Werk

Titel: Problemorientierte Hierarchie von Konvergenzbegriffen bei der numerischen Lösung ...

Autor: Ansorge, Rainer

Jahr: 1969

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0112|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 112, 13–22 (1969)

Problemorientierte Hierarchie von Konvergenzbegriffen bei der numerischen Lösung von Anfangswertaufgaben

RAINER ANSORGE

1. Die Klasse der betrachteten Anfangswertaufgaben

Gegeben sei ein Banachraum $\mathfrak{B}$ reeller Funktionen (bzw. Vektorfunktionen) u, die auf einem gewissen Bereich $\mathfrak{G} \subset \mathbb{R}^d$ definiert seien. $\mathbb{R}^d$ nennen wir den Raum der Ortsvariablen, wobei wir diese d Ortsvariablen im folgenden nicht explizit aufführen.

Gesucht sei eine einparametrige Schar $u(t)$ von Elementen aus $\mathfrak{B}$, die dort der Aufgabe

$$u_t = A\,u, \qquad u(0) = u_0 \qquad (t \geqq 0) \tag{1}$$

genügt. Dabei sei A ein (nicht notwendig linearer) Differentialoperator bezüglich der Ortsvariablen, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß A nicht explizit von dem (als Zeitvariable interpretierten) Parameter t abhängt. A bilde seinen Definitionsbereich $\mathfrak{B}_A \subset \mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ ab.

(1) stellt somit eine Anfangswertaufgabe für eine (nicht notwendig lineare) partielle Differentialgleichung (bzw. für ein System solcher Gleichungen) dar, wobei über den Typ der Differentialgleichung keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden.

Man kann nicht erwarten, daß (1) zu jedem $u_0 \in \mathfrak{B}$ eine Lösung besitzt.

Sei

$$\mathfrak{A} = \{u_0 \in \mathfrak{B} \mid \exists\, \tilde{T} = \tilde{T}(u_0) > 0\colon \text{ (1) besitzt eine eindeutige Lösung } \{u(t)\} \subset \mathfrak{B} \text{ im Streifen } 0 \leqq t \leqq \tilde{T}\}.$$

Es sei $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{A}$ dicht in $\mathfrak{B}$ und $\inf\limits_{u_0 \in \mathfrak{D}} \tilde{T}(u_0) =: T > 0$.

Die Lösungen $\{\{u(t)\} \mid u_0 \in \mathfrak{D},\ 0 \leqq t \leqq T\}$ sollen durch ein Differenzenverfahren numerisch approximiert werden. Die Zuordnung dieser Lösungselemente $u(t)$ zu dem jeweiligen Anfangselement u_0 werde durch

$$u(t) = E_0(t)\,u_0 \qquad (0 \leqq t \leqq T) \tag{2}$$

beschrieben, wobei die so definierten (nicht notwendig linearen) *Lösungsoperatoren* $E_0(t)$ den metrischen Raum $\mathfrak{D}$ (metrisiert mittels der in $\mathfrak{B}$ gegebenen Norm) stetig in $\mathfrak{B}$ abbilden mögen.

2. Das Differenzenverfahren

Das zur Approximation herangezogene Differenzenverfahren (bei dem wir uns der Übersichtlichkeit halber auf Einschrittverfahren beschränken) schreiben wir in der Form

$$u_n = C(h)u_{n-1} \qquad (n=1,2,\ldots), \tag{3}$$

woraus

$$u_n = C^n(h)u_0$$

resultiert.

Dabei sei h eine äquidistante Schrittweite in t-Richtung, mit der die nicht notwendig äquidistanten Schrittweiten in Richtung der Ortsvariablen durch gewisse Beziehungen verknüpft seien. u_n sei die gesuchte Näherung für $u(t_n)$ $(t_n = n\,h)$.

Nach Ausdehnung des Gültigkeitsbereichs der Differenzengleichung (3) auch auf die Zwischengitterpunkte im Bereich der Ortsvariablen (vgl. z.B. [1], S. 30) seien die Differenzenoperatoren $C(h)$ für jedes feste $h \in [0, h_0]$ (mit geeignetem $h_0 > 0$) nicht notwendig lineare, jedoch stetige Abbildungen von $\mathfrak{B}$ in sich.

Wir setzen voraus, daß (3) die gegebene Aufgabe (1) im Sinne der folgenden Konsistenzbedingung approximiert:

$$\| C(h)E_0(t)u_0 - E_0(t+h)u_0 \| \leqq \varepsilon(h, u_0) = o(h) \qquad (\text{für } h \to 0) \tag{4}$$

für alle $u_0 \in \mathfrak{D}^*$, wobei $\mathfrak{D}^*$ dicht in $\mathfrak{D}$ (und damit auch dicht in $\mathfrak{B}$) ist und $\varepsilon(h, u_0)$ von den $t \in [0, T]$ nicht abhängt.

(4) besagt jedoch noch nicht notwendig, daß auch die *Lösung* der Differenzengleichung die *Lösung* der Aufgabe (1) approximiert, worunter die (noch zu präzisierende) Konvergenz der Lösung der Differenzengleichung gegen die Lösung der gegebenen Anfangswertaufgabe für $h \to 0$ (kurz: Verfahrenskonvergenz) verstanden werden soll.

Bevor wir uns der Frage der Definition geeigneter Konvergenzbegriffe zuwenden, sei ausdrücklich vermerkt, daß Differenzenverfahren häufig eine strukturreduzierende Eigenschaft im Sinne der Aussage

$$(C(h)\mathfrak{D}) \cap (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) \neq \emptyset \tag{5}$$

besitzen (als Beispiel sei das Verfahren von Courant, Isaacson und Rees [2] genannt, das z.B. bei Anwendung auf $u_t = u\,u_x$ ein 2π-periodisches $u_0(x) \in C^1(-\infty, \infty)$ i.a. in ein 2π-periodisches $u_1(x) \in C^0(-\infty, \infty) - C^1(-\infty, \infty)$ überführt; vgl. [3]). Andererseits erweist sich gerade die Struktur solcher Verfahren oft als sehr übersichtlich und daher für a-priori-Aussagen über die Eigenschaften der Verfahren als besonders geeignet.

3. Konvergenzbegriffe

Als Mindesteigenschaft eines als numerisch brauchbar anzusprechenden Differenzenverfahrens zur Lösung von (1) fordern wir Verfahrenskonvergenz im Sinne der folgenden Definition a):

Definition a). (3) heißt „konvergent auf $\mathfrak{D}$", wenn für jede bestimmt divergente Folge natürlicher Zahlen $\{n_j\} \to \infty$, jede Schrittweitennullfolge $\{h_j\} \to 0$ mit $\{n_j h_j\} \subset [0, T]$ und $\{n_j h_j\} \to t$ gilt:

$$\lim_{j \to \infty} Q_j u_0 = E_0(t) u_0 \qquad \text{für alle } u_0 \in \mathfrak{D}$$

(gefordert wird also die punktweise Konvergenz der *iterierten Differenzenoperatoren* Q_j gegen $E_0(t)$ auf $\mathfrak{D}$; $Q_j := C^{n_j}(h_j)$).

Allerdings ist diese Konvergenz *allein* i.a. noch kein ausreichendes Kriterium für die numerische Brauchbarkeit eines Verfahrens (vgl. jedoch die weiter unten angeführten Bemerkungen zum linearen Fall). Es treten fast stets unvermeidbare Rechenstörungen auf (z. B. Rundungsfehler). Begeht man etwa lediglich beim ersten Schritt einen solchen Fehler, startet die Rechnung also mit einer etwas verfälschten Anfangsfunktion $\tilde{u}_0$ (wobei wir zunächst $\tilde{u}_0 \in \mathfrak{D}$ annehmen), und vergleicht man die zu dieser gestörten Anfangsfunktion gehörende Lösung der Differenzengleichung mit der zur exakten Anfangsfunktion u_0 gehörenden Lösung der Differentialgleichung, so folgt

$$\|Q_j \tilde{u}_0 - E_0(t) u_0\| \leqq \|Q_j \tilde{u}_0 - E_0(t) \tilde{u}_0\| + \|E_0(t) \tilde{u}_0 - E_0(t) u_0\|. \tag{6}$$

Ist die Störung $\|\tilde{u}_0 - u_0\|$ hinreichend klein, so fällt $E_0(t)\tilde{u}_0$ aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit der Lösungsoperatoren gewiß in eine beliebig klein vorgegebene Umgebung von $E_0(t)u_0$. Bei vorausgesetzter Konvergenz des Verfahrens (im Sinne der Definition a)) existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gewiß auch ein $j_0(\varepsilon, \tilde{u}_0)$, so daß $\|Q_j \tilde{u}_0 - E_0(t)\tilde{u}_0\| < \varepsilon$ für alle $j \geqq j_0(\varepsilon, \tilde{u}_0)$. Hier stört nun jedoch, daß j_0 von $\tilde{u}_0$ abhängt, man also möglicherweise mit einer größeren Störung eine bessere Approximation erzielt als mit einer kleineren. Völlige Unabhängigkeit des j_0 von u_0, also gleichmäßige Konvergenz der Folge Q_j gegen $E_0(t)$, kann nur in seltenen Fällen erwartet werden, da i.a. der *lokale Fehler* $\varepsilon(h, u_0)$, der zumeist tatsächlich von u_0 abhängt, in Konvergenznachweise eingeht. Wünschenswert ist jedoch, daß man mit einem einheitlichen j_0 für alle $\tilde{u}_0$ einer gewissen Umgebung von u_0 auskommt. Diese Forderung aber ist mit der in der folgenden Definition c) angegebenen Konvergenzeigenschaft äquivalent (vgl. [4]) (wobei wir die erst weiter unten folgende Definition b) zunächst überspringen).

Definition c). (3) heißt „stetig konvergent auf $\mathfrak{D}$", wenn unter den in Definition a) bezüglich der Folgen $\{n_j\}$ und $\{h_j\}$ genannten Voraussetzungen gilt:

$$\lim_{\substack{j \to \infty \\ \{u_0^{(j)}\} \to u_0}} Q_j u_0^{(j)} = E_0(t) u_0$$

für jede gegen irgendein $u_0 \in \mathfrak{D}$ konvergierende Folge $\{u_0^{(j)}\} \subset \mathfrak{D}$ (gefordert wird also die stetige Konvergenz der Operatoren Q_j gegen $E_0(t)$ auf $\mathfrak{D}$; vgl. [5], S. 64 ff.).

Bezüglich der stetigen Konvergenz $\{Q_j\} \xrightarrow{st} E_0(t)$ der Folge $\{Q_j\}$ gegen $E_0(t)$ auf $\mathfrak{D}$ gilt nun der folgende, in dieser Formulierung auf Rinow ([5], S. 78/79) zurückgehende Satz:

Satz 1.

$$\{Q_j\} \xrightarrow{st} E_0(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha) & \textit{alle } Q_j \textit{ sind gleichgradig stetig auf } \mathfrak{D} \\ \beta) & \{Q_j\} \to E_0(t) \textit{ auf einer in } \mathfrak{D} \textit{ dichten Menge } \mathfrak{D}^*, \end{cases}$$

wobei α) und β) *zusammen* für die stetige Konvergenz der Folge $\{Q_j\}$ notwendig und hinreichend sind.

Speziell werden wir unter $\mathfrak{D}^*$ die in der Konsistenzbedingung (4) genannte Menge von Anfangselementen verstehen. Die Eigenschaft β) bedeutet die Konvergenz des Verfahrens (3) im Sinne der Definition a) auf $\mathfrak{D}^*$.

Man folgert leicht, daß bei stetiger Konvergenz des Verfahrens (3) sogar *alle* Operatoren $C^n(h)$ mit $nh \in [0, T]$ auf $\mathfrak{D}$ gleichgradig stetig sind. Diese gleichgradige Stetigkeit stellt eine numerisch sehr wünschenswerte Eigenschaft des Verfahrens dar, denn sie besagt, daß die Einflüsse von Rechenstörungen im wesentlichen schrittweitenunabhängig sind; es handelt sich also um eine Stabilitätseigenschaft des Verfahrens.

Stören mag noch, daß in der Definition c) nur Folgen $\{u_0^{(j)}\} \subset \mathfrak{D}$ zugelassen sind. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, denn ist das Verfahren auf $\mathfrak{D}$ im Sinne der Definition c) stetig konvergent, so folgt aufgrund der Tatsache, daß sich jede gegen $u_0 \in \mathfrak{D}$ konvergierende Folge $\{u_0^{(j)}\} \subset \mathfrak{B}$ beliebig genau durch eine gegen u_0 konvergierende Folge $\{u_0^{(j)}\} \subset \mathfrak{D}$ approximieren läßt, unter Ausnutzung der (individuellen) Stetigkeit der Q_j auf $\mathfrak{B}$ auch

$$\lim_{\substack{j \to \infty \\ \{u_0^{(j)}\} \to u_0}} Q_j u_0^{(j)} = E_0(t)\, u_0 \qquad (u_0 \in \mathfrak{D}, \{u_0^{(j)}\} \subset \mathfrak{B}). \tag{7}$$

Obschon sich die stetige Konvergenz eines Differenzenverfahrens aus den genannten Gründen als wünschenswert erweist, so wird man doch Einschränkungen hinnehmen müssen, da dem Versuch, die stetige Konvergenz eines konsistenten Verfahrens nachzuweisen, in stark nichtlinearen Fällen erhebliche Widerstände entgegenstehen, die z. T. strukturelle Ursachen haben:

Setzt man das Erfülltsein der Eigenschaft α) des Rinowschen Satzes (neben der Stetigkeit der Operatoren $C(h)$ auf $\mathfrak{B}$) voraus, so besteht die Aufgabe, aus α) in Verbindung mit der Konsistenzeigenschaft (4) das Erfülltsein von β) zu schließen.

Ein entsprechender Satz ohne Benutzung zusätzlicher Voraussetzungen über die Struktur der Aufgabe (1) und ihrer Approximation ist nicht bekannt.

Jedoch selbst unter solchen zusätzlichen Voraussetzungen macht es die strukturreduzierende Eigenschaft (5) der Differenzenoperatoren bereits in Beweisen zum Nachweis der Konvergenz im Sinne der Definition a) zumeist erforderlich, auch auf $\mathfrak{B} - \mathfrak{D}$ stärkere Stetigkeitseigenschaften als nur individuelle Stetigkeit der iterierten Differenzenoperatoren zu fordern.

Das letztgenannte Problem tritt in linearen Fällen (d.h. A linear, $E_0(t)$ linear, $C(h)$ linear, $\mathfrak{D}$ linearer Teilraum von $\mathfrak{B}$) unter der Voraussetzung gleichgradiger Stetigkeit auf $\mathfrak{D}$ nicht auf, da die gleichgradige Stetigkeit auf $\mathfrak{D}$ zusammen mit der Stetigkeit auf $\mathfrak{B}$ bereits die gleichgradige Stetigkeit auf $\mathfrak{B}$ nach sich zieht: Sind die (linearen) Operatoren $C^n(h)$ auf $\mathfrak{D}$ gleichgradig stetig, so sind sie dort auch gleichmäßig (bezüglich ihrer Normen) beschränkt; andererseits können die $C^n(h)$ auf $\mathfrak{B}$ als stetige lineare Erweiterungen der Restriktionen von $C^n(h)$ auf $\mathfrak{D}$ aufgefaßt werden und besitzen somit auf $\mathfrak{B}$ die gleichen Normen wie auf $\mathfrak{D}$, sind also auch auf $\mathfrak{B}$ gleichmäßig beschränkt und folglich dort gleichgradig stetig. Diese gleichmäßige Beschränktheit

$$\| C^n(h) \| \leqq c_0 < \infty \qquad \forall\, n\, h \in [0, T] \tag{8}$$

auf $\mathfrak{B}$ bezeichnen Lax und Richtmyer in ihrer Theorie der linearen Differenzapproximationen als Stabilität des Verfahrens (vgl. [1], S. 45ff.).

Es liegt deshalb nahe, auch in nichtlinearen Fällen die oben erwähnte Schwierigkeit auf $\mathfrak{B}-\mathfrak{D}$ durch die Stabilitätsforderung gleichgradig stetiger iterierter Differenzenoperatoren auf $\mathfrak{B}$ zu verringern. Dieser Forderung wiederum steht jedoch in Gestalt des folgenden Satzes (vgl. [6]) ein schwerwiegendes strukturelles Hindernis gegenüber:

Satz 2.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^*)\ \textit{alle } Q_j \textit{ gleichgradig stetig auf } \mathfrak{B} \\ \beta)\ \ \{Q_j\} \to E_0(t) \textit{ auf } \mathfrak{D}^* \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \exists \textit{ stetige Erweiterungen } E(t) \textit{ der} \\ \textit{Operatoren } E_0(t) \textit{ vom Definitions-} \\ \textit{bereich } \mathfrak{D} \textit{ auf den Definitionsbereich} \\ \mathfrak{B} \textit{ und } \{Q_j\} \xrightarrow{st} E(t) \textit{ auf } \mathfrak{B}. \end{array}$$

Die mit stetigen Erweiterungen $E(t)$ der Lösungsoperatoren $E_0(t)$ gebildeten Scharen

$$u(t) = E(t)\, u_0 \qquad (u_0 \in \mathfrak{B})$$

heißen *verallgemeinerte Lösungen* der Aufgabe (1).

Wichtiger als die Möglichkeit, mittels dieses Satzes gelegentlich die Existenz verallgemeinerter Lösungen nachweisen zu können (wobei dann das Verfahren (3) sogar auf $\mathfrak{B}$ stetig gegen die verallgemeinerten Lösungen konvergiert), ist in unserem Zusammenhang die folgende Interpretation: Besitzt die Aufgabe (1) keine verallgemeinerten Lösungen, so existiert kein approximierendes Differenzenverfahren mit auf $\mathfrak{B}$ gleichgradig stetigen iterierten Differenzenoperatoren.

Im linearen Fall existieren nun in der Tat solche verallgemeinerten Lösungen aufgrund eines elementaren funktionalanalytischen Satzes (vgl. z.B. [7], S. 105 ff.); die für die stetige Konvergenz auf $\mathfrak{D}$ notwendige Stabilitätsbedingung (8) ist daher realistisch und gewährleistet umgekehrt aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned} \| C^n(h)\, u_0 - E_0(t)\, u_0 \| &\leqq \sum_{\nu=0}^{n-1} \| C^\nu(h)\, C(h)\, E_0(t_{n-\nu-1})\, u_0 - C^\nu(h)\, E_0(t_{n-\nu})\, u_0 \| \\ &\leqq c_0 \sum_{\nu=0}^{n-1} \| C(h)\, E_0(t_{n-\nu-1})\, u_0 - E_0(t_{n-\nu})\, u_0 \| \end{aligned}$$

unter Ausnutzung der Konsistenzeigenschaft (4) in der Tat auch das Erfülltsein der Eigenschaft β) des Rinowschen Satzes. (8) ist daher für die stetige Konvergenz auf $\mathfrak{D}$ auch hinreichend und gewährleistet mit Satz 2 zugleich die stetige Konvergenz *auf* $\mathfrak{B}$ gegen die verallgemeinerten Lösungen.

Unter Berücksichtigung des Satzes von Banach und Steinhaus (vgl. z.B. [7], S. 204 ff.) erweist sich (8) sogar schon als notwendig für die Konvergenz des Verfahrens (im Sinne der Definition a)) auf $\mathfrak{B}$ [1].

Bei linearen Problemen entfallen daher alle aufgeführten Komplikationen, das Konzept der stetigen Konvergenz ist für diese Problemklasse angemessen und fällt mit der Konvergenz im Sinne der Definition a) zusammen, wenn man in dieser Definition $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{B}$ ersetzt.

Auch bei gewissen Klassen halblinearer Probleme läßt sich die Existenz verallgemeinerter Lösungen nachweisen, obschon die Lösungsoperatoren dieser Aufgaben häufig stark nichtlinear sind (vgl. [8]). Es mag daher nicht verwundern, daß sich die Lax-Richtmyer-Theorie schrittweise und schließlich vollständig auf Differenz-Approximationen eben dieser halblinearen Probleme übertragen ließ ([9, 8, 10]), wobei sogleich der entsprechende Konvergenzsatz der Theorie von Dahlquist [11] zur numerischen Lösung nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen erneut gewonnen wurde. Somit erweist sich die Konvergenzforderung gemäß Definition c) auch in halblinearen Fällen als angemessen (und realisierbar).

Anders ist die Situation bei echt nichtlinearen Anfangswertproblemen, von denen wir insbesondere die praktisch wichtigen Anfangswertaufgaben mit Systemen quasilinearer partieller Differentialgleichungen der Form

$$u_t = A\,u = B(u)\,u, \qquad u(0) = u_0 \tag{9}$$

betrachten wollen, wobei der Operator $B(u)$ in dem Ausdruck

$$B(u)\,v$$

bezüglich der Anwendung auf hinreichend oft differenzierbare $v \in \mathfrak{B}$ für jedes feste $u \in \mathfrak{B}$ einen linearen Differentialoperator (bezüglich der Ortsvariablen) darstellt [2]. Auf quasilineare Probleme lassen sich auch viele andere nichtlineare Anfangswertaufgaben zurückführen (vgl. z.B. [12], S. 125 ff.).

Bei quasilinearen Aufgaben ist sowohl von der Theorie der partiellen Differentialgleichungen als auch von der Funktionalanalysis her über die Existenz verallgemeinerter Lösungen im Sinne stetiger Erweiterungen der nichtlinearen Lösungsoperatoren wenig bekannt (es lassen sich leicht Opera-

1. Daß (8) für die Konvergenz auf $\mathfrak{B}$ notwendig und hinreichend ist, ist Inhalt der oben erwähnten linearen Theorie von Lax und Richtmyer (vgl. [1], S. 45 ff.).

2. Alle folgenden Betrachtungen gelten auch für Differentialgleichungen der Form $u_t = B(u)u + G(t)u$ mit zusätzlichen nichtlinearen Operatoren $G(t)$, die jedoch auf dem gesamten Raum $\mathfrak{B}$ definiert seien, diesen in sich abbilden und für alle $t \geqq 0$ einer Lipschitzbedingung $\|G(t)u - G(t)v\| \leqq L\,\|u - v\|$ genügen (vgl. [3]).

toren angeben, die auf dichten Teilmengen eines Banachraumes stetig sind, jedoch keine stetigen Erweiterungen auf den Gesamtraum besitzen)[3].

Man kann deshalb gemäß Satz 2 nicht für jedes unter die Voraussetzungen zu Aufgabe (1) fallende quasilineare Problem die Existenz eines konsistenten Differenzenverfahrens mit auf $\mathfrak{B}$ gleichgradig stetigen iterierten Differenzenoperatoren erwarten. Berücksichtigt man noch die Schwierigkeit, dann in konkreten Fällen zum Nachweis der stetigen Konvergenz auf $\mathfrak{D}$ auf verschiedenen Teilmengen von $\mathfrak{B}$ verschieden starke Stetigkeitseigenschaften der iterierten Differenzenoperatoren gewährleisten zu müssen (auf $\mathfrak{B}-\mathfrak{D}$: mehr als Stetigkeit, aber weniger als gleichgradige Stetigkeit; auf $\mathfrak{D}$ dagegen gleichgradige Stetigkeit), so scheint es notwendig, bei quasilinearen Aufgaben die Forderung der stetigen Konvergenz abzuschwächen.

Aus den früher genannten Gründen wird man dabei jedoch diese Abschwächung klein halten wollen.

Nun läßt sich die Idee der stetigen Konvergenz, angewandt auf Differenzenverfahren, grob auch folgendermaßen deuten: Eine Verkleinerung der Schrittweite (wachsendes j) zum Zwecke der Verkleinerung des Verfahrensfehlers soll von einer Verkleinerung der Anfangsstörung $\|u_0^{(j)}-u_0\|$ begleitet sein, um den Gewinn an Verfahrensgenauigkeit nicht durch unveränderte Störungseinflüsse wirkungslos zu machen. Es liegt nahe, zu fordern, daß diese Störungsverkleinerung mit angemessener Geschwindigkeit erfolgt.

Ein Konvergenzbegriff dieser Art, die sogenannte *stabile Konvergenz*, wurde 1956 bereits von Dahlquist [11] für Approximationen gewöhnlicher Differentialgleichungen definiert und gelegentlich auch schon bei der numerischen Lösung hyperbolischer Probleme verwendet (vgl. z. B. [13, 14]). In geringfügiger Abwandlung der Definition von Dahlquist schwächen wir nun die stetige Konvergenz (gemäß Definition c) in Verbindung mit (7)) zu einer stabilen Konvergenz im folgenden Sinne ab:

Definition b). (3) heißt „stabil-konvergent auf $\mathfrak{D}$", wenn unter den in Definition a) bezüglich der Folgen $\{n_j\}$ und $\{h_j\}$ genannten Voraussetzungen gilt:

Es existiert ein $\gamma>0$, so daß

$$\lim_{j\to\infty} Q_j\, u_0^{(j)} = E_0(t)\, u_0$$

für jedes $u_0\in\mathfrak{D}$ und jede Folge

$$\{u_0^{(j)}\}\subset\mathfrak{B} \quad \text{mit} \quad \|u_0^{(j)}-u_0\| = 0(h_j^\gamma) \qquad (\text{für } j\to\infty).$$

Ein Satz von der Struktur des Rinowschen Satzes, bzw. des Satzes von Banach und Steinhaus, existiert für den Begriff der stabilen Konvergenz nicht,

3. Solche stetigen Erweiterungen existieren z. B. gewiß, wenn die Lösungsoperatoren $E_0(t)$ für jedes feste t gleichmäßig stetig sind auf $\mathfrak{D}$, doch ist auch über die gleichmäßige stetige Abhängigkeit der Lösungen nichtlinearer partieller Differentialgleichungen von den Anfangswerten wenig bekannt.

so daß auch keine notwendigen Bedingungen für stabile Konvergenz bekannt sind (mit Ausnahme von Spezialfällen).

Für die numerische Praxis wichtiger als notwendige Bedingungen sind natürlich hinreichende Bedingungen. Solche hinreichenden Bedingungen lassen sich nun in der Tat unabhängig von der Existenz verallgemeinerter Lösungen formulieren, wobei diese Formulierungen auch (in Analogie zur Theorie von Lax und Richtmyer) typ-unabhängig gewählt werden können und die für quasilineare hyperbolische Aufgaben in [2] und [14] genannten Bedingungen lediglich als Spezialfälle enthalten[4].

Approximiert man nämlich die Aufgabe (9) durch Differenzenverfahren der Form

$$u_n = D(h, u_{n-1})\, u_{n-1} =: C(h)\, u_{n-1}, \tag{10}$$

wobei $D(h, u)$ für jedes feste hinreichend kleine h und jedes feste $u \in \mathfrak{B}$ bezüglich der Anwendung auf beliebige $v \in \mathfrak{B}$ $(D(h, u)\, v)$ ein linearer stetiger Operator ist, der $\mathfrak{B}$ in sich abbildet, und fordert man das Erfülltsein der folgenden Bedingungen:

1. Es gilt (4) mit $\varepsilon(h, u_0) = O(h^{1+\sigma(u_0)})$ $(\sigma(u_0) \geqq 1)$ auf $\mathfrak{D}$ (statt auf $\mathfrak{D}^*$, bzw. mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}^*$),

2.
$$\|\{D(h, u) - D(h, v)\}\, w\| \leqq \begin{cases} K\, \|u - v\|\, \|w\| \text{ für alle } w \in \mathfrak{B} \text{ und alle } u, v \in \mathfrak{B} \\ h\, \|u - v\|\, \kappa_0(u_0) \text{ für alle } w = E_0(t)\, u_0,\ u_0 \in \mathfrak{D}, \\ 0 \leqq t \leqq T \text{ bei beliebigen } u, v \in \mathfrak{B} \end{cases} \tag{11}$$

mit einer Konstanten K und einem auf $\mathfrak{D}$ definierten Funktional κ_0,

3.
$$\|D(h, E_0(t)\, u_0)\| \leqq 1 + h M(u_0) \qquad \text{für alle } t \in [0, T] \tag{12}$$

mit einem auf $\mathfrak{D}$ definierten Funktional $M(u_0)$, so ist (10) stabil-konvergent (für $\gamma \geqq 2$) auf $\mathfrak{D}$.

Der Beweis läßt sich sofort dem Konvergenzbeweis in [3] nachbilden, wo Konvergenz im Sinne der Definition a) mit $n_j\, h_j = t$ (statt $n_j\, h_j \to t$) gezeigt wurde.

Die Bedingung (12) entspricht im linearen Fall (d.h.: B unabhängig von u, D unabhängig von u) der Stabilitätsbedingung (8), für die sie dann hinreichend ist.

(11) bedeutet im wesentlichen eine Lipschitzbedingung für die aus der Differentialgleichung in die Differenzengleichung übernommenen, von u abhängenden Koeffizienten der Differentialgleichung (bezüglich u). Die globale Lipschitzstetigkeit (d.h. die Forderung, daß (11) für alle $u, v \in \mathfrak{B}$ gilt) kann zu lokalen Bedingungen abgeschwächt werden.

Die Bedingung (11) gewährleistet nun in der Tat die *individuelle* Stetigkeit der iterierten Differenzenoperatoren des Verfahrens (10) auf $\mathfrak{B}$.

---

4. Es existieren auch wirklich nicht-hyperbolische Aufgaben (z.B. parabolische Aufgaben), für die sich Approximationen angeben lassen, die diesen Bedingungen genügen (vgl. z.B. [3]).

Approximiert man die *linearen* Aufgaben

$$v_t = B(E_0(t)\, u_0)\, v, \qquad v(0) = v_0$$

bei jeweils festem $u_0 \in \mathfrak{D}$ durch

$$v_n = D(h, E_0(t_{n-1})\, u_0)\, v_{n-1}, \tag{13}$$

so gewährleistet (12) die *gleichgradige* Stetigkeit der iterierten Differenzenoperatoren des linearen Verfahrens (13) auf $\mathfrak{B}$.

In diesem Sinne liegt daher bei Erfülltsein der Bedingungen (11) und (12) das Stetigkeitsverhalten der iterierten Differenzenoperatoren $C^n(h)$ des Verfahrens (10) zwischen individueller und gleichgradiger Stetigkeit.

Zusammenfassend ergibt sich die hier aufgezeigte problemorientierte Hierarchie der Konvergenzbegriffe mit ihren Implikationen aus nachfolgendem Diagramm:

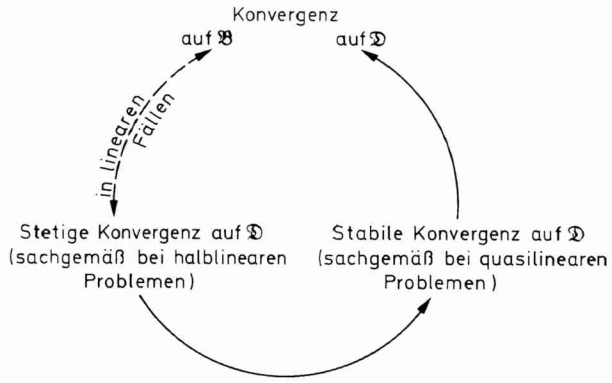

Fig. 1

Literatur

1. Richtmyer, R. D., and K. W. Morton: Difference methods for initial value problems (2nd ed.). New York-London-Sidney: Interscience 1967.
2. Courant, R., E. Isaacson, and M. Rees: On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. Commun. Pure Appl. Math. **5**, 243–255 (1952).
3. Ansorge, R.: Konvergenz von Differenzenverfahren für quasilineare Anfangswertaufgaben. Numerische Math. **13**, 217–225 (1969).
4. – Zur Frage der Verallgemeinerung des Äquivalenzsatzes von P. D. Lax. In: ISNM, vol. 9. Basel u. Stuttgart: Birkhäuser 1968.
5. Rinow, W.: Die innere Geometrie der metrischen Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1961.
6. Ansorge, R.: Zur Existenz verallgemeinerter Lösungen nichtlinearer Anfangswertaufgaben. In: ISNM, vol. 12. Basel u. Stuttgart: Birkhäuser (im Druck).
7. Kantorowitsch, L. W., u. G. P. Akilow: Funktionalanalysis in normierten Räumen. Berlin: Akademie-Verlag 1964.
8. Thompson, R. J.: Difference approximations for inhomogeneous and quasi-linear equations. J. Soc. Industr. Appl. Math. **12**, 189–199 (1964).

9. Stetter, H. J.: Anwendung des Äquivalenzsatzes von P. Lax auf inhomogene Probleme. Z. angew. Math. Mech. **39**, 396 – 397 (1959).
10. Ansorge, R.: Konvergenz von Mehrschrittverfahren zur Lösung halblinearer Anfangswertaufgaben. Numerische Math. **10**, 209 – 219 (1967).
11. Dahlquist, G.: Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations. Math. Scandinav. **4**, 33 – 53 (1956).
12. Sauer, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958.
13. Stetter, H. J.: On the convergence of characteristic finite-difference methods of high accuracy for quasi-linear hyperbolic equations. Numerische Math. **3**, 321 – 344 (1961).
14. Törnig, W.: Über Differenzenverfahren in Rechteckgittern zur numerischen Lösung quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Numerische Math. **5**, 353 – 370 (1963).

Prof. Dr. Rainer Ansorge
Lehrstuhl für Numerische Mathematik
der Universität Hamburg
2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 45

(Eingegangen am 27. März 1969)