Lemma 2.6, daß $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ direkte Summe von einfachen Idealen ist. Im Falle, daß $\mathfrak{A}$ zerfällt, $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0\oplus\mathfrak{B}_0$, betrachten wir die Teilalgebren von $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$:

$$\mathfrak{L}_1=S(\mathfrak{A}_0\otimes\tilde{\mathfrak{B}}_0)\oplus\mathfrak{A}_0\oplus\tilde{\mathfrak{B}}_0,$$
$$\mathfrak{L}_2=S(\mathfrak{B}_0\otimes\tilde{\mathfrak{A}}_0)\oplus\mathfrak{B}_0\oplus\tilde{\mathfrak{A}}_0$$

und sehen leicht ein, daß $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})=\mathfrak{L}_1\oplus\mathfrak{L}_2$ gilt. Da nun

$$S(\mathfrak{A}\otimes\tilde{\mathfrak{A}})|_{\mathfrak{A}_0}=S(\mathfrak{A}_0\otimes\tilde{\mathfrak{B}}_0)|_{\mathfrak{A}_0},$$

[4] Man beachte hier $S(\mathfrak{A}_0\otimes\tilde{\mathfrak{A}})\cdot\tilde{\mathfrak{A}}=\widetilde{\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_0\,\mathfrak{A}\}}$.

so operiert $S(\mathfrak{A}_0 \otimes \mathfrak{B}_0)$ irreduzibel auf $\mathfrak{A}_0$, entsprechend auf $\mathfrak{B}_0$. Wieder mit dem Korollar zu Lemma 2.6 haben wir die Aussage für $\mathfrak{L}_1$, analog für $\mathfrak{L}_2$, und der Satz ist bewiesen.

§ 5. Radikale in JT-Systemen

1. Gemäß § 3.3 werden wir einen Bild S-invarianten Untermodul $\mathfrak{A}_0$ des JT-Systems $\mathfrak{A}$ *auflösbar* nennen, wenn $\mathfrak{A}_0 \oplus \widetilde{\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\}}$ und $\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\} \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_0$ im LT-System $\mathfrak{A} \oplus \tilde{\mathfrak{A}}$ auflösbar sind. Ist $\mathfrak{A}_0$ auflösbar, so auch $\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\}$ und damit nach Lemma 3.3 auch $\mathfrak{U} = \mathfrak{A}_0 \cap \{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_0 + \{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\}$. In § 4 haben wir gesehen, daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ Ideale von $\mathfrak{A}$ sind. Wir haben damit: *Zu einem invarianten auflösbaren Untermodul $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$ gibt es auflösbare Ideale $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{B}$.*

Im Hinblick auf das Radikal genügt es daher, wenn wir uns mit auflösbaren Idealen von $\mathfrak{A}$ beschäftigen.

Ist also $\mathfrak{A}_0$ ein Ideal von $\mathfrak{A}$, so haben wir wegen $\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{A}_0$ und Lemma 3.2

Lemma 5.1. *$\mathfrak{A}_0$ ist genau dann auflösbar in $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_0$ auflösbar ist im LT-System $\mathfrak{A} \oplus \tilde{\mathfrak{A}}$.*

2. Für ein Ideal $\mathfrak{U}$ eines LT-Systems $\mathfrak{T}$ haben wir definiert (vgl. (1.3))

$$\mathfrak{U}^{\langle 0\rangle} = \mathfrak{U}, \qquad \mathfrak{U}^{\langle k+1\rangle} = \mathfrak{i}(\mathfrak{U}^{\langle k\rangle})\,\mathfrak{U}^{\langle k\rangle}.$$

$\mathfrak{U}$ heißt auflösbar, wenn $\mathfrak{U}^{\langle k\rangle} = 0$ für ein $k \geqq 0$. Aus den Definitionen in § 3.2 und dem in § 2 beschriebenen Zusammenhang mit LT-Systemen ist evident, daß für ein split Ideal $\mathfrak{A}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_0$ aus $\mathfrak{A} \oplus \tilde{\mathfrak{A}}$ gilt

$$\mathfrak{i}(\mathfrak{A}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_0)(\mathfrak{A}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_1) = i(\mathfrak{A}_0, \tilde{\mathfrak{B}}_0)(\mathfrak{A}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{B}}_1).$$

Zu einem Ideal $\mathfrak{A}_0$ des JT-Systems $\mathfrak{A}$ ist $\mathfrak{A}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_0$ ein split LT-Ideal von $\mathfrak{A} \oplus \tilde{\mathfrak{A}}$. Wir betrachten nun

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_0)^{\langle 1\rangle} &= i(\mathfrak{A}_0, \tilde{\mathfrak{A}}_0)(\mathfrak{A}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_0) \\ &= \{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\} + \{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\} + \widetilde{\{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\}} + \widetilde{\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\}}.\end{aligned}$$

Damit liegt folgende Definition nahe:

$$\mathfrak{A}_0 \circ \mathfrak{A}_0 = \{\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\} + \{\mathfrak{A}\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_0\}.$$

Da ein Produkt von LT-Idealen wieder ein LT-Ideal ist, haben wir mit Lemma 2.4

$$\{\mathfrak{A}\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_0 \circ \mathfrak{A}_0)\} \subset \mathfrak{A}_0 \circ \mathfrak{A}_0 \quad \text{und} \quad \{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_0 \circ \mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{A}\} \subset \mathfrak{A}_0 \circ \mathfrak{A}_0,$$

folglich ist $\mathfrak{A}_0 \circ \mathfrak{A}_0$ ein JT-Ideal von $\mathfrak{A}$. Wir definieren

$$\mathfrak{A}_0^{(0)} = \mathfrak{A}_0, \qquad \mathfrak{A}_0^{(k+1)} = \mathfrak{A}_0^{(k)} \circ \mathfrak{A}_0^{(k)}.$$

Lemma 5.2. *Ein Ideal* $\mathfrak{A}_0$ *von* $\mathfrak{A}$ *ist genau dann auflösbar, wenn* $\mathfrak{A}_0^{(k)}=0$ *für ein* $k\geqq 0$.

Beweis. Eine einfache Induktion zeigt

$$(\mathfrak{A}_0 \oplus \tilde{\mathfrak{A}}_0)^{\langle k\rangle} = \mathfrak{A}_0^{(k)} + \widetilde{\mathfrak{A}_0^{(k)}}.$$

Das gibt die Behauptung.

Man hat also im JT-System jetzt einen Auflösbarkeitsbegriff, bei dem man nicht mehr das zugehörige LT-System betrachten muß. Ist $\mathfrak{A}$ noethersch, dann gibt es wieder ein maximales auflösbares Ideal in $\mathfrak{A}$, dies stimmt offensichtlich mit dem in § 3.3 definierten Radikal überein.

Die Korollare zu Satz 3.4 ergeben hier

Satz 5.3. *Es sei* $\mathfrak{A}$ *ein JT-System mit noetherscher Standard-Einbettung* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$. *Es ist* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ *genau dann halbeinfach, wenn* $\mathfrak{A}$ *halbeinfach ist.*

3. Wir wollen nun eine weitere Radikaldefinition für das JT-System $\mathfrak{A}$ geben, die, das sei hier nur bemerkt, auch sehr schön für Jordan-Algebren angepaßt zu sein scheint.

Nach Satz 2.2 ist $\mathfrak{A}_v$ (d.i. $\mathfrak{A}$ mit $(x, y)\mapsto x\,y=\{x\,v\,y\}$) eine Jordan-Algebra für jedes $v\in\mathfrak{A}$, falls K durch 2 und 3 teilbar ist. Die linksreguläre Darstellung $L_v(x)$ von x in $\mathfrak{A}_v$ ist also $L(x, v)$ (d.h. $x\,y=L_v(x)\,y=L(x, v)\,y$). Die quadratische Darstellung $P_v(x)$ ist nach (4.1b)

$$P_v(x)=2L(x, v)^2-L(\{x\,v\,x\}, v)=P(x)\,P(v). \tag{5.1}$$

(Man setze in (4.1b) $x\to z$, $w=u=x$, $y=v$ und fasse das als Transformation in z auf.)

Wegen [2], Lemma 5.5 auf S. 153, haben wir

Lemma 5.4. *Ist* $\mathfrak{A}$ *ein JT-System über* K *und ist* K *durch* 2 *und* 3 *teilbar, dann sind äquivalent:*

a) x *ist nilpotent in* $\mathfrak{A}_v$,
b) $L(x, v)$ *ist nilpotent,*
c) $P(x)\,P(v)$ *ist nilpotent,*
d) $P(v)\,P(x)$ *ist nilpotent,*
e) $L(v, x)$ *ist nilpotent,*
f) v *ist nilpotent in* $\mathfrak{A}_x$.

Beweis. Die Äquivalenz von a), b) und c) zeigt gerade das erwähnte Lemma aus [2] und $P_v(x)=P(x)\,P(v)$. Nun ist aber für lineare Abbildungen AB nilpotent genau dann, wenn BA nilpotent ist; also kann man x mit v vertauschen.

Wir nennen nun ein Element x aus dem JT-System $\mathfrak{A}$ (K durch 2, 3 teilbar) *strikt nilpotent*, wenn x nilpotent ist in jeder Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_v$. Ein JT-Ideal $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{A}$ nennen wir *strikt nil*, wenn jedes Element von $\mathfrak{U}$ strikt nilpotent ist.

Lemma 5.5. *Sind die JT-Ideale* $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{A}$ *strikt nil, so auch* $\mathfrak{U}+\mathfrak{B}$.

Beweis. Ein JT-Ideal von $\mathfrak{A}$ ist auch Ideal in jeder Algebra $\mathfrak{A}_v$; ist demnach ein Ideal strikt nil im JT-System, so ist es ein Nilideal in jeder Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_v$. Nun ist eine Summe von Nilidealen einer Jordan-Algebra wieder ein Nilideal, also ist $\mathfrak{U}+\mathfrak{B}$ Nilideal in $\mathfrak{A}_v$ für alle v, d.h. $\mathfrak{U}+\mathfrak{B}$ ist strikt nil.

Da wir strikt nil für ein Ideal elementweise definiert haben, gibt es nach dem Zornschen Lemma ein maximales Ideal unter denen, die strikt nil sind. Dieses ist wegen Lemma 5.5 eindeutig bestimmt. Wir nennen es das *Nilradikal* des JT-Systems und bezeichnen es mit $R(\mathfrak{A})$. Von dem Nilradikal kann man leicht eine der wesentlichen Eigenschaften, die man von einem Radikal verlangt, nämlich

$$R(\mathfrak{A}/R(\mathfrak{A}))=0$$

nachweisen. Eine weitere Forderung an ein „schönes" Radikal ist die, daß die x mit $P(x)=0$ im Radikal liegen sollen. (Für Jordan-Algebren vgl. [11].)

In [11] beweist McCrimmon folgendes Lemma (nach Theorem 11): Es sei $\mathfrak{J}$ eine Jordan-Algebra, $y\in\mathfrak{J}$ nilpotent und $z\in\mathfrak{J}$ ein absoluter Nullteiler (d.h. die quadratische Darstellung von z in $\mathfrak{J}$ ist Null), dann ist $y+z$ nilpotent.

Hiermit haben wir sofort

Lemma 5.6. *Ist* $x\in\mathfrak{A}$ *strikt nilpotent und* $u\in\mathfrak{A}$ *mit* $P(u)=0$, *dann ist* $x+u$ *strikt nilpotent.*

Beweis. Aus $P(u)=0$ hat man $P_v(u)=P(u)\,P(v)=0$ für alle v; d.h. u ist absoluter Nullteiler in jeder Algebra $\mathfrak{A}_v$. Nun kann man das Lemma von McCrimmon anwenden (für jede Algebra $\mathfrak{A}_v$).

Wir bezeichnen

$$Z(\mathfrak{A})=\{x,\, x\in\mathfrak{A},\, P(x)=0\},$$

insbesondere besteht $Z(\mathfrak{A})$ aus absoluten Nullteilern aus $\mathfrak{A}_v$ für jedes $v\in\mathfrak{A}$. Völlig analog wie Theorem 9 aus [11] zeigt man: Das von $Z(\mathfrak{A})$ erzeugte Ideal Z_v in $\mathfrak{A}_v$ besteht aus endlichen Summen von Elementen aus Z. Nach Lemma 5.6 ist also jedes Element aus Z_v nilpotent in $\mathfrak{A}_v$. Wir betrachten

$$\mathfrak{U}=\bigcap_{v\in\mathfrak{A}} Z_v.$$

Zunächst haben wir $Z(\mathfrak{A})\subset\mathfrak{U}$. $\mathfrak{U}$ ist ein Ideal in jeder Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_v$, also $\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\}\subset\mathfrak{U}$. Mit $x\in Z(\mathfrak{A})$ ist wegen der Fundamentalformel auch $P(a)\,x\in Z(\mathfrak{A})$ für alle $a\in\mathfrak{A}$, also gilt auch $P(a)\,Z_v\subset Z_v$ für alle $a\in\mathfrak{A}$, und damit $\{\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}\,\mathfrak{A}\}\subset\mathfrak{U}$. Somit ist $\mathfrak{U}$ ein Ideal von $\mathfrak{A}$, das strikt nil ist. Wir haben bewiesen:

Satz 5.7. $$Z(\mathfrak{A})\subset R(\mathfrak{A}).$$

Wir zeigen weiter, daß $R(\mathfrak{A})$ auch keine regulären Elemente $\neq 0$ enthält (wir nennen x *regulär*, wenn es ein y gibt mit $\{x\,y\,x\}=x$), denn es gilt

Lemma 5.8. *Ist* x *strikt nilpotent und regulär, so ist* $x=0$.

Beweis. x strikt nilpotent ist wegen Lemma 5.4 äquivalent mit $P(x)\,P(v)$ nilpotent für alle $v\in\mathfrak{A}$. Sei x regulär, also $P(x)\,y=x$ mit geeignetem y, dann folgt aus der Fundamentalformel

$$P(x)=P\big(P(x)\,y\big)=P(x)\,P(y)\,P(x),$$

also

$$x=P(x)\,y=P(x)\,P(y)\,P(x)\,y=P(x)\,P(y)\,x,$$

und daraus

$$x=[P(x)\,P(y)]^k\,x \qquad \text{für alle } k\geqq 1;$$

also $x=0$, da $P(x)\,P(y)$ nilpotent ist.

Bemerkung. Ersetzt man im Vorhergehenden JT-System durch Jordan-Algebra und strikt nilpotent durch nilpotent in jeder Mutation, dann hat man die Begriffe für Jordan-Algebren. Mit dem so definierten Radikal für Jordan-Algebren gelten auch die Theoreme 12 und 13 aus [11] mit den gleichen Beweisen. Im endlichdimensionalen Fall (für Jordan-Algebren über K der Char $\neq 2$) stimmt unser hier vorgeschlagenes Radikal mit dem üblichen überein. Dies folgt daraus, daß ein Nilideal in einer Jordan-Algebra nilpotent ist ([1]), damit dann strikt nil.

§ 6. Endlichdimensionale JT-Systeme und die Spurform

1. Es sei $\mathfrak{A}$ ein endlichdimensionales JT-System über dem Körper K mit der Komposition $(x, y, z)\mapsto\{x\,y\,z\}=L(x, y)\,z=S(x\otimes y)\,z$. Wir setzen

$$\lambda(x, y)=\mathrm{Spur}\,[L(x, y)+L(y, x)].$$

λ heißt die *Spurform* auf $\mathfrak{A}$.

Aus (4.2b) erhalten wir

$$\mathrm{Spur}\,L(\{x\,y\,u\}, v)=\mathrm{Spur}\,L(u, \{y\,x\,v\}) \tag{6.1}$$

und daraus

$$\lambda(\{x\,y\,u\}, v)=\lambda(u, \{y\,x\,v\}). \tag{6.2}$$

Da die linke Seite symmetrisch ist in u und x haben wir auch

$$\lambda(u, \{y\,x\,v\})=\lambda(x, \{y\,u\,v\}). \tag{6.3}$$

In [8] und [9] wird die Killingform von $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ durch die Spurform von $\mathfrak{A}$ ausgedrückt und ferner gezeigt, *daß die Killingform auf* $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ *genau dann nicht ausgeartet ist, wenn die Spurform auf* $\mathfrak{A}$ *nicht ausgeartet ist.*

Wegen (6.2) und (6.3) sehen wir, daß

$$B\,k_\lambda=\{x\in\mathfrak{A};\ \lambda(x, a)=0 \text{ für alle } a\in\mathfrak{A}\}$$

ein JT-Ideal in $\mathfrak{A}$ ist. Ist also Char $K=0$, $\lambda\neq 0$ und $\mathfrak{A}$ einfach, dann ist $\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ halbeinfach (vgl. auch Satz 4.5).

2. Wir beweisen jetzt

Satz 6.1. *Ist $\mathfrak{A}$ ein endlichdimensionales JT-System über einem Körper der Charakteristik Null, dann besteht der Bilinearkern Bk_λ der Spurform von $\mathfrak{A}$ genau aus den strikt nilpotenten Elementen von $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Ist x nilpotent in $\mathfrak{A}_v$, dann sind nach Lemma 5.4 $L(x, v)$ und $L(v, x)$ nilpotent, also $\lambda(x, v)=0$, gilt dies für alle $v\in\mathfrak{A}$, so ist $x\in Bk_\lambda$.

Sei x nicht strikt nilpotent, dann gibt es ein $v\in\mathfrak{A}$, so daß x nicht nilpotent ist in der Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_v$ (und v nicht nilpotent in $\mathfrak{A}_x$). Nach [2], Lemma 3.2 auf S. 13, gibt es dann ein Idempotent c in dem von den Potenzen in $\mathfrak{A}_v$ von x aufgespannten Unterraum von $\mathfrak{A}$, also $\{c\,v\,c\}=c$. Aus (4.1b) finden wir $\{v\,c\{v\,c\,v\}\}=\{v\,c\,v\}$; d. h. $v^{(3,c)}=v^{(2,c)}$, also ist $\{v\,c\,v\}$ Idempotent in $\mathfrak{A}_c$ ($\{v\,c\,v\}\neq 0$ wird weiter unten gezeigt). In einer Jordan-Algebra hat die linksreguläre Darstellung eines Idempotents nur die Eigenwerte $0, \frac{1}{2}, 1$ (und 1 kommt stets vor). Falls also Char $K=0$, dann ist Spur $L(c, v)=\alpha\cdot 1$, $\alpha>0$. Ferner ist wegen (6.1) $0\neq$ Spur $L(c, v)=$ Spur $L(\{c\,v\,c\}, v)=$ Spur $L(c, \{v\,c\,v\})$. Hieraus folgt $\{v\,c\,v\}\neq 0$. Damit ist nun, da $\{v\,c\,v\}\neq 0$ ein Idempotent in $\mathfrak{A}_c$ ist, wieder mit (6.1)

$$\text{Spur } L(v, c)=\text{Spur } L(v, \{c\,v\,c\})=\text{Spur } L(\{v\,c\,v\}, c)=\beta\cdot 1, \qquad \beta>0.$$

Damit ist $\lambda(c, v)\neq 0$.

Es ist $c=\sum_{n\geq 1}\alpha_n x^{(n,v)}$; aus (6.2) sieht man dann $\lambda(c, v)=\lambda(x, v')\neq 0$, also liegt x auch nicht in Bk_λ. Damit ist der Satz bewiesen.

In der Bezeichnung aus § 5 haben wir

$$Bk_\lambda=R(\mathfrak{A}).$$

Wegen Char $K=0$ gilt das

Korollar. *$\mathfrak{L}(\mathfrak{A})$ ist genau dann halbeinfach, wenn $R(\mathfrak{A})=0$.*

(Auch dies motiviert die Definition des Nilradikals wie in § 3.)

3. Für den Rest dieses Paragraphen sei $\mathfrak{A}$ ein endlichdimensionales JT-System über K mit nicht ausgearteter Spurform.

Lemma 6.2. Spur $L(x, y)=$ Spur $L(y, x)$.

Beweis. Aus (6.2) ersichtlich ist $L(y, x)$ das λ-Adjungierte von $L(x, y)$.

Die nun folgenden „Sternbildungen" sind bezüglich λ. Wir identifizieren $\mathfrak{A}\otimes\tilde{\mathfrak{A}}$ mit Hom $\mathfrak{A}$ vermöge $x\otimes\tilde{y}\mapsto x\,y^*$, wobei $x\,y^*\,z:=\lambda(z, y)\,x$. Damit wird S: Hom $\mathfrak{A}\to$ Hom $\mathfrak{A}$ definiert durch

$$S(x\,y^*)=L(x, y).$$

Lemma 6.3. Spur $S(A)\,B=$ Spur $AS(B)$.

Beweis. Mit (6.3) und Spur $a\,b^*=\lambda(a, b)$ folgt

$$\begin{aligned}\text{Spur } S(x\,y^*)\,u\,v^* &= \lambda(\{x\,y\,u\}, v)=\lambda(\{x\,v\,u\}, y)=\text{Spur } S(u\,v^*)\,x\,y^*\\ &=\text{Spur } x\,y^*\,S(u\,v^*).\end{aligned}$$

Lemma 6.4. $S(2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$.

Beweis. Wegen Lemma 6.2 und Lemma 6.3 haben wir

$$\lambda(x, y) = 2\,\mathrm{Spur}\, L(x, y) = 2\,\mathrm{Spur}\, S(x\, y^*) = 2\,\mathrm{Spur}\, S(\mathrm{Id})\, x\, y^* = \lambda(S(2\,\mathrm{Id})\, x, y).$$

Da λ nicht ausgeartet ist, folgt hieraus die Behauptung.

Bemerkung. Die Lemmata 6.2 – 6.4 sind unabhängig von vorliegender Arbeit in etwas anderer Form auch in [9] bewiesen.

Von nun an sei Char $K \neq 2, 3$.

Zu festem $v \in \mathfrak{A}$ ist $x \mapsto \lambda(x, v)$ eine assoziative Linearform auf der Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_v$ (sogar eine normale Linearform im Sinne von [2], da es sich um die Spur der linksregulären Darstellung handelt). Wir bezeichnen sie mit λ_v, also $\lambda_v(x) = \lambda(x, v)$.

Sei $B\,k_{\lambda_v} = \{x, \lambda_v(\{x\, v\, y\}) = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{A}\}$.

Lemma 6.5. $\bigcap_{v \in \mathfrak{A}} B\,k_{\lambda_v} = 0$.

Beweis. Sei $x \in \bigcap B\,k$, d.h. $\lambda(\{x\, v\, y\}, v) = 0$ für alle v und alle y. Wegen (6.3) ist dann $\lambda(\{x\, u\, y\}, v) = 0$ für alle $v, y, u \in \mathfrak{A}$; also $\{y\, u\, x\} = 0$ für alle u, y. Nun sei $2\,\mathrm{Id} = \sum y\, u^*$, so folgt mit Lemma 6.4: $0 = \sum \{y\, u\, x\} = S(\sum y\, u^*)\, x = x$.

Lemma 6.6. *Ist $\mathfrak{B}$ ein JT-Ideal von $\mathfrak{A}$, dann ist λ auch nicht ausgeartet auf $\mathfrak{B}$.*

Beweis. Sei $u \in \mathfrak{B}$ und $\lambda(u, v) = 0$ für alle $v \in \mathfrak{B}$. Da $\mathfrak{B}$ ein Ideal ist, ist nach (6.2) auch $\lambda(\{v\, x\, u\}, x) = \lambda(u, \{x\, v\, x\}) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{A}$, $v \in \mathfrak{B}$. Also ist $\lambda_x(u \cdot v) = 0$ für alle $v \in \mathfrak{B}$ (Multiplikation in $\mathfrak{A}_x$). Da ein Ideal in $\mathfrak{A}$ insbesondere ein Ideal in der Jordan-Algebra $\mathfrak{A}_x$ ist, haben wir nach [2], Satz 7.1 auf S. 34, $\lambda_x(y \cdot u) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{A}$, also ist $u \in B\,k_{\lambda_x}$. Dies gilt für alle x; aus Lemma 6.5 folgt nun $u = 0$.

Mit diesem Lemma haben wir das entscheidende Hilfsmittel zum Beweis des folgenden Struktursatzes:

Satz 6.7. *Ist $\mathfrak{A}$ ein endlichdimensionales JT-System über K der* Char $\neq 2, 3$ *und ist die Spurform auf $\mathfrak{A}$ nicht ausgeartet, dann ist $\mathfrak{A}$ eine direkte Summe von einfachen JT-Idealen.*

Beweis. Ist $\mathfrak{B}$ ein Ideal in $\mathfrak{A}$, dann ist natürlich wegen (6.2) und (6.3) das orthogonale Komplement $\mathfrak{B}^\perp$ von $\mathfrak{B}$ (bezüglich λ) ein Ideal von $\mathfrak{A}$. Wegen Lemma 6.6 ist $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^\perp = 0$, also $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B}^\perp$ (direkte Summe von JT-Idealen). Fängt man mit $\mathfrak{B}$ von minimaler Dimension an, setzt das Verfahren mit $\mathfrak{B}^\perp$ fort, dann folgt die Behauptung.

Zusatz. Die Eindeutigkeit einer solchen Zerlegung beweist man genau wie Theorem 4, S. 72, aus [4].

Literatur

1. Albert, A. A.: A structure theory for Jordan algebras. Ann. of Math. **48**, 546 – 567 (1947).
2. Braun, H., Koecher, M.: Jordan Algebren. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
3. Jacobson, N.: Lie and Jordan triple systems. Amer. J. Math. **71**, 149 – 170 (1949).
4. – Lie algebras. New York: Interscience 1962.
5. – Structure and representations of Jordan algebras. Ann. Math. Soc. Colloq. Publ., 1968.

6. Koecher, M.: Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras I. Amer. J. Math. **89**, 787–816 (1967).
7. – Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras II. Amer. J. Math. **90**, 476–510 (1968).
8. – Gruppen und Lie-Algebren von rationalen Funktionen. Math. Z. **109**, 349–392 (1969).
9. – Symmetric spaces. Lecture notes, Rice University, Houston, Texas, 1969.
10. Lister, W. G.: A structure theory of Lie triple systems. Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 217–242 (1952).
11. McCrimmon, K.: The radical of a Jordan algebra. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **62**, 671–678 (1969).
12. Meyberg, K.: The fundamental-formula in Jordan rings. Arch. der Math. **21**, 43–44 (1970).
13. – Jordan-Tripelsysteme und die Koecher-Konstruktion von Lie-Algebren. Habilitationsschrift, München 1969.
14. Yamaguti, K.: On algebras of totally geodesic spaces (Lie triple systems). J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **21**, 107–113 (1957/58).

Dr. Kurt Meyberg
Mathematisches Institut
der Universität München
D-8000 München 13
Schellingstr. 2–8

(Eingegangen am 8. Januar 1970)