A 21267 D

Mathematische Zeitschrift

Band 111 · (Schluß-)Heft 5 · 1969

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Z. 22. September 1969

Die „Mathematische Zeitschrift" wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

„Mathematische Zeitschrift" was founded in 1918 and edited by *L. Lichtenstein* in cooperation with *K. Knopp, E. Schmidt* and *I. Schur*; after Lichtenstein's death, 1933, it was edited by *K. Knopp*. The Editorial Committee was increased to include *E. Kamke* and *F. K. Schmidt* in 1933, *R. Nevanlinna* in 1936 and *H. Wielandt* in 1950. The latter became Managing Editor in 1952.

Springer-Verlag

69 Heidelberg 1	1 Berlin 33	Springer-Verlag
Postfach 1780	Heidelberger Platz 3	New York Inc.
Fernsprecher (06221) 49101	Fernsprecher (0311) 822001	175 Fifth Avenue
Fernschreibnummer 04-61723	Fernschreibnummer 01-83319	New York, N. Y. 10010

Math. Z. 111, 333–349 (1969)

Kanonische Normalformen kontrahierender biholomorpher Abbildungen im $\mathbb{C}^3$

Ernst Peschl und Ludwig Reich

§ 1. Einleitung

Eine Abbildung F: $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n\to x^{(1)}=(x_1^{(1)},\dots,x_n^{(1)})\in\mathbb{C}^n$ (bzw. ein Automorphismus des Potenzreihenringes):

$$x_k^{(1)}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\,x_l+\mathfrak{P}_k(x),\qquad k=1,\dots,n;\ |a_{kl}|\neq 0, \tag{1}$$

mit in Umgebung von $x=(0,\dots,0)$ konvergenten (bzw. formalen) Potenzreihen $\mathfrak{P}_k(x)$ in x über $\mathbb{C}$ einer Ordnung ord $\mathfrak{P}_k\geqq 2$ heißt biholomorphe (bzw. formal-biholomorphe) Abbildung mit *anziehendem Fixpunkt* $x=(0,\dots,0)$, auch *kontrahierende* Abbildung, wenn für die Eigenwerte ρ_i von $\|a_{kl}\|$ gilt:

$$0<|\rho_i|<1,\qquad i=1,\dots,n. \tag{2}$$

Es sei Δ (bzw. Δ_1) die Gruppe der biholomorphen (bzw. formal-biholomorphen) Koordinatentransformationen T

$$\begin{aligned} x_k&=\sum_{l=1}^{n}d_{kl}\,y_l+\mathfrak{T}_k(y), && |d_{kl}|\neq 0,\\ x_k^{(1)}&=\sum_{l=1}^{n}d_{kl}\,y_l^{(1)}+\mathfrak{T}_k(y^{(1)}), && k=1,\dots,n, \end{aligned} \tag{3}$$

mit in Umgebung von $y=(0,\dots,0)$ konvergenten (bzw. formalen) Potenzreihen einer Ordnung ord $\mathfrak{T}_k\geqq 2$. Bei Anwendung eines $T\in\Delta$ (bzw. Δ_1) bleibt die Gestalt (1) erhalten. Es ist daher die Frage naheliegend:

Wie lautet die vollständige Klassifikation der Abbildungen (1) *mit der Eigenschaft* (2) *gegenüber der Gruppe Δ (bzw. Δ_1)? Wie lauten übersichtliche Normalformen?*

Diese Fragen sollen hier für kontrahierende Abbildungen des $\mathbb{C}^3$ vollständig gelöst werden. Wir führen nun einige Abkürzungen ein: In Hinkunft werde das n-tupel $x={}^t(x_1,\dots,x_n)$ von Koordinaten (bzw. Unbestimmten) als Spalte geschrieben. A bezeichne die Matrix $\|a_{kl}\|$; und $\mathfrak{P}(x)$ einen Spaltenvektor, dessen Komponenten die Potenzreihen $\mathfrak{P}_k$ mit ord $\mathfrak{P}_k\geqq 2$ sind. Dann werden wir in dieser Arbeit folgende Bezeichnungen für die durch Potenzreihen gegebenen Automorphismen oder Koordinatentransformationen, wie z.B. (1) oder (3), verwenden:

$$\begin{aligned} x^{(1)}=F\,x&=A\,x+\mathfrak{P}(x)\\ &=\mathscr{L}\{F\}\,x+\mathscr{R}\{F\}\,x. \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei bedeutet: 1. A die zur linearen Abbildung

$$x_k^{(1)} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l$$

gehörige Matrix $\|a_{kl}\|$, wobei diese Abbildung auch mittels des Operators $\mathscr{L}$ als $\mathscr{L}\{F\}$ geschrieben wird, so daß also $\mathscr{L}$ der gegebenen Abbildung F ihren Linearteil zuordnet. 2. $\mathfrak{P}(x)$ die aus den Potenzreihen $\mathfrak{P}_k(x)$ gebildete Spalte, die wir auch in analoger Weise durch den Operator $\mathscr{R}$ der Abbildung F zuordnen. $\mathscr{R}\{F\}\,x$ heiße der nichtlineare Teil von F. Entsprechend schreiben wir die Koordinatentransformation (3) als

$$\begin{aligned} x = Ty &= Dy + \mathfrak{T}(y) \\ &= \mathscr{L}\{T\}\,y + \mathscr{R}\{T\}\,y. \end{aligned}$$

Zur Beantwortung dieser Fragen und zur Untersuchung der geometrischen Eigenschaften von (1) wurden in [4], aufbauend auf [3], zunächst *halbkanonische Formen* abgeleitet. Sie sollen hier kurz erläutert werden. Durch Umnumerierung, also durch eine lineare Koordinatentransformation, kann man (2) schreiben als:

$$0 < |\rho_n| \leqq |\rho_{n-1}| \leqq \cdots \leqq |\rho_1| < 1. \tag{5}$$

Ferner werde durch eine lineare Transformation $\mathscr{L}\{F\}$ auf Jordansche Normalform J transformiert. Entscheidend für die Gestalt der halbkanonischen Formen sind die Relationen:

$$\rho_k = \rho_1^{\alpha_1} \ldots \rho_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_i \geqq 0, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geqq 2. \tag{6}$$

Unter der Voraussetzung (5) *gilt:*

(i) *Es gibt höchstens endlich viele Relationen* (6).

(ii) *Eine Relation* (6) *hat die Gestalt*

$$\rho_k = \rho_1^{\alpha_1} \ldots \rho_{k-1}^{\alpha_{k-1}}, \tag{7}$$

d.h. $\alpha_k = \cdots = \alpha_n = 0$.

Ein Monom $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, abkürzend mit x^α bezeichnet, wenn $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ bedeutet, heiße *Zusatzmonom*, wenn sein Exponentenvektor α zugleich Exponentenvektor in (7) für ein $\rho_k = \rho_1^{\alpha_1} \ldots \rho_{k-1}^{\alpha_{k-1}}$ ist. Dann gilt nach [4, 3] und [5]:

Eine biholomorphe (bzw. formal biholomorphe) Abbildung F mit anziehendem Fixpunkt ${}^t x^0 = (0, \ldots, 0)$ läßt sich durch eine Transformation T aus Δ (bzw. Δ_1) auf eine sog. halbkanonische Form N transformieren, für die gilt:

(i) $\mathscr{L}\{N\}$ *hat Jordansche Normalform.*

(ii) $\mathscr{R}\{N\}\,x = P(x)$ *ist polynomial, und zwar treten in der k-ten Zeile höchstens diejenigen Zusatzmonome mit von Null verschiedenem Koeffizienten auf, deren Exponentenvektoren α zu einer Relation* (6) *für ρ_k gehören.*

T ist i.a. nicht eindeutig bestimmt, so daß die halbkanonischen Formen, die schon viele Aussagen über den geometrischen Typus von F zulassen, i.a. keine Normalformen zu sein brauchen. Es wurde aber in [4] gezeigt, daß bei biholomorphem F jede Transformation $T \in \Delta_1$ auf halbkanonische Form schon in Δ liegt, so daß also die formalen und die transzendenten Äquivalenzklassen in diesem Fall übereinstimmen. Es wurde ferner gezeigt (s. § 2), daß die sich anschließende Untersuchung, welche halbkanonischen Formen noch äquivalent sein können, ein rein algebraisches Problem ist, in dem nur Polynome eine Rolle spielen. In der vorliegenden Arbeit wird das für die Abbildungen des $\mathbb{C}^3$ behandelt. Es zeigt sich, daß dabei an einer Stelle das Normalformenproblem von Formen gegenüber der projektiven Gruppe hereinspielt, so daß also im allgemeinen Fall der Abbildungen des $\mathbb{C}^n$ Lösung stets nur Zurückführung auf diese Fragestellung der klassischen Invariantentheorie zu verstehen ist (vgl. [4]). Unsere Methode ist die der möglichst starken Normierung (§ 3).

Es sei noch bemerkt, daß das formale Problem der halbkanonischen Formen bei allen algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern gleich zu behandeln ist. Bei der Aufstellung der Normalformen ist jedoch unsere Methode nur für $\mathbb{C}$ anwendbar, da in gewissen Fällen einige Koeffizienten der Normalformen durch Bedingungen für ihre Argumente festgelegt sind.

Das zu unserem Problem völlig analoge Normalformenproblem für analytische Differentialgleichungssysteme in Nähe einer Gleichgewichtslage führt auch zu völlig analogen Aussagen. Diese sollen im Anschluß an diese Untersuchung ganz kurz in einer weiteren Arbeit angegeben werden.

Den Überblick über die Normalformen stellen wir an den Schluß der Arbeit.

§ 2. Die möglichen Relationen und die halbkanonischen Formen

Aus den allgemeinen Sätzen in [5] über die Struktur des Relationensystems $\rho_k = \rho_1^{\alpha_1} \dots \rho_n^{\alpha_n}$ unter der Voraussetzung (5) ergeben sich für die Abbildungen im $\mathbb{C}^3$ folgende Möglichkeiten, wobei jeweils alle Relationen angeführt werden:

1. *Drei verschiedene Eigenwerte* ρ_1, ρ_2, ρ_3.

R_0: *Keine Relation* (6).

R_1: $\rho_2 = \rho_1^\nu$*; keine Relation für* ρ_3.

R_2: *Keine Relation für* ρ_2; $\rho_3 = \rho_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} \rho_2^{\beta-\lambda\beta_1}$ *mit festen nichtnegativen* $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$, $0 \leqq \alpha < \alpha_1$, $\lambda = 0, \dots, [\beta/\beta_1]$.

R_3: $\rho_2 = \rho_1^\nu$, $\nu \geqq 2$; $\rho_3 = \rho_1^{\alpha+k\nu} \rho_2^{\beta-k}$ *mit* $\alpha, \beta \geqq 0$, *fest*, $0 \leqq \alpha < \nu$, $k = 0, 1, \dots, \beta$.

2. *Zwei verschiedene Eigenwerte* ρ_1, ρ_2.

R_0: *Keine Relationen* (6).

R_1: $\rho_2 = \rho_1^\nu$.

3. *Ein Eigenwert* ρ_1.

R_0: *Keine Relationen* (6).

Von den halbkanonischen Formen führe ich hier nur diese an, in denen Zusatzmonome auftreten können. Dazu führen wir die für die Jordanschen Normalformen üblichen Segre-Symbole ein (vgl. [1], S. 350). Die Jordansche Normalform wird durch ein Schema ganzer Zahlen beschrieben, welche die Zeilenzahlen der Kästchen angeben. Kästchen zu denselben Eigenwerten werden in einer runden Klammer zusammengefaßt, das ganze Segre-Symbol wird in eine eckige Klammer gesetzt. Wir erhalten im $\mathbb{C}^3$ folgende Typen, die wir später auch noch mit $J^{(\nu)}$, $\nu=1,\dots,8$, bezeichnen:

$$J^{(1)}=[1\ 1\ 1],\quad J^{(2)}=[(1\ 1)\ 1],\quad J^{(3)}=[1\ (1\ 1)],$$
$$J^{(4)}=[2\ 1],\quad J^{(5)}=[1\ 2],\quad J^{(6)}=[(1\ 1\ 1)],\quad J^{(7)}=[(1\ 2)],$$
$$J^{(8)}=[3].$$

Vom Standpunkt der Gruppe der projektiven und auch der biholomorphen Transformationen könnten einige der $J^{(\nu)}$ noch äquivalent sein. Aber wegen der Normierung (5) ist das hier nicht mehr möglich.

Die halbkanonischen Formen $x^{(1)}=Nx=J^{(\nu)}x+\mathscr{R}\{N\}x=J^{(\nu)}x+P(x)$, in denen Zusatzmonome auftreten können, lauten in ersichtlicher Verknüpfung der Symbole $J^{(\nu)}$ und R_μ, wobei nur diejenigen Komponenten $P_j(x)$ notiert werden, die nicht a priori Null sind:

$$(J^{(1)}, R_1):\quad P_2(x)=a\,x_1^\nu,\ a\in\mathbb{C}.$$

$$(J^{(1)}, R_2):\quad P_3(x)=\sum_{\lambda=0}^{[\beta/\beta_1]} b_\lambda\, x_1^{\alpha+\lambda\alpha_1}\, x_2^{\beta-\lambda\beta_1},\ b_k\in\mathbb{C}.$$

$$(J^{(1)}, R_3):\quad P_2(x)=a\,x_1^\nu,\ a\in\mathbb{C};\qquad P_3(x)=\sum_{k=0}^{\beta} b_k\, x_1^{\alpha+k\nu}\, x_2^{\beta-k};\qquad b_k\in\mathbb{C}.$$

$$(J^{(2)}, R_1):\quad P_3(x)=\sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda\, x_1^{\nu-\lambda}\, x_2^\lambda,\ b_\lambda\in\mathbb{C}.$$

$$(J^{(3)}, R_1):\quad P_2(x)=a\,x_1^\nu,\ a\in\mathbb{C};\qquad P_3(x)=b\,x_1^\nu,\ b\in\mathbb{C}.$$

$$(J^{(4)}, R_1):\quad P_3(x)=\sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda\, x_1^{\nu-\lambda}\, x_2^\lambda,\ b_\lambda\in\mathbb{C}.$$

$$(J^{(5)}, R_1):\quad P_2(x)=a\,x_1^\nu,\ a\in\mathbb{C};\qquad P_3(x)=b\,x_1^\nu,\ b\in\mathbb{C}.$$

§ 3. Die Gruppe der zulässigen Koordinatentransformationen

Wie schon in § 1 gesagt wurde, genügt es beim Übergang von den halbkanonischen zu den kanonischen Formen solche Transformationen T zu betrachten, die zwei halbkanonische Formen ineinander überführen. Darüber wurde zunächst bewiesen (vgl. [4]):

Hilfssatz 1. *Eine Transformation T mit $\mathscr{L}\{T\}=E$, T: $x=y+\mathfrak{T}(y)$, die zwei halbkanonische Formen F_1, F_2 ineinander überführt, ist polynomial, d.h. $\mathfrak{T}(y)$ ist ein Polynomvektor Q, und in $Q_k(y)=\sum_{|\nu|\geq 2} t_\nu^{(k)}\, y^\nu$ sind höchstens diese $t_\nu^{(k)}\neq 0$,* *die mit Zusatzmonomen zu einer Relation* (6) *für den Eigenwert* ρ_k *von* F_1 *multipliziert sind.*

Offensichtlich bilden diese T eine Gruppe Γ^*; Γ^* besteht, wie leicht zu ersehen (z.B. aus [4]), aus allen und nur den Transformationen $x=y+\mathfrak{T}(y)$, so daß in $\mathfrak{T}_k(y)$ nur Zusatzmonome (zu einer Relation für ρ_k) auftreten. Das Produkt zweier umkehrbarer Substitutionen T_1, T_2 in Potenzreihenringen werde mit $T_1 \circ T_2$ bezeichnet. Es sei nun T eine beliebige Transformation aus Δ, welche eine halbkanonische Form N in eine andere transformiert. $\mathscr{L}\{T\}$ läßt dann $\mathscr{L}\{N\}$ invariant, d.h. also, eine bestimmte Jordansche Normalform. Wenn wir $T=\mathscr{L}\{T\}\circ T_1$ zerlegen, so folgt

(i) $\mathscr{L}\{T_1\}=E$, die Identität,

(ii) T_1 führt die halbkanonische Form in eine andere über.

(i) ist klar. (ii) ergibt sich daraus, daß $\mathscr{L}\{T\}$ schon für sich die halbkanonische Form in eine andere überführt. Dies folgt aus dem

Hilfssatz 2. *Ist L eine lineare Transformation, die den Linearteil* $\mathscr{L}\{N\}$ *einer halbkanonischen Form invariant läßt, so führt L N in eine halbkanonische Form über.*

Beweis. Wir haben zu zeigen: $L^{-1}\circ N\circ L$ ist halbkanonisch. Offensichtlich ist $\mathscr{L}\{L^{-1}\circ N\circ L\}=L^{-1}\circ\mathscr{L}\{N\}\circ L=\mathscr{L}\{N\}$. Es ist noch zu zeigen, daß in $L^{-1}\circ N\circ L$ nur die Zusatzmonome von N an ihren Stellen auftreten. In $N\circ L$ treten, wie aus einem allgemeinen Hilfssatz in [4] über die Substitution von Zusatzmonomen in ein anderes sofort folgt, nur wieder die Zusatzmonome von N an ihren Stellen auf. Ferner ist L^{-1} eine lineare Transformation, die $\mathscr{L}\{N\}$ invariant läßt, und wirkt deshalb so, daß nur jeweils Monome aus den Zeilen des Kästchens zu demselben Eigenwert, also auch denselben Relationen und Zusatzmonomen linear kombiniert werden. Also ist $L^{-1}\circ N\circ L$ eine halbkanonische Form. Für unseren Fall des $\mathbb{C}^3$ läßt sich dies auch alles leicht explizit ausrechnen. (Die Gestalt der Transformationen L wird im Hilfssatz 5 ermittelt.)

Aus den beiden Hilfssätzen folgt zusammenfassend

Hilfssatz 3. *Jede Transformation T, die eine halbkanonische Form N in eine andere überführt, hat die Gestalt* $T=L\circ T_1$, *wobei L* $\mathscr{L}\{N\}$ *invariant läßt, und* T_1 *eine Transformation mit* $\mathscr{L}\{T_1\}=E$ *bezeichnet, die N in eine halbkanonische Form überführt.*

Hilfssatz 4. *Für die Transformation* $T=\mathscr{L}\{T\}\,y+\mathscr{R}\{T\}\,y$ *einer halbkanonischen Form N in eine andere gilt:*

(i) $\mathscr{L}\{T\}$ *läßt die Jordansche Normalform von* $\mathscr{L}\{N\}$ *invariant.*

(ii) *In* $\mathscr{R}\{T\}$ *treten höchstens die Zusatzmonome von N an ihren Stellen wirklich auf.*

(iii) *Umgekehrt ist jede Transformation von T mit den Eigenschaften (i), (ii) eine Transformation von N auf halbkanonische Form.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich wie bei den Hilfssätzen 1–3. Die T mit (i), (ii) bilden offensichtlich eine Gruppe $\Gamma(\supset\Gamma^*)$. Wegen (ii) erhalten wir daher bei Zugrundelegung der Gruppe Γ nicht nur die formalen, sondern auch die transzendenten Normalformen.

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein: Eine (n,n)-Matrix A, die in j Matrizes $A_1,\dots,A_j$, die symmetrisch entlang der Hauptdiagonale von A stehen, zerfällt, und sonst nur 0 enthält, werde geschrieben als $A=\operatorname{diag}(A_1,\dots,A_j)$; speziell $A=\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)$ für eine Diagonalmatrix. Wir beschließen diesen Abschnitt mit

Hilfssatz 5. *Es sei $a\neq 0$, A eine beliebige $(2,2)$-Matrix mit $\det A\neq 0$, H eine beliebige untere Halbdiagonal-$(2,2)$-Matrix, mit $\det H\neq 0$. Dann gilt:*

Die linearen Transformationen, die $J^{(\nu)}$ in sich transformieren, werden gegeben durch sämtliche lineare Transformationen mit den Matrizes:

A) $J^{(1)}$: $A^{(1)}=\operatorname{diag}(a_1,a_2,a_3)$, $\det A^{(1)}\neq 0$.

B) $J^{(2)}$: $A^{(2)}=\operatorname{diag}(A,a)$

C) $J^{(3)}$: $A^{(3)}=\operatorname{diag}(a,A)$

D) $J^{(4)}$: $A^{(4)}=\operatorname{diag}(H,a)$

E) $J^{(5)}$: $A^{(5)}=\operatorname{diag}(a,H)$.

Beweis. A), B), C): Die Transformation, welche die Jordansche Normalform $J^{(\nu)}$, $\nu=1,2,3$ (mit den Eigenwerten ρ_1,ρ_2,ρ_3) invariant läßt, heiße $A^{(\nu)}=(a_{ik}^{(\nu)})$. Es soll also gelten $J^{(\nu)}\circ A^{(\nu)}=A^{(\nu)}\circ J^{(\nu)}$. Dies liefert im Fall A) folgende neun Relationen

$$(\rho_i-\rho_k)\,a_{ik}^{(\nu)}=0,\qquad i,\ k=1,2,3. \tag{8}$$

Für $\rho_i\neq\rho_k$ (also $i\neq k$) folgt: $a_{ik}=0$. Damit ist A) gezeigt. Offensichtlich gehen die Gleichungen für a_{ik} aus der Relation $J^{(\nu)}\circ A^{(\nu)}=A^{(\nu)}\circ J^{(\nu)}$ im Fall B) (bzw. C)) aus (8) durch die Spezialisierung $\rho_1\to\rho_1,\rho_2\to\rho_1,\rho_3\to\rho_2$, (bzw. $\rho_1\to\rho_1,\rho_2\to\rho_2$, $\rho_3\to\rho_2$) hervor. Damit folgt im Fall B)

$$\left.\begin{aligned}(\rho_1-\rho_2)\,a_{i3}^{(\nu)}&=0,\\ (\rho_1-\rho_2)\,a_{3i}^{(\nu)}&=0\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,$$

also $a_{i3}^{(\nu)}=a_{3i}^{(\nu)}=0$ für $i=1,2$. Die zusätzliche Behauptung heißt, daß $|a_{ik}^{(\nu)}|\neq 0$ ist.

D), E): Es genügt, den Fall D) zu behandeln. $J^{(\nu)}\circ A^{(\nu)}=A^{(\nu)}\circ J^{(\nu)}$ führt zu folgenden neun Gleichungen für die $a_{ik}^{(\nu)}$:

$$\begin{aligned}
&\rho_1 a_{11}^{(\nu)}=\rho_1 a_{11}^{(\nu)}+a_{12}^{(\nu)}, && a_{11}^{(\nu)}+\rho_1 a_{21}^{(\nu)}=\rho_1 a_{21}^{(\nu)}+a_{22}^{(\nu)}, && \rho_2 a_{31}^{(\nu)}=\rho_1 a_{31}^{(\nu)}+a_{32}^{(\nu)},\\
&\rho_1 a_{12}^{(\nu)}=\rho_1 a_{12}^{(\nu)}, && a_{12}^{(\nu)}+\rho_1 a_{22}^{(\nu)}=\rho_1 a_{22}^{(\nu)}, && \rho_2 a_{32}^{(\nu)}=\rho_1 a_{32}^{(\nu)},\\
&\rho_1 a_{13}^{(\nu)}=\rho_2 a_{13}^{(\nu)}, && a_{13}^{(\nu)}+\rho_1 a_{23}^{(\nu)}=\rho_2 a_{23}^{(\nu)}, && \rho_2 a_{33}^{(\nu)}=\rho_2 a_{33}^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Da $\rho_1\neq\rho_2$, folgt leicht $a_{12}^{(\nu)}=a_{13}^{(\nu)}=0$, $a_{11}^{(\nu)}=a_{22}^{(\nu)}$, $a_{23}^{(\nu)}=0$, $a_{31}^{(\nu)}=a_{32}^{(\nu)}=0$. Die zusätzliche Behauptung folgt aus $|a_{ik}^{(\nu)}|\neq 0$.

§ 4. Die Normalformen bei einfachen Eigenwerten

Die Methode der Transformation auf Normalform besteht darin, durch geeignete Festlegung bestimmter Koeffizienten $t_v^{(k)}$ der Transformation bestimmte Koeffizienten der halbkanonischen Form möglichst zu normieren, z.B. ihnen den Wert 0 oder 1 zu erteilen, so daß die übrigen Koeffizienten in dieser speziellen halbkanonischen Form festgelegt sind, sich also nicht mehr ändern, wie immer die noch unbestimmt gebliebenen Koeffizienten der Transformation gewählt werden. Diese speziellen halbkanonischen Formen erweisen sich als Normalformen. Denn sind zwei halbkanonische Formen äquivalent, und berechnet man beide Male nach demselben wohldefinierten Verfahren die noch stärker normierten halbkanonischen Formen, so müssen sie übereinstimmen. Andernfalls könnte man die übrigen Koeffizienten doch noch durch Transformation, entgegen der Definition dieser speziellen halbkanonischen Form, noch einmal stärker normieren. Wir beginnen mit

Hilfssatz 6. *Es sei die halbkanonische Form N aus* $(J^{(1)}, R_v)$, $v=1, 2, 3$, *vorgelegt. Dann existiert eine Transformation aus der zugehörigen Gruppe* Γ, *so daß in* $T^{-1} \circ N \circ T = M$ *mit* M: $y^{(1)} = J^{(1)} y + K(y)$ *gilt:*

$$K_2 = \varepsilon\, y^v, \qquad \varepsilon = 0, 1.$$

Eine halbkanonische Form mit $\varepsilon=0$ *ist zu einer solchen mit* $\varepsilon=1$ *nicht äquivalent. Im Falle* $(J^{(1)}, R_1)$ *ist dadurch die Normalform erreicht.*

Beweis. Wir setzen für N, M, T an

$$\begin{aligned}
N:&\quad x^{(1)} = J^{(1)} x + P(x) \quad \text{mit} \quad P_2(x) = a\, x_1^v,\\
M:&\quad y^{(1)} = J^{(1)} y + K(y) \quad \text{mit} \quad K_2(y) = A\, y_1^v,\\
T:&\quad \begin{cases} x = A^{(1)} y + Q(y) \quad \text{mit} \quad Q_2(y) = t_{v00}^{(2)}\, y_1^v,\\ x^{(1)} = A^{(1)} y^{(1)} + Q(y^{(1)}).\end{cases}
\end{aligned}$$

Wir können nun $x_2^{(1)}$ mittels obiger Ansätze auf zwei Arten als Polynom in den y ausdrücken und erhalten:

$$\rho_2 (a_2\, y_2 + t_{v00}^{(2)}\, y_1^v) + a (a_1\, y_1)^v = a_2 (\rho_2\, y_2 + A\, y_1^v) + t_{v00}^{(2)} (\rho_1\, y_1)^v.$$

Wegen der Relation R_1 heben sich die mit $t_{v00}^{(2)}$ multiplizierten Ausdrücke weg, und es folgt:

$$a\, a_1^v = a_2\, A.$$

Somit gilt: $a=0 \Leftrightarrow A=0$. Falls $a \neq 0$, können wir $A=1$ setzen und erhalten $a\, a_1^v = a_2$. W.z.z.w.

Hilfssatz 7. *Es liege der Fall* $(J^{(1)}, R_3)$ *mit* $P_2 \neq 0$ *vor. Dann lautet die Normalform N*

$$N x = J^{(1)} x + P(x) \quad \textit{mit} \quad P_2(x) = x_1^v$$

und

$$P_3(x) = \varepsilon\, x_1^\alpha\, x_2^\beta, \qquad \varepsilon = 0, 1.$$

Die beiden Fälle $\varepsilon=0$ *und* $\varepsilon=1$ *sind nicht äquivalent.*

Beweis. Wir setzen wieder für N, M, T an:

$$N:\quad x^{(1)} = J^{(1)} x + P(x),$$
$$P_2(x) = a x_1^{\nu}, \quad P_3(x) = \sum_{k=0}^{\nu} b_k x_1^{\alpha+\nu k} x_2^{\beta-k};$$
$$M:\quad y^{(1)} = J^{(1)} y + K(y),$$
$$K_2(y) = A y_1^{\nu}, \quad K_3(y) = \sum_{k=0}^{\nu} B_k y_1^{\alpha+\nu k} y_2^{\beta-k};$$
$$T:\quad \begin{cases} x = A^{(1)} y + Q(y) & \text{mit } Q_2(y) = t_{\nu 00}^{(2)} y_1, \\ x^{(1)} = A^{(1)} y^{(1)} + Q(y^{(1)}), & Q_3(y) = \sum_{k=0}^{\nu} t_{\nu 00}^{(k)} y_1^{\alpha+\nu k} y_2^{\beta-k}. \end{cases}$$

Wir wissen schon, daß wir mit $a_2 = a a_1^{\nu}$ die Normierung $A = 1$ erreichen können. $t_{\nu 00}^{(2)}$ bleibt dabei unbestimmt. Es folgt wie oben:

$$\begin{aligned} &\rho_3 \left(a_3 y_3 + \sum_{k=0}^{\beta} t_{\alpha+\nu k, \beta-k, 0}^{(3)} y_1^{\alpha+\nu k} y_2^{\beta-k} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\beta} b_k (a_1 y_1)^{\alpha+\nu k} (a_2 y_2 + t_{\nu 00}^{(2)} y_1^{\nu})^{\beta-k} \\ &= a_3 \left(\rho_3 y_3 + \sum_{k=0}^{\beta} B_k y_1^{\alpha+\nu k} y_2^{\beta-k} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\beta} t_{\alpha+\nu k, \beta-k, 0}^{(3} (\rho_1 y_1)^{\alpha+\nu k} (\rho_2 y_2 + A y_1^{\nu})^{\beta-k}. \end{aligned}$$

Für die letzte Summe auf der rechten Seite erhalten wir durch Umsummierung:

$$\sum_{\lambda=0}^{\beta} \left\{ \rho_1^{\alpha+\nu\lambda} \rho_2^{\beta-\lambda} t_{\alpha+\nu\lambda, \beta-\lambda, 0}^{(3)} + \sum_{\substack{b+\kappa=\lambda \\ 0 \le k \le \lambda-1}} \binom{\beta-k}{\kappa} \rho_1^{\alpha+\nu\lambda} \rho_2^{\beta-\lambda} A^{\kappa} \cdot t_{\alpha+\lambda\nu, \beta-\lambda, 0}^{(3)} \right\} y_1^{\alpha+\lambda\nu} y_2^{\beta-\lambda}.$$

Aufgrund der Relationen R_3 hebt sich der erste Teil dieser Summe gegen Ausdrücke auf der linken Seite weg; aus dem restlichen heben wir noch den Term $k = \lambda - 1$, $\kappa = 1$ hervor, so daß bleibt:

$$\sum_{\lambda=0}^{\beta} \left\{ (\beta-\lambda+1) \rho_1^{\alpha+\nu(\lambda-1)} \rho_2^{\beta-\lambda} A \cdot t_{\alpha+(\lambda-1)\nu, \beta-\lambda+1, 0}^{(3)} + \sum_{\substack{k+\kappa=\lambda \\ 0 \le k \le \lambda-2}} \binom{\beta-k}{\kappa} \rho_1^{\alpha+\nu k} \rho_2^{\beta-\lambda} A^{\kappa} t_{\alpha+k\nu, \beta-k, 0}^{(3)} \right\} y_1^{\alpha+\lambda\nu} y_2^{\beta-\lambda}.$$

Koeffizientenvergleich liefert nun:

$$\begin{aligned} &a_3 B_\lambda + (\beta-\lambda+1) \rho_1^{\alpha+\nu(\lambda-1)} \rho_2^{\beta-\lambda} A \cdot t_{\alpha+(\lambda-1)\nu, \beta-\lambda+1, 0}^{(3)} \\ &\quad \equiv p_\lambda(b_j; a_1, a_2, A, t_{\alpha,\beta,0}^{(3)}, t_{\alpha+\nu,\beta-1,0}^{(3)}, \dots, t_{\alpha+(\lambda-2)\nu, \beta-\lambda+2, 0}^{(3)}; t_{\nu 00}^{(2)}) \end{aligned} \tag{9}$$

für $\lambda \geqq 1$, wobei p_λ ein Polynom in den angeschriebenen Argumenten ist. Dazu kommt

$$a_3 B_0 = a_1^\alpha \cdot a_2^\beta b_0. \tag{10}$$

Es folgt aus (10): $b_0 = 0 \Leftrightarrow B_0 = 0$. Falls $b_0 \neq 0$, so können wir $B_0 = 1$ erreichen durch $a_3 = a_1^\alpha a_2^\beta b_0$, und es ist $a_3 \neq 0$, falls wir $a_1 a_2 \neq 0$ nehmen, wie es sein muß. Aus dem Gleichungssystem (9) ergibt sich wegen $A \neq 0$ sukzessive durch geeignete Wahl von $t^{(3)}_{\alpha+(\lambda-1)\nu,\beta-\lambda+1,0}$, $\lambda \geqq 1$, $B_\lambda = 0$, $\lambda \geqq 1$. W.z.b.w.

Hilfssatz 8. *Es liege der Fall* $(J^{(1)}, R_2)$ *vor mit* $P_2(x) = 0$. *Die Normalformen* $x^{(1)} = J^{(1)} x + P(x)$ *werden dann folgendermaßen beschrieben:*

Entweder gilt $P_3(x) = \varepsilon x_1^{\alpha+\beta\nu}$, $\varepsilon = 0, 1$, *wobei die Fälle* $\varepsilon = 0$ *und* $\varepsilon = 1$ *nicht äquivalent sind, oder es ist*

$$P_3(x) = x_1^{\alpha+r\nu} x_2^{\beta-r} + \sum_{k>r+1} B_k x_1^{\alpha+k\nu} x_2^{\beta-k}, \qquad r < \beta,$$

wobei gilt: (i) *r ist die kleinste Zahl, so daß in einer halbkanonischen Form der Äquivalenzklasse* $b_r \neq 0$. (ii) $x_1^{\alpha+(r+1)} x_2^{\beta-r-1}$ *hat, falls* $\beta \geqq r+1$, *den Koeffizienten* 0. (iii) *Unter der Annahme* $B_r = 1$, $B_{r+1} = 0$ *ist es schon festgelegt, ob für* $\lambda > r+1$ *(falls dann noch* $\beta \geqq \lambda$*)* $B_\lambda = 0$ *oder* $B_\lambda \neq 0$. *Es seien* $B_{r+r_0}, B_{r+r_1}, \ldots, B_{r+r_\tau}$, $r_0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_\tau$, *die von Null verschiedenen Koeffizienten. Für sie gilt:*

Es sei

$$\begin{aligned}
&\frac{r_1}{r_0} = \frac{\sigma_Z^{(0)}}{\sigma_N^{(0)}}, && (\sigma_Z^{(0)}, \sigma_N^{(0)}) = 1,\ r_0 = \sigma_N^{(0)} r_0^{(1)},\ \sigma_N^{(0)} > 1,\\
&\frac{r_2}{r_0^{(1)}} = \frac{\sigma_Z^{(1)}}{\sigma_N^{(1)}}, && (\sigma_Z^{(0)}, \sigma_N^{(0)}) = 1,\ r_0^{(1)} = \sigma_N^{(1)} r_0^{(2)},\ \sigma_N^{(1)} > 1,\\
&\ \vdots && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (11)\\
&\frac{r_j}{r_0^{(j-1)}} = \frac{\sigma_Z^{(j-1)}}{\sigma_N^{(j-1)}}, && (\sigma_N^{(j-1)}, \sigma_Z^{(j-1)}) = 1,\ r_0^{(j-1)} = \sigma_N^{(j-1)} r_0^{(j)},\ \sigma_N^{(j-1)} > 1,\ \textit{falls } j = \tau,
\end{aligned}$$

bzw.

$$\frac{r_{j+1}}{r_0^{(j)}} = \frac{\sigma_Z^{(j)}}{\sigma_N^{(j)}}, \qquad (\sigma_N^{(j)}, \sigma_Z^{(j)}) = 1,\ r_0^{(j)} = \sigma_N^{(j)} r_0^{(j+1)},\ \sigma_N^{(j)} = 1,\ \textit{falls } j+1 \leqq \tau.$$

Dann gilt:

$$B_{r+r_0} = 1, \qquad 0 \leqq \arg B_{r+r_1} < \frac{2\pi}{\sigma_N^{(1)}}, \ldots, 0 \leqq \arg B_{r+r_j} < \frac{2\pi}{\sigma_N^{(j-1)}};$$

$B_{r+r_{j+1}}, \ldots, B_{r+r_\tau}$ *sind dadurch festgelegt.*

Zwei Formen, bei denen nach der oben ganannten Normierung die Vektoren $(B_0, \ldots, B_\beta)$ *verschieden sind, sind nicht äquivalent.*

Beweis. Wir setzen für N, T, $M=T^{-1}\circ N\circ T$ an:

$$N:\quad x^{(1)}=J^{(1)}x+P(x)\qquad \text{mit}\quad P_3(x)=\sum_{k=0}^{\beta} b_k\, x_1^{\alpha+k\nu}\, x_2^{\beta-k},$$

$$M:\quad y^{(1)}=J^{(1)}y+K(y)\qquad \text{mit}\quad K_3(y)=\sum_{k=0}^{\beta} B_k\, y_1^{\alpha+k\nu}\, y_2^{\beta-k},$$

$$T:\quad \begin{cases} x=A^{(1)}y+Q(y) & \text{mit}\quad Q_3(y)=\sum\limits_{k=0}^{\beta} t^{(3)}_{\alpha+k\nu,\,\beta-k,\,0}\, y_1^{\alpha+k\nu}\, y_2^{\beta-k} \\ x^{(1)}=A^{(1)}y^{(1)}+Q(y^{(1)}). & \end{cases}$$

Es folgt, durch Berechnung von $x_3^{(1)}$ auf zwei Arten:

$$\begin{aligned} a_3\Big(\rho_3\, y_3+\sum_k B_k\, y_1^{\alpha+k\nu}\, y_2^{\beta-k}\Big)&+\sum_k t^{(3)}_{\alpha+k\nu,\,\beta-k,\,0}(\rho_1\, y_1)^{\alpha+k\nu}(\rho_2\, y_2)^{\beta-k}\\ &=\rho_3\Big(a_3\, y_3+\sum_k t^{(3)}_{\alpha+k\nu,\,\beta-k,\,0}\, y_1^{\alpha+k\nu}\, y_2^{\beta-k}\Big)\\ &\quad+\sum_k b_k(a_1\, y_1)^{\alpha+k\nu}(a_2\, y_2+t^{(2)}_{\nu 00}\, y_1^{\nu})^{\beta-k}. \end{aligned}$$

Wegen der Relationen R_3 bleibt nur

$$a_3\sum_k B_k\, y_1^{\alpha+k\nu}\, y_2^{\beta-k}=\sum_k b_k(a_1\, y_1)^{\alpha+k\nu}(a_2\, y_2+t^{(2)}_{\nu 00}\, y_1^{\nu})^{\beta-k}. \tag{12}$$

Mögliche Normierungen sind daher nur durch geeignete Wahl von $a_1, a_2, a_3, t^{(2)}_{\nu 00}$ möglich, die $t^{(3)}_{\alpha+k\nu,\,\beta-k,\,0}$ haben keinen Einfluß. Aus (12) ergibt sich nach Zusammenfassen und Koeffizientenvergleich:

$$a_1^{\alpha+\lambda\nu}\, a_2^{\beta-\lambda}\sum_{k+\kappa=\lambda}\binom{\beta-k}{\kappa}\, t^{(2)\kappa}_{\nu 00}\, b_k=a_3\, B_\lambda,\qquad \lambda=0,\dots,\beta. \tag{13}$$

Das lineare Gleichungssystem (13) für die b_k zeigt:

$$b_0=b_1=\cdots=b_{r-1}=0,\qquad b_r\neq 0 \Leftrightarrow B_0=\cdots=B_{r-1}=0,\qquad B_r\neq 0,$$

unabhängig von $a_i, t^{(2)}_{\nu 00}$. Für $\lambda=r$ bleibt von der Gleichung (13) nur der Anteil für $k=r$, $\kappa=0$:

$$a_1^{\alpha+r\nu}\, a_2^{\beta-r}\, b_r=a_3\, B_r.$$

Verlangen wir $B_r=1$, so folgt $a_3=a_1^{\alpha+r\nu}\, a_2^{\beta-r}\, b_r$, und umgekehrt, falls $a_1\cdot a_2\neq 0$. Dann ist auch $a_3\neq 0$, wie es sein muß. Für $\lambda>r$ (falls noch möglich) erhalten wir:

$$\sum_{k+\kappa=\lambda}\binom{\beta-k}{\kappa}\, t^{(2)\kappa}_{\nu 00}\, b_k=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\lambda-r} B_\lambda, \tag{14}$$

speziell für $\lambda=r+1$, wo nur zwei Summanden stehenbleiben ($k=r-1$, $k=r$):

$$b_{r-1}+(\beta-r)\, b_r\, t^{(2)}_{\nu 00}=\frac{a_2}{a_1^{\nu}}\, B_{r+1}. \tag{15}$$

Wenn $r<\beta$, dann läßt sich aus (15) $t_{\nu 00}^{(2)}$ berechnen, wenn $B_{r+1}=0$ gesetzt wird. Falls keine weiteren Koeffizienten mehr auftreten, oder falls alle auftretenden $B_\lambda=0$, $\lambda>r+1$, so ist keine weitere Normierung mehr möglich, und eine Normalform erreicht:

Denn wegen $a_2/a_1^\nu \neq 0$ tritt $B_\lambda=0$, $\lambda>r+1$ genau dann ein, wenn die linken Seiten der Relationen (14) für dieses λ verschwinden, und das hängt, wenn $t_{\nu 00}^{(2)}$ aus (15) durch $B_{r+1}=0$ als Funktion von b_r, b_{r-1} bestimmt ist, nur von den b_λ, aber nicht von a_2/a_1^ν ab. Es existiere nun ein $r_0>1$, so daß $B_{r+r_0}\neq 0$. Auch dies hängt nur von den b_λ ab. Wir erhalten:

$$b_{r+r_0}+(\beta-r-r_0+1)\,b_{r+r_0-1}\,t_{\nu 00}^{(2)}+\cdots=\left(\frac{a_2}{a_1^\nu}\right)^{r_0}B_{r+r_0}.$$

Die linke Seite L liegt fest. Wegen $B_{r_1+r_0}\neq 0$ kann man $(a_2/a_1^\nu)^{r_0}=L$ nehmen, wodurch $B_{r+r_0}=1$ wird. $L^*=L^{1/r_0}$ ist r_0-deutig. Falls nun alle weiteren $B_\lambda=0$ oder gar keine B_λ mehr auftreten, so gibt es keine weitere Normierungsmöglichkeit mehr, und diese Mehrdeutigkeit ist ohne Belang. Es existiere nun ein kleinstes r_1, so daß $B_{r+r_1}\neq 0$, $r_1>r_0$. Das ist wegen $a_2/a_1^\nu\neq 0$, unabhängig vom gewählten L^*. Wir erhalten

$$b_{r+r_1}+(\beta-r-r_1+1)\,b_{r-r_1+1}\,t_{\nu 00}^{(2)}+\cdots=(L^*)^{r_1}B_{r+r_1}.$$

Es sei $L=|L|\,e^{i\Theta}$, also

$$L^*=|L^*|\exp\left(\frac{i\Theta}{r_0}\right)\exp\left(2\pi i\frac{\eta}{r_0}\right),\qquad \eta=0,\ldots,r_0-1;\ \varphi=\arg B_{r+r_1}(L^*)^{r_1}.$$

Es sei

$$\frac{r_1}{r_0}=\frac{\sigma_Z^{(0)}}{\sigma_N^{(0)}},\qquad (\sigma_Z^{(0)},\sigma_N^{(0)})=1.$$

Dann kann man μ noch so wählen, daß

$$0\leqq\varphi-\frac{\Theta}{r_0}-2\pi\frac{\sigma_Z^{(0)}}{\sigma_N^{(0)}}<2\pi\frac{1}{\sigma_N^{(0)}},$$

wenn man für Θ,φ geeignete Werte des Arguments nimmt. Das heißt, man kann erreichen, daß B_{r+r_1} in dem Winkelraum $0\leqq\arg z<2\pi\dfrac{1}{\sigma_N^{(0)}}$ liegt. Dabei ist aber μ nicht eindeutig festgelegt, sondern es kommen $r_0/\sigma_N^{(0)}=r_0^{(1)}$ Werte in Frage:

$$\mu_0,\mu_0+\sigma_N^{(0)},\ldots,\mu_0+(r_0^{(1)}-1)\,\sigma_N^{(0)},\qquad \text{mit } 0\leqq\mu_0<\sigma_N^{(0)}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}L^*&=|L^*|\exp i\left(\frac{\Theta+2\pi\mu_0}{r_0}\right)\exp 2\pi i\frac{\sigma_N^{(0)}\mu_1^{(1)}}{r_0}\\&=|L^*|\exp i\frac{\Theta+2\pi\mu_0}{r_0}\exp 2\pi i\frac{\mu_1^{(1)}}{r_0^{(1)}},\qquad 0\leqq\mu_1^{(1)}\leqq r_0^{(1)}-1,\end{aligned}\tag{16}$$

wobei die restliche Unbestimmtheit im letzten Faktor allein auftritt, da $\mu_1^{(1)}$ noch unbestimmt ist; es sei denn, wenn $r_0^{(1)}=1$, denn dann ist $\mu_1^{(1)}=0$, und keine weitere Normierung möglich. Es sei also $r_0^{(1)}>1$. Falls alle $B_\lambda=0$, $\lambda>r+r_1$, so liegt schon eine Normalform vor, denn $B_\lambda=0$ ist dann invariant gegenüber den verschiedenen Möglichkeiten für L^*. Andernfalls existiert ein r_2, so daß $B_{r+r_2}\neq 0$. Diese Eigenschaft ist ebenfalls unabhängig von $a^2/a_1^\nu=L^*$. Es gilt wieder nach (15)

$$b_{r+r_2}+\cdot b_{r+r_2-1}+\cdots=\left(\frac{a_2}{a_1^\nu}\right)^{r_2} B_{r+r_2},$$

wo die linke Seite festliegt. Es sei

$$\frac{r_2}{r_0^{(1)}}=\frac{\sigma_N^{(1)}}{\sigma_Z^{(1)}}, \qquad (\sigma_N^{(1)},\sigma_Z^{(1)})=1.$$

Wie oben kann man $\mu_1^{(1)}$ so bestimmen, daß B_{r+r_2} im Winkelraum

$$0\leqq \arg z<\frac{2\pi}{\sigma_N^{(1)}},$$

liegt. (Das heißt, falls $\sigma_0^{(1)}=1$, ist keine Normierung mehr möglich.) $\mu_1^{(1)}$ ist noch unbestimmt, denn man kann noch

$$\mu_1^{(1)}=\mu_0^{(1)}+\mu^{(2)}\sigma_N^{(1)}, \qquad 0\leqq\mu^{(2)}<r_0^{(2)}, \qquad \text{mit } r_0^{(1)}=\sigma_N^{(1)} r_0^{(2)},$$

setzen, was zu verschiedenen Faktoren $\exp 2\pi i\frac{\eta_1^{(1)}}{r_0^{(1)}}$ in (16) Anlaß gibt. Wir setzen die obige Reduktion weiter fort. Da $r_0^{(j)}|r_0^{(j-1)}|\ldots|r_0$, oder da nur endlich viele B_λ auftreten, muß die Reduktion nach endlich vielen Schritten mit $\sigma_0^{(j)}=1$ oder wegen der Normierung aller B_λ enden, und wir haben eine Normalform, da die noch freien Bestimmungen von a_2/a_1^ν keinen Einfluß mehr haben, bzw. da a_2/a_1^ν festliegt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir kommen nun zum Fall $(J^{(1)},R_2)$. Wir setzen für $N, T, M=T^{-1}\circ N\circ T$

$$N:\quad x^{(1)}=J^{(1)}x+P(x) \qquad \text{mit } P_3(x)=\sum_{0\leqq\lambda\leqq[\beta/\beta_1]} b_\lambda x_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} x_2^{\beta-\lambda\beta_1},$$

$$M:\quad y^{(1)}=J^{(1)}y+K(y) \qquad \text{mit } K_3(y)=\sum_{\lambda=0}^{[\beta/\beta_1]} B_\lambda y_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} y_2^{\beta-\lambda\beta_1},$$

$$T:\quad \begin{cases} x=A^{(1)}y+Q(y) \\ x^{(1)}=A^{(1)}y^{(1)}+Q(y^{(1)}) \end{cases} \qquad \text{mit } Q_3(y)=\sum_{\lambda=0}^{[\beta/\beta_1]} t^{(3)}_{\alpha+\lambda\alpha_1,\beta-\lambda_1\beta_1,0}\, y_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} y_2^{\beta-\lambda\beta_1}.$$

Die zwei möglichen Darstellungen von $x_3^{(1)}$ liefern

$$a_3\sum_{\lambda=0}^{[\beta/\beta_1]} B_\lambda y_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} y_2^{\beta-\lambda\beta_1}=\sum_{\lambda=0}^{[\beta/\beta_1]} b_\lambda a_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} a_2^{\beta-\lambda\beta_1} y_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} y_2^{\beta-\lambda\beta_1},$$

somit

$$a_3 B_\lambda=a_1^{\alpha+\lambda\alpha_1} a_2^{\beta-\lambda\beta_1} b_\lambda.$$

Also $B_\lambda=0 \Leftrightarrow b_\lambda=0$, und man kann nur noch die $B_\lambda \neq 0$ normieren. Es sei $B_0=\cdots=B_{r-1}=0$, $B_r \neq 0$ also auch $b_r \neq 0$. Setzt man

$$a_3=a_1^{\alpha+r\alpha_1}\, a_2^{\beta-r\beta_1}\, b_r,$$

was wegen $b_r \neq 0$ möglich ist, so folgt $B_r=1$. Mit diesem a_3 haben wir

$$B_\lambda=\left(\frac{a_1^\alpha}{a_2^\beta}\right)^{\lambda-r}, \qquad \lambda \geqq r.$$

Falls alle $B_\lambda=0$, $\lambda>r$, so liegt schon Normalform vor. Andernfalls seien $B_{r+r_1},\ldots,B_{r+r_\tau}$ die von Null verschiedenen B_λ. Diese werden wie im Beweis des Hilfssatzes 8 behandelt. Die Ergebnisse stellen wir daher erst in der Übersicht dar.

§ 5. Die Normalformen bei mehrfachen Eigenwerten

Wir betrachten zuerst den Fall $(J^{(2)}, R_1)$. Wir setzen wieder für N, T, $T^{-1}\circ M\circ T$:

$$N: \quad x^{(1)}=J^{(2)}x+P(x), \qquad P_3(x)=\sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda x_1^{\nu-\lambda} x_2^\lambda;$$

$$M: \quad y^{(1)}=J^{(2)}y+K(y), \qquad K_3(y)=\sum_{\lambda=0}^{\nu} B_\lambda y_1^{\nu-\lambda} y_2^\lambda;$$

$$T: \quad \left.\begin{aligned} x&=A^{(2)}y+Q(y)\\ x^{(1)}&=A^{(2)}y^{(1)}+Q(y^{(1)})\end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad Q_3(y)\colon \sum_{\lambda=0}^{\nu} t^{(3)}_{\nu-\lambda,\lambda,0}\, y_1^{\nu-\lambda} y_2^\lambda.$$

Damit ergibt sich für $x_3^{(1)}$, wenn $A^{(2)}=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & e\end{pmatrix}$ gesetzt wird,

$$\rho_2\left(e\,y_3+\sum_{\lambda=0}^{\nu} t^{(3)}_{\nu-\lambda,\lambda,0}\, y_1^{\nu-\lambda} y_2^\lambda\right)+\sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda (a\,y_1+b\,y_2)^{\nu-\lambda}(c\,y_1+d\,y_2)^\lambda$$
$$=e\left(\rho_2\,y_3+\sum_{\lambda=0}^{\nu} B_\lambda y_1^{\nu-\lambda} y_2^\lambda\right)+\sum_{\lambda=0}^{\nu} t^{(3)}_{\nu-\lambda,\lambda,0}(\rho_1 y_1)^{\nu-\lambda}(\rho_1 y_2)^\lambda.$$

Wegen der Relation R_1 bleibt:

$$e\sum_{\lambda=0}^{\nu} B_\lambda y_1^{\nu-\lambda} y_2^\lambda=\sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda (a\,y_1+b\,y_2)^{\nu-\lambda}(c\,y_1+d\,y_2)^\lambda.$$

Setzt man

$$A=\frac{a}{e^{1/\nu}}, \ldots, D=\frac{d}{e^{1/\nu}}$$

mit irgendeiner Bestimmung von $e^{1/\nu}$, so ist die letzte Relation gleichbedeutend mit

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} B_\lambda y_1^{\nu-\lambda} y_2^\lambda = \sum_{\lambda=0}^{\nu} b_\lambda (A y_1 + B y_2)^{\nu-\lambda} (C y_1 + D y_2)^\lambda.$$

Es sind A, B, C, D bis auf $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq 0$ beliebig.

Daraus folgt:

Hilfssatz 9. *Es liege der Fall* $(J^{(2)}, R_1)$ *vor. Dann gilt für die Normalform* $x^{(1)}=J^{(2)}x+P(x)$:

$P_3=0$, *oder* $P_3 \neq 0$ *ist die projektive Normalform einer binären Form.*

Im Fall $(J^{(3)}, R_1)$ setzen wir

$$\begin{aligned} N:&\quad x^{(1)}=J^{(3)}x+P(x) \quad \text{mit} \quad P_2(x)=a\,x_1^\nu, \quad P_3(x)=b\,x_1^\nu;\\ M:&\quad y^{(1)}=J^{(3)}y+K(y) \quad \text{mit} \quad K_2(y)=A\,y_1, \quad K_3(y)=B\,y_1^\nu;\\ T:&\quad \begin{cases} x=A^{(3)}y+Q(y) \\ x^{(1)}=A^{(3)}y^{(1)}+Q(y^{(1)}) \end{cases} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} Q_2(y)&=t_{\nu 00}^{(2)}\,y_1^\nu,\\ Q_3(y)&=t_{\nu 00}^{(3)}\,y_1^\nu. \end{aligned} \end{aligned}$$

Überlegungen wie in den früheren Fällen liefern, wenn wir noch

$$A^{(3)}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

setzen:

$$a_1^\nu \cdot a = a_2 A + a_3 B,$$
$$a_1^\nu \cdot b = a_4 A + a_5 B.$$

Man sieht $(a, b)=(0,0) \Leftrightarrow (A, B)=(0,0)$.

In den Fällen, die zu diesem nicht äquivalent sind, d.h. mit $(a, b) \neq (0,0)$, setzen wir $(A, B)=(1,0)$. Dann folgt: $a_2/a_1^\nu=a$, $a_4/a_1^\nu=b \cdot a_1$ ist beliebig, aber $\neq 0$ zu wählen, a_4, a_5 beliebig, aber so, daß $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} \neq 0$.

Damit ist bewiesen

Hilfssatz 10. *Im Fall* $(J^{(3)}, R_1)$ *gilt für die Normalformen* N:

$$x^{(1)}=J^{(3)}x+P(x):$$

$$P_2(x)=\varepsilon x_1^\nu, \quad P_3(x)=0, \qquad \text{mit } \varepsilon=0, 1.$$

Die Fälle $\varepsilon=0$ *und* $\varepsilon=1$ *sind nicht äquivalent.*

Die noch übrigen Fälle $(J^{(4)}, R_1)$, $(J^{(5)}, R_1)$ wollen wir nicht mehr explizit ausführen, da sie methodisch nichts Neues liefern. Man kann auf Grund allgemeiner Sätze aus [5] die Gestalt von $N: J^{(\nu)}x+P(x)$ gleich folgendermaßen annehmen:

$$(J^{(4)}, R_1):\quad P_2(x)=0,\quad P_3(x)=a\,x_1^\nu$$
$$(J^{(5)}, R_1):\quad P_2(x)=a\,x_1^\nu,\quad P_3(x)=0.$$

Wir führen das Ergebnis der Normierung in der Übersicht an.

§ 6. Übersicht über die Normalformen

Normalformen $N: x\to x^{(1)}=\mathscr{L}\{N\}\,x+\mathscr{R}\{N\}\,x;\ \mathscr{L}\{N\}\,x=J^{(\nu)}x$ mit einer Jordanschen Normalform.

A) Jordansche Normalformen.

$$\begin{array}{lll} J^{(1)}: & [1,\ 1,\ 1], & 0<|\rho_3|\leqq|\rho_2|\leqq|\rho_1|<1 \\ J^{(2)}: & [(1\ 1),\ 1], & \\ J^{(3)}: & [1\,(1\ 1)], & \\ J^{(4)}: & [2\ 1], & 0<|\rho_2|\leqq|\rho_1|<1, \\ J^{(5)}: & [1\ 2], & \\ J^{(6)}: & [(1\ 1\ 1)], & \\ J^{(7)}: & [(1\ 2)], & 0<|\rho_1|<1. \\ J^{(8)}: & [3] & \end{array}$$

B) Relationensysteme $\rho_k: \rho_1^{\alpha_1}\dots\rho_n^{\alpha_n}$, $\alpha_i\geqq 0$, ganz, $\sum_{l=1}^{n}\alpha_i\geqq 2$.

R_0: Keine Relationen;

R_1: $\rho_2=\rho_1^\nu$, $\nu\geqq 2$ fest; keine Relation für ρ_3, falls 3 verschiedene Eigenwerte;

R_2: Keine Relation für ρ_2

$$\rho_3=\rho_1^{\alpha+\lambda\alpha_1}\rho_2^{\beta-\lambda\beta_1};\quad \alpha,\beta,\alpha_1,\beta_1 \text{ fest, } \geqq 0,$$
$$0\leqq\alpha<\alpha_1;\quad \lambda=0,\dots,[\beta/\beta_1];$$

R_3: $\rho_2=\rho_1^\nu;\ \nu\geqq 2,$

$$\rho_3=\rho_1^{\alpha+k\nu}\rho_2^{\beta-k};\quad 0\leqq\alpha<\nu,\quad \beta\geqq 0,\quad \text{fest},$$
$$k=0,1,\dots,\beta.$$

Jordansche Normalformen	Relationen			
	R_0	R_1	R_2	R_3
$J^{(1)}$	$(J^{(1)}, R_0)$	$(J^{(1)}, R_1)$	$(J^{(1)}, R_2)$	$(J^{(1)}, R_3)$
$J^{(2)}$ bis $J^{(5)}$	$(J^{(\nu)}, R_0)$	$(J^{(\nu)}, R_1)$		
$J^{(6)}$ bis $J^{(8)}$	$(J^{(\nu)}, R_0)$			

C) Beschreibung der Normalformen: $x^{(1)} = J^{(\nu)} x + P(x)$, $P_1 = 0$.

$(J^{(\nu)}, R_0)$, $\nu = 1, \dots, 8$: $x^{(1)} = J^{(\nu)} x$ (linearer Anteil).

$(J^{(1)}, R_1)$: $P_2(x) = \varepsilon x_1^{\nu}$, $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$; $P_3(x) = 0$.

$(J^{(2)}, R_1)$: $P_2(x) = 0$; $P_3(x) =$ projektive Normalform eines binären homogenen Polynoms vom Grade ν.

$(J^{(3)}, R_1)$: $P_2(x) = \varepsilon x_1^{\nu}$; $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$; $P_3(x) = 0$.

$(J^{(4)}, R_1)$: $P_2(x) = 0$; $P_3(x) = \varepsilon x_2^{\nu}$, $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$.

$(J^{(5)}, R_1)$: $P_2(x) = \varepsilon x_1^{\nu}$, $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$; $P_3(x) = 0$.

$(J^{(1)}, R_2)$, $P_2(x) \neq 0$: $P_2(x) = x_1^{\nu}$; $P_3(x) = \varepsilon x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$.

$(J^{(1)}, R_2)$, $P_2(x) = 0$: $P_2(x) = 0$

$$P_3(x) = 0,$$

oder

$$P_3(x) = x_1^{\alpha + r\nu} x_2^{\beta - r}, \qquad 0 \leqq r \leqq \beta,$$

oder

$$P_3(x) = x_1^{\alpha + r\nu} x_2^{\beta - r} + \sum_{\substack{k = r + r_l \\ l = 0, \dots, \tau}} B_k x_1^{\alpha + k\nu} x_2^{\beta - k},$$

wobei gilt:

$$r \leqq \beta - 2, \qquad 1 < r_0 < r_1 \cdots < r_\tau,$$

und wobei die B_k nach folgendem Verfahren zu normieren sind: r ist die kleinste Zahl, so daß für eine halbkanonische Form der Klasse von N: $b_r \neq 0$ gilt. Falls $r \leqq \beta - 2$, dann ist $B_r = 1$, $B_{r+1} = 0$ zu erreichen; damit ist festgelegt, ob $B_\lambda = 0$, oder $B_\lambda \neq 0$, $\lambda > r + 1$. Es sei $B_{r + r_l} \neq 0$, $l = 0, \dots, \tau$. Ferner gelte:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{\sigma_Z^{(0)}}{\sigma_N^{(0)}}, \qquad (\sigma_Z^{(0)}, \sigma_N^{(0)}) = 1,\ r_0 = \sigma_N^{(0)} r_0^{(1)},\ \sigma_N^{(0)} > 1,$$

$$\frac{r_2}{r_0^{(1)}} = \frac{\sigma_Z^{(1)}}{\sigma_N^{(1)}}, \qquad (\sigma_Z^{(1)}, \sigma_N^{(1)}) = 1,\ r_0^{(1)} = \sigma_N^{(1)} r_0^{(2)},\ \sigma_N^{(0)} > 1,$$

$$\vdots \quad \text{bis} \quad \vdots$$

$$\frac{r_j}{r_0^{(j-1)}} = \frac{\sigma_Z^{(j-1)}}{\sigma_N^{(j-1)}}, \qquad (\sigma_N^{(j-1)}, \sigma_Z^{(j-1)}) = 1,\ r_0^{(j-1)} = r_0^{(j)} \sigma_N^{(j-1)},\ \sigma_N^{(1)} < 1, \quad \text{falls } j = \tau,$$

oder

$$\frac{r_{j+1}}{r_0^{(j)}} = \frac{\sigma_Z^{(j)}}{\sigma_N^{(j)}}, \qquad (\sigma_N^{(j)}, \sigma_Z^{(j)}) = 1,\ r_0^{(j)} = \sigma_N^{(j)} r_0^{(j+1)},\ \sigma_N^{(j)} = 1, \quad \text{falls } j - 1 \leqq \tau.$$

Dann ist

$$0 \leqq \arg B_{r + r_1} < \frac{2\pi}{\sigma_N^{(0)}}, \dots, 0 \leqq \arg B_{r + r_j} < \frac{2\pi}{\sigma_N^{(j-1)}}.$$

Die B_{r+r_l}, $l>j$, (falls noch solche existieren) sind durch diese Normierung festgelegt.

$(J^{(1)}, R_3)$: $P_2(x)=0$,

$P_3(x)=0$

oder

$$P_3(x)=x_1^{\alpha+r\alpha_1}x_2^{\beta-r\beta_1}, \quad 0\leqq r\leqq[\beta/\beta_1],$$

oder

$$P_3(x)=x_1^{\alpha+r\alpha_1}x_2^{\beta-r\beta_1}+\sum_{\substack{k=r+r_l\\ l=0,\ldots,\tau}} B_k x_1^{\alpha+k\alpha_1}x_2^{\beta-k\beta_1},$$

wobei gilt:

(i) $0\leqq r\leqq\beta-1$, $0<r_0<\cdots<r_\tau$;

(ii) r ist die kleinste Zahl, so daß für eine halbkanonische Form der Klasse von N $b_r\neq 0$. Falls $r\leqq\beta-1$, dann ist $B_r=1$ zu erreichen; damit ist festgelegt, ob $B_\lambda=0$ oder $\neq 0$ für $\lambda\geqq r+1$. Es seien dies B_{r+r_l}, $l=0,\ldots,\tau$. Diese B_{r+r_l} werden wie bei $(J^{(1)}, R_2)$, $P_2\neq 0$, normiert.

Literatur

1. Gurevich, G.B.: Foundations of the theory of algebraic invariants. Groningen: P. Noordhoff 1964.
2. Hodge, W.V.D., and D. Pedoe: Methods of algebraic geometry, Volume I. Cambridge: Cambridge University Press 1953 (Reprint 1968).
3. Peschl, E.: Über die Bilder von Sternbereichen. Bericht über die Mathematiker-Tagung in Tübingen vom 23.–27.9.1946, pp. 112–116. Mathematisches Institut der Universität Tübingen, 1946.
4. Reich, L.: Normalformen biholomorpher Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. Math. Ann. **180**, 233–255 (1969).
5. – Das Typenproblem bei formal-biholomorphen Abbildungen mit anziehendem Fixpunkt. Math. Ann. **179**, 227–250 (1969).

Prof. Dr. Ernst Peschl
Dr. Ludwig Reich
Mathematisches Institut der Universität Bonn
5300 Bonn, Wegelerstraße 10

(Eingegangen am 29. Januar 1969)

Math. Z. 111, 350–366 (1969)

Über semilineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung

FRIEDRICH TOMI

§ 0. Problemstellung und Bezeichnungen

Gegenstand dieser Untersuchung sind Differentialgleichungen und -ungleichungen für eine reelle Funktion u von n reellen Veränderlichen $x=(x_1,\dots,x_n)$ der Gestalt

$$Lu=f(x,u,u_x) \tag{0}$$

und

$$|Lu|\leqq A+B|u_x|^2 \tag{0'}$$

mit

$$L\equiv\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j} \tag{0.1}$$

und

$$u_x=(\partial u/\partial x_1,\dots,\partial u/\partial x_n).$$

Wir bezeichnen (0) bzw. (0′) als semilineare Differentialgleichung bzw. -ungleichung. Wir setzen stets mindestens das Folgende voraus: Ω ist ein beschränktes Gebiet des n-dimensionalen euklidischen Raumes $\mathbb{R}^n$ und die Funktionen $a_{ij}(x)$ bzw. $f(x,u,p)$ sind in $\bar\Omega$ bzw. $\bar\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ definiert und stetig. Dabei ist $\bar\Omega=\Omega\cup\partial\Omega$ und $\partial\Omega$ der Rand von Ω. Ferner gelten die Ungleichungen

$$M^{-1}|\xi|^2\leqq\sum_{i,j} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j\leqq M|\xi|^2 \tag{0.2}$$

und

$$|f(x,u,p)|\leqq\mu(|u|)\,(1+|p|^2) \tag{0.3}$$

für alle $x\in\Omega$, $u\in\mathbb{R}$, und $p,\xi\in\mathbb{R}^n$.

A, B in (0′) und M in (0.2) sind positive Konstanten; die Funktion μ in (0.3) ist monoton nicht fallend.

Erste Resultate über a-priori Abschätzungen und Existenzsätze für Lösungen von Differentialgleichungen der Gestalt (0) stammen von Bernstein ([2]) für den Fall $n=2$.

Eine Erweiterung auf Systeme der obigen Form wurde zuerst von Heinz ([4, 5]) gegeben. Der Fall der skalaren Gleichung wurde für beliebiges n und differenzierbare Koeffizienten a_{ij} von Nagumo ([10]) untersucht. Die Ergebnisse in [10] sind allerdings unter der Annahme einer Kleinheitsbedingung für $\sup_\Omega |u|$ und die Koeffizienten von (0) abgeleitet. Nagumo vermutete bereits in

[10] die Überflüssigkeit solcher Bedingungen, und in der Tat wurde seine Vermutung durch Ladyshenskaya und Uraltseva nicht nur bestätigt, sondern diese Autorinnen zeigten auch, daß entsprechende Ergebnisse für eine ziemlich allgemeine Klasse von quasilinearen Differentialgleichungen gelten. Diesbezüglich verweisen wir auf die umfassende Darstellung [9], wo man auch Hinweise auf die Beiträge anderer Autoren findet. Weitere Resultate über semilineare Differentialgleichungen stammen von Agmon-Douglis-Nirenberg ([1]), solche über semilineare und quasilineare von Hirasawa ([6–8]). Alle bisher genannten Ergebnisse sind jedoch unter einer der folgenden Voraussetzungen abgeleitet: 1. Die Gleichung hat Divergenzstruktur. – 2. Die Koeffizienten sind hinreichend differenzierbar, und ihre Ableitungen genügen gewissen Wachstumsbedingungen. – 3. Die Größe $\sup_{\Omega}|u|$ und die Koeffizienten der Gleichung erfüllen a-priori eine Kleinheitsbedingung. In der vorliegenden Arbeit können wir nun zeigen, daß im semilinearen Fall keine dieser Einschränkungen notwendig ist.

An dieser Stelle möchte der Autor Herrn Prof. Dr. E. Heinz für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche wertvolle Hinweise danken.

Wir geben einen Überblick über unser Vorgehen. In § 1 werden a-priori-Schranken für den Gradienten einer Funktion u abgeleitet, die einer Ungleichung der Form (0′) mit stetigen Koeffizienten a_{ij} genügt. Dabei muß zunächst Kleinheit von $\sup_{\Omega}|u|$ gefordert werden. In § 2 wird das Hauptergebnis dieser Arbeit bewiesen, nämlich, daß die Kleinheitsforderung für $\sup_{\Omega}|u|$ entbehrlich ist. Dazu müssen vorher einige Existenzsätze für das zu (0) gehörige Dirichletproblem abgeleitet werden, die jedoch nur den Charakter von Hilfssätzen haben. In § 3 schließlich werden bei hölderstetigen Koeffizienten a_{ij} und f einige evidente Folgerungen für die Lösbarkeit des zu (0) gehörenden Dirichletproblems gezogen.

Wir führen einige Bezeichnungen ein. Ist $m\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ mit $0<\alpha<1$, und ist Γ eine relativ offene Teilmenge von $\partial\Omega$, so sei $C^m(\Omega\cup\Gamma)$ bzw. $C^{m+\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$ der lineare Raum der auf $\Omega\cup\Gamma$ definierten, reellwertigen Funktionen, die in Ω m-mal differenzierbar sind und deren partielle Ableitungen bis zur Ordnung m einschließlich auf $\Omega\cup\Gamma$ stetig bzw. hölderstetig mit dem Exponenten α sind.

Ist $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)$ mit $\nu_i\in\mathbb{N}$, so setzen wir

$$[\nu]:=\sum_{i=1}^{n}\nu_i \quad \text{und} \quad D^\nu:=\partial^{[\nu]}/\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}.$$

In $C^m(\Omega\cup\Gamma)$ bzw. $C^{m+\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$ definieren wir dann die Seminormen

$$\|u\|_m^K:=\sum_{[\nu]\leqq m}\sup_{x\in K}|D^\nu u(x)|$$

bzw.

$$\|u\|_{m+\alpha}^K:=\|u\|_m^K+\sum_{[\nu]=m}\sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y}}\frac{|D^\nu u(x)-D^\nu u(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

wobei K eine kompakte Teilmenge von $\Omega \cup \Gamma$ ist. Wir sagen, daß Γ zu $C^{m+\alpha}$ gehört, wenn für Γ lokal eine Darstellung

$$x_k = \varphi(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n) \tag{0.4}$$

mit $\varphi \in C^{m+\alpha}$ gilt.

Ist die Funktion g auf $\bar{\Gamma}$ definiert, so sagen wir, daß g zu $C^{m+\alpha}(\bar{\Gamma})$ gehört, wenn es eine $\mathbb{R}^n$-Umgebung Λ von Γ und $\tilde{g} \in C^{m+\alpha}(\bar{\Lambda})$ mit $\tilde{g}|\Gamma = g$ gibt.

Wir setzen dann

$$\|g\|_{m+\alpha}^{\Gamma} := \inf_{(\Lambda, \tilde{g})} \|\tilde{g}\|_{m+\alpha}^{\Lambda}.$$

§ 1. A-priori-Abschätzungen mit quantitativer Einschränkung

Wir formulieren zunächst einige bekannte Ergebnisse über lineare elliptische Differentialoperatoren in einer Fassung, die unseren Bedürfnissen angepaßt ist. Es sei L_0 ein Differentialoperator der Gestalt (0.1) mit konstanten Koeffizienten a_{ij}, welche die Bedingung (0.2) erfüllen mögen. Es sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, und $u(x)$ verschwinde für $|x| \geqq 1$. Dann gilt die Ungleichung

$$\sum_{[\nu]=2} \int |D^\nu u|^p \, dx \leqq C \int |L_0 u|^p \, dx. \tag{1.1}$$

Dabei ist p eine beliebige Zahl mit $p > 1$, und die Konstante C hängt nur von p und der Konstanten M in (0.2) ab.

Gehört u zur Klasse C^2 im Halbraum $x_n \geqq 0$ und ist $u(x) = 0$ für $|x| \geqq 1$ und für $x_n = 0$, so haben wir die Abschätzung

$$\sum_{[\nu]=2} \int_{x_n \geqq 0} |D^\nu u|^p \, dx \leqq C' \int_{x_n \geqq 0} |L_0 u|^p \, dx. \tag{1.1'}$$

Die Konstante C' hängt ebenfalls nur von p und M ab.

Aus (1.1) und (1.1′) leitet man leicht das folgende Resultat ab: Es sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^2$. Es sei L der Operator (0.1). Für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt dann mit der Definition $g := u|\partial\Omega$ die Ungleichung

$$\sum_{[\nu]\leqq 2} \int_\Omega |D^\nu u|^p \, dx \leqq C \cdot \Big(\int_\Omega |Lu|^p \, dx + \int_\Omega |u|^p \, dx + \|g\|_2^{\partial\Omega} \Big). \tag{1.2}$$

Die Konstante C hängt dabei von p und Ω, sowie von der Konstanten M in (0.2) und von dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten a_{ij} ab. Setzen wir zusätzlich voraus, daß $a_{ij} \in C^\alpha(\bar{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ mit $0 < \alpha < 1$ gilt, so haben wir

$$\|u\|_{2+\alpha}^{\Omega} \leqq C \cdot (\|Lu\|_\alpha^\Omega + \|g\|_{2+\alpha}^{\partial\Omega}). \tag{1.3}$$

Die Konstante hängt von Ω, α, M und $\max\limits_{i,j} \|a_{ij}\|_\alpha^\Omega$ ab.

Für $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ gilt ferner die Maximumabschätzung

$$\|u\|_0^\Omega \leqq C(\|Lu\|_0^\Omega + \|g\|_0^{\partial\Omega}) \tag{1.4}$$

mit einer von M und Ω abhängigen Konstanten C. Wegen der Beweise von (1.1), (1.1′), (1.2) und (1.3) verweisen wir auf Agmon-Douglis-Nirenberg ([1], Theorema 14.1', 14.1, 15.2 und 7.3), wegen (1.4) auf Courant-Hilbert ([3], IV, § 6,4.). Wir werden auch den folgenden Einbettungssatz vom Sobolev-Kondraschov-Typ benötigen: Es sei $\Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, x_n > 0\}$ und es sei $w \in C^1(\Omega_0)$. Dann gilt für jedes $p > n$ die Abschätzung

$$\|w\|_\alpha^{\Omega_0} \leqq C \cdot \Big(\int_{\Omega_0} |w|^p \, dx + \int_{\Omega_0} |w_x|^p \, dx \Big)^{1/p}. \tag{1.5}$$

Dabei ist $\alpha := 1 - \dfrac{n}{p}$ und die Konstante C hängt nur von p ab. Es ist leicht zu sehen, daß (1.5) auch gültig bleibt, wenn man Ω_0 durch ein beschränktes Gebiet Ω mit $\partial\Omega \in C^1$ ersetzt. Die Konstante C in (1.5) hängt dann von p und Ω ab. Bezüglich (1.5) verweisen wir auf Nirenberg ([11], S. 125, S. 127). Wir beginnen nun mit einem „Interpolationslemma". Man vergleiche hierzu [11], S. 125.

Hilfssatz 1. *Es sei $\Omega_0 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^{(0)}| < r, x_n > 0\}$ mit $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $x_n^{(0)} \geqq 0$, und $r > 0$. Ferner sei $u \in C^2(\bar{\Omega}_0)$ mit $u(x) = 0$ für $x_n = 0$ und $\zeta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\zeta(x) = 0$ für $|x - x^{(0)}| \geqq r$. Dann gilt für jedes $p \geqq 0$ die Ungleichung*

$$\int_{\Omega_0} (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2} \, dx \leqq C\Big(\delta_0^4 \int_{\Omega_0} |\zeta_x|^4 (\zeta^2 |u_x|^2)^p \, dx + \delta_0^{p+2} \int_{\Omega_0} \sum_{[\nu]=2} (\zeta^2 |D^\nu u|)^{p+2} \, dx\Big). \tag{1.6}$$

Dabei ist $\delta_0 := \|u\|_0^{\Omega_0}$ gesetzt und die Konstante C hängt nur von p und n ab.

Beweis. Wir schreiben $\int$ statt $\int_{\Omega_0}$ und erhalten durch partielle Integration die für alle $\Phi \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ mit $\Phi | \partial\Omega_0 = 0$ gültige Formel

$$\int \sum_i u_{x_i} \Phi_{x_i} \, dx = -\int (\Delta u) \, \Phi \, dx. \tag{1.7}$$

Wir setzen $\Phi = \eta^2 u$ mit $\eta \in C^1(\bar{\Omega}_0)$ und $\eta(x) = 0$ für $|x - x^{(0)}| = r$. Da u für $x_n = 0$ verschwindet, ist Φ eine zulässige Testfunktion in (1.7) und wir erhalten

$$\int \eta^2 |u_x|^2 \, dx = -2 \int \sum_i \eta \, u_{x_i} \, u \, \eta_{x_i} \, dx - \int (\Delta u) \, \eta^2 \, u \, dx.$$

Mit Hilfe der Ungleichung $2a\,b \leqq \varepsilon\, a^2 + \varepsilon^{-1} b^2$ ergibt sich daraus die Abschätzung

$$\int \eta^2 |u_x|^2 \, dx \leqq \varepsilon \int \eta^2 |u_x|^2 \, dx + \varepsilon^{-1} \delta_0^2 \int |\eta_x|^2 \, dx + \delta_0 \int \eta^2 |\Delta u| \, dx.$$

Mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$ wird daraus

$$\int \eta^2 |u_x|^2 \, dx \leqq 4 \delta_0^2 \int |\eta_x|^2 \, dx + 2 \delta_0 \int \eta^2 |\Delta u| \, dx. \tag{1.8}$$

Es sei nun $p \geqq 0$ und $\zeta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\zeta(x) = 0$ für $|x - x^{(0)}| \geqq r$. Wir treffen die Verabredung, daß das Symbol C im folgenden stets für Konstanten verwendet wird, die von p und n abhängen.

Es ist dann erlaubt, in (1.8) für η die Funktion $\zeta^{p+2}|u_x|^{p+1}$ einzusetzen. Wir erhalten daraufhin

$$\int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx \leqq C(J_1+J_2+J_3) \tag{1.9}$$

mit

$$J_1=\delta_0^2 \int \zeta^{2(p+1)} |\zeta_x|^2 |u_x|^{2(p+1)}\, dx,$$

$$J_2=\delta_0^2 \int \zeta^{2(p+2)} |u_x|^{2p} \sum_{[\nu]=2} |D^\nu u|^2\, dx,$$

$$J_3=\delta_0 \int \zeta^{2(p+2)} |u_x|^{2(p+1)} \sum_{[\nu]=2} |D^\nu u|\, dx.$$

Indem wir auf J_1 und J_3 die Ungleichung $2ab \leqq \varepsilon a^2+\varepsilon^{-1} b^2$ anwenden, ergibt sich

$$J_1 \leqq \varepsilon \int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx+\varepsilon^{-1} \delta_0^4 \int |\zeta_x|^4 (\zeta^2 |u_x|^2)^p\, dx,$$

$$J_3 \leqq \varepsilon \int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx+\varepsilon^{-1} \delta_0^2 \int (\zeta^2 |u_x|^2)^p \zeta^4 \sum_{[\nu]=2} |D^\nu u|^2\, dx.$$

Bei geeigneter Wahl von ε erhalten wir dann aus (1.9) die Ungleichung

$$\begin{aligned} \int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx \leqq C\Big(&\delta_0^4 \int |\zeta_x|^4 (\zeta^2 |u_x|^2)^p\, dx \\ &+\int (\zeta^2 |u_x|^2)^p \sum_{[\nu]=2} (\delta_0 \zeta^2 |D^\nu u|)^2\, dx\Big). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Bezeichnen wir das zuletzt angeschriebene Integral mit J, so folgt mit Hilfe der für alle $\varepsilon>0$ gültigen Ungleichung $a^{p/(p+2)} b^{2/(p+2)} \leqq \varepsilon a+\varepsilon^{-p/2} b$ die Abschätzung

$$J \leqq n^2 \varepsilon \int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx+\varepsilon^{-p/2} \int \sum_{[\nu]=2} |\delta_0 \zeta^2 D^\nu u|^{p+2}\, dx.$$

Bei geeigneter Wahl von ε ergibt sich dann aus (1.10) die Behauptung des Hilfssatzes.

Als nächstes zeigen wir eine Verallgemeinerung eines Resultats von Hirasawa [7] auf den Fall stetiger Koeffizienten a_{ij}.

Hilfssatz 2. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet und Γ eine offene Teilmenge von $\partial\Omega$ mit $\Gamma \in C^2$. Es sei L der Operator (0.1). Die Funktion $u \in C^0(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma)$ genüge der Differentialungleichung (0′) und die Funktion $g := u|\bar\Gamma$ gehöre zu $C^2(\bar\Gamma)$.*

Dann gibt es eine Funktion $\delta=\delta(B, M; n)>0$, so daß für alle kompakten Teilmengen K von $\Omega \cup \Gamma$ und alle α mit $0<\alpha<1$ die Ungleichung

$$\|u\|_{1+\alpha}^K \leqq C \tag{1.11}$$

besteht, falls nur

$$\|u\|_0^\Omega \leqq \delta(B, M; n)$$

gilt. Dabei ist C eine Konstante, die von den Konstanten A, B aus (0′), M aus (0.2), ferner von α, Ω, K, $\|g\|_2^\Gamma$, und vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten a_{ij} abhängt.

Beweis. Für $x^{(0)} \in \Omega \cup \Gamma$ setzen wir $\Omega(x^{(0)}, r) := \{x \in \Omega: |x - x^{(0)}| < r\}$, wobei $r > 0$ so gewählt sei, daß $\overline{\Omega(x^{(0)}, r)} \subset \Omega \cup \Gamma$ gilt. Es genügt dann, wenn wir (1.11) mit $K = \overline{\Omega(x^{(0)}, r)}$ für genügend kleines $r > 0$ zeigen.

Wir treffen für das Folgende die Vereinbarung, daß das Symbol c für Konstanten verwendet wird, die von A, B, M, Γ, n und $\|g\|_2^\Gamma$ abhängen; c^* bezeichnet Konstanten, die nur von B, M und n abhängen.

Wenn wir die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ einer geeigneten Transformation unterwerfen und von u eine geeignete Fortsetzung der Randwerte g subtrahieren, so können wir die folgende Situation herbeiführen:

Es gilt $\Omega(x^{(0)}, r) = \{x: |x - x^{(0)}| < r, x_n > 0\}$ mit $x_n^{(0)} \geqq 0$, und es ist $u \in C^2(\overline{\Omega(x^{(0)}, r)})$.

Ferner erfüllt u die Randbedingung

$$u(x) = 0 \qquad \text{für } x_n = 0 \tag{1.12}$$

und die Differentialungleichung

$$|\tilde{L} u| \leqq c + c^* |u_x|^2. \tag{1.13}$$

Dabei ist $\tilde{L}$ ein Differentialoperator der Gestalt

$$\tilde{L} = \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

mit stetigen Koeffizienten $\tilde{a}_{ij}$, die sich aus den Koeffizienten a_{ij} des Operators L und den zu Γ gehörenden Koordinaten (0.4) berechnen. Ferner besteht die Ungleichung

$$(2M)^{-1} |\xi|^2 \leqq \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leqq (2M) |\xi|^2 \tag{1.14}$$

für $x \in \Omega(x^{(0)}, r)$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wir setzen noch zur Abkürzung $\Omega(r) := \Omega(x^{(0)}, r)$, sowie

$$\int := \int_{\Omega(r)} \quad \text{und} \quad \delta_0 := \|u\|_0^\Omega.$$

Es sei dann $\zeta \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\zeta(x) = 0$ für $|x - x^{(0)}| \geqq r'$, $0 < r' < r$, und p eine natürliche Zahl mit $0 \leqq p \leqq n$. Wegen (1.12) haben wir dann nach (1.1) bzw. (1.1') die Ungleichung

$$\int \sum_{[\nu]=2} |D^\nu(\zeta^2 u)|^{p+2} \, dx \leqq c^* \int |\tilde{L}_0(\zeta^2 u)|^{p+2} \, dx \tag{1.15}$$

mit

$$\tilde{L}_0 := \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}(x^{(0)}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Wir setzen

$$s(\rho) := \sup_{|x - x^{(0)}| \leqq \rho} \sum_{i,j} |\tilde{a}_{ij}(x^{(0)}) - \tilde{a}_{ij}(x)|$$

und erhalten aus (1.15) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int \sum_{[\nu]=2} |D^\nu(\zeta^2 u)|^{p+2}\, dx &\leqq c^* \int (|\tilde{L}(\zeta^2 u)| + |(\tilde{L}_0 - \tilde{L})(\zeta^2 u)|)^{p+2}\, dx \\ &\leqq c^* \int (\zeta^2 \tilde{L} u + \zeta^2 |u_x|^2 + \zeta^2 + (1+\delta_0)|\zeta_x|^2 \\ &\quad + \delta_0^2 |\zeta_{xx}|^2)^{p+2}\, dx + c^* s(r') \int \sum_{[\nu]=2} |D^\nu(\zeta^2 u)|^{p+2}\, dx.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Dabei wurde $|\zeta_{xx}| := \left(\sum_{[\nu]=2} (D^\nu \zeta)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ gesetzt.

Falls nun $r'>0$ so gewählt wird, daß

$$c^* s(r') \leqq \tfrac{1}{2} \tag{1.17}$$

ausfällt, was wegen der Stetigkeit der Koeffizienten $\tilde{a}_{ij}$ möglich ist, so ergibt sich aus (1.16) unter Berücksichtigung von (1.13) die Ungleichung

$$\begin{aligned}\int \sum_{[\nu]=2} |D^\nu(\zeta^2 u)|^{p+2}\, dx \leqq c^* \int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx + c\cdot (1+\delta_0)^{2(p+2)} \\ \cdot \int (\zeta^2 + |\zeta_x|^2 + |\zeta_{xx}|^2)^{p+2}\, dx.\end{aligned}$$

Daraus wird durch einfache Rechnung

$$\begin{aligned}\int \sum_{[\nu]=2} (\zeta^2 |D^\nu u|)^{p+2}\, dx \leqq c^* \int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx + c(1+\delta_0)^{2(p+2)} \\ \cdot \int (\zeta^2 + |\zeta_x|^2 + |\zeta_{xx}|^2)^{p+2}\, dx.\end{aligned} \tag{1.18}$$

Kombination von (1.6) mit (1.18) ergibt

$$\begin{aligned}\int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx \leqq c^* \{\delta_0^4 \int |\zeta_x|^4 (\zeta^2 |u_x|^2)^p\, dx + \delta_0^{p+2} \int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx\} \\ + c(1+\delta_0)^{3(p+2)} \int (\zeta^2 + |\zeta_x|^2 + |\zeta_{xx}|^2)^{p+2}\, dx.\end{aligned} \tag{1.19}$$

Wir setzen nun $\delta(B,M;n) := (1+2c_0^*)^{-\frac{1}{2}}$, wobei c_0^* die Konstante c^* aus (1.19) ist, und erhalten dann, falls $\delta_0 \leqq \delta(B,M;n)$ gilt, aus (1.19) die Abschätzung

$$\int (\zeta^2 |u_x|^2)^{p+2}\, dx \leqq c^* \int |\zeta_x|^4 (\zeta^2 |u_x|^2)^p\, dx + c \int (\zeta^2 + |\zeta_x|^2 + |\zeta_{xx}|^2)^{p+2}\, dx. \tag{1.20}$$

Dabei ist p eine beliebige natürliche Zahl mit $0 \leqq p \leqq n$ und ζ eine Funktion, die für $|x - x^{(0)}| \geqq r'$ verschwindet. Die Zahl r' ist durch (1.17), d.h. durch den Stetigkeitsmodul der Koeffizienten $\tilde{a}_{ij}$ festgelegt. Dieser ist aber durch den Stetigkeitsmodul der Koeffizienten a_{ij} und die zu Γ gehörenden Koordinaten (0.4) bestimmt. Aus (1.20) erhalten wir durch Iteration, beginnend bei $p=0$, die Ungleichung

$$\int (\zeta^2 |u_x|^2)^p\, dx \leqq C,$$

welche zusammen mit (1.18) und durch geeignete Spezialisierung von ζ die Ungleichung

$$\int_{\Omega(r'/2)} \sum_{[\nu]\leqq 2} |D^\nu u|^p\, dx \leqq C \tag{1.21}$$

ergibt. Dabei ist p eine beliebige gerade Zahl mit $0 \leqq p \leqq n+2$ und die Konstante C in (1.21) hängt ab von A, B, M, $\|g\|_2^\Gamma$, den zu Γ gehörenden Koordinaten (0.4), sowie vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten a_{ij}. Aus (1.21) erhalten wir mit Hilfe von (1.5), indem wir $p=n+1$ bzw. $p=n+2$ setzen, die Ungleichung

$$\|u_x\|_0^{\Omega(r'/2)} \leqq C, \tag{1.22}$$

wobei die Konstante C ebenso charakterisiert ist, wie die in (1.21). Indem man noch einmal (1.18) mit beliebigem $p > n-2$ verwendet und (1.22) berücksichtigt, ergibt sich mit Hilfe von (1.5) die endgültige Abschätzung

$$\|u\|_{1+\alpha}^{\Omega(r'/4)} \leqq C$$

mit beliebigem α, $0<\alpha<1$. Die Konstante C hängt ab von α, A, B, M, $\|g\|_2^\Gamma$, den zu Γ gehörenden Koordinaten (0.4), sowie vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten a_{ij}. Der Beweis von Hilfssatz 2 ist damit beendet.

§ 2. A-priori-Abschätzungen ohne quantitative Einschränkung

In diesem Paragraphen leiten wir eine $\|.\|_\alpha$-Schranke für den Gradienten einer Funktion u her, welche eine Ungleichung der Form (0') erfüllt, ohne der Größe $\sup|u|$ eine quantitative Bedingung aufzuerlegen. Dazu müssen wir jedoch zunächst einige Existenzsätze für das zu (0) gehörende Dirichletproblem beweisen.

Wir beginnen mit einem Resultat, dessen Beweis im wesentlichen auf Nagumo ([10], Theorem 4) zurückgeht. Da wir jedoch in einigen Punkten von Nagumo abweichen, wollen wir einen kurzen Beweis anfügen.

Es sei Ω ein beschränktes Gebiet, A, B, Δ und β seien positive Zahlen, $\beta<1$. Dann bezeichnen wir mit $\mathscr{F}(\Omega; A, B, \Delta, \beta)$ die Menge aller $f=f(x,u,p) \in C^\beta(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ mit $|f(x,u,p)| \leqq A + B|p|^2$ für alle $x \in \Omega$, alle $u \in \mathbb{R}$ mit $|u| \leqq \Delta$ und alle $p \in \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten ein System

$$\{U_\iota, \underline{\omega}_\iota, \overline{\omega}_\iota\}_{\iota \in \mathrm{I}}. \tag{2.0}$$

Dabei ist I eine Indexmenge, U_ι eine offene Überdeckung von Ω und die Funktionen $\underline{\omega}_\iota, \overline{\omega}_\iota \in C^1(\bar{U}_\iota) \cap C^2(U_\iota)$ erfüllen die Ungleichungen

$$L\underline{\omega}_\iota(x) \geqq f\big(x, \underline{\omega}_\iota(x), \underline{\omega}_{\iota x}(x)\big),$$

$$L\overline{\omega}_\iota(x) \leqq f\big(x, \overline{\omega}_\iota(x), \overline{\omega}_{\iota x}(x)\big), \qquad x \in U_\iota \cap \Omega.$$

Nach Nagumo nennen wir dann eine Funktion $\underline{\omega}$ bzw. $\overline{\omega}$ eine Quasisub- bzw. Quasisuperlösung der Gleichung $Lu = f(x,u,u_x)$, wenn in einer Umgebung eines jeden Punktes $x \in \Omega$ eine Darstellung

$$\underline{\omega} = \max\{\underline{\omega}_\iota : \iota \in \underline{\mathrm{I}}_x\}, \qquad \overline{\omega} = \min\{\overline{\omega}_\iota : \iota \in \overline{\mathrm{I}}_x\}$$

gilt, wobei $\underline{\mathrm{I}}_x$ und $\overline{\mathrm{I}}_x$ endliche Teilmengen von I sind.

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann der

Hilfssatz 3. *Voraussetzungen:* (I) *Sei* $\partial\Omega \in C^{2+\beta}$ *und* L *der Operator* (0.1) *mit Koeffizienten* $a_{ij} \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$.

(II) *Es sei* $g \in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$ *und es gebe eine Zahl* $C_1 > 0$, *so daß für* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *die Ungleichung*

$$\|u\|_1^{\Omega} \leqq C_1 \tag{2.1}$$

gilt, falls u *Lösung eines Dirichletproblems*

$$Lu = f(x, u, u_x), \qquad u \,|\, \partial\Omega = g$$

mit $\|u\|_0^{\Omega} \leqq \Delta$ *und einem beliebigen* $f \in \mathscr{F}(\Omega; A+1, B, \Delta, \beta)$ *ist.*

(III) *Es sei* $f_0 \in \mathscr{F}(\Omega; A, B, \Delta, \beta)$ *und* $\underline{\omega}$ *bzw.* $\bar{\omega}$ *sei eine Quasisublösung bzw. Quasisuperlösung der Gleichung* $Lu = f_0(x, u, u_x)$. *Das zu* $\underline{\omega}$ *und* $\bar{\omega}$ *gehörende System* (2.0) *sei endlich. Ferner gelte*

$$-\Delta \leqq \underline{\omega}(x) \leqq \bar{\omega}(x) \leqq \Delta \qquad \textit{für } x \in \Omega$$

und

$$\underline{\omega}(x) \leqq g(x) \leqq \bar{\omega}(x) \qquad \textit{für } x \in \partial\Omega.$$

Behauptung. Das Dirichletproblem

$$Lu = f_0(x, u, u_x), \qquad u \,|\, \partial\Omega = g$$

besitzt eine Lösung $u \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ *mit* $\underline{\omega}(x) \leqq u(x) \leqq \bar{\omega}(x)$.

Beweis. Wir setzen $C_2 := \max\limits_{\iota \in I} \{C_1, \|\underline{\omega}_\iota\|_1^{\bar{U}_\iota}, \|\bar{\omega}_\iota\|_1^{\bar{U}_\iota}\}$, wobei C_1 die Konstante von (2.1) ist. Nun läßt sich eine Konstante C_3 so wählen, daß für alle $v \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $v \,|\, \partial\Omega = g$ und

$$|Lv| \leqq A + 1 + B C_2^2 \tag{2.2}$$

die Ungleichung

$$\|v\|_{1+\frac{1}{2}}^{\Omega} \leqq C_3 \tag{2.3}$$

gilt. Die Existenz einer solchen Konstanten C_3 folgt aus (1.2), (1.4) und (1.5). Man setzt dann nach Nagumo

$$f_1(x, u, p) := \begin{cases} f_0(x, u, p) & \text{für } |p| \leqq C_2, \\ f_0(x, u, C_2 |p|^{-1} p) & \text{für } |p| > C_2 \end{cases}$$

und

$$f_2(x, u, p) := \begin{cases} f_1(x, \bar{\omega}(x), p) + \dfrac{u - \bar{\omega}(x)}{1 + u - \bar{\omega}(x)} & \text{für } u > \bar{\omega}(x), \\ f_1(x, u, p) & \text{für } \underline{\omega}(x) \leqq u \leqq \bar{\omega}(x), \\ f_1(x, \underline{\omega}(x), p) + \dfrac{u - \underline{\omega}(x)}{1 + \underline{\omega}(x) - u} & \text{für } u < \underline{\omega}(x). \end{cases}$$

Offensichtlich ist dann $f_2 \in C^\beta(\bar\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und

$$|f_2(x,u,p)| \leqq A + 1 + B C_2^2. \tag{2.4}$$

Wir definieren nun die Teilmenge $\mathscr{K}$ des vermöge $\|.\|_1^\Omega$ normierten Banachraumes $C^1(\bar\Omega)$ als

$$\mathscr{K} := \{u \in C^{1+\frac{1}{2}}(\bar\Omega) \colon \|u\|_{1+\frac{1}{2}}^\Omega \leqq C_3\}$$

und den Operator $G\colon \mathscr{K} \to C^1(\bar\Omega)$ durch

$$Gu := v,$$

wobei v die eindeutige Lösung des Dirichletproblems

$$Lv = f_2(x,u,u_x), \qquad v\,|\,\partial\Omega = g$$

ist, deren Existenz in der Klasse $C^{2+\beta/2}$ durch die Schauderschen Existenzsätze für lineare, elliptische Differentialgleichungen gewährleistet ist.

Wegen (2.4) genügt v der Ungleichung (2.2) und wegen (2.3) folgt die Relation $G(\mathscr{K}) \subset \mathscr{K}$. Aus (1.2), (1.4) und (1.5) entnimmt man die Stetigkeit des Operators G. Da $\mathscr{K}$ überdies eine konvexe und kompakte Teilmenge von $C^1(\bar\Omega)$ ist, ergibt sich nach dem Schauderschen Fixpunktsatz die Existenz eines Fixpunktes $\tilde u \in \mathscr{K}$ von G. Es ist also

$$L\tilde u = f_2(x,\tilde u,\tilde u_x), \qquad u\,|\,\partial\Omega = g. \tag{2.5}$$

Nach Wahl der Konstanten C_2 ist aber $\underline{\omega}$ bzw. $\bar\omega$ Quasisublösung bzw. Quasisuperlösung zu $Lu = f_2(x,u,u_x)$, woraus die Ungleichung

$$\underline{\omega}(x) \leqq u(x) \leqq \bar\omega(x) \tag{2.6}$$

folgt ([10], Theorem 1).

Wegen (2.5) und $f_2 \in \mathscr{F}(\Omega; A+1, B, \Delta, \beta)$ gilt nach Voraussetzung (II) die Ungleichung

$$\|\tilde u\|_1^\Omega \leqq C_1 \quad (\leqq C_2). \tag{2.7}$$

Aus (2.6) und (2.7), sowie der Konstruktion von f_2 folgt aber nun, daß $f_2(x,\tilde u,\tilde u_x) = f_0(x,\tilde u,\tilde u_x)$ gilt, was unmittelbar die Behauptung ergibt, wenn wir noch berücksichtigen, daß mit Hilfe der Schauderschen Existenzsätze für lineare Differentialgleichungen aus $\tilde u \in C^{2+\beta/2}$ sogar $\tilde u \in C^{2+\beta}$ folgt.

Als nächstes machen wir eine Aussage über die lokale Lösbarkeit des zu (0) gehörenden Dirichletproblems.

Hilfssatz 4. *Es sei L der Operator* (0.1) *mit Koeffizienten $a_{ij} \in C^\beta(\bar\Omega)$. Es sei $f \in \mathscr{F}(\Omega; A, B, 1, \beta)$.*

Dann gibt es eine Funktion $d = d(A, B, M; n) > 0$, so daß für alle Teilgebiete Ω_0 von Ω mit $\partial\Omega_0 \in C^{2+\beta}$, deren Durchmesser nicht größer als d ist, das Dirichletproblem

$$Lu = f(x,u,u_x), \qquad u\,|\,\partial\Omega_0 = 0 \tag{2.8}$$

eine Lösung $u \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega}_0)$ *besitzt, welche für alle* α *mit* $0<\alpha<1$ *eine Abschätzung*

$$\|u\|_{1+\alpha}^{\Omega_0} \leqq C \tag{2.9}$$

gestattet. Dabei ist C eine Konstante, die von α, A, B, M, Ω_0 *sowie vom Stetigkeitsmodul der Koeffizienten* a_{ij} *abhängt.*

Beweis. Nach Hilfssatz 2 ist Voraussetzung (II) von Hilfssatz 3 für $g:=0$ und $\Delta:=\min\{1, \delta(B, M; n)\}$ erfüllt, wobei δ die in Hilfssatz 2 konstruierte Funktion ist. Die Existenz der Lösung von (2.8) folgt dann aus Hilfssatz 3, wenn die Existenz einer Sublösung $\underline{\omega}$ und einer Superlösung $\bar{\omega}$ mit

$$-\Delta \leqq \underline{\omega}(x) \leqq 0 \leqq \bar{\omega}(x) \leqq \Delta$$

für genügend kleine Gebiete Ω_0 nachgewiesen werden kann. Dazu nehmen wir ohne Einschränkung an, daß der Nullpunkt in Ω_0 liegt, und setzen dann

$$\underline{\omega}(x) := -(1+AM) \log \cos x_1 - \Delta$$

und

$$\bar{\omega}(x) := (1+AM) \log \cos x_1 + \Delta .$$

Man sieht nach leichter Rechnung, daß für

$$|x_1| \leqq \min\left\{\arccos\left[\exp\left(-\frac{\Delta}{1+AM}\right)\right], \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{(1+AM)\sqrt{BM}}\right\}$$

alle geforderten Bedingungen erfüllt sind. Die Abschätzung (2.9) folgt aus Hilfssatz 2, da für die nach Hilfssatz 3 konstruierte Lösung die Ungleichung $\|u\|_0^{\Omega_0} \leqq \Delta \leqq \delta(B, M; n)$ gilt.

Als nächstes formulieren wir einen Störungssatz für eine semilineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Wegen ähnlicher Aussagen für allgemeine nichtlineare, elliptische Differentialgleichungen verweisen wir auf [1] und [3].

Hilfssatz 5. *Voraussetzungen:* (I) *Es sei* $\partial\Omega \in C^{2+\beta}$ *und L der Operator* (0.1) *mit Koeffizienten* $a_{ij} \in C^{\beta}(\bar{\Omega})$. (II) *Es sei* $f=f(x, u, p) \in C^{\beta}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *mit* $f(x, .,.) \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *für jedes feste* $x \in \Omega$ *und* $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial p \in C^{\beta}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. *Ferner gelte*

$$\partial f/\partial u \geqq 0 \tag{2.10}$$

für alle $(x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(III) *Die Funktion* $u_0 \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ *sei Lösung der Gleichung* $Lu=f(x, u, u_x)$.

Behauptung. Es gibt ein $\varepsilon>0$, *so daß das Dirichletproblem*

$$Lu=f(x, u, u_x), \quad u|\partial\Omega=g$$

für alle $g \in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$ *mit* $\|g-u_0|\partial\Omega\|_2^{\partial\Omega}<\varepsilon$ *eine Lösung* $u \in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ *besitzt.*

Der Beweis von Hilfssatz 4 geschieht sehr leicht mit Hilfe von (1.2), (1.3), (1.4) und (1.5) und kann daher dem Leser überlassen werden.

Hilfssatz 6. *Es seien die Voraussetzungen* (I), (II) *und* (III) *von Hilfssatz* 5 *erfüllt. Ferner genüge f der Bedingung* (0.3).

Dann besitzt das Dirichletproblem

$$Lu=f(x,u,u_x), \qquad u|\partial\Omega=g$$

für alle $g\in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$ *eine eindeutig bestimmte Lösung* $u\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$. *Es gilt für alle* α *mit* $0<\alpha<1$ *und alle kompakten Teilmengen K von* Ω *die Abschätzung*

$$\|u\|_{1+\alpha}^{K}\leqq C,$$

wobei die Konstante C von α, *der Konstanten M in* (0.2), *der Funktion* μ *in* (0.3), *dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten* a_{ij}, *sowie von* $\|u_0\|_{1+\alpha}^{\Omega}$, $\|g\|_0^{\partial\Omega}$, Ω, *und K abhängt.*

Beweis. Wir bemerken, daß wegen (2.10) für die Differenz zweier Lösungen von $Lu=f(x,u,u_x)$ ein Maximumprinzip gilt, woraus zunächst die behauptete Eindeutigkeit folgt. Der Existenzbeweis wird mit Hilfe der a-priori-Abschätzung von Hilfssatz 2 sowie mit Hilfssatz 5 geführt. Sei dazu $g\in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$ und $\alpha\in(0,1)$ vorgegeben. Wir führen zur Abkürzung die Funktion

$$s(r):=\sup_{|x-y|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}(x)-a_{ij}(y)| \tag{2.11}$$

ein. Weiterhin setzen wir $g_0:=u_0|\partial\Omega$ und bezeichnen mit Σ die Menge derjenigen $\sigma\in[0,1]$, für welche das Dirichletproblem

$$P_\sigma\colon\; Lu=f(x,u,u_x), \qquad u|\partial\Omega=g_0+\sigma(g-g_0)$$

eine Lösung $u=u_\sigma\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ besitzt.

Es sei Σ^* die Menge derjenigen $\sigma\in\Sigma$, für welche die folgenden Aussagen gelten:

(I) Das Intervall $[0,\sigma]$ ist Teilmenge von Σ.

(II) Es gelten für alle kompakten Teilmengen K von Ω Abschätzungen der Form

$$\|u_\tau\|_{1+\alpha}^{K}\leqq C(\sigma,\alpha,M,\mu,s,\|u_0\|_{1+\alpha}^{\Omega},\|g-g_0\|_0^{\partial\Omega},\Omega,K) \tag{2.12}$$

und

$$\|u_\tau\|_{1+\alpha}^{\Omega}\leqq C'(\sigma,\alpha,M,\mu,s,\|u_0\|_{1+\alpha}^{\Omega},\|g-g_0\|_2^{\partial\Omega},\Omega) \tag{2.12'}$$

für alle $\tau\in[0,\sigma]$.

Zunächst haben wir für $\sigma\in\Sigma$ nach dem Maximumprinzip

$$\|u_\sigma-u_0\|_0^{\Omega}\leqq\|u_\sigma-u_0\|_0^{\partial\Omega}\leqq\|g-g_0\|_0^{\partial\Omega},$$

woraus sich

$$\|u_\sigma\|_0^{\Omega}\leqq\|u_0\|_0^{\Omega}+\|g-g_0\|_0^{\partial\Omega} \tag{2.13}$$

ergibt. Aus (0.3) und (2.13) folgt die für alle $\sigma\in\Sigma$ gültige Ungleichung

$$|f(x, u_\sigma, (u_\sigma)_x)| \leqq B_0 \cdot (1+|(u_\sigma)_x|^2) \tag{2.14}$$

mit

$$B_0 := \mu(\|u_0\|_0^\Omega + \|g-g_0\|_0^{\partial\Omega}).$$

Wir setzen $\delta_0 := (\|g-g_0\|_0^{\partial\Omega})^{-1} \cdot \delta(2B_0, M; n)$, wobei δ die in Hilfssatz 2 konstruierte Funktion ist, und werden zeigen, daß mit einer Zahl σ_0 auch $\sigma_0+\delta_0$ zu Σ^* gehört. Sei dazu $\sigma_0\in\Sigma^*$ und $\sigma\in\Sigma\cap[\sigma_0, \sigma_0+\delta_0]$.

Wir haben dann nach dem Maximumprinzip

$$\|u_\sigma - u_{\sigma_0}\|_0^\Omega \leqq |\sigma-\sigma_0|\; \|g-g_0\|_0^{\partial\Omega} \leqq \delta(2B_0, M; n). \tag{2.15}$$

Aus (2.14) entnehmen wir

$$|L(u_\sigma - u_{\sigma_0})| \leqq 2B_0 + 3B_0 |(u_{\sigma_0})_x|^2 + 2B_0 |(u_\sigma - u_{\sigma_0})_x|^2. \tag{2.16}$$

Vermöge Hilfssatz 2 folgen nun aus (2.15) und (2.16) für eine beliebige kompakte Teilmenge K von Ω die Ungleichungen

$$\|u_\sigma - u_{\sigma_0}\|_{1+\alpha}^K \leqq C(\alpha, B_0, M, \|u_{\sigma_0}\|_1^{\Omega_0}, s, \Omega_0, K) \tag{2.17}$$

und

$$\|u_\sigma - u_{\sigma_0}\|_{1+\alpha}^\Omega \leqq C'(\alpha, B_0, M, \|u_{\sigma_0}\|_1^\Omega, s, \|g-g_0\|_2^{\partial\Omega}, \Omega), \tag{2.17'}$$

wobei Ω_0 eine offene Teilmenge von Ω mit $K\subset\Omega_0$, $\bar\Omega_0\subset\Omega$ ist. Wenn wir uns eine Zuordnung $K\mapsto\Omega_0$ in eindeutiger Weise festgelegt denken und berücksichtigen, daß $\sigma_0\in\Sigma^*$ gilt, so folgen aus (2.12) und (2.17) bzw. (2.12′) und (2.17′) die Ungleichungen

$$\|u_\sigma\|_{1+\alpha}^K \leqq C(\sigma_0, \alpha, M, \mu, s, \|u_0\|_{1+\alpha}^\Omega, \|g-g_0\|_0^{\partial\Omega}, \Omega, K) \tag{2.18}$$

und

$$\|u_\sigma\|_{1+\alpha}^\Omega \leqq C'(\sigma_0, \alpha, M, \mu, s, \|u_0\|_{1+\alpha}^\Omega, \|g-g_0\|_2^{\partial\Omega}, \Omega). \tag{2.18'}$$

(2.18) und (2.18′) gelten zunächst nur für $\sigma\in\Sigma$ mit $\sigma_0\leqq\sigma\leqq\sigma_0+\delta_0$; für $\sigma\leqq\sigma_0$ jedoch haben wir bereits in (2.12) und (2.12′) Abschätzungen vom selben Typ, so daß also (2.18) und (2.18′) für alle $\sigma\in\Sigma\cap[0, \sigma_0+\delta_0]$ gelten. Aus (2.18′) und (1.3) folgt dann

$$\|u_\sigma\|_{2+\beta}^\Omega \leqq C'' \qquad \text{für alle } \sigma\in\Sigma\cap[0, \sigma_0+\delta_0]$$

mit einer gewissen Konstanten C''. Ein geläufiges Konvergenzargument liefert daraus die Abgeschlossenheit der Menge $\Sigma\cap[0, \sigma_0+\delta_0]$. Aus Hilfssatz 5 folgt aber, daß $\Sigma\cap[0, \sigma_0+\delta_0]$ als Teilmenge von $[0, \sigma_0+\delta_0]$ offen ist. Es ist also $\Sigma\cap[0, \sigma_0+\delta_0] = [0, \sigma_0+\delta_0]$. Zusammen mit (2.18) und (2.18′) ergibt das $\sigma_0+\delta_0\in\Sigma^*$. Wir haben somit, wie angekündigt, geschlossen, daß mit σ_0 auch $\sigma_0+\delta_0$ zu Σ^* gehört, wobei δ_0 eine von σ_0 unabhängige Zahl ist. Es folgt dann $1\in\Sigma^*$, woraus man aber unmittelbar die Behauptungen des Hilfssatzes abliest.

Wir kommen nun zu unserem Hauptresultat.

Satz 1. *Es sei Γ eine offene Teilmenge von $\partial\Omega$ mit $\Gamma\in C^2$. Es sei $u\in C^0(\bar{\Omega})\cap C^2(\Omega\cup\Gamma)$ und $g\in C^2(\bar{\Gamma})$ mit $g:=u|\bar{\Gamma}$. Ferner genüge u der Differentialungleichung* (0′). *Dann gilt für jedes α mit $0<\alpha<1$ und jede kompakte Teilmenge K von $\Omega\cup\Gamma$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{1+\alpha}^{K}\leqq C, \tag{2.19}$$

wobei die Konstante C von α, den Konstanten A, B in (0′), *der Konstanten M in* (0.2), *dem Stetigkeitsmodul der Koeffizienten a_{ij}, sowie von $\|u\|_0^{\Omega}$, $\|g\|_2^{\Gamma}$, Ω und K abhängt.*

Beweis. Es genügt zum Beweis, wenn wir zu jedem Punkt $z\in\Omega\cup\Gamma$ eine Zahl $r>0$ angeben, so daß (2.19) mit $K=\overline{\Omega(z,r)}$ gilt, wobei $\Omega(z,r):=\{x\in\Omega: |x-z|<r\}$ gesetzt ist und r von $A, B, M, \|u\|_0^{\Omega}, \|g\|_2^{\Gamma}$, Ω und z abhängen darf.

Sei zunächst $z\in\Gamma$. Wir wählen $r_0>0$ so, daß $\overline{\Omega(z,r_0)}\subset\Omega\cup\Gamma$ gilt. Nach einem Lemma von Ladyshenskaya und Uraltseva ([9], 6, Lemma 2.1) haben wir dann für $x\in\Omega(z,r_0)$ die Abschätzung[1]

$$|u(x)-u(z)|\leqq C|x-z|, \tag{2.20}$$

wobei die Konstante C von $A, B, M, \|u\|_0^{\Omega}$, $\|g\|_2^{\Gamma}$ und Γ abhängt. Falls nun $r:=\min\{r_0, C^{-1}\delta(B,M;n)\}$ gesetzt wird, wobei C die Konstante von (2.20) und δ die in Hilfssatz 2 konstruierte Funktion ist, folgt aus (2.20) und Hilfssatz 2 die Abschätzung

$$\|u\|_{1+\alpha}^{\overline{\Omega(z,r/2)}}\leqq C(\alpha, A, B, M, s, \|u\|_0^{\Omega}, \|g\|_2^{\Gamma}, \Omega).$$

Dabei ist s die in (2.11) definierte Funktion.

Damit können wir zum Fall $z\in\Omega$ übergehen. Zunächst bestimmen wir $r_0>0$ so, daß $\overline{\Omega(z,r_0)}\subset\Omega$ gilt. Dann konstruieren wir Funktionen

$$\tilde{a}_{ij}\in C^1(\overline{\Omega(z,r_0)}), \qquad (i,j=1\ldots n),$$

und $\tilde{u}\in C^3(\overline{\Omega(z,r_0)})$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$(M+1)^{-1}|\xi|^2\leqq\sum_{i,j}\tilde{a}_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j\leqq(M+1)\,|\xi|^2, \qquad (x\in\Omega(z,r_0),\ \xi\in\mathbb{R}^n), \tag{2.21}$$

$$\|\tilde{u}-u\|_{1+\alpha}^{\overline{\Omega(z,r_0)}}+\|\tilde{L}\tilde{u}-Lu\|_0^{\overline{\Omega(z,r_0)}}\leqq 1. \tag{2.22}$$

Dabei ist

$$\tilde{L}:=\sum_{i,j}\tilde{a}_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

gesetzt. Für den analog zu (2.11) definierten Stetigkeitsmodul $\tilde{s}$ der Koeffizienten $\tilde{a}_{ij}$ können wir die Beziehung

$$\tilde{s}(t)\leqq s(t), \qquad (t\geqq 0), \tag{2.23}$$

1. (2.20) ist nicht Teil der Behauptung des angegebenen Zitats, wohl aber einer der Beweisschritte.

annehmen. Wegen (2.22) haben wir dann in $\Omega(z, r_0)$ die Ungleichung

$$|\tilde{L}\tilde{u}| \leqq \tilde{A} + \tilde{B}\,|\tilde{u}_x|^2 \tag{2.24}$$

mit

$$\tilde{A} = 1 + A + 2B, \qquad \tilde{B} = 2B. \tag{2.25}$$

Setzen wir

$$\tilde{h}(x) := (\tilde{L}\tilde{u}(x))\,(\tilde{A} + \tilde{B}\,|\tilde{u}_x(x)|^2)^{-1}$$

und

$$\tilde{f}(x, p) := \tilde{h}(x)\,(\tilde{A} + \tilde{B}\,|p|^2),$$

so erfüllen die Funktionen $\tilde{a}_{ij}$ und $\tilde{f}$ in $\Omega(z, r_0)$ die Voraussetzungen (I) und (II) von Hilfssatz 5. Die Konstante M von (0.2) ist dabei gemäß (2.21) durch $M+1$ zu ersetzen. Aus (2.24) folgt nun die Ungleichung

$$|\tilde{f}(x, p)| \leqq \tilde{A} + \tilde{B}\,|p|^2.$$

Setzen wir daher $r := \min\{r_0, d(\tilde{A}, \tilde{B}, M+1; n)\}$, wobei d die in Hilfssatz 4 konstruierte Funktion ist, so besitzt nach Hilfssatz 4 das Dirichletproblem

$$\tilde{L}v = \tilde{f}(x, v_x), \qquad v\,|\,\partial\Omega(z, r) = 0$$

eine Lösung $v = \tilde{u}_0 \in C^2(\overline{\Omega(z, r)})$, welche eine Abschätzung der Form

$$\|\tilde{u}_0\|_{1+\alpha}^{\overline{\Omega(z,r)}} \leqq C(\alpha, \tilde{A}, \tilde{B}, M, s, r_0) \tag{2.26}$$

gestattet. Nach Hilfssatz 6 ist dann das Dirichletproblem

$$\tilde{L}v = \tilde{f}(x, v_x), \qquad v\,|\,\partial\Omega(z, r) = \tilde{u}\,|\,\partial\Omega(z, r) \tag{2.27}$$

mit einer Funktion $v = \tilde{u}_1 \in C^2(\overline{\Omega(z, r)})$ eindeutig lösbar, und es gilt unter Berücksichtigung von (2.26) eine Abschätzung

$$\|\tilde{u}_1\|_{1+\alpha}^{\overline{\Omega(z,r/2)}} \leqq C\big(\alpha, \tilde{A}, \tilde{B}, M, \tilde{s}, \|\tilde{u}\|_0^{\overline{\Omega(z,r)}}, r_0\big). \tag{2.28}$$

Nach Konstruktion von $\tilde{f}$ ist aber $v := \tilde{u}\,|\,\overline{\Omega(z, r)}$ ebenfalls eine Lösung des Dirichletproblems (2.27). Also gilt $\tilde{u}_1 = \tilde{u}\,|\,\overline{\Omega(z, r)}$, und wir können in (2.28) die Funktion $\tilde{u}_1$ durch $\tilde{u}$ ersetzen. Wenn wir nun noch (2.23) und (2.25) berücksichtigen, folgt die Behauptung.

§ 3. Existenzsätze

Es sei im folgenden stets Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{2+\beta}$, $0 < \beta < 1$. Es sei L der Operator (0.1) mit Koeffizienten $a_{ij} \in C^\beta(\bar{\Omega})$, welche (0.2) erfüllen. Die Funktion $f = f(x, u, p)$ gehöre zu $C^\beta(\bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ und genüge der Bedingung (0.3).

Wir beginnen mit einem Resultat, das wir als „Nagumosche Vermutung" bezeichnen könnten (vgl. [10], S. 228).

Satz 2. *Es sei* $\underline{\omega}$ *bzw.* $\overline{\omega}$ *eine Quasisublösung bzw. Quasisuperlösung der Gleichung* $Lu=f(x,u,u_x)$. *Ferner sei das zu* $\underline{\omega}$ *und* $\overline{\omega}$ *gehörende System* (2.0) *endlich, und es gelte* $\underline{\omega}(x)\leqq\overline{\omega}(x)$ *für* $x\in\bar{\Omega}$. *Dann besitzt das Dirichletproblem*

$$Lu=f(x,u,u_x), \qquad u|\partial\Omega=g$$

für alle

$$g\in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$$

mit

$$\underline{\omega}(x)\leqq g(x)\leqq\overline{\omega}(x), \qquad (x\in\partial\Omega),$$

eine Lösung $u\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$.

Beweis. Wir setzen $\Delta:=\max\{\|\underline{\omega}\|_0^\Omega, \|\overline{\omega}\|_0^\Omega\}$. In der Bezeichnungsweise von Hilfssatz 3 gehört dann f zu einer Klasse $\mathscr{F}(\Omega; A, B, \Delta, \beta)$ für geeignete Konstanten A und B. Aus Satz 1 und Hilfssatz 3 folgt nun die Behauptung.

Satz 3. *Es seien alle Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt. Außerdem sei* $f(x,.,.)\in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ *für jedes feste* $x\in\Omega$ *und* $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial p\in C^\beta(\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, *sowie* $\partial f/\partial u\geqq 0$. *Ferner existiere ein* $g_0\in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$ *mit* $\underline{\omega}(x)\leqq g_0(x)\leqq\overline{\omega}(x)$ *für* $x\in\partial\Omega$. *Dann besitzt das Dirichletproblem*

$$Lu=f(x,u,u_x), \qquad u|\partial\Omega=g$$

für jedes $g\in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$ *eine eindeutig bestimmte Lösung* $u\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$.

Beweis. Nach Satz 2 existiert eine Lösung $u_0\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ des Dirichletproblems zu den Randwerten g_0. Nach Hilfssatz 6 folgt dann die Behauptung.

Satz 4. *Es sei* $g\in C^{2+\beta}(\partial\Omega)$ *und die Menge der Lösungen der Dirichletprobleme*

$$P_\tau\colon\ Lu=\tau f(x,u,u_x), \qquad u|\partial\Omega=\tau g, \qquad 0\leqq\tau\leqq 1,$$

sei in der $\|.\|_0^\Omega$*-Norm beschränkt. Dann besitzt jedes Problem* P_τ, $0\leqq\tau\leqq 1$, *eine Lösung* $u\in C^{2+\beta}(\bar{\Omega})$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 1 durch Anwendung des Schaeferschen Fixpunktsatzes [12]. Man vergleiche hierzu Trudinger [13].

Wir haben unsere Existenzsätze nur für Gebiete mit $C^{2+\beta}$-Rand und für Randwerte der Klasse $C^{2+\beta}$ formuliert. Es ist jedoch klar, daß entsprechende Resultate für allgemeinere Klassen von Gebieten und lediglich stetige Randwerte gelten. Die für den Beweis erforderlichen Hilfsmittel bestehen in den Abschätzungen aus Satz 1 und bekannten Resultaten. Bei der Ausführung würden sich keine neuen Gesichtspunkte ergeben, so daß wir uns mit dem Hinweis auf die diesbezüglichen Ergebnisse von Nagumo [10] und Trudinger [13] begnügen.

Literatur

1. Agmon, S., A. Douglis, and L. Nirenberg: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. Commun. Pure Appl. Math. **12**, 623–727 (1959).
2. Bernstein, S.: Sur la généralisation du problème de Dirichlet. (Deuxième partie.) Math. Ann. **69**, 82–136 (1910).
3. Courant, R., and D. Hilbert: Methods of mathematical physics. Vol. II. New York-London: Interscience 1962.
4. Heinz, E.: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math. Ann. **127**, 258–287 (1954).
5. – On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. Analyse Math. **5**, 197–272 (1956/57).
6. Hirasawa, Y.: On an estimate for semi-linear elliptic differential equations of the second order. Kōdai Math. Sem. Reports **16**, 55–68 (1964).
7. – On an estimate for semi-linear elliptic differential equations of the second order with dini-continuous coefficients. Kōdai Math. Sem. Reports **17**, 10–26 (1965).
8. – On an estimate for a quasi-linear elliptic differential equation. Funkcialaj Ekvacioj **9**, 181–197 (1966).
9. Ladyshenskaya, O.A., and N.N. Uraltseva: Linear and quasilinear elliptic equations (Übersetzung aus dem Russischen). New York-London: Academic Press 1968.
10. Nagumo, M.: On principally linear elliptic differential equations of the second order. Osaka Math. J. **6**, 207–229 (1954).
11. Nirenberg, L.: On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 3, **13**, 115–162 (1959).
12. Schaefer, H.: Über die Methode der a priori Schranken. Math. Ann. **129**, 415–416 (1955).
13. Trudinger, N.S.: On the Dirichlet-problem for quasilinear uniformly elliptic equations in n variables. Arch. Rat. Mech. Analysis **27**, 108–119 (1967/68).

Dr. Friedrich Tomi
Mathematisches Institut der Universität
3400 Göttingen, Bunsenstraße 3–5

(Eingegangen am 3. Februar 1969)

Math. Z. 111, 367 – 371 (1969)

Une caractérisation des espaces affins basée sur la notion de droite

FRANCIS BUEKENHOUT

1. Nous dirons qu'un *espace linéaire* [4] est un ensemble L d'éléments appelés *points* dans lequel on distingue une famille de sous-ensembles contenant au moins deux points et appelés *droites*, de telle manière que toute paire de points distincts p, q soit contenue dans une et une seule droite, notée $p+q$.

Une *variété linéaire* de L [1] sera un ensemble de points V tel que $p, q \in V$ entraîne $p+q \subset V$. Il est clair que toute intersection de variétés linéaires est une variété linéaire; de ce fait, tout ensemble de points X engendre une variété linéaire $\overline{X}$ qui est l'intersection des variétés linéaires contenant X.

L'ensemble vide, un point, une droite, L sont des exemples de variétés linéaires. Dans les espaces affins et projectifs les «variétés linéaires habituelles» sont des variétés linéaires et ce sont les seules sauf dans les espaces affins d'ordre deux. Dans ces derniers tout ensemble de points est une variété linéaire.

Un *plan* de L sera une variété linéaire engendrée par un triple de points «non alignés».

2. Il est facile de caractériser les plans projectifs et les plans affins parmi les espaces linéaires. Un plan projectif est un espace linéaire P tel que: (i) deux quelconques droites de P ont au moins un point commun; (ii) il existe au moins quatre points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. Un plan affin est un espace linéaire A tel que: (i) pour toute droite d et tout point p n'appartenant pas à d il existe une et une seule droite contenant p et disjointe de d; (ii) il existe au moins trois points non alignés.

Il est facile de prouver que les plans projectifs et affins sont des plans au sens de la définition donnée en 1 (i.e. trois points non alignés engendrent l'espace linéaire considéré) à l'exception du plan affin d'ordre deux.

3. Il est bien connu (implicitement dans [5]) que les espaces projectifs peuvent être caractérisés en tant qu'espaces linéaires par le fait que chacun de leurs plans est un plan projectif. On peut se demander si une affirmation analogue vaut pour les espaces affins, c'est-à-dire: un espace linéaire dont tous les plans sont des plans affins est-il un espace affin? Nous n'avons trouvé aucune mention de ce problème dans la littérature. Un travail profond de M. Hall [2] permet cependant de conclure par la négative: en effet, M. Hall construit un système de Steiner de 81 points dont tous les «triangles» engendrent un plan affin de 9 points et qui n'est pas un espace affin. Notre but est de montrer que la réponse à la question posée ci-dessus est affirmative dès que les droites de l'espace considéré ont plus de trois points. De manière plus précise on a le

Théorème. *Soit L un espace linéaire tel que*

(i) *tout plan de L soit un plan affin;*

(ii) *L possède au moins trois points non alignés;*

(iii) *toute droite de L possède au moins quatre points.*

Alors L est un espace affin.

4. Pour démontrer le théorème nous utilisons une axiomatique des espaces affins due à Lenz [3]. Rappelons brièvement celle-ci. Un espace affin A est un ensemble de points dans lequel on distingue des sous-ensembles appelés droites et une relation d'équivalence notée $\|$ définie sur l'ensemble des droites. On exige:

$\mathrm{I_a}$: toute paire de points distincts p, q est contenue dans une et une seule droite $p+q$;

$\mathrm{I_b}$: pour tout point p et toute droite d il existe une et une seule droite d' telle que $q \in d'$ et $d \| d'$;

$\mathrm{II_a}$: si a, b, c, d sont des points tels que $a+b \| c+d$ et $p \in a+c$ on a $p \in c+d$ ou $a+b$ et $p+d$ ont un point commun;

$\mathrm{II_b}$: si aucune droite n'a plus de deux points ...

III: toute droite contient au moins deux points;

IV: Il existe deux droites disjointes d, d' telles que $d \nparallel d'$.

Si les droites ont plus de deux points, on montre que la variété linéaire engendrée par trois points non alignés de A est un plan affin et que deux droites d, d' distinctes vérifient $d \| d'$ si et seulement si elles sont «coplanaires» et disjointes. Partons à présent des hypothèses du théorème; on voit que la relation $\|$ peut être définie d'une seule façon: des droites d, d' de L sont parallèles et on écrit $d \| d'$, si et seulement si elles sont disjointes et coplanaires ou si $d = d'$.

Les axiomes $\mathrm{I_a}$, $\mathrm{II_b}$, III sont immédiats, de même que $\mathrm{I_b}$, $\mathrm{II_a}$ qui résultent de la définition des plans affins et de la relation $\|$. L'axiome IV est peu essentiel: il est équivalent à l'existence d'au moins deux plans ce que nous supposerons désormais puisque le théorème est trivial lorsqu'il y a un seul plan dans L. Donc tous les axiomes de Lenz sont vérifiés mais nous n'avons par terminé pour autant.

Il reste à prouver que $\|$ est une relation d'équivalence. Comme elle est visiblement réflexive et symétrique il faut prouver que $d \| d'$ et $d' \| d''$ avec d, d', d'' non coplanaires, entraîne $d \| d''$ (le cas où d, d', d'' sont coplanaires est trivial).

5. Soit Π un plan et D une droite de L qui contient un (et un seul) point $a \in \Pi$. Soit V la réunion des plans contenant D et une droite de Π passant par a. Un pas décisif de la démonstration consiste à prouver que V est une variété linéaire.

Pour tout point $v \in V, v \notin D$ nous désignons par $d(v)$ le point d'intersection de D et de la parallèle à la droite $(D+v) \cap \Pi$ par le point $v, D+v$ désignant le plan engendré par D et v. Si $p \in D$ et $p \neq d(v)$, a la droite $p+v$ rencontre $(D+v) \cap \Pi$ en un point que nous désignerons par $p(v)$. On a $p(v) \neq a$.

6. Soient x, y des points distincts de V et A la droite $x+y$. Il faut prouver que $A \subset V$. Si x, y, D sont coplanaires cette propriété est immédiate. Nous supposerons donc toujours que D et A ne sont pas coplanaires. Par la condition (iii) du théorème, il existe un point $p \in D$ avec $p \neq d(x), d(y), a$. Dans ce cas les points $p(x)$ et $p(y)$ définis en 5 existent et $p(x) \neq p(y)$ sinon D, A seraient coplanaires. Si $A \| p(x)+p(y)$ et si $z \in A$, la droite $p+z$ rencontre $p(x)+p(y)$ en un point u. Comme p, u, D sont coplanaires la droite $p+u$ est contenue dans V; de ce fait $z \in V$ et $A \subset V$. On peut donc supposer désormais que $A \nparallel p(x)+p(y)$. Alors la droite A rencontre $p(x)+p(y)$ en un point b et on a $b \neq a$ (sinon D, A sont coplanaires).

Soit $c(p)$ le point commun à A et à la parallèle à $p(x)+p(y)$ passant par p. Il est clair qu'il existe au plus un point de A n'appartenant pas à V et si un tel point existe, il s'agit nécessairement de $c(p)$. Nous prouverons qu'en fait $c(p) \in V$.

7. Examinons le cas où $d(x)=d(y)$.

Pour tout $u \in V \cap A$ et $u \neq b$ on a $d(u)=d(x)$. En effet, si $d(u) \neq d(x)$ il existe un point $d(x)u=(d(x)+u) \cap \Pi$ et ce point est distinct de b; alors le plan $d(x)+b+u$ contient une droite de Π et comme il contient également x, y une des droites $x+d(x)$, $y+d(x)$ devrait rencontrer Π ce qui est exclu par la définition de l'application d: $x \to d(x)$ à moins de supposer que $x, y \in \Pi$ ce qui est un cas trivial.

Le plan $x+y+d(x)$ contient donc un seul point de Π qui est b. Soit $x' \in x+d(x)$ avec $x' \neq x, d(x)$. La droite $x'+y$ est contenue dans V sinon $x'+y$ contient un point $b' \in \Pi$ (par 6 ci-dessus) et il faut que $b'=b$ ce qui est impossible. Comme il existe au moins deux points distincts x', x'' distincts de $x, d(x)$ sur $x+d(x)$, il y a deux droites sécantes du plan $x+y+d(x)$ contenues dans V et ne passant pas par $d(x)$: $x'+y$ et $x''+y$. Si u est un point sur l'une de ces droites, $d(x)+u$ est contenu dans V parce que D, $d(x)$, u sont coplanaires. Toute droite du plan $x+y+d(x)$ passant par $d(x)$ rencontre l'une des droites $x'+y$, $x''+y$ et est donc contenue dans V. Il en résulte que le plan $x+y+d(x)$ est contenu dans V et $A \subset V$.

8. A présent, nous pouvons supposer que $d(x) \neq d(y)$ quels que soient les points distincts $x, y \in A \cap V$. Pour tout point $p \in D$ avec $p \neq a$, il existe donc un point $u \in A \cap V$ avec $d(u) \neq p$, $u \neq b$ car $A \cap V$ contient au moins trois points par 6. Alors $p(u)$ est défini dans Π (cf. 5) et $p(u) \neq b$ sinon A, D sont coplanaires. Soit $p(A)$ la droite $b+p(u)$ intersection des plans Π et $p+A$. Dans $p+A$ la parallèle à A passant par p rencontre $p(A)$ en un point p'. Soit l une droite de Π passant par a. Si l coupe $p(A)$ en un point distinct de p', le plan $D+l$ contient un (et un seul) point de A: le point $((l \cap p(A))+p) \cap A$. Donc il existe au plus deux plans $D+l$ disjoints de A: le plan $D+(a+p')=\alpha(p)$ et le plan $D+p^*(A)=\beta(p)$ où $p^*(A)$ est la parallèle à $p(A)$ passant par a.

9. Le plan $\alpha(p)$ ne peut contenir aucun point de A car $\alpha(p)$ et $p+A$ sont des plans distincts (sinon A, D sont coplanaires) dont l'intersection est la droite $p+p'$ et un point commun à $\alpha(p)$ et A devrait appartenir à $p+p'$ qui est parallèle à A.

10. Si $\beta(p)$ a un point q situé sur A on va montrer que q est nécessairement le point $c(p)$ défini en 6 et alors on a $A \subset V$. En effet, si q n'est pas situé sur la parallèle à $p(A)$ passant par p (en 6 on a $p(x)+p(y)=p(A)$) la droite $p+q$ rencontre $p(A)$ en un point. Alors ce point est commun à $\beta(p)$ qui contient p et q et à $p(A)$. Comme $\beta(p) \cap \Pi = p^*(A)$ la parallèle à $p(A)$ passant par a, on en déduit que $p(A)=p^*(A)$. Mais ceci implique que $p+A$ contient D, donc que A et D sont coplanaires contrairement à nos hypothèses.

11. Supposons que A n'est pas contenu dans V et établissons une contradiction. Pour tout $p \in D$ avec $p \neq a$ on doit conclure par 10 que le plan $\beta(p)$ est disjoint de A. Soient p_1, p_2, p_3 des points distincts de D et distincts de a. Les plans $\alpha(p_i)$, $\beta(p_i)$ $i=1, 2, 3$ sont disjoints de A. D'après 8 il y a exactement deux plans $D+l$ avec l par a, qui soient disjoints de A. On a donc deux possibilités:

a) $\alpha(p_1)=\beta(p_2)$ et $\alpha(p_2)=\beta(p_1)$;

b) $\alpha(p_1)=\alpha(p_2)$ et $\beta(p_1)=\beta(p_2)$.

Le dernier cas est exclu: il faudrait $p_1^*(A)=p_2^*(A)$, donc $p_1(A)$ et $p_2(A)$ seraient deux parallèles et en fait égales puisqu'elles passent par b; alors, D et A seraient coplanaires.

A présent le premier cas conduit également à une contradiction: il faut que $\alpha(p_3)=\beta(p_1)$ et $\alpha(p_3)=\beta(p_2)$ donc $\beta(p_1)=\beta(p_2)$.

En conclusion, l'ensemble V construit en 5 est une variété linéaire.

12. Prouvons que $d \| d_1$ et $d_1 \| d_2$ avec d, d_1, d_2 non coplanaires implique $d \| d_2$. Il suffit de prouver que d et d_2 sont coplanaires. Soit Π le plan $d+d_1$, D une droite joignant un point $a_1 \in d_1$ et un point $a_2 \in d_2$ et soit V la variété linéaire engendrée par Π et D qui peut être décrite comme en 5. Soit d_3 la parallèle à d passant par a_2 et d_4 la parallèle à d_3 passant par a_1. Comme V est une variété linéaire, d_3 est contenue dans V car le plan a_2+d y est contenu. La droite d_3 n'a aucun point dans Π sinon elle y serait contenue et d_2 également. Donc le plan $D+d_3$ rencontre Π suivant une droite disjointe de d_3 qui sera nécessairement d_4. Si $d_4=d_1$ on a $d_2=d_3$ et la preuve est terminée. Si $d_4 \neq d_1$, d_4 rencontre d en un point b. Les plans $d+d_3$ et d_4+d_3 ont d_3 et b en commun. Si b appartient à d_3, $d=d_3$ et d_2 est contenue dans Π contrairement à nos hypothèses. Si b n'est pas sur d_3, les plans $d+d_3$ et d_4+d_3 sont égaux. Comme $d \neq d_1$(sinon d, d_1, d_2 sont coplanaires), a_1 n'appartient pas à d et $d \neq d_4$. Donc $d+d_3=d+d_4=\Pi$ et ce plan contient d_3. De ce fait, il contient également d_2 et on obtient une contradiction. Le cas $d_4 \neq d_1$est donc exclu.

Bibliographie

1. Buekenhout, F.: Espaces linéaires (Notes polycopiées). 1967.
2. Hall, M.: Automorphisms of Steiner triple systems. IBM J. Res. Develop. **4**, 460–471 (1960).
3. Lenz, H.: Zur Begründung der analytischen Geometrie. Sitzber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., 17–72 (1954).
4. Libois, P.: Quelques espaces linéaires. Bull. Soc. Math. Belgique **16**, 13–22 (1964).
5. Veblen, O., and J. Young: Projective Geometry. Boston 1910.

Dr. Francis Buekenhout
Institut de Mathématique
Université Libre de Bruxelles
Belgique

(Reçu le 25 Février 1969)

Math. Z. 111, 372–386 (1969)

Zu einem Satz von Hildebrandt über das Randverhalten von Minimalflächen

ERHARD HEINZ und FRIEDRICH TOMI

Problemstellung

Es sei $B:=\{w=u+iv\colon u^2+v^2<1\}$, und $x\colon \bar{B}\to\mathbf{R}^n$ $(n\geqq 2)$ sei eine Vektorfunktion, die zur Klasse $C^2(B)\cap C^0(\bar{B})$ gehört und in B dem elliptischen System

$$\Delta x=0, \tag{0.1}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2, \quad \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}=0 \tag{0.2}$$

genügt. Außerdem bilde $x=x(w)$ die Kreislinie ∂B topologisch auf eine geschlossene Jordankurve $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ ab. Dann heißt x eine von Γ berandete Minimalfläche, und das Plateausche Problem besteht darin, bei vorgegebener Randkurve Γ die Existenz einer solchen Minimalfläche zu beweisen. Während dieses Problem in den klassischen Arbeiten von Douglas und Radó [1] vollständig gelöst worden ist, ist die Frage nach dem Randverhalten von $x(w)$ bei hinreichend regulärer Randkurve erst in neuerer Zeit in Angriff genommen worden. Das erste allgemeine Resultat in dieser Richtung verdankt man Lewy [11], der zeigte, daß $x(w)$ über ein analytisches Kurvenstück von Γ analytisch fortsetzbar ist. Für den Fall einer nicht-analytischen Randkurve Γ konnte Hildebrandt ([9], Main Theorem) kürzlich einen allgemeinen Regularitätssatz beweisen, der im wesentlichen besagt, daß sich $x(w)$ am Rande von B etwa genauso regulär verhält wie Γ. Dabei wird vorausgesetzt, daß Γ mindestens zur Klasse C^3 gehört. Die Hauptschwierigkeit beim Beweis des Regularitätssatzes besteht in der Herleitung von apriori-Abschätzungen in der L_2-Norm für die zweiten und höheren Ableitungen von x. Als wesentliches Hilfsmittel zur Gewinnung dieser Ungleichungen dient ein Satz von Tsuji [16] über das Randverhalten einer Minimalfläche an einer rektifizierbaren Randkurve, der eine Anwendung klassischer Ergebnisse von Fatou [3] und Riesz [15] über Randwerte holomorpher Funktionen darstellt.

In der vorliegenden Arbeit werden wir für den Fall, daß Γ zur Klasse C^3 gehört, das Hildebrandtsche Ergebnis verschärfen und dafür einen neuen, auf anderen Prinzipien beruhenden Beweis erbringen (Satz 3). Darüber hinaus werden wir zeigen, daß in der Umgebung eines beliebigen Verzweigungspunk-

1. Wegen ausführlicher Literaturangaben vgl. [2] und [13].

tes $w_0 \in \partial B$ der Fläche $x: \bar{B} \to \mathbf{R}^n$ eine asymptotische Darstellung der Form

$$\frac{\partial x}{\partial u} - i \frac{\partial x}{\partial v} = a(w - w_0)^k + o(|w - w_0|^k) \qquad (w \to w_0,\ w \in \bar{B}) \tag{0.3}$$

mit einem komplexen Vektor $a \neq 0$ und einer positiven ganzen Zahl k gilt. Unser Beweis beruht auf Unitäts- und Regularitätssätzen für schwache Lösungen gewisser nichtlinearer elliptischer Systeme, die wir in § 1 herleiten werden. In § 2 kommen außerdem Methoden zur Anwendung, die in [7] benutzt wurden, um die Gültigkeit gewisser Integralumformungen für Flächen konstanter mittlerer Krümmung sicherzustellen. Wir beweisen zunächst einen allgemeinen Satz über das Randverhalten quasilinearer elliptischer Systeme mit konformen Parametern (Satz 2), wobei wir außer der Endlichkeit des Dirichlet-Integrals noch eine Integralbedingung am Rande voraussetzen. Durch Anwendung auf die Gl. (0.1) ergibt sich dann das gewünschte Resultat.

§ 1. Schwache Lösungen nichtlinearer elliptischer Systeme

Es sei G ein beschränktes Gebiet der (u, v)-Ebene. Wir bezeichnen mit $W(G)$ den Sobolevraum der vektorwertigen Funktionen $x: G \to \mathbf{R}^n$, deren Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ über G quadratintegrierbar sind und quadratintegrierbare Ableitungen

$$D_u x_k := \frac{\partial x_k}{\partial u} \quad \text{und} \quad D_v x_k := \frac{\partial x_k}{\partial v}$$

im Sinne von Sobolev besitzen. Für $a, b \in \mathbf{R}^m$ definieren wir das Skalarprodukt $ab := \sum_k a_k b_k$ und den Absolutbetrag $|a| := \sqrt{a\,a}$. Ferner setzen wir zur Abkürzung $D_u x := (D_u x_1, \ldots, D_u x_n)$ und $D_v x := (D_v x_1, \ldots, D_v x_n)$, sowie

$$D x := (D_u x, D_v x).$$

Wir betrachten dann elliptische Systeme der Gestalt

$$\Delta x = f(u, v, x, D x). \tag{1.0}$$

Dabei ist

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \quad \text{und} \quad f: G \times \mathbf{R}^{3n} \to \mathbf{R}^n$$

eine Abbildung, deren Koordinaten Bairesche Funktionen sind. Wir fordern

$$|f(u, v, x, p)| \leqq \mu(|x|)\, p^2 \tag{1.1}$$

und

$$\begin{aligned} &|f(u, v, x, p) - f(u, v, y, q)| \\ &\quad \leqq \nu(\max\{|x|, |y|\})\, [(p^2 + q^2)\,|x - y| + (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\,|p - q|] \end{aligned} \tag{1.2}$$

für alle $(u, v) \in G$, alle $x, y \in \mathbf{R}^n$, sowie für alle $p, q \in \mathbf{R}^{2n}$. Die Funktionen $\mu = \mu(s)$ und $\nu = \nu(s)$ seien monoton nicht fallend und stetig.

Es sei $\tilde{x} \in W(G) \cap C^0(\bar{G})$. Eine Vektorfunktion $x \in W(G)$ heißt dann *schwache Lösung von* (1.0) *mit Randwerten* $\tilde{x}$, wenn x in $\bar{G}$ stetig ist, wenn $x|\partial G = \tilde{x}|\partial G$ gilt und wenn ferner für alle Vektorfunktionen $z \in C_0^\infty(G)$ die Relation

$$\int \big(Dx\, Dz + f(u, v, x, Dx)\, z\big)\, du\, dv = 0 \tag{1.3}$$

besteht. Wir bemerken, daß diese Beziehung aus Stetigkeitsgründen dann auch für alle Funktionen $z \in W(G) \cap C^0(\bar{G})$ gilt, die auf ∂G verschwinden.

Mit einer Methode von Ladyshenskaya und Uraltseva ([10] Kap. 4, Theorem 2.1), welche von diesen Autorinnen bei skalaren Gleichungen angewandt wurde, erhalten wir das folgende

Lemma 1. *Es seien x und y schwache Lösungen von* (1.0) *mit gleichen Randwerten. Ferner gelte für die Zahl $s := \max\{\sup_G |x|, \sup_G |y|\}$ die Bedingung*

$$\max\left\{s\,\mu(s),\ 8\,\frac{s^2\,\nu(s)\,(2+\nu(s))}{(1-s\,\mu(s))^2}\right\} < 1. \tag{1.4}$$

Dann gilt $x = y$.

Beweis. Wir verwenden (1.3) nacheinander für x und y, subtrahieren die entstehenden Gleichungen und erhalten mit Hilfe von (1.2) für alle $z \in C_0^\infty(G)$ die Abschätzung

$$\int (Dx - Dy)\, Dz\, du\, dv \leqq I_1 + I_2 \tag{1.5}$$

mit

$$I_1 = \nu(s) \int (|Dx|^2 + |Dy|^2)\, |x-y|\, |z|\, du\, dv$$

und

$$I_2 = \nu(s) \int (|Dx|^2 + |Dy|^2)^{\frac{1}{2}}\, |Dx - Dy|\, |z|\, du\, dv.$$

Es ist dann

$$I_2 \leqq \tfrac{1}{2} \int |Dx - Dy|^2\, du\, dv + \tfrac{1}{2}\, \nu(s)^2 \int (|Dx|^2 + |Dy|^2)\, |z|^2\, du\, dv,$$

so daß mit der zulässigen Substitution $z := x - y$ aus (1.5) die Abschätzung

$$\int |Dx - Dy|^2\, du\, dv \leqq \nu(s)\,(2+\nu(s)) \int (|Dx|^2 + |Dy|^2)\, |x-y|^2\, du\, dv \tag{1.6}$$

folgt. Als nächstes verwenden wir (1.3) mit $z := \eta^2 x$, wobei η eine reelle Funktion der Klasse $C_0^\infty(G)$ ist. Mit Hilfe von (1.1) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
\int \eta^2 |Dx|^2\, du\, dv &= -2 \int \big(\eta (D_u \eta)\, x\, D_u x + \eta (D_v \eta)\, x\, D_v x\big)\, du\, dv \\
&\quad - \int \eta^2 f(u, v, x, Dx)\, x\, du\, dv \\
&\leqq \varepsilon \int \eta^2 |Dx|^2\, du\, dv + \frac{s^2}{\varepsilon} \int \big((D_u \eta)^2 + (D_v \eta)^2\big)\, du\, dv \\
&\quad + s\,\mu(s) \int \eta^2 |Dx|^2\, du\, dv
\end{aligned}$$

mit einem beliebigen $\varepsilon > 0$. Wegen (1.4) können wir $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - s\,\mu(s))$ setzen und erhalten dann

$$\int \eta^2 |Dx|^2\, dx \leqq \left(\frac{2s}{1 - s\,\mu(s)}\right)^2 \int \big((D_u \eta)^2 + (D_v \eta)^2\big)\, du\, dv. \tag{1.7}$$

Es ist dann zulässig, für η die Koordinatenfunktionen von $x-y$ einzusetzen. Wenn man noch beachtet, daß (1.7) auch gilt, wenn x durch y ersetzt wird, ergibt sich schließlich

$$\int |x-y|^2 (|Dx|^2 + |Dy|^2)\, du\, dv \leqq 2\left(\frac{2s}{1-s\,\mu(s)}\right)^2 \int |Dx-Dy|^2\, du\, dv. \quad (1.8)$$

Kombination von (1.4), (1.6) und (1.8) liefert die Behauptung.

Wir betrachten im folgenden das speziellere System

$$\Delta x = \mathbf{H}\, f(x, Dx) \quad (1.9)$$

in dem Gebiet $G := B_R := \{(u,v)\colon u^2+v^2<R^2\}$. Dabei ist $\mathbf{H}$ eine Matrix, deren Koeffizienten $H_{kl} = H_{kl}(u,v)$ $(k,l=1,\dots,n)$ reelle, beschränkte und Bairesche Funktionen sind und $f\colon \mathbf{R}^{3n}\to\mathbf{R}^n$ ist eine Vektorfunktion, welche den Bedingungen (1.1) und (1.2) genügt. Zur Abkürzung setzen wir

$$|\mathbf{H}| := \sup_{B_R} \Big(\sum_{k,l} H_{kl}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

und definieren für Vektorfunktionen $x\colon B_R\to\mathbf{R}^n$ der Klassen $C^k(\bar{B}_R)$ $(k=0,1)$ die folgenden Normen:

$$\|x\|_{0,R} := \sup_{B_R} |x|, \qquad \|x\|_{1,R} := \|x\|_{0,R} + \|Dx\|_{0,R}.$$

Als nächstes beweisen wir ein für das Folgende wichtiges Regularitäts- und Approximationslemma. Regularitätssätze für schwache Lösungen nichtlinearer Systeme sind von Morrey [12] und kürzlich von Oskolkov [14] aufgestellt worden; ihre Resultate scheinen jedoch im vorliegenden Fall nicht anwendbar zu sein.

Lemma 2. *Es sei $\tilde{x}\in W(B_R)\cap C^0(\bar{B}_R)$. Die Zahl $s := \|\tilde{x}\|_{0,R}$ erfülle* (1.4) *und die weitere Bedingung*

$$s\,\mu(s) < \tfrac{1}{2}. \quad (1.10)$$

Ferner sei $|\mathbf{H}|\leqq 1$.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(I) *Es existiert in B_R genau eine schwache Lösung x von* (1.9) *mit den Randwerten $\tilde{x}$ und $\|x\|_{0,R}\leqq s$.*

(II) *Diese Lösung gehört zu $C^{1+\alpha}(B_R)$ für alle α, $0<\alpha<1$.*

(III) *Ist $\tilde{x}^{(p)}\in C^\infty(\bar{B}_R)$ eine Folge von Vektorfunktionen mit*

$$\|\tilde{x}^{(p)}\|_{0,R}\leqq s, \quad (1.11)$$

$$\int |D\tilde{x}^{(p)}|^2\, du\, dv \leqq d = \mathrm{const}, \qquad (p=1,2,\dots), \quad (1.12)$$

und

$$\sup_{u^2+v^2=R^2} |\tilde{x}-\tilde{x}^{(p)}| \to 0 \qquad (p\to\infty), \quad (1.13)$$

so gibt es eine Folge von Vektorfunktionen $x^{(k)} \in C^2(\bar{B}_R)$ *und eine Folge von Matrizen* $\mathbf{H}^{(k)} \in C^\infty(\bar{B}_R)$, $|\mathbf{H}^{(k)}| \leqq 1$ $(k=1,2,\ldots)$, *mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *Es gilt*

$$\Delta x^{(k)} = \mathbf{H}^{(k)} f(x^{(k)}, D x^{(k)}) \qquad ((u,v) \in B_R)$$

$$x^{(k)} \,|\partial B_R = \tilde{x}^{(k)} |\, \partial B_R \qquad (k=1,2,\ldots)$$

und

$$\|x - x^{(k)}\|_{0,R} + \|x - x^{(k)}\|_{1,R'} \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

für alle $R' < R$.

(b) *Für alle* $k=1,2,\ldots$ *hat man die Ungleichung*

$$\int |D x^{(k)}|^2 \, du \, dv \leqq (1 - s\,\mu(s))^{-2} \, d.$$

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussage in (I) folgt aus Lemma 1. Zum Nachweis der übrigen Behauptungen gehen wir von einer Folge $\tilde{x}^{(p)} \in C^\infty(\bar{B}_R)$ mit (1.11)–(1.13) aus. Diese Folge kann vorgegeben sein; anderenfalls konstruieren wir eine solche. Weiterhin bestimmen wir eine Folge von Matrizen $\tilde{\mathbf{H}}^{(p)} \in C^\infty(\bar{B}_R)$ mit

$$|\tilde{\mathbf{H}}^{(p)}| \leqq 1 \tag{1.14}$$

und

$$\tilde{H}_{kl}^{(p)} \to H_{kl} \ (p \to \infty) \text{ fast überall in } B_R \ (k, l = 1, \ldots, n). \tag{1.15}$$

Wegen (1.10), (1.11) und (1.14) kann man dann aus [5], § 3 und [6], § 2 folgern, daß das Randwertproblem

$$\Delta z = \tilde{\mathbf{H}}^{(p)} f(z, D z), \qquad z \,|\partial B_R = \tilde{x}^{(p)} |\, \partial B_R$$

eine Lösung $z = y^{(p)} \in C^2(\bar{B}_R)$ mit $\|y^{(p)}\|_{0,R} \leqq s$ besitzt, $(p=1,2,\ldots)$.[2]

Ebenfalls aus [6], § 2 entnimmt man die Abschätzung

$$\|y^{(p)}\|_{1,R'} \leqq \frac{\text{const}}{R - R'} \ (R' < R, \ p = 1, 2, \ldots), \tag{1.16}$$

und wegen (1.13) auch die gleichgradige Stetigkeit der Folge $y^{(p)}$ in $\bar{B}_R$. Weiter ergibt sich aus (1.16) durch bekannte potentialtheoretische Schlüsse eine Abschätzung

$$\sup_{\substack{\zeta, \zeta' \in B_{R'} \\ \zeta \neq \zeta'}} \frac{|D y^{(p)}(\zeta) - D y^{(p)}(\zeta')|}{|\zeta - \zeta'|^\alpha} \leqq \text{const}(\alpha, R')$$

für alle $\alpha, 0 < \alpha < 1$ und alle $R' < R$. Ein Auswahlverfahren liefert dann die Existenz einer Teilfolge p_k $(k=1,2,\ldots)$ der natürlichen Zahlen und einer Vektorfunktion

$$x \in C^0(\bar{B}_R) \cap \bigcap_{0 < \alpha < 1} C^{1+\alpha}(B_R)$$

2. In [5] wird zwar nur das Dirichletproblem eines speziellen Systems der obigen Gestalt betrachtet. Der dort gegebene Existenzbeweis bleibt aber auch in dem hier behandelten allgemeinen Fall gültig.

mit der Eigenschaft, daß

$$\|y^{(p_k)}-x\|_{0,R}+\|y^{(p_k)}-x\|_{1,R'}\to 0 \qquad (k\to\infty) \tag{1.17}$$

für alle $R'<R$ gilt. Aus der für alle Testvektoren z gültigen Relation

$$\int \big(D y^{(p)}\, D z+\tilde{\mathbf{H}}^{(p)} f(y^{(p)}, D y^{(p)})\, z\big)\, du\, dv=0 \tag{1.18}$$

leitet man mit $z:=y^{(p)}-\tilde{x}^{(p)}$ die Ungleichung

$$\int |D y^{(p)}|^2\, du\, dv \leqq (1-2s\,\mu(s))^{-2} \int |D\tilde{x}^{(p)}|^2\, du\, dv \tag{1.19}$$

ab, aus der sich wegen (1.12) die Endlichkeit von $\int |Dx|^2\, du\, dv$ ergibt. Wenn man (1.15) und (1.17) berücksichtigt, sieht man durch Grenzübergang in (1.18) sofort, daß x schwache Lösung von (1.9) ist. Die Randbedingung $x|\partial B_R=\tilde{x}|\partial B_R$ ist wegen (1.13) und (1.17) erfüllt. Damit sind die Behauptungen (I) und (II) bewiesen.

Im Falle, daß eine Folge $\tilde{x}^{(p)}$ mit (1.11)–(1.13) vorgegeben ist, setzen wir $x^{(k)}:=y^{(k)}$ und $\mathbf{H}^{(k)}:=\tilde{\mathbf{H}}^{(k)}$. Wegen Lemma 1 gelten dann die Aussagen a) und b) in Behauptung (III), womit alles bewiesen ist.

Wir werden uns im folgenden auch der komplexen Schreibweise bedienen. Wir setzen $\zeta:=u+iv$ und $D_\zeta:=D_u-iD_v$ sowie $D_{\bar\zeta}:=D_u+iD_v$. Mit diesen Bezeichnungen gilt dann

Lemma 3. *Es sei $x\in C^1(B_R)$ und es gelte für alle $z\in C_0^\infty(B_R)$ die Ungleichung*

$$\left|\int Dx\, Dz\, du\, dv\right| \leqq M \int |D_\zeta x|\,|z|\, du\, dv$$

mit einer positiven Konstanten M. Ferner sei $D_\zeta x(0)=0$ und $D_\zeta x\not\equiv 0$. Dann gilt für $\zeta\to 0$ die asymptotische Darstellung

$$D_\zeta x(\zeta)=a\,\zeta^k+o(|\zeta|^k)$$

mit einem komplexen Vektor $a\neq 0$ und k ganz-positiv.

Beweis. Es sei $0<R'<R$. Durch Glättung von x läßt sich eine Folge $x^{(k)}\in C^2(\bar B_{R'})$ konstruieren mit

$$\|x^{(k)}-x\|_{1,R'}\to 0 \qquad (k\to\infty)$$

und

$$\limsup_{k\to\infty} |\Delta x^{(k)}| \leqq M'\,|D_\zeta x|, \qquad M'=\text{const.}$$

Es sei nun $E\subset B_{R'}$ ein glattberandetes Gebiet und $g\in C^1(\bar E)$ eine komplexwertige Funktion. Wegen der Identität

$$\oint_{\partial E} g\, D_\zeta x^{(k)}\, d\zeta = i\int_E (g\,\Delta x^{(k)}+D_{\bar\zeta} g\, D_\zeta x^{(k)})\, du\, dv$$

folgt bei $k\to\infty$ die Ungleichung

$$\left|\oint_{\partial E} g\, D_\zeta x\, d\zeta\right| \leqq \int_E (M'|g|+|D_{\bar\zeta} g|)\,|D_\zeta x|\, du\, dv.$$

Jetzt ergibt sich die Behauptung des Lemmas nach Hartman-Wintner (s. [4], insbesondere S. 455–458).

Wir führen nun Polarkoordinaten r, φ durch $u+iv=r e^{i\varphi}$ ein, setzen

$$D_r := \frac{\partial}{\partial r}, \qquad D_\varphi := \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

und erhalten dann das Hauptergebnis dieses Paragraphen, nämlich

Satz 1. *Es bezeichne $S_{R,\Theta}$ das Gebiet $\{r e^{i\varphi}: R<r<1, |\varphi|<\Theta\}$ mit $0<R<1$ und $0<\Theta\leqq\pi$. Es sei $x\in W(S_{R,\Theta})\cap C^0(\bar{S}_{R,\Theta})\cap C^2(S_{R,\Theta})$ und genüge der Differentialungleichung*

$$|\Delta x| \leqq \beta |D x|^2 \tag{1.20}$$

mit einer positiven Konstanten β.

Ferner erfülle x die Randbedingungen

$$x_k(e^{i\varphi})=0 \qquad (|\varphi|\leqq\Theta,\ 1\leqq k\leqq n-1) \tag{1.21}$$

und

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\Theta'}^{+\Theta'} |D_r x_n|\, d\varphi = 0 \tag{1.22}$$

für alle Θ', $0<\Theta'<\Theta$. Dann gehört x zu

$$\bigcap_{0<\alpha<1} C^{1+\alpha}(\bar{S}_{R',\Theta'})$$

für alle R' mit $R<R'<1$ und alle Θ' mit $0<\Theta'<\Theta$. Ist ferner $D_\zeta x \not\equiv 0$ und $D_\zeta x(\zeta_0)=0$ ($\zeta_0=r_0 e^{i\varphi_0}, r_0\leqq 1, |\varphi_0|<\Theta$), so gilt für $\zeta\to\zeta_0$ die asymptotische Darstellung

$$D_\zeta x(\zeta) = a(\zeta-\zeta_0)^k + o(|\zeta-\zeta_0|^k) \tag{1.23}$$

mit einem komplexen Vektor $a\neq 0$ und k ganz-positiv.

Beweis. Wir setzen $G := \{r e^{i\varphi}: R<r<R^{-1}, |\varphi|<\Theta\}$ und definieren eine Vektorfunktion $y: G\to\mathbf{R}^n$ durch

$$y_k(r e^{i\varphi}) := \begin{cases} x_k(r e^{i\varphi}) & \text{falls } r\leqq 1 \\ (2\delta_{kn}-1)\, x_k\left(\frac{1}{r} e^{i\varphi}\right) & \text{falls } r>1 \end{cases}$$

($k=1\ldots n$), wobei δ_{kn} das Kroneckersymbol bedeutet. Erklären wir eine Vektorfunktion $b: G\to\mathbf{R}^n$ durch

$$b := \begin{cases} |D y|^{-2}\, \Delta y & \text{falls } D y\neq 0 \text{ und } r\neq 1 \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

so ist b meßbar und wegen (1.20) beschränkt. Die Vektorfunktion y genügt für $r\neq 1$ der Differentialgleichung

$$\Delta y = |D y|^2 b. \tag{1.24}$$

Wir werden nun zeigen, daß y in ganz G schwache Lösung von (1.24) ist. Wegen der Endlichkeit von $\int\limits_{r \neq 1} |Dy|^2 \, du \, dv$ und der Stetigkeit von y in G, sieht man leicht, daß y zu $W(G)$ gehört. Wir werden nun für vorgelegtes $z \in C_0^\infty(G)$ die (1.3) entsprechende Relation nachweisen. Wir wählen eine Zahl s mit $R < s < 1$ und erhalten durch partielle Integration

$$\Big(\int\limits_{r<s} + \int\limits_{r>\frac{1}{s}}\Big)(Dy\,Dz + |Dy|^2\, b\, z)\, du\, dv = \sum_{k=1}^{n} I_k \tag{1.25}$$

mit

$$I_k = \Bigg(\int\limits_{\substack{-\Theta' \\ r=s}}^{+\Theta'} - \int\limits_{\substack{-\Theta' \\ r=\frac{1}{s}}}^{+\Theta'}\Bigg)(D_r y_k)\, z_k\, r\, d\varphi$$

und einem geeigneten Θ', $0 < \Theta' < \Theta$.

Wegen der für $r > 1$ gültigen Beziehungen

$$D_r y_k(r e^{i\varphi}) = (1 - 2\delta_{kn}) \frac{1}{r^2} D_r x_k\left(\frac{1}{r} e^{i\varphi}\right)$$

erhalten wir für $I_1, \ldots, I_n$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} |I_k| &\leqq \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{-\Theta'}^{+\Theta'} |D_r x_k(s e^{i\varphi})| \left| z_k(s e^{i\varphi}) - z_k\left(\frac{1}{s} e^{i\varphi}\right)\right| s\, d\varphi \\ &\leqq \text{const}\left(\frac{1}{s} - s\right) \int\limits_{-\Theta'}^{+\Theta'} |D_r x(s e^{i\varphi})|\, s\, d\varphi\end{aligned}$$

und

$$|I_n| \leqq \text{const} \int\limits_{-\Theta'}^{+\Theta'} |D_r x_n(s e^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Wegen (1.22) gilt $I_n \to 0$ $(s \to 1)$, und wegen der Endlichkeit von $\int |Dx|\, du\, dv$ gilt $\sum_{k=1}^{n-1} |I_k| \to 0$ für eine Folge s_ν, $s_\nu \to 1$ $(\nu \to \infty)$.

Es folgt dann, daß y schwache Lösung von (1.24) ist. Wenn man berücksichtigt, daß y in G stetig ist, ergeben sich die Behauptungen des Satzes aus Lemma 2 und Lemma 3.

§ 2. Über das Randverhalten einer gewissen Klasse von Flächen

Wir betrachten im folgenden ein konform parametrisiertes Flächenstück $x = x(u, v)$, welches als Randkomponente eine reguläre Kurve der Klasse C^m, $m \geqq 2$, besitzt. Genauer: Es sei x: $\bar{B}_1 \to \mathbf{R}^n$ eine Vektorfunktion der Klasse $C^0(\bar{B}_1) \cap C^1(B_1)$, welche dem Differentialgleichungssystem

$$r\,|D_r x| = |D_\varphi x|, \tag{2.0$_1$}$$

$$D_r x\, D_\varphi x = 0 \qquad (u + i v = r e^{i\varphi}) \tag{2.0$_2$}$$

und den Randbedingungen

$$x_k(e^{i\varphi})=g_k(x_n(e^{i\varphi})) \qquad (|\varphi|\leqq\Theta,\ 1\leqq k\leqq n-1), \tag{2.1$_1$}$$

$$(x_n(e^{i\varphi})-x_n(e^{i\psi}))(\varphi-\psi)\geqq 0 \qquad (|\varphi|,\ |\psi|\leqq\Theta) \tag{2.1$_2$}$$

genügt. Dabei ist Θ eine reelle Zahl, $0<\Theta\leqq\pi$, und die Funktionen g_k $(k=1,\dots,n-1)$ gehören zur Klasse $C^m((-\delta,+\delta))$, wobei das Intervall $(-\delta,+\delta)$ die Zahlenmenge $\{x_n(e^{i\varphi}): |\varphi|\leqq\Theta\}$ enthält. Es bedeutet keine Einschränkung,

$$x(1)=0 \tag{2.2}$$

und

$$g_k(0)=g_k'(0)=0 \qquad (1\leqq k\leqq n-1) \tag{2.3}$$

vorauszusetzen. Wir nehmen nun eine in einer Umgebung der Punktmenge $M(\Theta):=\{x(e^{i\varphi}): |\varphi|\leqq\Theta\}$ definierte Koordinatentransformation V vor, welche dem Zweck dienen soll, die nichtlinearen Randbedingungen (2.1$_1$) und (2.1$_2$) in lineare überzuführen. Wir erklären $y=Vx$ durch

$$y_k:=x_k-g_k(x_n), \qquad (k=1,\dots,n-1), \tag{2.4$_1$}$$

$$y_n:=x_n+h(x_n)^{-1}\sum_{k=1}^{n-1} g_k'(x_n)(x_k-g_k(x_n)) \tag{2.4$_2$}$$

mit

$$h(x_n):=1+\sum_{k=1}^{n-1} g_k'(x_n)^2.$$

Dabei sei $\Theta>0$ so klein gewählt, daß V in einer Umgebung von $M(\Theta)$ eineindeutig ist und dort eine nirgends verschwindende Funktionaldeterminante besitzt.

Lemma 4. *Es sei $x\in C^0(\bar{B}_1)\cap C^1(B_1)$ eine Vektorfunktion, die* (2.0$_1$), (2.0$_2$), *und* (2.1$_1$) *erfüllt. Man wähle $R<1$ so, daß die Punktmenge $x(\bar{S}_{R,\Theta})$ mit $S_{R,\Theta}:=\{r e^{i\varphi}: R<r<1, |\varphi|<\Theta\}$ im Definitionsbereich der durch* (2.4) *gegebenen Transformation V liegt. Erklärt man dann die Vektorfunktion y: $S_{R,\Theta}\to\mathbf{R}^n$ durch $y(r e^{i\varphi}):=Vx(r e^{i\varphi})$, so gilt in $S_{R,\Theta}$ die Abschätzung*

$$|D_r y_n|\leqq \text{const}\,\frac{1}{r}\left[|D_\varphi x|^{\frac{1}{2}}(|D_\varphi y|-|D_\varphi y_n|)^{\frac{1}{2}}+|D_\varphi x|\left(\sum_{k=1}^{n-1}|y_k|\right)\right]. \tag{2.5}$$

Beweis. Zunächst erhält man aus (2.0$_2$) und (2.4) die Gleichung

$$0=\sum_{k=1}^{n-1} D_\varphi y_k D_r x_k+\Phi D_\varphi x_n$$

mit

$$\Phi:=\sum_{k=1}^{n-1} g_k'(x_n) D_r y_k+h(x_n) D_r x_n.$$

In Verbindung mit (2.0_1) und (2.4) ergeben sich daraus die Abschätzungen

$$|\Phi|\,|D_\varphi x_n| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r}\,|D_\varphi x| \tag{2.6}$$

und

$$|\Phi| \leqq \frac{C_0}{r}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + |D_\varphi x_n|\right] \tag{2.7}$$

mit einer positiven Konstanten C_0.

Aus (2.6) und (2.7) folgt

$$\begin{aligned}
\Phi^2 &\leqq \frac{C_0}{r}\left[|\Phi|\left(\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} + |\Phi|\,|D_\varphi x_n|\right]\\
&\leqq \frac{1}{2}\,\Phi^2 + \frac{1}{2}\,\frac{C_0^2}{r^2}\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2 + \frac{C_0}{r^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}|D_\varphi x|\\
&\leqq \frac{1}{2}\,\Phi^2 + \frac{1}{2}\,\frac{C_1^2}{r^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}|D_\varphi x|,
\end{aligned}$$

d.h.

$$|\Phi| \leqq \frac{C_1}{r}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2\right)^{\frac{1}{4}}|D_\varphi x|^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(D_\varphi y_k)^2 &= |D_\varphi y|^2 - |D_\varphi y_n|^2\\
&= (|D_\varphi y| + |D_\varphi y_n|)(|D_\varphi y| - |D_\varphi y_n|)\\
&\leqq \text{const}\,|D_\varphi x|\,(|D_\varphi y| - |D_\varphi y_n|)
\end{aligned}$$

folgt hieraus

$$|\Phi| \leqq \text{const}\,\frac{1}{r}\,|D_\varphi x|^{\frac{3}{4}}(|D_\varphi y| - |D_\varphi y_n|)^{\frac{1}{4}}.$$

Beachtet man, daß wegen (2.4) die Gleichung

$$D_r y_n = h(x_n)^{-1}\,\Phi + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{d}{dx_n}\left(\frac{g_k'(x_n)}{h(x_n)}\right)(D_r x_n)\,y_k$$

gilt, so ergibt sich (2.5).

Das nächste Lemma macht eine allgemeine Aussage über das Verhalten von Bogenlängen bei Anwendung einer nichtlinearen Transformation.

Lemma 5. *Es sei* $x \in C^0(\bar{B}_1) \cap C^1(B_1)$ *mit*

$$\sup_{0 \leqq r \leqq 1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi x(r e^{i\varphi})| < \infty$$

für ein $\Theta \in (0, \pi]$. *Ferner sei* U *eine in einer Umgebung* Ω *der Punktmenge* $x(\bar{S}_{R,\Theta})$ $(0<R<1)$ *definierte, stetig differenzierbare Abbildung,* U: $\Omega \to \mathbf{R}^n$. *Es sei* $T(z)$ *die Funktionalmatrix von* U *im Punkte* z *und es gelte für alle* $z \in \{x(e^{i\varphi}): |\varphi| \leqq \Theta\}$ *die Gleichung*

$$\limsup_{r \to 1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi T(z) x(r e^{i\varphi})| = \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi T(z) x(e^{i\varphi})|. \tag{2.8}$$

Setzt man dann $y(r e^{i\varphi}) := U x(r e^{i\varphi})$ $(R \leqq r \leqq 1, |\varphi| \leqq \Theta)$, *so ist*

$$\int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi y(e^{i\varphi})| < \infty,$$

und es gilt

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi y(r e^{i\varphi})| = \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi y(e^{i\varphi})|. \tag{2.9}$$

Beweis. Die Endlichkeit der rechten Seite von (2.9) ist klar. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ läßt sich ein $\delta(\varepsilon)$, $0 < \delta(\varepsilon) < 1 - R$, und eine Zerlegung

$$-\Theta = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_l < \varphi_{l+1} = \Theta$$

des Intervalls $[-\Theta, +\Theta]$ mit $\varphi_{k+1} - \varphi_k < \delta(\varepsilon)$ so angeben, daß für

$$\varphi_k \leqq \varphi \leqq \varphi_{k+1} \quad \text{und} \quad 1 - \delta(\varepsilon) \leqq r \leqq 1$$

die Ungleichung

$$|d_\varphi y(r e^{i\varphi}) - T_k d_\varphi x(r e^{i\varphi})| \leqq \varepsilon |d_\varphi x(r e^{i\varphi})| \tag{2.10}$$

erfüllt ist. Dabei ist $T_k := T(x(e^{i\varphi_k}))$, $0 \leqq k \leqq l$. Durch Integration von (2.10) folgt

$$\left| \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi y(r e^{i\varphi})| - \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi T_k x(r e^{i\varphi})| \right| \leqq \varepsilon \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi x(r e^{i\varphi})| \tag{2.11}$$

für $1 - \delta(\varepsilon) \leqq r \leqq 1$ und $k = 0, \ldots, l$. Aus (2.11) ergibt sich

$$\left| \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi y(r e^{i\varphi})| - \sum_{k=0}^{l} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi T_k x(r e^{i\varphi})| \right| \leqq \varepsilon M \qquad (1 - \delta(\varepsilon) \leqq r \leqq 1) \tag{2.12}$$

mit

$$M := \sup_{0 \leqq r \leqq 1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi x(r e^{i\varphi})| < +\infty,$$

also

$$\left| \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, y(r e^{i\varphi})| - \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, y(e^{i\varphi})| \right| \leqq \sum_{k=0}^{l} \left| \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi\, T_k\, x(r e^{i\varphi})| - \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi\, T_k\, x(e^{i\varphi})| \right| + 2\varepsilon M. \tag{2.13}$$

Wegen (2.8) und der Halbstetigkeitseigenschaft der Bogenlänge gilt

$$\lim_{r\to 1} \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi\, T_k\, x(r e^{i\varphi})| = \int_{\varphi_k}^{\varphi_{k+1}} |d_\varphi\, T_k\, x(e^{i\varphi})|$$

für jedes $k=0, \ldots, l$. Damit folgt die Behauptung aus (2.13).

Wir sind jetzt in der Lage, das Hauptresultat dieser Arbeit zu beweisen, nämlich

Satz 2. *Voraussetzung.*

(I) *Es sei* $x \in W(B_1) \cap C^0(\bar{B}_1) \cap C^2(B_1)$ *eine Lösung des Systems* (2.0_1)–(2.0_2), *welche die Randbedingungen* (2.1_1) *und* (2.1_2) *mit Funktionen* $g_k \in C^3$ *erfüllt.*

(II) *Die Vektorfunktion* x *genüge in* B_1 *der Differentialgleichung*

$$\Delta x = \mathbf{H} f(x, Dx) \tag{2.14}$$

mit einer Matrix $\mathbf{H} = \mathbf{H}(u, v)$, *deren Koeffizienten reelle, meßbare und beschränkte Funktionen sind, und einer Vektorfunktion* f, *welche Ungleichungen der Gestalt* (1.1) *und* (1.2) *erfüllt.*

(III) *Bezeichnet* $T(z)$ *die Funktionalmatrix der durch* (2.4) *gegebenen Transformation* V, *so gelte die Gl.* (2.8) *für jede der Matrizen* $T(x(e^{i\varphi}))$, $|\varphi| \leqq \Theta$.

Behauptung.

(I) *Es gilt* $x \in \bigcap_{0<\alpha<1} C^{1+\alpha}(\bar{S}_{0,\delta})$ *für alle* δ *mit* $0<\delta<\Theta$.

(II) *Ist* $D_\zeta x(1) = 0$, *sowie* $D_\zeta x \not\equiv 0$, *so gilt für* $\zeta \to 1$ *die asymptotische Darstellung*

$$D_\zeta x(\zeta) = a(\zeta-1)^k + o(|\zeta-1|^k)$$

mit einem komplexen Vektor $a \neq 0$ *und* k *ganz positiv.*

(III) *Ist* $0<\gamma<1$ *und* $\mathbf{H} \in C^\gamma(\bar{B}_1)$, *so gilt* $x \in C^{2+\gamma}(\bar{S}_{0,\delta})$ *für alle* δ, $0<\delta<\Theta$.

Beweis. Wir wählen R, $0<R<1$, so, daß die durch (2.4) gegebene Transformation V auf der Punktmenge $x(\bar{S}_{R,\Theta})$ erklärt ist und dort eine nichtverschwindende Funktionaldeterminante besitzt. Sodann definieren wir die Vektorfunktion y: $\bar{S}_{R,\Theta} \to \mathbf{R}^n$ durch $y(r e^{i\varphi}) := V x(r e^{i\varphi})$. In $S_{R,\Theta}$ gilt für y eine Differentialungleichung der Gestalt

$$|\Delta y| \leqq \beta |Dy|^2 \tag{2.15}$$

mit einer positiven Konstanten β.

Aus Lemma 4 entnimmt man dann unter Benutzung der Hölderschen Ungleichung die für $R<r<1$ gültige Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_r\, y_n(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi \\ \leqq \text{const} \Bigg[\int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_\varphi\, x(r\,e^{i\varphi})| \left(\sum_{k=1}^{n-1} |y_k(r\,e^{i\varphi})|\right) d\varphi \\ + \left(\int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_\varphi\, x(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_\varphi\, y|\, d\varphi - \int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_\varphi\, y_n|\, d\varphi\right)^{\frac{1}{4}}\Bigg].\end{aligned} \tag{2.16}$$

Wegen (2.1_2) ist

$$\int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, x(e^{i\varphi})| < \infty,$$

und wegen Voraussetzung (III) ist insbesondere

$$\sup_{R<r<1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, x(r\,e^{i\varphi})| < \infty,$$

so daß Lemma 5 anwendbar wird. Es ergibt sich dann die Limesrelation

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_\varphi\, y(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi = \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, y(e^{i\varphi})| = \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, y_n(e^{i\varphi})|, \tag{2.17}$$

wobei noch die Randbedingungen

$$y_k(e^{i\varphi}) = 0 \qquad (|\varphi| \leqq \Theta,\ k = 1, \dots, n-1) \tag{2.18}$$

berücksichtigt wurden.

Zusammen mit (2.17) und (2.18) ergibt sich aus (2.16) die Beziehung

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to 1} \left(\int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_r\, y_n(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi\right)^4 \\ \leqq \text{const} \left(\int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, y_n(e^{i\varphi})| - \liminf_{r\to 1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |d_\varphi\, y_n(r\,e^{i\varphi})|\right) \leqq 0,\end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{r\to 1} \int_{-\Theta}^{+\Theta} |D_r\, y_n(r\,e^{i\varphi})|\, d\varphi = 0. \tag{2.19}$$

Aus (2.15), (2.18) und (2.19) folgt nun durch Anwendung von Satz 1 die Behauptung (I). Ist $D_\zeta\, x \not\equiv 0$, so ist auch $D_\zeta\, y \not\equiv 0$, und es gilt daher in einer Umgebung jedes Punktes ζ_0 mit $D_\zeta\, y(\zeta_0) = 0$ eine Darstellung der Gestalt (1.23). Daraus folgt unmittelbar die Behauptung (II), wenn man berücksichtigt, daß die Funktionalmatrix von V im Punkte $x(1)$ die Identität ist.

Für den weiteren Beweis bezeichnen wir mit Z_ε das Kreisbogenzweieck $Z_\varepsilon=\{w: |w-e^{i\varphi_0}|<\varepsilon, |w|<1\}$, $|\varphi_0|<\Theta$. Sei jetzt $\mathbf{H}\in C^\gamma(\bar{B}_1)$. Wegen $x_k\in C^{1+\gamma}(\bar{Z}_{\varepsilon_0})$ $(1\leqq k\leqq n)$ und (2.4_1) hat man zunächst $\Delta y_k\in C^\gamma(\bar{Z}_{\varepsilon_0})$ $(1\leqq k\leqq n-1)$. Da $y_k(w)$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ für $|w|=1$ $(w\in\bar{Z}_{\varepsilon_0})$ verschwindet, so folgt hieraus $y_k\in C^{2+\gamma}(\bar{Z}_{\varepsilon_1})$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ für $\varepsilon_1<\varepsilon_0$. Der Beweis von Behauptung (III) ist erbracht, wenn $x_n\in C^{2+\gamma}(\bar{Z}_{\varepsilon_1})$ gezeigt wird. Um dies einzusehen, beachten wir zunächst, daß wegen (2.4_2) und $D_r\, y_n(e^{i\varphi})=0$ $(|\varphi|<\Theta)$ die Funktion $D_r\, x_n(e^{i\varphi})$ für $|\varphi|<\Theta$ zur Klasse $C^{1+\gamma}$ gehört. Daraus, sowie aus $\Delta x_n\in C^\gamma(\bar{Z}_{\varepsilon_0})$, schließt man mit Hilfe eines Differenzenverfahrens unter Anwendung des Privaloffschen Satzes ([1], S. 279), daß $x_n\in C^{2+\gamma}(\bar{Z}_{\varepsilon_1})$ gilt, womit Satz 2 vollständig bewiesen ist.

Es erhebt sich die Frage, unter welchen zusätzlichen Annahmen hinsichtlich des Systems (2.14) die Voraussetzung (III) von Satz 2 erfüllt ist. In dem für differentialgeometrische Anwendungen wichtigen Spezialfall $n=3$ läßt sie sich aus einem allgemeinen in [8] bewiesenen Konvergenzsatz für gewisse nichtlineare elliptische Systeme folgern. Für beliebige $n\geqq 2$ und $\mathbf{H}=0$ kann sie direkt verifiziert werden. Es gilt

Satz 3. *Voraussetzung. Es sei $\Gamma\subset\mathbf{R}^n$ eine reguläre Jordankurve der Klasse C^3 und $x: \bar{B}_1\to\mathbf{R}^n$ sei eine von Γ berandete Minimalfläche der Klasse $C^0(\bar{B}_1)\cap C^2(B_1)$. Genauer: Die Vektorfunktion $x=x(u,v)$ gehöre zu $C^0(\bar{B}_1)\cap C^2(B_1)$, die Abbildung $x: \partial B_1\to\Gamma$ sei topologisch, und es gelten in B_1 die Differentialgleichungen*

$$\Delta x=0, \tag{2.21}$$

$$|D_u x|=|D_v x|, \quad D_u x\, D_v x=0. \tag{2.22}$$

Behauptung. (I) *Es ist $x\in C^{2+\alpha}(\bar{B}_1)$ für alle α, $0<\alpha<1$, und es gilt in der Umgebung eines jeden Verzweigungspunktes $\zeta_0\in\bar{B}_1$ die asymptotische Darstellung*

$$D_\zeta\, x(\zeta)=a(\zeta-\zeta_0)^k+o(|\zeta-\zeta_0|^k) \qquad (\zeta\to\zeta_0, \zeta\in\bar{B}_1) \tag{2.23}$$

mit einem komplexen Vektor $a\neq 0$ und einer positiven, ganzen Zahl k.

Beweis. Zunächst gilt auf Grund der isoperimetrischen Ungleichung für Minimalflächen ([2], Theorem 3.5, S. 129) die Abschätzung

$$\int |Dx|^2\, du\, dv\leqq\frac{1}{2\pi}\, l(\Gamma)^2<+\infty,$$

wobei $l(\Gamma)$ die Bogenlänge von Γ bedeutet. Ferner hat man wegen (2.21) und der Halbstetigkeitseigenschaft der Bogenlänge nach einem bekannten potentialtheoretischen Satz ([2], Theorem 3.4, S. 127) für jede konstante Matrix T die Relation [3]

$$\limsup_{r\to 1}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |d_\varphi\, Tx(r\,e^{i\varphi})|=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |d_\varphi\, Tx(e^{i\varphi})|.$$

Anwendung von Satz 2 liefert dann die Behauptung.

3. Für den Fall der Halbebene vgl. [11], insbesondere Lemma 3'.

Zusatz bei der Korrektur vom 22. 8. 69. Inzwischen ist es gelungen, das Regularitätslemma (Lemma 2, Behauptung II) und unabhängig davon Satz 2 auf elementarem Wege zu beweisen und zu verschärfen. Man vergleiche hierzu die demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinenden Arbeiten von F. Tomi: „Ein einfacher Beweis eines Regularitätssatzes für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme" und E. Heinz: „Über das Randverhalten quasilinearer elliptischer Systeme mit isothermen Parametern". In der letzteren Arbeit wird gezeigt, daß in Satz 2 die Voraussetzungen (III) sowie (2.1_2) und $x \in W(B_1)$ entbehrt werden können.

Literatur

1. Bers, L., F. John, and M. Schechter: Partial differential equations. New York-London-Sydney: Interscience 1964.
2. Courant, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York-London: Interscience 1950.
3. Fatou, P.: Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math. **30**, 335–400 (1906).
4. Hartman, P., and A. Wintner: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. **75**, 449–476 (1953).
5. Heinz, E.: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Math. Ann. **127**, 258–287 (1954).
6. – On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. Analyse Math. **5**, 197–272 (1956/57).
7. – On surfaces of constant mean curvature with polygonal boundaries. Arch. Rat. Mech. Analysis (erscheint demnächst).
8. – Ein Regularitätssatz für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., Jahrgang 1969, 107–118.
9. Hildebrandt, S.: Boundary behaviour of minimal surfaces. Arch. Rat. Mech. Analysis (erscheint demnächst).
10. Ladyshenskaya, O. A., and N. N. Uraltseva: Linear and quasilinear elliptic equations. New York-London: Academic Press 1968.
11. Lewy, H.: On the boundary behavior of minimal surfaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **37**, 103–110 (1951).
12. Morrey, C. B.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
13. Nitsche, J. C. C.: On new results in the theory of minimal surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 195–270 (1965).
14. Oskolkov, A. P.: A priori estimates of the first derivates for two-dimensional quasilinear strongly elliptic systems. Trudy Mat. Inst. Steklov. **92**, 192–202 (1966) [Russisch] [engl. Übersetzung in: Proc. Steklov. Inst. Math. **92**, 219–232 (1966)].
15. Riesz, F.: Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Math. Z. **18**, 87–95 (1923).
16. Tsuji, M.: On an theorem of F. and M. Riesz. Proc. Imp. Acad. Tokyo **18**, 172–175 (1942).

Prof. Dr. Erhard Heinz,
Dr. Friedrich Tomi
Mathematisches Institut der Universität
3400 Göttingen, Bunsenstraße 3/5

(Eingegangen am 18. März 1969)

Math. Z. 111, 387–398 (1969)

Außenraumaufgaben in der Theorie stationärer Schwingungen inhomogener elastischer Körper

NORBERT WECK

Das Ziel dieser Arbeit ist es, Existenz- und Eindeutigkeitssätze für die Theorie des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} &\Delta^* \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \omega^2 \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ (0.1) \qquad &\Delta^* \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{e}^i\, \partial_j \big(C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\, \partial_k u_l(\boldsymbol{x})\big)\,^1 \\ &C_{ijkl}(\boldsymbol{x}) := \lambda(\boldsymbol{x})\, \delta_{ij}\, \delta_{kl} + \mu(\boldsymbol{x})\,(\delta_{ik}\, \delta_{jl} + \delta_{il}\, \delta_{jk}) \end{aligned}$$

zu geben. Über die in (0.1) auftretenden Koeffizienten machen wir die folgenden Minimalvoraussetzungen:

$$C_{ijkl} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(0.2) \qquad \bigvee_{c_0 \in \mathbb{R}^+} \ \bigwedge_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3} \ \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}} C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\, v_{ij}\, \bar{v}_{kl} \geqq c_0 \sum_{i,k=1}^{3} |v_{ik}|^2$$

mit

$$\boldsymbol{V} := \{\boldsymbol{v} = (v_{ij}) \mid v_{ij} \in \mathbb{C} \wedge v_{ij} = \bar{v}_{ji}\}$$

$$(0.3) \qquad \bigvee_{\mu_1, \mu_2, \rho_1 \in \mathbb{R}^+} \ \bigwedge_{\boldsymbol{x}} \ \mu(\boldsymbol{x}) \geqq \mu_1 \wedge \lambda(\boldsymbol{x}) + \tfrac{2}{3}\mu(\boldsymbol{x}) \geqq \mu_2 \wedge \rho(\boldsymbol{x}) \geqq \rho_1 .$$

(0.1) beschreibt die Schwingungen eines inhomogenen, isotropen elastischen Körpers $S \subset \mathbb{R}^3$ unter dem Einfluß einer periodischen Volumenkraft mit der Amplitude $\boldsymbol{f}$. Wir unterscheiden zwei Typen von Körpern:

I. S ist ein beschränktes Gebiet (Innenraumaufgabe).

II. S ist ein Gebiet und $G := \mathbb{R}^3 - \bar{S}$ beschränkt (Außenraumaufgabe).

Da unser System stark elliptisch ist, lassen sich Innenraumaufgaben mit bekannten Methoden (vgl. z.B. [4]) behandeln. Wir gehen daher im ersten Abschnitt nur kurz auf diese Theorie ein. Im zweiten Abschnitt behandeln wir das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit. Dieses wird beim Beweis der Eindeutigkeitssätze für Außenraumaufgaben benötigt. Daher war es für diese Arbeit von entscheidender Bedeutung, den Beweis für dieses Prinzip zu liefern. Auf allgemeine Ergebnisse für elliptische Systeme [2, 3] konnten wir uns dabei nicht stützen, da diese nur für den Fall gelten, daß die Charakteristiken des betrachteten Systems einfach sind. Sonst gibt es bekanntlich Gegenbeispiele [9].

1. Über in Produkten doppelt auftretende Indizes ist von 1 bis 3 zu summieren. Freie Indizes laufen von 1 bis 3. $\boldsymbol{e}^i$: Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$; $\partial_i := \dfrac{\partial}{\partial x_i} := (\boldsymbol{e}^i, \nabla)$.

Unser Beweis ist daher auf die spezielle Gestalt des Systems (0.1) zugeschnitten. In den abschließenden beiden Abschnitten benutzen wir die zuvor gewonnenen Ergebnisse zum Beweis von Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für die Außenraumaufgaben. Resultate in dieser Richtung waren bisher nur für homogene (oder wenigstens stückweise homogene) Medien bekannt ([6, 11]). Die Existenzsätze werden dort mit Hilfe der Integralgleichungsmethode bewiesen, die immer glatten Rand voraussetzt und sich nur schwer auf den Fall variabler Koeffizienten übertragen läßt. Wir beweisen die entsprechenden Sätze für Medien, die erst für große $|\boldsymbol{x}|$ homogen sind. Die Ausstrahlungsbedingung und ein Teil des Eindeutigkeitsbeweises lassen sich dann ohne wesentliche Änderung aus [6] übernehmen. Mit Hilfe Greenscher Umformungen und asymptotischer Abschätzungen läßt sich wie dort auch zeigen, daß Lösungen $\boldsymbol{u}_0$ zu $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$ für genügend große $|\boldsymbol{x}|$, d.h. im Bereich konstanter Koeffizienten, verschwinden. Aus dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit folgt dann $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{0}$. Zum Beweis des Existenzsatzes benutzen wir eine Methode, die auf Leis ([7]) zurückgeht. (Dort wurde der entsprechende Satz für symmetrische Differentialoperatoren zweiter Ordnung bewiesen.) Wir suchen zunächst eine Lösung $\boldsymbol{v}$ einer Innenraumaufgabe in $Z_R := K_2 - \bar{G}$ zu inhomogenen Randwerten $\boldsymbol{g}$ auf dem Rand ∂K_2 einer Kugel K_2. Dies liefert Dirichletsche Randwerte auf dem Rand ∂K_1 einer Kugel $K_1 \subset K_2$. Mit klassischen Methoden konstruieren wir eine Lösung $\boldsymbol{w}$ der Außenraumaufgabe in $\mathbb{R}^3 - \bar{K}_1$ zu diesen Randwerten.

$\boldsymbol{w}$ und $\boldsymbol{v}$ sind Fortsetzungen voneinander und ergeben eine Lösung der Außenraumaufgabe in $\mathbb{R}^3 - \bar{G}$, wenn $\boldsymbol{w}$ auf ∂K_2 wieder die Randwerte $\boldsymbol{g}$ liefert. Diese Bedingung führt auf eine Gleichung der Form $(I+T)\,\boldsymbol{g} = S\boldsymbol{f}$ mit vollstetigem T, von der wir zeigen können, daß sie für jedes $\boldsymbol{f}$ lösbar ist. Das beweist den Existenzsatz. Voraussetzung für dieses Verfahren ist jedoch, daß keine der Innenraumaufgaben in Z_R und $K_2 - \bar{K}_1$ Eigenlösungen besitzt. Daß es immer geeignete Kugeln und Randbedingungen auf ∂K_2 gibt, die dies garantieren, ließe sich – wie in [7] – mit Hilfe bestimmter Monotonieprinzipien [12] für die Eigenwerte der betreffenden Randwertprobleme zeigen. Wir geben statt dessen eine spezielle Randbedingung an, bei der – unabhängig von der Wahl von K_1 und K_2 – niemals Eigenlösungen auftreten.

Ich möchte mir erlauben, an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Leis für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Ratschläge zu danken.

1. Innenraumaufgaben

Zum System (0.1) haben wir noch Randbedingungen zu stellen. Die wichtigsten sind

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \boldsymbol{u}|_{\partial S} = \boldsymbol{0}\\
(1.1)\qquad &(2)\quad n_j\, T_{ij}\, \boldsymbol{u}|_{\partial S} = 0\\
&(3)\quad (\beta\, u_i + n_j\, T_{ij}\, \boldsymbol{u})|_{\partial S} = 0.
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir die Bezeichnung $T_{ij}\,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) := C_{ijkl}(\boldsymbol{x})\,\partial_k\, u_l(\boldsymbol{x})$ für den Spannungstensor $(T_{ij}\,\boldsymbol{u})$ eingeführt.

Definition 1. $\boldsymbol{u}$ heißt *klassische Lösung zur k-ten Innenraumaufgabe und zu* $f \in C(S)$: $\Leftrightarrow$

(i) $\boldsymbol{u} \in C_2(S) \cap C(\bar{S})$.

(ii) $\Delta^* \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \omega^2 \rho(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in S.$

(iii) Für $k=1$: $\boldsymbol{u}|_{\partial S} = \boldsymbol{0}$.

Für $k=2$: $\bigwedge_{\boldsymbol{y} \in \partial S} \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \in S}} n_j(\boldsymbol{y})\, T_{ij}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = 0.$

Für $k=3$: $\bigwedge_{\boldsymbol{y} \in \partial S} \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x} \in S}} \left(n_j(\boldsymbol{y})\, T_{ij}\, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{y})\, u_i(\boldsymbol{x})\right) = 0.$

Wir benutzen in dieser Arbeit jedoch zumeist einen anderen Lösungsbegriff, nämlich den Begriff der Hilbertraumlösung.

Die folgenden Identitäten (die für Funktionen und Gebiete gelten, die die Anwendung des Gaußschen Satzes gestatten) zeigen, wie dabei die Bilinearformen zu wählen sind:

$$\begin{aligned} &-\int_S \{\partial_j(C_{ijkl}\, \partial_k u_l) + \omega^2 \rho\, u_i\}\, \bar{v}_i\, d\boldsymbol{x} \\ &\quad = \int_S C_{ijkl}(\partial_k u_l)\overline{(\partial_j v_i)}\, d\boldsymbol{x} - \omega^2 (\rho\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_0 - \int_{\partial S} (n_j\, T_{ij}\, \boldsymbol{u})\, \bar{v}_i\, d\boldsymbol{x}, \end{aligned} \tag{1.2}$$ [2]

$$\int_S \partial_i \{n_i\, \beta\, u_j \bar{v}_j\}\, d\boldsymbol{x} = \int_{\partial S} \beta\, u_j \bar{v}_j\, d\boldsymbol{x}. \tag{1.3}$$

($\boldsymbol{n}$ und β seien hier stetig differenzierbare Fortsetzungen in $\bar{S}$ der zunächst nur auf ∂S definierten Funktionen $\boldsymbol{n}$ und β. Nur im Falle der dritten Randwertaufgabe, wo wir diese Fortsetzungen benötigen, setzen wir ∂S als C_2-Mannigfaltigkeit und $\beta \in C_1(\partial S)$ voraus.)

Wir führen ein:

$$\begin{aligned} B_0\colon\ & H_1(S) \times H_1(S) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto \int_S C_{ijkl}\, \partial_k u_l\, \overline{\partial_j v_i}\, d\boldsymbol{x} \\ S_\beta\colon\ & H_1(S) \times H_1(S) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto \int_S \partial_i \{n_i\, \beta\, u_j \bar{v}_j\}\, d\boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

Definition 2. $\boldsymbol{u} \in \mathring{H}_1(S)$ heißt *schwache Lösung zur ersten Randwertaufgabe des Systems* (0.1), falls gilt:

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in \mathring{H}_1} B_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \omega^2 (\rho\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_0 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_0.$$

---

2. $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})_0 := \int_S f_i(\boldsymbol{x})\, g_i(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$. Zur Definition von $\|\cdot\|_1$, $C(S)$, $C_k(S)$, $\mathring{C}_k(S)$, $H_0(S)$, $\mathring{H}_k(S)$, $H_k(S)$, $H_k^{\mathrm{loc}}(S)$ vgl. z.B. [1] oder [8].

Definition 3. $\boldsymbol{u} \in H_1(S)$ heißt *schwache Lösung zur zweiten* ($\beta=0$) *bzw. dritten* ($\beta \neq 0$) *Randwertaufgabe des Systems* (0.1), falls gilt:

$$\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in H_1} S_\beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + B_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \omega^2 (\rho\, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_0 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v})_0 .$$

Die Identitäten (1.2) und (1.3) zeigen, daß für glatten Rand und genügend oft differenzierbare Koeffizienten und Lösungen die Begriffe „klassische Lösung“ und „schwache Lösung“ äquivalent sind.

Die Randwertprobleme, die sich aus den Definitionen 2 und 3 ergeben, lassen sich mit bekannten Methoden (vgl. z.B. [4]) behandeln. Das grundlegende Problem ist dabei, für die zugehörige Bilinearform die Gårdingsche Ungleichung

$$\bigvee_{C_1 \in \mathbb{R}^+} \bigvee_{C_2 \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in \mathring{H}_1} B_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqq C_1 \|\boldsymbol{v}\|_1^2 - C_2 \|\boldsymbol{v}\|_0^2 \tag{1.4}$$

bzw.

$$\bigvee_{C_1 \in \mathbb{R}^+} \bigvee_{C_2 \in \mathbb{R}} \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in H_1} B_0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) + S_\beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \geqq C_1 \|\boldsymbol{v}\|_1^2 - C_2 \|\boldsymbol{v}\|_0^2 \tag{1.5}$$

herzuleiten.

Definition 4. $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt

(1)-*Gebiet*: $\Leftrightarrow$ S ist beschränkt, offen und zusammenhängend.

(2)-*Gebiet*: $\Leftrightarrow$ S ist (1)-Gebiet und ∂S besteht stückweise aus C_1-Mannigfaltigkeiten.

(3)-*Gebiet*: $\Leftrightarrow$ S ist (1)-Gebiet und ∂S C_2-Mannigfaltigkeit.

Für die k-te Randwertaufgabe gilt die Gårdingsche Ungleichung (1.4) bzw. (1.5), wenn S ein (k)-Gebiet ist. Dies wurde in [12] aus Ergebnissen von Friedrichs [5] geschlossen. Hieraus folgen die üblichen Sätze (vgl. z.B. [4]) über Existenz (Gültigkeit der Fredholmschen Alternative) und Regularität von schwachen Lösungen.

2. Das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit

In diesem zweiten vorbereitenden Abschnitt beweisen wir das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit für die Lösungen von (0.1) und schließen daraus die Eindeutigkeit der Cauchyschen Anfangswertaufgabe. Es sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet.

Satz 1. *Seien* $\lambda, \mu \in C_2(S)$, $\rho \in C_1(S)$. $\boldsymbol{u} \in H_3^{\mathrm{loc}}(S)$ *genüge in* S *dem System* (0.1) *mit* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$ *und verschwinde in einer offenen nichtleeren Teilmenge von* S. *Dann gilt* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ *in* S.

Beweis. Ausführlicher geschrieben lautet (0.1)

$$\partial_i(\lambda\, \partial_k u_k) + \partial_k(\mu\, \partial_i u_k) + \partial_k(\mu\, \partial_k u_i) + \omega^2 \rho\, u_i = 0. \tag{2.1}$$

Nach Voraussetzung besitzt u schwache Ableitungen bis zur Ordnung 3, und diese genügen fast überall der Gl. (2.1) sowie der aus ihr durch Differentiation hervorgehenden Gleichung

$$\partial_i \partial_i(\lambda \partial_k u_k)+\partial_i \partial_k(\mu \partial_i u_k)+\partial_i \partial_k(\mu \partial_k u_i)+\partial_i(\omega^2 \rho u_i)=0. \tag{2.2}$$

Mit $u_4:=\partial_k u_k \in H_2^{\mathrm{loc}}$ erhalten wir

$$\mu \Delta u_i=\tilde{L}_i(u_1, \ldots, u_4) \qquad i=1, \ldots, 3$$

und

$$(\lambda+2\mu) \Delta u_4=-2(\partial_k \mu) \Delta u_k+\tilde{L}_4(u_1, \ldots, u_4).$$

(Hier und im folgenden seien L_i und $\tilde{L}_i$ lineare Differentialoperatoren erster Ordnung mit beschränkten Koeffizienten.) Nach (0.3) erhalten wir insgesamt

$$\Delta u_i=L_i(u_1, \ldots, u_4), \qquad i=1, \ldots, 4. \tag{2.3}$$

In [10] wird im Falle nur einer Gleichung $\Delta v=L(v)$ mit Hilfe von Integralabschätzungen gezeigt, daß das Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit gilt. Ein modifizierter Schluß dieser Art führt für ein schwach gekoppeltes System der Form (2.3) zum gleichen Ergebnis.

Aus Satz 1 folgt

Satz 2. *Voraussetzungen:*

(i) $\boldsymbol{u} \in H_3^{\mathrm{loc}}(S) \wedge \Delta^* \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})+\omega^2 \rho(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ *für fast alle* $\boldsymbol{x} \in S$.

(ii) $\boldsymbol{y} \in \partial S \wedge \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

(iii) $\partial S \cap K(\varepsilon, \boldsymbol{y})$ *ist eine* C_∞*-Mannigfaltigkeit.*

(iv) $\boldsymbol{u} \in C_\infty(\bar{S} \cap K(\varepsilon, \boldsymbol{y}))$.

(v) $u_i(\boldsymbol{z})=n_j(\boldsymbol{z}) T_{ij} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z})=0$ *für* $\boldsymbol{z} \in \partial S \cap K(\varepsilon, \boldsymbol{y})$.

Behauptung. $\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$.

Beweis. Nach (v) gilt für $\boldsymbol{z} \in K(\varepsilon, \boldsymbol{y}) \cap \partial S$:

$$\partial_i u_l(\boldsymbol{z})=n_i(\boldsymbol{z}) \frac{\partial}{\partial n} u_l(\boldsymbol{z}).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} 0=n_j(\boldsymbol{z}) T_{ij} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{z}) &=\lambda n_i \partial_k u_k+\mu n_j \partial_i u_j+\mu n_j \partial_j u_i \\ &=(\lambda+\mu) n_i n_k \frac{\partial}{\partial n} u_k+\mu \frac{\partial}{\partial n} u_i . \end{aligned}$$

Die Matrix $\left(n_i n_k+\frac{\mu}{\lambda+\mu} \delta_{ik}\right)$ ist nichtsingulär, denn 0 ist zweifacher Eigenwert zu $(n_i n_k)$, und für den dritten λ_3 folgt $\lambda_3=\operatorname{Spur}(n_i n_k)=1 \neq -\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ (vgl. (0.3)). Also gilt $\frac{\partial}{\partial n} u_l(\boldsymbol{z})=0$ und damit $\nabla u_l(\boldsymbol{z})=\mathbf{0}$ für $\boldsymbol{z} \in \partial S \cap K(\varepsilon, \boldsymbol{y})$, woraus sich $\partial_l\,\partial_i\,u_j(z)=n_l(z)\,n_i(z)\dfrac{\partial^2}{\partial n^2}\,u_j(z)$ ergibt. Hieraus folgt nach (iv) und (i)

$$0=\mu\,\frac{\partial^2}{\partial n^2}\,u_i+(\lambda+\mu)\,n_i\,n_k\,\frac{\partial^2}{\partial n^2}\,u_k.$$

Wiederum zeigt sich $\dfrac{\partial^2}{\partial n^2}\,u_i(z)=0$, also $\partial_i\,\partial_j\,u_k(z)=0$. Daher ist

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}^*\colon\quad & S\cup K(\varepsilon,\boldsymbol{y})\longrightarrow\mathbb{C}^3\\ & \boldsymbol{x}\longmapsto\begin{cases}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) & \text{für } \boldsymbol{x}\in S\\ \boldsymbol{0} & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

eine Funktion aus $H_3^{\mathrm{loc}}(S\cup K(\varepsilon,\boldsymbol{y}))$, die fast überall dem System (0.1) genügt und in $K(\varepsilon,\boldsymbol{y})-\bar{S}$ verschwindet. Aus Satz 5 folgt also $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$.

3. Außenraumaufgaben: Formulierung und Eindeutigkeitssatz

Für die in den nächsten beiden Abschnitten behandelten Außenraumaufgaben machen wir schon an dieser Stelle die folgenden Voraussetzungen:

(3.1) S sei ein Gebiet und $G:=\mathbb{R}^3-\bar{S}$ beschränkt. Bei Aussagen über die k-te Außenraumaufgabe setzen wir G als (k)-Gebiet voraus.

(3.2) $\omega^2\in\mathbb{R}^+$.

(3.3) $\mu(\boldsymbol{x})=\mu_0$, $\lambda(\boldsymbol{x})=\lambda_0$, $\rho(\boldsymbol{x})=\rho_0$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ für $|\boldsymbol{x}|>R_0$.

(3.4) $\lambda,\mu\in C_4(S)$ und $\rho\in C_2(S)$. (Dann gilt nach bekannten Regularitätssätzen [4] $\boldsymbol{u}\in H_3^{\mathrm{loc}}(S)$ für Lösungen zu $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$.)

Es ist bekannt, daß nun zu den üblichen Forderungen an die Lösung $\boldsymbol{u}$ noch eine Bedingung hinzutreten muß, die das Verhalten von $\boldsymbol{u}$ für große $|\boldsymbol{x}|$ charakterisiert. Wegen (3.3) können wir diese „Ausstrahlungsbedingung" aus [7] übernehmen.

Definition 5. $\boldsymbol{u}\colon\bar{S}\longrightarrow\mathbb{C}^3$ *erfüllt die Ausstrahlungsbedingung:* $\Leftrightarrow$

(i) $\bigvee_{R_0\in\mathbb{R}}\boldsymbol{u}\in C_4(\mathbb{R}^3-K(R_0,\boldsymbol{0}))$.

(ii) Für $\boldsymbol{u}^p:=-\rho_0\,\omega^2(\lambda_0+2\mu_0)^{-1}\,\nabla(\nabla\boldsymbol{u})$ und $\boldsymbol{u}^s:=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}^p$ gelten für $|\boldsymbol{x}|\to\infty$:

$$\boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{x})=o(1),\tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{x})-i\,\rho_0^{1/2}\,\omega(\lambda_0+2\mu_0)^{-1/2}\,\boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{x})=o(|\boldsymbol{x}|^{-1}),\tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\,\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{x})-i\,\rho_0^{1/2}\,\omega\,\mu_0^{-1/2}\,\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{x})=o(|\boldsymbol{x}|^{-1}).\tag{3.7}$$

Definition 6. $\boldsymbol{u}: \bar{S} \to \mathbb{C}^3$ heißt *klassische Lösung der k-ten Außenraumaufgabe*, falls u neben den Bedingungen aus Definition 1 die Ausstrahlungsbedingung erfüllt.

Wir lassen uns wieder von dem Prinzip leiten, daß genügend oft differenzierbare schwache Lösungen auch klassische Lösungen sein sollten, und werden auf folgende Definitionen geführt:

Definition 7. $\boldsymbol{u}$: $S \longrightarrow \mathbb{C}^3$ heißt *schwache Lösung zur ersten Außenraumaufgabe*, falls gilt:

(i) $\bigwedge_{\zeta \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^3)} \zeta\, \boldsymbol{u} \in \mathring{H}_1(S)$.

(ii) $\bigwedge_{\boldsymbol{w} \in \mathring{H}_1} \bigwedge_{\zeta \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^3)} B_0(\boldsymbol{u}, \zeta\, \boldsymbol{w}) - \omega^2 (\rho\, \boldsymbol{u}, \zeta\, \boldsymbol{w})_0 = (\boldsymbol{f}, \zeta\, \boldsymbol{w})_0$.

(iii) $\boldsymbol{u}$ erfüllt die Ausstrahlungsbedingung.

Definition 8. $\boldsymbol{u}$: $S \to \mathbb{C}^3$ heißt *schwache Lösung zur zweiten* ($\beta = 0$) *bzw. dritten* ($\beta \neq 0$) *Randwertaufgabe*, falls gilt:

(i) $\bigwedge_{\zeta \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^3)} \zeta\, \boldsymbol{u} \in H_1(S)$.

(ii) $\bigwedge_{\boldsymbol{w} \in \mathring{H}_1} \bigwedge_{\zeta \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^3)} B_0(\boldsymbol{u}, \zeta\, \boldsymbol{w}) + S_\beta(\boldsymbol{u}, \zeta\, \boldsymbol{w}) - \omega^2 (\rho\, \boldsymbol{u}, \zeta\, \boldsymbol{w})_0 = (\boldsymbol{f}, \zeta\, \boldsymbol{w})_0$.

(iii) $\boldsymbol{u}$ erfüllt die Ausstrahlungsbedingung.

Da wir im folgenden alle drei Außenraumaufgaben gleichzeitig behandeln wollen, schreiben wir von nun an für B_0 bzw. $B_0 + S_\beta$ kurz B. Soll in diesen Integralen nur über einen Teilbereich Z von S integriert werden, so deuten wir dies durch einen Index an: $B_Z(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Satz 3. *Unter den Voraussetzungen* (3.1)–(3.4) *haben alle drei Außenraumaufgaben höchstens eine schwache Lösung.*

Beweis. Sei $\boldsymbol{u}$ eine schwache Lösung zu $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$. Wir haben $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ zu zeigen. Hierzu bilden wir

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}; \tau) := \operatorname{Re}\{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, e^{-i\omega\tau}\}$$

und definieren für $R \geqq R_0 + 1$

$$K_R := K(R, \boldsymbol{0}), \qquad Z_R := K_R - \bar{G}$$

und

$$E'(R, \tau) := \tfrac{1}{2} \int_{Z_R} \partial_\tau [C_{ijkl} (\partial_j v_i)(\partial_k v_l) + \rho (\partial_\tau v_i)(\partial_\tau v_i)]\, d\boldsymbol{x}$$
$$= \int_{Z_R} [C_{ijkl} (\partial_j v_i)(\partial_k \partial_\tau v_l) + \rho (\partial_\tau^2 v_i)(\partial_\tau v_i)]\, d\boldsymbol{x}.$$

($E'(R, \tau)$ gibt die zeitliche Änderung der Energie in Z_R an, $\partial_\tau := \partial/\partial\tau$.)

Für $\zeta \in \mathring{C}_\infty(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\zeta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\boldsymbol{x}| \leqq R_0 \\ 0 & \text{für } |\boldsymbol{x}| \geqq R_0 + \frac{1}{2} \end{cases}$$

erhalten wir

$$E'(R,\tau)=\operatorname{Re}\{e^{-i\omega\tau}[\int_{Z_R} C_{ijkl}(\partial_j u_i)(\partial_k[\zeta\,\partial_\tau v_l])\,d\boldsymbol{x}-\omega^2\int_{Z_R}\rho\, u_i(\zeta\,\partial_\tau v_i)\,d\boldsymbol{x}]\}$$
$$+\int_{Z_R} C_{ijkl}(\partial_j v_i)\,\partial_k[\{1-\zeta\}\,\partial_\tau v_l]\,d\boldsymbol{x}-\omega^2\rho_0\int_{Z_R} v_i\{1-\zeta\}(\partial_\tau v_i)\,d\boldsymbol{x}.$$

Auf die letzten beiden Integrale wenden wir den Gaußschen Satz an. Wir beachten, daß die zugehörigen Integranden nur in solchen Punkten von Null verschieden sind, in denen λ, μ und ρ konstant sind. Nach bekannten Regularitätssätzen [4] gilt dort $\boldsymbol{u}\in C_\infty$ und $(\Delta^*+\omega^2\rho_0)\,\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. Für die ersten beiden Integrale beachten wir Definition 7 (ii) bzw. 8 (ii) und erhalten insgesamt:

(3.8) $$\tilde{E}'(R,\tau)=\int_{\partial K_R}(n_j\, T_{ij}\,\boldsymbol{v})\,\partial_\tau v_i\,d\boldsymbol{x}$$

mit

$$\tilde{E}'(R,\tau):=E'(R,\tau)+\operatorname{Re}\{e^{-i\omega\tau}S_\beta(\boldsymbol{u},\zeta\,\partial_\tau\boldsymbol{v})\}$$

und $\beta=0$ im Falle der ersten und zweiten Randwertaufgabe. Nach Definition von $\boldsymbol{v}$ gilt

(3.9) $$\tilde{E}'(R,0)=-\tilde{E}'\left(R,\frac{\pi}{2\omega}\right).$$

Nach [6] (S. 59; 3.62) folgt allein aus der Ausstrahlungsbedingung für $R\to\infty$:

(3.10)
$$\begin{aligned}&\int_{\partial K_R}(n_j\,T_{ij}\,\boldsymbol{v})(\partial_\tau v_i)\,d\boldsymbol{x}\\ &\quad=\rho_0\,\omega^2(\lambda_0+2\mu_0)^{1/2}\int_{\partial K_R}(\operatorname{Re}\{\boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{x})\,e^{i\omega\tau}\})^2\,d\boldsymbol{x}\\ &\quad\quad+\rho_0\,\omega^2\,\mu_0^{1/2}\int_{\partial K_R}(\operatorname{Re}\{\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{x})\,e^{i\omega\tau}\})^2\,d\boldsymbol{x}+o(1)\\ &\quad\geqq o(1).\end{aligned}$$

Aus (3.8)–(3.10) ergibt sich $\tilde{E}'(R,0)=o(1)$ und damit nach (3.10):

(3.11) $$\int_{\partial K_R}|\boldsymbol{u}^p|^2\,d\boldsymbol{x}=o(1)$$

und

(3.12) $$\int_{\partial K_R}|\boldsymbol{u}^s|^2\,d\boldsymbol{x}=o(1).$$

Andererseits erhält man nach kurzer Rechnung aus (0.1):

$$\Delta\,\boldsymbol{u}^p+\rho_0\,\omega^2(\lambda_0+2\mu_0)^{-1}\,\boldsymbol{u}^p=\boldsymbol{0}\quad\text{und}\quad\Delta\,\boldsymbol{u}^s+\rho_0\,\omega^2\,\mu_0^{-1}\,\boldsymbol{u}^s=\boldsymbol{0}.$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz von Kupradse und Rellich für Lösungen der Helmholtzschen Schwingungsgleichung (vgl. [6] p. 60, Theorem 2; [8] S. 164, Lemma 7.35) folgt hieraus $\boldsymbol{u}^p(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{u}^s(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, also $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ für $|\boldsymbol{x}|\geqq R_0$. Wegen (3.4) folgt aus dem Prinzip der eindeutigen Fortsetzbarkeit (Satz 1) $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$. q.e.d.

4. Außenraumaufgaben: Existenzsatz

Wie schon in der Einleitung erwähnt, benötigen wir auch Integralgleichungsmethoden zum Beweis des Existenzsatzes im Außenraum. Wir geben daher zunächst einige Ergebnisse aus diesem Gebiet an. Diese sind entweder Sätze aus [6] und [11] oder lassen sich – wie in [12] beschrieben – aus diesen Sätzen herleiten:

Es sei K ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ mit zusammenhängendem Komplement und ∂K eine C_∞-Mannigfaltigkeit. λ, μ und ρ seien in ganz $\mathbb{R}^3$ konstant. Dann gibt es zu jedem $\boldsymbol{h} \in L_2(\partial K)$ zwei Funktionen $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{x})$, die sich in der Form

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^i \int_{\partial K} K_{ik}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, h_k(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{v}; \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^i \int_{\partial K} L_{ik}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, h_k(\boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$$

darstellen lassen. Für

$$K_{ik}, L_{ik}\colon \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - D \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad D := \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$$

gelten

(4.1) $$K_{ik},\ L_{ik} \in C_\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 - D),$$

(4.2) $$\bigwedge_{\boldsymbol{x} \notin \partial K} (\Delta^* + \rho_0\, \omega^2)\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{x}) = (\Delta^* + \rho_0\, \omega^2)\, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0},$$

(4.3) $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ genügen der Ausstrahlungsbedingung.

$\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{W}$ erfüllen analoge Sprungrelationen wie die Potentiale zur Gleichung $\Delta u = 0$. Mit ihrer Hilfe lassen sich Randwertaufgaben auf Integralgleichungen zurückführen. Wir geben nun zwei diesbezügliche Lemmata ohne Beweis an (vgl. [6, 11, 12]):

Lemma 1. *Zu jedem $\boldsymbol{r} \in C(\partial K)$ gibt es genau eine klassische Lösung $\boldsymbol{w}$ der Außenraumaufgabe in $\mathbb{R}^3 - K$ zu $(\Delta^* + \rho_0\, \omega^2)\, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{w}|_{\partial K} = \boldsymbol{r}$. Dabei gilt:*

(i) *$\boldsymbol{w}$ hat die Form $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{x}) + i\, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{h} \in C(\partial K)$.*

(ii) *$\boldsymbol{h}$ bestimmt sich aus der eindeutig lösbaren Integralgleichung*

(4.4) $$i\, \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{y}) + i\, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y} \in \partial K.$$

(iii) *Die durch* (ii) *definierte Abbildung $\boldsymbol{r} \longmapsto \boldsymbol{h}$ ist stetig von $C(\partial K)$ in $C(\partial K)$.*

(iv) (4.4) *ist auch für $\boldsymbol{r} \in L_2(\partial K)$ in $L_2(\partial K)$ eindeutig lösbar. Die hierdurch definierte Abbildung ist stetig von $L_2(\partial K)$ in $L_2(\partial K)$.*

(v) *Für $\boldsymbol{r} \in C_\alpha(\partial K)$ [3] gilt gleichmäßig bezüglich $\boldsymbol{y} \in \partial K$:*

$$|\boldsymbol{w}(\boldsymbol{y} + \rho\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})| = O(\rho^\alpha)$$

$$|T_{ij}\, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{y} + \rho\, \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}))| = O(\rho^{-1+\alpha}).$$

---

3. $C_\alpha(\partial K)$ ist der Raum der hölderstetigen Funktionen mit Hölderexponenten α, ausgestattet mit der Norm

$$\|\boldsymbol{r}\|_\alpha := \sup_{\boldsymbol{y} \in \partial K} |\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})| + \sup_{\substack{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \partial K \\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}}} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^{-\alpha}\, |\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})|.$$

Lemma 2. *Zu jedem $g \in C_{1/2}(\partial K)$ gibt es genau eine klassische Lösung v der Innenraumaufgabe in K zu*

$$(\Delta^* + \omega^2 \rho_0)\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}, \qquad \lim_{\substack{x \to y \in \partial K \\ x \in K}} \left(n_j(y)\, T_{kj}\, \boldsymbol{v}(x) + i\, v_k(x)\right) = g_k(y).$$

(i) *$\boldsymbol{v}$ hat die Form $\boldsymbol{v}(x) = V(\boldsymbol{h}; x)$.*

(ii) *$\boldsymbol{h}$ ist durch $\boldsymbol{g}$ eindeutig bestimmt und die Abbildung $\boldsymbol{g} \longmapsto \boldsymbol{h}$ ist stetig von $C_{1/2}(\partial K)$ in $C_{1/2}(\partial K)$.*

(iii) *Gleichmäßig bezüglich $y \in \partial K$ gilt*

$$\lim_{\rho \to 0-} \left[n_j(y)\, T_{kj}\, \boldsymbol{v}(y + \rho\, \boldsymbol{n}(y)) + i\, v_k(y + \rho\, \boldsymbol{n}(y))\right] = g_k(y).$$

Schließlich benötigen wir zur Vorbereitung des Existenzsatzes noch ein Lemma über spezielle Hilbertraumlösungen. Es sei $K := K(R, \boldsymbol{0})$ mit $R > R_0$. Wir suchen in $Z := K - \bar{G}$ schwache Lösungen zu folgenden Randbedingungen:

(i) $(n_j\, T_{kj}\, \boldsymbol{v} + i\, v_k)|_{\partial K} = 0$.

(ii) Auf ∂G soll $\boldsymbol{v}$ der Randbedingung aus der jeweils zu lösenden Außenraumaufgabe genügen.

Sei $\overset{(\circ)}{C}_\infty(Z) := \{\boldsymbol{u} \in C_\infty(\bar{Z}) | \operatorname{Trg} \boldsymbol{u} \cap \partial G = \emptyset\}$[4], und $\overset{(\circ)}{H}_1(Z)$ die Vervollständigung von $\overset{(\circ)}{C}_\infty(Z)$ in der Norm $\|\cdot\|_1$. Liegt auf ∂G die erste Randwertaufgabe vor, so suchen wir die Lösung in $\overset{(\circ)}{H}_1(Z)$, andernfalls in $H_1(Z)$:

Definition 9. $\boldsymbol{v} \in \overset{(\circ)}{H}_1(Z)$ bzw. $H_1(Z)$ heißt *Z-Lösung zu ω^2 und $f \in H_0(Z)$* $:\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{u} \in \overset{(\circ)}{H}_1(Z) \text{ bzw. } H_1(Z)} B_Z(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) + i\, S(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \omega^2 (\rho\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})_0 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})_0. \tag{4.5}$$

Dabei sei $S(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) := \int_Z \partial_i [n_i\, \boldsymbol{v}\, \bar{\boldsymbol{u}}]\, dx$ und $\boldsymbol{n}$ eine Fortsetzung der Flächennormale an ∂K. Diese und, falls sie in $B(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ auftritt, die Fortsetzung der Normale an ∂G wählen wir so, daß sie auf ∂G bzw. ∂K verschwinden. Dann zeigt man leicht, daß genügend oft differenzierbare Z-Lösungen auch klassische Lösungen sind. Weiterhin gilt dann nach dem Gaußschen Satz für eine Z-Lösung $\boldsymbol{v}$:

$$\bigwedge_{\boldsymbol{u} \in \overset{(\circ)}{H}_1 \text{ bzw. } H_1} \operatorname{Trg} \boldsymbol{u} \cap \partial K = \emptyset \Rightarrow B_Z(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - \omega^2 (\rho\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})_0 = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{u})_0. \tag{4.6}$$

Lemma 3. *Zu jedem $\omega^2 \in \mathbb{R}$ und jedem $f \in H_0(Z)$ existiert genau eine Z-Lösung $\boldsymbol{v} \in \overset{(\circ)}{H}_1(Z)$ bzw. $H_1(Z)$. Die hierdurch definierte Abbildung ist stetig von $H_0(Z)$ in $\overset{(\circ)}{H}_1(Z)$ bzw. $H_1(Z)$.*

---

4. $\operatorname{Trg} \boldsymbol{u} := \overline{\{x \in \mathbb{R}^3 | \boldsymbol{u}(x) \neq \boldsymbol{0}\}}$.

Beweis. Für diese spezielle Innenraumaufgabe gilt wieder die Fredholmsche Alternative. Wir brauchen also nur zu zeigen, daß Z-Lösungen $\boldsymbol{v}$ zu $\omega^2 \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$ verschwinden. Nach (3.3) und (3.4) und bekannten Regularitätssätzen [4] erfüllt $\boldsymbol{v}$ die Voraussetzungen (i)–(iv) von Satz 2 mit $\boldsymbol{y} \in \partial K$. (v) ist ebenfalls erfüllt; denn nach Konstruktion gilt zunächst $n_j(z)\, T_{kj}\, \boldsymbol{v}(z) + i\, v_k(z) = 0$ für $z \in \partial K$. Weiterhin folgt aus (4.5) für $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$ $B_Z(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) + i\, S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) - \omega^2(\rho\, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})_0 = 0$, also $S(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=0$ und damit $\boldsymbol{v}|_{\partial K}=\mathbf{0}$. Aus Satz 2 ergibt sich $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. q.e.d.

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage, den Existenzsatz für Außenraumaufgaben zu beweisen.

Satz 4. *Sei $\boldsymbol{f} \in H_0(S)$. Die Voraussetzungen* (3.1)–(3.4) *seien erfüllt. Dann besitzt jede der drei Außenraumaufgaben genau eine schwache Lösung zu $\boldsymbol{f}$.*

Beweis. Wir wählen Kugeln $K_i := K(R_i, \mathbf{0})$ mit $R_2 > R_1 > R_0$. Zu $\boldsymbol{g} \in C_{1/2}(\partial K_2)$ konstruieren wir $\boldsymbol{v}: K_2 - \bar{G} \longrightarrow \mathbb{C}^3$, das im klassischen Sinn der Randbedingung $n_j\, T_{kj}\, \boldsymbol{v} + i\, v_k = g_k$ auf ∂K_2 und im schwachen Sinn dem System (0.1) und der auf ∂G gestellten Randbedingung genügt. Dies ist nach den Lemmata 2 und 3 möglich. Nach Lemma 1 gibt es eine klassische Lösung $\boldsymbol{w}$ der ersten Außenraumaufgabe in $\mathbb{R}^3 - \bar{K}_1$ zur Randbedingung $\boldsymbol{w}|_{\partial K_1} = \boldsymbol{v}|_{\partial K_1}$. Ihre Randwerte $(\boldsymbol{e}^k\, n_j\, T_{kj}\, \boldsymbol{w} + i\, \boldsymbol{w})|_{\partial K_2}$ lassen sich in der Form $S\boldsymbol{f} + T\boldsymbol{g}$ mit linearen Operatoren S: $H_0(K_0 - \bar{G}) \longrightarrow C_{1/2}(\partial K_2)$ und T: $C_{1/2}(\partial K_2) \longrightarrow C_{1/2}(\partial K_2)$ schreiben. Sei $\boldsymbol{g}$ Lösung der Gleichung $\boldsymbol{g} = T\boldsymbol{g} + S\boldsymbol{f}$. Die zugehörigen Funktionen $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ genügen dann auf ∂K_i $(i=1,2)$ der gleichen Randbedingung und in $K_2 - \bar{K}_1$ dem System (0.1). Nach dem in Lemma 3 bewiesenen Eindeutigkeitssatz folgt $\boldsymbol{v}|_{K_2 - \bar{K}_1} = \boldsymbol{w}|_{K_2 - \bar{K}_1}$. $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ sind also dann Fortsetzungen voneinander und ergeben zusammen eine Lösung der Außenraumaufgabe. Bleibt zu zeigen, daß die Gleichung $\boldsymbol{g} = T\boldsymbol{g} + S\boldsymbol{f}$ für alle $\boldsymbol{f}$ lösbar ist. Nach Schlüssen, die ähnlich wie in [7] verlaufen, läßt sich beweisen, daß T vollstetig ist [12]. Daher genügt es, zu zeigen: $T\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} \Rightarrow \boldsymbol{g} = \mathbf{0}$. Lösungen zu einem solchen $\boldsymbol{g}$ sind aber nach obigen Überlegungen Eigenlösungen der Außenraumaufgabe und müssen nach Satz 3 verschwinden. Hieraus folgt $\boldsymbol{g} = \mathbf{0}$. q.e.d.

Literatur

1. Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton: D. van Nostrand Comp. 1965.
2. Bernstein, I. S.: On the unique continuation problem for elliptic partial differential equations. J. Math. Mech. **10**, 579–606 (1961).
3. Calderón, A. P.: Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. Amer. J. Math. **80**, 16–36 (1958).
4. Fichera, G.: Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems. Lecture Notes in Mathematics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1965.
5. Friedrichs, K. O.: On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Ann. of Math. **48**, 441–471 (1947).
6. Sneddon, I. N., and R. Hill (Hrsg.): Progress in solid mechanics III. Dynamical problems in elasticity by V. D. Kupradse. Amsterdam: North-Holland 1963.
7. Leis, R.: Zur Monotonie der Eigenwerte selbstadjungierter elliptischer Differentialgleichungen. Math. Z. **96**, 26–32 (1967).
8. – Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Mannheim: Bibliographisches Institut 1967.

9. Pliš, A.: A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere. Commun. Pure Appl. Math. **14**, 599 – 617 (1961).
10. Protter, M. H.: Unique continuation for elliptic equations. Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 81 – 91 (1960).
11. Wacker, H.-M.: Existenz- und Eindeutigkeitssätze für die erste und zweite Randwertaufgabe des Außenraumproblems der Gleichung elastischer Schwingungen. Bonner Math. Schriften 31, Bonn 1968.
12. Weck, N.: Zur mathematischen Theorie stationärer Schwingungen elastischer Medien. Bonner Math. Schriften 35, Bonn 1969.

Dr. Norbert Weck
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Bonn
5300 Bonn, Wegelerstraße 10

(Eingegangen am 6. Februar 1969)