Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0108|log43

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

X, 82

A 21267 D

Mathematische Zeitschrift

Herausgegeben von **H. Wielandt,** Tübingen

unter Mitwirkung von **B. Eckmann,** Zürich
E. Heinz, Göttingen
R. Nevanlinna, Helsinki
K. Zeller, Tübingen

Wissenschaftlicher Beirat H. Kneser, Tübingen
W. Magnus, New York
O. Perron, München
G. Pickert, Gießen

Band 108 · Heft 4 · 1969

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Z. 3. März 1969

4186

Die **„Mathematische Zeitschrift"** wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp, E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

„Mathematische Zeitschrift" was founded in 1918 and edited by *L. Lichtenstein* in cooperation with *K. Knopp, E. Schmidt* and *I. Schur*; after Lichtenstein's death, 1933, it was edited by *K. Knopp*. The Editorial Committee was increased to include *E. Kamke* and *F. K. Schmidt* in 1933, *R. Nevanlinna* in 1936 and *H. Wielandt* in 1950. The latter became Managing Editor in 1952.

*

Die Zeitschrift erscheint, um eine rasche Publikation zu ermöglichen, in einzelnen Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Ein Band besteht im allgemeinen aus 5 Heften. Der Preis eines Bandes beträgt DM 96,—.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht auch das Recht der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Von jeder Arbeit werden 75 Sonderdrucke kostenlos zur Verfügung gestellt, weitere können zum Selbstkostenpreis bezogen werden.

In the interest of speedy publications, this journal is issued at frequent intervals according to the material received. As a rule five numbers constitute one volume. The price is DM 96.— per volume.

"Mathematische Zeitschrift" is devoted primarily to pure mathematics; papers on theoretical physics and astronomy may be accepted if they present interesting mathematical results. Reviews, problems etc. will not be published.

It is incumbent upon the author to submit no manuscript which has been or will be published elsewhere either at home or abroad. Unless special permission has been granted by the publishers, no photographic reproductions, microfilms, microphotos, or other reproductions of a similar nature may be made of the issues or of individual contributions contained therein or of extracts therefrom.

75 reprints of each paper are provided free of charge; additional copies may be ordered at cost price.

Manuskripte nehmen entgegen/Manuscripts may be sent to:

H. Wielandt, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität
B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule
E. Heinz, 34 Göttingen, Math. Inst. d. Universität
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Computing Center, University of Helsinki, Töölönkatu
K. Zeller, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität

Springer-Verlag

69 Heidelberg 1
Postfach 1780
Fernsprecher 49101
Fernschreibnummer 04-61723

1 Berlin 33
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher 830301
Fernschreibnummer 01-83319

Springer-Verlag
New York Inc.
175 Fifth Avenue
New York, N.Y. 10010

Math. Z. 108, 253–254 (1969)

A Note on the Global Dimension of Ore Extensions

N. S. GOPALA KRISHNAN

1. Introduction

Let S be a ring with unit element and let R be the non-commutative polynomial ring in one variable x over S with respect to a derivation d of S as defined in [5]. The object of this note is to show that if the characteristic of S is a prime $p>0$, and d satisfies a suitable non-trivial p-polynomial, then l.gl.dim $R=1+$l.gl.dim S. This generalises a result proved in [3] where it has been shown that l.gl.dim $R=1+$l.gl.dim S when d satisfies a relation $d^p=0$. For preliminaries on Ore-extensions we refer to [5].

2. Global Dimension

Before proving the main result we recall two preliminary Lemmas.

Lemma 1. *Let R' be a ring and S a subring of R' such that S is a left S-direct summand of R' and R' is S flat as a right S module. Then* l.gl.dim $R' \geqq$ l.gl.dim S.

Proof. For a proof of the Lemma see [6], p. 109.

Lemma 2. *Let S be a ring of characteristic $p>0$, a prime and d a derivation of S. Assume that d satisfies a monic p-polynomial $f(t)$ whose coefficients are in the kernel of d and contained in the centre of S. If R is the non-commutative polynomial ring in one variable x over S with respect to d then $f(x)$ is in the centre of R.*

Proof. Let d satisfy the monic polynomial

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot t^{p^i},$$

where a_i are in the centre of S and $da_i=0$.

Since

$$x^n \cdot a=\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} d^j a \cdot x^{n-j}, \qquad a \in S$$

and since characteristic $S=p$, a prime, it follows that

$$x^{p^i} \cdot a - a \cdot x^{p^i}=d^{p^i} a.$$

As the coefficients a_i are in the centre of S,

$$f(x)\cdot a - a\cdot f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot(x^{p^i}\cdot a - a\cdot x^{p^i}), \qquad a\in S$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i\cdot d^{p^i}a$$

$$= 0.$$

Thus $f(x)$ commutes with elements of S. Moreover since $da_i=0$, $f(x)$ commutes with x and $f(x)$ is in the centre of R.

Theorem. *Let S be a ring of characteristic $p>0$, a prime, and let d be a derivation of S such that d satisfies a monic p-polynomial whose coefficients are in the kernel of d and contained in the centre of S. If R is the non-commutative polynominal ring in one variable x over S with respect to d, then* l.gl.dim $R=$ $1+$l.gl.dim S.

Proof. If d satisfies the monic polynomial

$$f(t)=\sum_{i=0}^{n} a_i t^{p^i},$$

then by Lemma 2, $f(x)$ is in the centre of R. Moreover since $\deg f(x)>0$, $f(x)$ can neither be a unit nor a zero divisor. If R' is the quotient ring $R/(f(x))$, then by a theorem of Kaplansky [4] l.gl.dim $R\geqq 1+$l.gl.dim R'. Since f is monic $1, x, \ldots, x^m$ form a S base of R' for some $m\geqq 0$ and the conditions of Lemma 1 are satisfied for the ring R' and the subring S and hence l.gl.dim $R'\geqq$ l.gl.dim S.

Thus we have l.gl.dim $R\geqq 1+$l.gl.dim S.

Since l.gl.dim $R\leqq 1+$l.gl.dim S always [2], it follows that l.gl.dim $R=$ $1+$l.gl.dim S.

I am thankful to Dr. R. Sridharan for helpful suggestions.

References

1. Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton University Press 1956.
2. Gopala Krishnan, N.S.: On some filtered rings. Proc. Indian Acad. Sci. **56**, 148–154 (1962).
3. – A note on global dimension. Proc. Indian Acad. Sci. **58**, 250–253 (1963).
4. Kaplansky, I.: Homological dimension of rings and modules. Mimeographed Notes. University of Chicago 1959.
5. Ore, O.: Theory of non-commutative polynomials. Annals of Math. **34**, 480–508 (1933).
6. Pavaman Murthy, M., and R. Sridharan: On the global dimension of some algebras. Math. Zeitschr. **81**, 108–111 (1963).

Dr. N.S. Gopala Krishnan
Department of Mathematics
Poona University
Poona-7, India

(Received August 9, 1968)

Math. Z. 108, 255–268 (1969)

Isometrien über semilokalen Ringen

MANFRED KNEBUSCH

Einleitung

Witt bewies 1936 in etwas anderer Formulierung den folgenden für die Theorie der quadratischen Formen grundlegenden Satz ([16]): Ist E ein nicht entarteter quadratischer Raum über einem Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik und F beliebiger Teilraum von E, so läßt sich jede (injektive) Isometrie von F in E zu einem Automorphismus von E fortsetzen. Dasselbe wurde 1940 von Arf über Körpern der Charakteristik 2 gezeigt ([1]). Einen anderen, sehr eleganten Beweis des Wittschen Satzes für beliebige Charakteristik gibt Chevalley in seinem Buch über Spinoren an ([5], S. 16).

In dieser Note studieren wir die Fortsetzung von Isometrien über semilokalen Ringen, d.h. über kommutativen Ringen mit Einselement, die nur endlich viele maximale Ideale besitzen. Dabei benutzen wir die folgenden, über einem beliebigen kommutativen Ring A mit Einselement sinnvollen Begriffe:

Definition 0.1. Ein *quadratischer Raum* ist ein projektiver endlich erzeugter A-Modul E, versehen mit einer quadratischen Form q, d.h. einer Abbildung $q: E \to A$, für die gilt:

a) $q(\lambda x)=\lambda^2 q(x)$ $(\lambda \in A, x \in E)$.

b) $B(x, y) := q(x+y)-q(x)-q(y)$ ist als Funktion von $(x, y) \in E \times E$ eine (symmetrische) Bilinearform.

An Stelle von „quadratischer Raum" sagen wir oft kurz „Raum". Die quadratischen bzw. bilinearen Formen aller auftretenden Räume bezeichnen wir unterschiedslos mit q bzw. B, solange dadurch keine Verwirrung entsteht.

Definition 0.2. Ein quadratischer Raum E heiße *nicht entartet*, falls die durch seine Bilinearform induzierte lineare Abbildung von E in den Dualraum $E^* = \mathrm{Hom}_A(E, A)$ bijektiv ist.

Definition 0.3. Ein *Teilraum* eines quadratischen Raumes E ist ein direkter Summand F des Moduls E, versehen mit der eingeschränkten quadratischen Form $q|F$. Mit $F^\perp$ bezeichnen wir den Modul aller $x \in E$ mit $B(x, F)=0$. Ist E oder F nicht entartet, so ist $F^\perp$ wieder Teilraum von E (s. § 1).

Definition 0.4. Ein Teilraum F von E heißt *totalisotrop*, falls $q(F)=0$ ist. E heißt *isotrop*, falls E von Null verschiedene totalisotrope Teilräume besitzt, sonst *anisotrop*.

Definition 0.5. Eine *Isometrie* von einem Raum F in einen Raum G ist eine injektive lineare Abbildung $\varphi: F \to G$ mit $q(\varphi(x))=q(x)$ für alle $x \in F$, deren

Bild wieder Teilraum von G ist, also ein Isomorphismus von F auf einen Teilraum F_1 von G, komponiert mit der Inklusion von F_1 in G.

N.B. Ist F nicht entartet, so ist jede mit den quadratischen Formen von F und G verträgliche lineare Abbildung $\varphi: F \to G$ eine Isometrie.

Definition 0.6. Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A. Wir nennen zwei Isometrien φ, ψ von F in G zueinander *kongruent* mod $\mathfrak{a}$ und schreiben $\varphi \equiv \psi \bmod \mathfrak{a}$, wenn φ und ψ dieselbe Isometrie des Raumes $F/\mathfrak{a}F$ über $A/\mathfrak{a}$ in $G/\mathfrak{a}G$ induzieren.

Die Automorphismengruppe eines Raumes E über A bezeichnen wir mit $O(E)$, den Normalteiler der $\sigma \in O(E)$ mit $\sigma \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ mit $O(E, \mathfrak{a})$.

Jetzt ist es möglich, das in dieser Note hauptsächlich betrachtete Problem zu formulieren:

Fortsetzungsproblem. *Sei E quadratischer Raum über einem kommutativen Ring A mit Einselement, F ein Teilraum von E, $\varphi: F \to E$ eine Isometrie, die modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ von A zur Inklusion von F in E kongruent ist. Wann läßt sich φ zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a})$ fortsetzen?*

Darauf können wir die folgenden Antworten geben:

(0.1) **Satz.** *Sei F nicht entartet. Dann läßt sich φ sicherlich unter jeder der folgenden Voraussetzungen zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a})$ fortsetzen:*

a) *$\mathfrak{a}$ ist im Jacobsonradikal $\mathfrak{r}$ von A enthalten.*

b) *A ist lokal.*

c) *A ist semilokal. $\mathfrak{a}$ ist offen in der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie. Die Menge $q(F^{\perp})$ erzeugt als Ideal ganz A.*

(*Beweis* in § 2.)

(0.2) **Satz.** *Dasselbe gilt, wenn wir anstelle von F den Raum E als nicht entartet annehmen und unter* a) *zusätzlich voraussetzen, daß A semilokal ist.*

(*Beweis* in § 4 und § 5.)

Ein Teil des Satzes (0.2) b) wurde unter der Voraussetzung, daß in A die Zahl 2 Einheit ist, von Klingenberg bewiesen. ([13], Klingenberg betrachtet nur Unterräume, die orthogonale Summen von nicht entarteten und totalisotropen Räumen sind.)

Sind E und F beide entartet, so ist schon über einem vollständigen diskreten Bewertungsring mit endlichem Restklassenkörper das Fortsetzungsproblem schwierig. Für die hier bisher erzielten Fortschritte s. etwa [11] und die dort angegebene Literatur.

Satz (0.1) c) läßt sich in dem Spezialfall $\mathfrak{a} = A$ auch formulieren als

Kürzungssatz. *F, G und G' seien Räume über einem semilokalen Ring A. Die Menge $q(G)$ erzeuge als Ideal ganz A (z.B. $G \neq 0$ und nicht entartet). Der Raum F sei nicht entartet. Dann gilt: Ist die orthogonale Summe $G \perp F$ zu $G' \perp F$ isomorph, so ist G zu G' isomorph.*

Ist A sogar lokal, so läßt sich die Voraussetzung über G streichen.

Aus diesem Satz folgt insbesondere, daß sich die Elemente der ähnlich wie über Körpern definierten *Wittgruppe* $W(A)$ (s. [3], S. 144) bei semilokalem A eineindeutig durch die Isomorphieklassen der anisotropen Räume repräsentieren lassen.

Unser Beweis des Satzes (0.2) sowie des Teiles c) von Satz (0.1) ist mit dem Problem der Liftung von Isometrien verquickt. Wir beweisen in § 3 und § 5 den

(0.3) **Liftungssatz.** *F sei Teilraum eines quadratischen Raumes E über einem semilokalen Ring A, $\mathfrak{a}$ ein im Radikal von A enthaltenes Ideal. $\bar{\varphi}$ sei eine Isometrie von $F/\mathfrak{a}F$ in $E/\mathfrak{a}E$. Mindestens einer der Räume E, F sei nicht entartet.*

Behauptung. Unter jeder der beiden folgenden Voraussetzungen läßt sich $\bar{\varphi}$ zu einer Isometrie von F in E liften:

a) *A ist lokal.*

b) *$q(F^{\perp})$ erzeugt das Ideal A.*

Ist A *henselscher* lokaler Ring und F oder E nicht entartet, so können wir $\bar{\varphi}$ sogar liften, ohne vorher zu wissen, daß F zu einem Teilraum von E isomorph ist (§ 3, vgl. [6], Prop. 8.1, S. 79; [14], § 7).

Definition 0.7. Sei E nicht entarteter Raum über einem Ring A. Wir nennen einen Automorphismus von E *eigentlich*, wenn er auf den reduzierten Räumen $E/\mathfrak{m}E$ zu allen maximalen Idealen $\mathfrak{m}$ von A eigentliche Automorphismen im üblichen Sinne induziert (s. [8], S. 65, falls $2 \in \mathfrak{m}$). Die Gruppe der eigentlichen Automorphismen von E bezeichnen wir mit $O^+(E)$.

In Ergänzung zu Satz (0.3) werden wir in § 3 zeigen:

(0.4) **Satz.** *Ist A semilokal und $\mathfrak{a}$ ein im Radikal von A enthaltenes Ideal, so ist für jeden nicht entarteten Raum E über A die kanonische Abbildung von $O^+(E)$ in $O^+(E/\mathfrak{a}E)$ surjektiv.*

Ist A lokal, so ist nach Satz (0.3) (Spezialfall $E=F$) sogar die Abbildung von $O(E)$ in $O(E/\mathfrak{a}E)$ surjektiv. Dies ist aber über nur semilokalen Ringen im allgemeinen *falsch* aufgrund des folgenden Satzes:

(0.5) **Satz.** *Sei A semilokal. $e_1, \ldots, e_r$ sei das System der unzerlegbaren Idempotente von A. E sei nicht entarteter Raum über A mit $e_i E \neq 0$ für alle $i=1, \ldots, r$. Dann hat $O^+(E)$ in $O(E)$ den Index 2^r.*

Die Zahl r kann sich nämlich bei Reduktion mod $\mathfrak{a}$ durchaus vergrößern.

Die Tatsache, daß im semilokalen Fall im allgemeinen nicht jeder Automorphismus von $E/\mathfrak{a}E$ zu einem Automorphismus von E geliftet werden kann, ist der Grund, weshalb wir für unsere Beweise von Satz (0.1)c), (0.2)c) und (0.3)b) eine Zusatzvoraussetzung über $F^{\perp}$ brauchen.

Da wir den Satz (0.5) für die Herleitung der zuvor formulierten Sätze nicht benötigen, deuten wir seinen Beweis nur an: Der Zentralisator $D(E)$ der zweiten Cliffordalgebra $C^+(E)$ in der ersten Cliffordalgebra $C(E)$ erweist sich als eine kommutative quadratische étale Ringerweiterung (s. [10]) von A („Diskriminantenalgebra"). Seine Automorphismengruppe Aut $D(E)$ ist daher

isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ ($\mathbb{Z}:=$ ganze rationale Zahlen). Die kanonische Abbildung von $O(E)$ in Aut $D(E)$ („Dickson-Invariante") hat als Kern gerade $O^+(E)$. Ist A semilokal, so ist sie überdies surjektiv.

Als Nebenresultat beim Beweis von Satz (0.2) erhalten wir in § 4 den folgenden

(0.6) **Satz.** *Sei A semilokaler Ring ohne nichttriviale Idempotente ($r=1$), E nicht entarteter Raum über A. Dann läßt sich $O(E)$ genau dann durch Spiegelungen* (s. § 1) *erzeugen, wenn sich für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A die Gruppe $O(E/\mathfrak{m}E)$ durch Spiegelungen erzeugen läßt.*

Letzteres ist bekanntlich nur dann nicht der Fall, wenn $A/\mathfrak{m}$ aus zwei Elementen besteht und zugleich $E/\mathfrak{m}E$ vierdimensional und hyperbolisch ist ([7], Prop. 14).

Abschließend sei angemerkt, daß wir für unsere Beweise den Satz von Witt nicht voraussetzen, also als Nebenprodukt auch eine – von den eingangs erwähnten Beweisen verschiedene – Herleitung dieses Satzes erhalten (s. § 2).

§ 1. Vorbereitungen

1.1. Orthogonalräume

Ist ein quadratischer Raum E über einem kommutativen Ring A (stets mit Einselement) direkte Modulsumme zweier Teilräume F und G, so schreiben wir $E=E\oplus G$. Stehen F und G überdies aufeinander senkrecht ($B(F,G)=0$), so schreiben wir $E=F\perp G$. Für jeden Teilraum F von E bezeichnen wir mit $F^\perp$ den Modul der $x\in E$ mit $B(x,F)=0$. Für den dualen Modul $\mathrm{Hom}_A(P,A)$ zu einem projektiven Modul P über A schreiben wir P^*. ($P\neq A$; mit A^* bezeichnen wir die Einheitengruppe von A.) Wir erwähnen ([12], § 1; [3], S. 136; [14], § 1).

(1.1.1) **Satz.** *Ist F Teilraum* (s. Def. 0.3) *eines nicht entarteten Raumes E, so sind die durch die Bilinearform von E gelieferten kanonischen Abbildungen $F^\perp\to(E/F)^*$ und $E/F^\perp\to F^*$ bijektiv. Insbesondere ist $F^\perp$ wieder Teilraum von E. Weiter ist $(F^\perp)^\perp=F$.*

An diesem Satz interessiert uns besonders die

(1.1.2) **Folgerung.** *E sei nicht entartet, F ein Teilraum von E. Dann gilt für jeden Homomorphismus $A\to B$ von A in einen weiteren kommutativen Ring B (mit Einselement, $1\mapsto 1$): Der Orthogonalraum $(F\otimes_A B)^\perp$ von $F\otimes_A B$ bezüglich $E\otimes_A B$ stimmt mit $(F^\perp)\otimes_A B$ überein.*

Dieselbe Folgerung können wir ziehen, wenn anstelle von E der Raum F nicht entartet ist. Dann ist nämlich

$$E=F\perp(F^\perp). \tag{1.1.3}$$

Man erhält die zu dieser Zerlegung führende Projektion von E auf F, indem man jedem $x\in E$ denjenigen Vektor von F zuordnet, der auf F unter der Bilinearform dieselbe Linearform induziert wie x.

(1.1.4) **Lemma.** *Sei* $\mathfrak{a}$ *ein im Jacobson-Radikal* $\mathfrak{r}$ *von* A *enthaltenes Ideal,* E *quadratischer Raum über* A.

Behauptung. Jede orthogonale Zerlegung $\bar{E}=\bar{F}\perp\bar{G}$ *des Raumes* $\bar{E}:=E/\mathfrak{a}E$, *in der* $\bar{F}$ *freier, nicht entarteter Unterraum von* $\bar{E}$ *ist, läßt sich zu einer Zerlegung gleicher Art von* E *liften.*

Beweis. Indem wir eine Basis $\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_r$ von $\bar{F}$ irgendwie zu einer Folge $x_1,\dots,x_r$ in E liften, erhalten wir wieder die Basis eines nicht entarteten Raumes F, denn die Determinante der Matrix $(B(x_i,x_j))$ muß wegen $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}$ Einheit sein. Natürlich liegt die orthogonale Zerlegung von E zu F über derjenigen von $\bar{E}$ zu $\bar{F}$. q.e.d.

(1.1.5) *Bemerkung.* Allgemeiner läßt sich jeder Teilraum von $\bar{E}$ zu einem Teilraum von E liften, der als Modul zu der Reduktion mod $\mathfrak{a}$ irgendeines projektiven endlich erzeugten Moduls über A isomorph ist. Doch wird dies hier nicht gebraucht.

1.2. Hyperbolische Räume

Zu jedem projektiven endlich erzeugten A-Modul U definieren wir einen quadratischen Raum $H(U)$, der als Modul die direkte Summe $U\oplus U^*$ ist und dessen quadratische Form q durch

$$q(u+u^*)=\langle u,u^*\rangle \qquad (u\in U,\ u^*\in U^*)$$

beschrieben wird (s. [3], S. 140). $H(U)$ ist ersichtlich nicht entartet. Die zu den $H(U)$ isomorphen Räume bezeichnen wir als „*hyperbolische Räume*". Ist $U=A$, so besitzt $H(U)$ eine Basis u, v mit $q(u)=q(v)=0$, $B(u,v)=1$. Ein solches (geordnetes) Paar von Vektoren eines beliebigen Raumes nennen wir *hyperbolisches Vektorpaar.* $H(U)$ besitzt bei freiem U eine Basis von zueinander orthogonalen hyperbolischen Vektorpaaren. Allgemeiner gilt die Formel

$$H(U_1\oplus U_2)\cong H(U_1)\perp H(U_2). \tag{1.2.1}$$

Wir benötigen später den folgenden

(1.2.2) **Satz.** ([3], S. 142, Lemma 2.2.) *Sei* E *nicht entarteter Raum über* A. *Den Raum, der aus* E *entsteht, indem wir die quadratische Form* q *von* E *in* $-q$ *abändern, bezeichnen wir mit* $-E$. *Weiter schreiben wir* $H(E)$ *für den hyperbolischen Raum zu dem* E *zugrunde liegenden Modul. Mit diesen Bezeichnungen gilt*

$$E\perp(-E)\cong H(E).$$

1.3. Spiegelungen

Wir nennen einen Vektor g eines Raumes E über A *strikt anisotrop*, wenn $q(g)$ eine Einheit von A ist. Bei strikt anisotropem g wird durch

$$\tau(g)(x)=x-q(g)^{-1}B(g,x)g \qquad (x\in E)$$

ein Automorphismus $\tau(g)$ von E mit $\tau(g)^2=1$ definiert, wie man leicht nachrechnet. $\tau(g)$ läßt die zu g orthogonalen Vektoren fest und führt g in $-g$ über. Wir nennen $\tau(g)$ die *Spiegelung* von E an dem Vektor g.

1.4. Siegeltransformationen (vgl. [9], S. 13)

Sei M quadratischer Raum über A. Ein Vektor f von M heiße *isotrop*, falls $q(f)=0$ ist. Ist g ein weiterer Vektor aus M mit $B(f,g)=0$, so wird durch

$$E(f,g)(x)=x-B(x,f)g+B(x,g)f-q(g)(x,f)f \qquad (x\in M)$$

eine lineare Abbildung $E(f,g)$ von M in sich definiert, die mit der quadratischen Form verträglich ist, wie man leicht verifiziert. Ferner rechnet man nach, daß mit einem weiteren zu f senkrechten Vektor g' gilt:

$$E(f,g)E(f,g')=E(f,g+g'). \tag{1.4.1}$$

Insbesondere hat $E(f,g)$ ein Inverses, nämlich $E(f,-g)$, ist also ein Automorphismus von M. Wir nennen die $E(f,g)$ *Siegeltransformationen*. $E(f,g)$ läßt f fest. Für $g\in Af$ ist $E(f,g)=1$.

(1.4.2) *Bemerkung.* Zum begrifflichen Verständnis der $E(f,g)$ erwähnen wir: Sei M nicht entartet und f überdies *primitiv*, d.h. Af ein Teilraum $V\neq 0$ von M. Dann ist $E(f,g)$ die einzige mögliche Fortsetzung des naheliegenden Automorphismus $x\mapsto x+B(x,g)f$ von $V^\perp$ zu einem Automorphismus von M. Bei festem f bilden die $E(f,g)$ die Gruppe aller Automorphismen von M, welche die Kompositionsreihe $0\subset V\subset V^\perp\subset M$ stabil lassen und auf jedem Faktor die Identität induzieren.

Sei M weiterhin nicht entartet. Dann sind die Siegeltransformationen eigentliche Automorphismen von M. Das brauchen wir aufgrund der Definition 0.7 (s. Einleitung) nur über Körpern zu prüfen. Dort ist dies wohlbekannt (s. z.B. [15], S. 195).

§ 2. Beweis von Satz (0.1)

Sei (f_1,f_2) ein hyperbolisches Vektorpaar in einem beliebigen quadratischen Raum E über einem kommutativen Ring A und

$$E=(Af_1+Af_2)\perp G$$

die dazu gehörige orthogonale Zerlegung von E (s. (1.1.3)). Jede Einheit ε von A liefert uns einen Automorphismus $R(\varepsilon,f_1,f_2)$ von E, der f_1 auf εf_1, f_2 auf $\varepsilon^{-1}f_2$ abbildet und G elementweise festläßt. Aufgrund der Formel

$$R(\varepsilon,f_1,f_2)=\tau(f_1-f_2)\tau(f_1-\varepsilon f_2)$$

sind diese Automorphismen – bei nicht entartetem E – eigentlich.

Zu einem Ideal $\mathfrak{a}$ von A bezeichnen wir mit $D(f_1,f_2,\mathfrak{a})$ die von den $R(\varepsilon,f_1,f_2)$ mit $\varepsilon\equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ und den Siegeltransformationen (s. §1.4) $E(f_i,g)$ mit $i=1,2$; $g\in\mathfrak{a}G$ erzeugte Gruppe. Für $D(f_1,f_2,A)$ schreiben wir auch kürzer $D(f_1,f_2)$.

Der Beweis des Satzes (0.1) der Einleitung wird sich leicht ergeben aus folgendem

(2.1) **Lemma.** a) *Ist A beliebig, $\mathfrak{a}$ aber in dem Jacobsonradikal $\mathfrak{r}$ von A enthalten, so operiert $D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ transitiv auf der Menge der* mod $\mathfrak{a}$ *zu (f_1, f_2) kongruenten hyperbolischen Vektorpaare in E.*

b) *Ist A lokal, so operiert die von $D(f_1, f_2)$ und $\tau(f_1 - f_2)$ erzeugte Gruppe transitiv auf der Menge aller hyperbolischen Vektorpaare in E.*

c) *Ist A semilokal, $\mathfrak{a}$ offen in der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie und erzeugt die Menge $q(G)$ als Ideal ganz A, so operiert $D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ transitiv auf der Menge aller hyperbolischen Vektorpaare von E, die* mod $\mathfrak{a}$ *zu (f_1, f_2) kongruent sind.*

Beweis. i) Sei (u, v) ein zu (f_1, f_2) modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ kongruentes hyperbolisches Paar. Es ist dann

$$u = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + g \tag{2.2}$$

mit $\alpha_1 \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$, $\alpha_2 \in \mathfrak{a}$, $g \in \mathfrak{a}G$. Ist α_1 eine Einheit, so läßt sich (u, v) sicherlich durch ein Element aus $D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ in (f_1, f_2) transformieren: Anwendung von $R(\alpha_1^{-1}, f_1, f_2)$ auf u ergibt

$$u' = f_1 + \alpha_1 \alpha_2 f_2 + g.$$

$E(f_2, g)$ führt u' in f_1 über. Bei diesen Transformationen muß v in einen Vektor

$$v'' = \beta_1 f_1 + f_2 + w$$

mit $\beta_1 \in \mathfrak{a}$, $w \in \mathfrak{a}G$ übergehen. Durch $E(f_1, w)$ wird v'' auf f_2 abgebildet, während f_1 festbleibt.

ii) Ist $\mathfrak{a}$ im Radikal von A enthalten, so sind wir schon fertig, da dann in (2.2) der Koeffizient α_1 automatisch Einheit ist. Wir wollen jetzt Teil b) des Lemmas und für lokale Ringe auch Teil c) beweisen. Sei also A lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{a} = A$. Nach i) können wir annehmen, daß der Koeffizient α_1 von u in der Gl. (2.2) zu $\mathfrak{m}$ gehört.

Ist α_2 Einheit, so läßt sich u durch ein Element aus $D(f_1, f_2)$ in f_2 transformieren. f_2 wird durch $\tau(f_1 - f_2)$ in f_1 überführt. Ist $q(G)$ nicht in $\mathfrak{m}$ enthalten, so läßt sich aber f_2 auch durch ein Element aus $D(f_1, f_2)$ in f_1 überführen: Man suche in G einen strikt anisotropen Vektor h. Der Vektor $E(f_1, h)f_2$ hat als zu f_1 gehörigen Koeffizienten die Einheit $-q(h)$, geht also nach i) unter einer geeigneten weiteren Transformation aus $D(f_1, f_2)$ in f_1 über.

Es bleibt der Fall zu betrachten, daß α_1 und α_2 beide in $\mathfrak{m}$ liegen. Da $B(u, E) = A$ ist, muß es ein $z \in G$ mit $B(g, z) \in A^*$ geben. Wenden wir auf u die Transformation $E(f_1, z)$ an, so erhalten wir als neuen Koeffizienten bei f_1 das Element $\alpha_1 - q(z)\alpha_2 + B(z, g)$, also eine Einheit.

iii) Es fehlt noch der Beweis der Aussage c) über einem beliebigen semilokalen Ring A. Da wir diese Aussage über lokalen Ringen schon als richtig erkannt haben, ist sie auch wahr, falls A ein Produkt $\prod_{i=1}^{r} A_i$ lokaler Ringe ist:

Wir haben dann Zerlegungen

$$\mathfrak{a}=\prod_{i=1}^{r}\mathfrak{a}_i, \qquad E=\prod_{i=1}^{r}E_i,$$

wobei $\mathfrak{a}_i$ Ideal von A_i und E_i Raum über A_i ist. Seien f_{1i}, f_{2i} die Komponenten von f_1, f_2 in E_i. Die Voraussetzung über das orthogonale Komplement von Af_1+Af_2 in E ist genau dann erfüllt, wenn sie für die orthogonalen Komplemente der $A_i f_{1i}+A_i f_{2i}$ in E_i erfüllt ist. Schließlich induziert die Zerlegung $O(E)=\prod_{i=1}^{r} O(E_i)$ eine Zerlegung

$$D(f_1, f_2, \mathfrak{a})=\prod_{i=1}^{r} D(f_{1i}, f_{2i}, \mathfrak{a}_i). \tag{2.3}$$

Sei nun A beliebiger semilokaler Ring. Nach Voraussetzung ist in $\mathfrak{a}$ eine geeignete Potenz $\mathfrak{r}^n$ des Radikals von A enthalten. Wir betrachten die Bilder $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{u}, \bar{v}$ von f_1, f_2, u, v in $E/\mathfrak{r}^n E$. Da $A/\mathfrak{r}^n$ Produkt lokaler Ringe ist (s. [4], § 2 Prop. 7 und Cor. 1 zu Prop. 9), läßt sich $(\bar{u}, \bar{v})$ durch ein $\bar{\sigma}\in D(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \mathfrak{a}/\mathfrak{r}^n)$ in $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ überführen. $\bar{\sigma}$ läßt sich ersichtlich zu einem $\sigma\in D(f_1, f_2, \mathfrak{a})$ liften. Das Vektorpaar $(\sigma u, \sigma v)$ ist zu (f_1, f_2) mod $\mathfrak{r}^n$ kongruent. Es kann somit nach dem bewiesenen Teil a) des Lemmas durch ein geeignetes Element aus $D(f_1, f_2, \mathfrak{r}^n)$ in das Paar (f_1, f_2) transformiert werden. q.e.d.

(2.4) *Bemerkung.* Die Aussage b) läßt sich auf diese Weise nicht auf semilokale Ringe übertragen, da für die von $D(f_1, f_2)$ und $\tau(f_1-f_2)$ erzeugte Gruppe die (2.3) entsprechende Gleichung falsch ist.

Wir kommen nun zu dem Beweis des in der Einleitung formulierten Satzes (0.1). Sei F nicht entarteter Teilraum eines Raumes E über einem Ring A, $\varphi\colon F\to E$ eine Isometrie, die modulo einem Ideal $\mathfrak{a}$ von A zu der Inklusion von F in E kongruent ist. Es gibt einen endlich erzeugten projektiven Modul P, so daß der Modul $F\oplus P$ frei ist. Wir bilden den Hilfsraum $E_1 := E\perp(-F)\perp H(P)$ (s. § 1.2). Der Teilraum $F_1 := F\perp(-F)\perp H(P)$ besitzt nach Satz (1.2.2) und (1.2.1) eine Basis von zueinander orthogonalen hyperbolischen Vektorpaaren u_i, v_i $(i=1, \ldots, m)$. Die Isometrie $\psi := \varphi\perp 1\perp 1$ von F_1 in E_1 ist mod $\mathfrak{a}$ zur Inklusion von F_1 in E_1 kongruent.

Unter den im Satz (0.1) gemachten Voraussetzungen über $A, \mathfrak{a}$ und das orthogonale Komplement von F in E liefert uns das Lemma (2.1) zunächst ein $\rho_1\in O(E_1, \mathfrak{a})$, das $(\psi u_1, \psi v_1)$ in (u_1, v_1) überführt, dann ein $\rho_2\in O(E_1, \mathfrak{a})$, das (u_1, v_1) festläßt und $(\rho_1\psi u_2, \rho_1\psi v_2)$ in (u_2, v_2) überführt, etc. Schließlich erhalten wir eine Transformation $\rho=\rho_m \ldots \rho_1$ in $O(E_1, \mathfrak{a})$, die $(\psi u_i, \psi v_i)$ auf (u_i, v_i) für jedes $i=1, \ldots, m$ abbildet. ρ^{-1} setzt ψ fort, ist also von der Gestalt $\sigma\perp 1\perp 1$ mit einem $\sigma\in O(E, \mathfrak{a})$, das φ fortsetzt. q.e.d.

§ 3. Liftung von Isometrien

Die soeben benutzte Methode ergibt auch einen Beweis des in der Einleitung formulierten Liftungssatzes (0.3) bei nicht entartetem F.

Sei $\mathfrak{a}$ ein im Radikal des semilokalen Ringes A enthaltenes Ideal. Für einen quadratischen Raum L über A bezeichne $\bar{L}$ den Raum $L/\mathfrak{a}L$ über dem Ring $\bar{A} := A/\mathfrak{a}$. Für einen Vektor $x \in L$ bezeichne $\bar{x}$ dessen Bild in $\bar{L}$.

Uns ist ein Raum E über A, ein nicht entarteter Teilraum F von E und eine Isometrie $\bar{\varphi}\colon \bar{F} \to \bar{E}$ vorgegeben, die wir liften wollen. Wir betrachten wieder die am Ende von §2 eingeführten Hilfsräume $E_1 := E \perp (-F) \perp H(P)$ und $F_1 := F \perp (-F) \perp H(P)$. $\bar{\varphi}$ liefert uns die Isometrie $\bar{\psi} := \bar{\varphi} \perp 1 \perp 1$ von $\bar{F}_1$ in $\bar{E}_1$.

Erzeugt nun die Wertemenge $q(F^\perp)$ des orthogonalen Komplementes $F^\perp$ von F in E als Ideal ganz A, so läßt sich, wie wir am Ende von §2 sahen, $\bar{\psi}$ zu einem $\bar{\rho} \in O(\bar{E}_1)$ fortsetzen, das Produkt von Transformationen der Form $E(\bar{u}, \bar{g})$, $E(\bar{v}, \bar{g})$, $R(\bar{\varepsilon}, \bar{u}, \bar{v})$ zu hyperbolischen Vektorpaaren (u, v) von E_1 ist. Wird über $q(F^\perp)$ nichts vorausgesetzt, aber angenommen, daß A lokal ist, so muß man noch Spiegelungen $\tau(\bar{u} - \bar{v})$ hinzunehmen. In beiden Fällen ist klar, daß $\bar{\rho}$ zu einem $\rho \in O(E_1)$ geliftet werden kann. Die Restriktion von ρ auf den Teilraum $(-F) \perp H(P)$ von E_1 ist mod $\mathfrak{a}$ zu der Inklusion desselben in E_1 kongruent, läßt sich also nach Satz (0.1)a) zu einem $\eta \in O(E_1, \mathfrak{a})$ fortsetzen. $\eta^{-1}\rho$ ist von der Form $\sigma \perp 1 \perp 1$ mit einem $\sigma \in O(E)$. Die Restriktion $\varphi\colon F \to E$ von σ auf F liegt über $\bar{\varphi}$. q.e.d.

In ähnlicher Weise ergibt sich die Surjektivität der kanonischen Abbildung von $O^+(E)$ in $O^+(E/\mathfrak{a}E)$ bei nicht entartetem E (s. Einleitung, Satz (0.4)) aus folgendem

(3.1) **Lemma.** *Sei A semilokaler Ring, E ein Raum über A, der eine Basis von zueinander orthogonalen hyperbolischen Vektorpaaren u_i, v_i $(i = 1, \ldots, m)$ besitzt.*

Behauptung. $O^+(E)$ wird erzeugt durch Transformationen der Form $E(u_i, g)$, $E(v_i, g)$, $R(\varepsilon, u_i, v_i)$ mit $g \in E$ (und zu u_i bzw. v_i orthogonal), $\varepsilon \in A^*$, $i = 1, \ldots, m$.

Beweis des Lemmas. Sei $\sigma \in O^+(E)$ gegeben. Nach Lemma (2.1)c) gibt es ein Produkt ρ von Transformationen aus den Gruppen $D(u_i, v_i)$ mit $i > 1$, so daß $\rho^{-1}\sigma$ den Orthogonalraum zu $Au_1 + Av_1$ festläßt, also von der Form $\sigma_0 \perp 1$ mit $\sigma_0 \in O^+(Au_1 + Av_1)$ ist. Wir können uns also auf den Fall $m = 1$ zurückziehen.

Seien $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ die maximalen Ideale von A, $\mathfrak{r}$ ihr Durchschnitt.

$$O^+(E/\mathfrak{r}E) = \prod_{i=1}^{r} O^+(E/\mathfrak{m}_i E)$$

enthält nur Transformationen der Form $R(\bar{\varepsilon}, \bar{u}_1, \bar{v}_1)$ mit $\bar{\varepsilon} \in (A/\mathfrak{r})^*$, denn entsprechendes gilt bekanntlich für alle $O^+(E/\mathfrak{m}_i E)$. (In $E/\mathfrak{m}_i E$ gibt es genau zwei isotrope Geraden ... .) Ebenso enthält $O(E, \mathfrak{r})$ nach Lemma (2.1)a) nur Transformationen der Form $R(\varepsilon, u_1, v_1)$. Daher gilt dies auch für $O^+(E)$. q.e.d.

Wir gehen noch kurz auf das Problem der Liftung von Isometrien ein, falls nicht von vornherein angenommen wird, daß F Teilraum von E ist. Jetzt betrachten wir nur lokale Ringe.

(3.2) **Definition.** Ein lokaler Ring A mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ heiße *quadratisch henselsch*, falls jedes Polynom der Form $T^2+\alpha T+\beta$ in einer Unbestimmten T mit $\alpha\in A$, $\beta\in A$, das nach Reduktion mod $\mathfrak{m}$ zwei verschiedene Nullstellen in $A/\mathfrak{m}$ besitzt, auch in A Nullstellen besitzt.

Diese Eigenschaft läßt sich offenbar auch so formulieren: Ist F zweidimensionaler nicht entarteter quadratischer Raum über A und $F/\mathfrak{m}F$ hyperbolisch, so ist F selbst hyperbolisch.

(3.3) **Satz.** (Vgl. [6], Prop. 8.1, S. 79; [14], § 7.) *A sei quadratisch henselscher lokaler Ring, $\mathfrak{a}$ ein echtes Ideal von A. Seien F und E quadratische Räume über A, von denen mindestens einer nicht entartet ist. Dann läßt sich jede Isometrie $\bar{\varphi}$ von $F/\mathfrak{a}F$ in $E/\mathfrak{a}E$ zu einer Isometrie von F in E liften.*

Beweis. a) Sei zunächst F nicht entartet. Die Behauptung stimmt, falls F Teilraum von E ist. Daher genügt es, aus der Existenz von $\bar{\varphi}$ zu folgern, daß F zu einem Teilraum von E isomorph ist. Das Bild von $\bar{\varphi}$ ist nicht entarteter Teilraum von $E/\mathfrak{a}E$, läßt sich also nach Lemma (1.1.4) zu einem nicht entarteten Teilraum G von E liften. Wegen des schon bewiesenen Kürzungssatzes (s. Einleitung und § 2) brauchen wir nur zu zeigen, daß $F\perp(-F)$ zu $G\perp(-F)$ isomorph ist. Indem wir noch $\mathfrak{a}$ zu $\mathfrak{m}$ vergrößern und Satz (1.2.2) beachten, stoßen wir auf folgendes Problem: Sei T ein Raum über A, dessen Reduktion $T/\mathfrak{m}T$ hyperbolisch ist. Man zeige, daß T selbst hyperbolisch ist.

Dazu liften wir eine Zerlegung $T/\mathfrak{m}T=\bar{H}_1\perp\cdots\perp\bar{H}_r$ in hyperbolische Ebenen $\bar{H}_i$ irgendwie zu einer Zerlegung $T=H_1\perp\cdots\perp H_r$ (s. Lemma (1.1.4)). Da A quadratisch henselsch ist, sind die H_i automatisch wieder hyperbolische Ebenen.

b) Jetzt sei E nicht entartet. Nach dem schon Bewiesenen genügt es, einen nicht entarteten quadratischen Raum F_1 zu finden, der F als Teilraum enthält, so daß sich $\bar{\varphi}$ zu einer Isometrie $\bar{\psi}$ von $F_1/\mathfrak{a}F_1$ in $E/\mathfrak{a}E$ fortsetzen läßt.

Sei T freier Modul, der F zu einem freien Modul $F_1:=F\oplus T$ gleicher Dimension wie E ergänzt. Wir können $\bar{\varphi}$ zu einem Modulisomorphismus $\bar{\psi}$ von $F_1/\mathfrak{a}F_1$ auf $E/\mathfrak{a}E$ fortsetzen. Indem wir die quadratische Form von $E/\mathfrak{a}E$ mit Hilfe von $\bar{\psi}$ auf $F_1/\mathfrak{a}F_1$ übertragen, setzen wir die Form von $F/\mathfrak{a}F$ zu einer Form $\bar{q}_1$ von $F_1/\mathfrak{a}F_1$ fort und erreichen zugleich, daß $\bar{\psi}$ Isomorphismus quadratischer Räume wird. Da F und T frei sind, ist es leicht, die Form von F zu einer quadratischen Form q_1 auf F_1 fortzusetzen, deren Reduktion mod $\mathfrak{a}$ mit $\bar{q}_1$ übereinstimmt. Mit $\bar{q}_1$ ist automatisch q_1 eine nicht entartete Form. q.e.d.

Offenbar ist in Satz (3.3) „quadratisch henselsch" auch eine notwendige Voraussetzung.

§ 4. Rückungen

Sei E nicht entarteter Raum über einem Ring A, $\mathfrak{a}$ ein im Radikal $\mathfrak{r}$ von A enthaltenes Ideal. Als *Rückung* mod $\mathfrak{a}$ bezeichnen wir jedes Spiegelungsprodukt $\tau(u)\tau(v)$ zu strikt anisotropen Vektoren u, v von E, die mod $\mathfrak{a}E$

zueinander kongruent sind. Die Situation, in der bei uns Rückungen auftreten werden, wird beschrieben durch den folgenden evidenten

(4.1) **Hilfssatz.** *Seien x, y, t drei Vektoren aus E, für die gilt: $x \equiv y \bmod \mathfrak{a} E$, $q(x)=q(y)$, $B(x,t) \in A^*$ und $q(t) \in A^*$. Der Vektor $r := \tau(t)(x) - y$ ist $\bmod \mathfrak{a} E$ zu $-q(t)^{-1} B(x,t)\, t$ kongruent. Daher ist r strikt anisotrop und $\tau(r)\tau(t)$ eine Rückung, die wir mit $\lambda(x,y,t)$ bezeichnen.*

Behauptung. $\lambda(x,y,t)$ führt x in y über und läßt die zu $x-y$ und t orthogonalen Vektoren fest.

Der folgende Satz umfaßt den Teil a) des in der Einleitung formulierten Satzes (0.2).

(4.2) **Satz.** (Vgl. [13], S. 295.) *Sei E nicht entarteter Raum über einem semilokalen Ring A, $\mathfrak{a}$ ein im Radikal von A enthaltenes Ideal. $\varphi\colon F \to E$ sei eine Isometrie von einem Teilraum F von E in E, die $\bmod \mathfrak{a}$ zu der Inklusion von F in E kongruent ist. Sei m das Maximum der Dimensionen der Reduktionen von F nach den maximalen Idealen von A.*

Behauptung. φ läßt sich zu einem Automorphismus σ von E fortsetzen, der Produkt von m Rückungen $\bmod \mathfrak{a}$ ist. Ist $F=E$, so kommt man sogar mit $(m-1)$ Rückungen aus.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, daß A keine nicht trivialen Idempotente besitzt. F ist dann freier A-Modul der Dimension m.

Zunächst behandeln wir den Fall $F \neq E$. Wir wählen für F eine feste Basis $x_1, \ldots, x_m$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ von A gibt es eine – von $\mathfrak{m}$ abhängige – natürliche Zahl t zwischen 0 und m, so daß die x_i mit $1 \leqq i \leqq t$ bei Reduktion $\bmod \mathfrak{m}$ Basis eines nicht entarteten Raumes über $A/\mathfrak{m}$ werden, die x_i mit $t+1 \leqq i \leqq m$ hingegen Basis eines dazu orthogonalen totalisotropen Raumes über $A/\mathfrak{m}$. Man erhält die Basis $x_1, \ldots, x_m$, indem man in jeder Komponente von $F/\mathfrak{r}F = \prod_{\mathfrak{m}} F/\mathfrak{m}F$ eine Basis dieser Art aufsucht, daraus eine Basis von $F/\mathfrak{r}F$ über $A/\mathfrak{r}$ zusammensetzt und diese irgendwie nach F liftet.

Gelingt es uns, strikt anisotrope Vektoren $g_1, \ldots, g_m$ zu finden, so daß für jedes k zwischen 1 und m der Vektor g_k auf den x_i mit $i<k$ senkrecht steht, aber $B(g_k, x_k)$ Einheit ist, so sind wir aufgrund des Hilfssatzes (4.1) fertig: Wir definieren sukzessive folgende Automorphismen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ von E:

$$\sigma_1 = \lambda(x_1, \varphi x_1, g_1)$$

$$\sigma_2 = \lambda(\sigma_1 x_2, \varphi x_2, \sigma_1 g_2) \circ \sigma_1$$

$$\vdots$$

$$\sigma_m = \lambda(\sigma_{m-1} x_m, \varphi x_m, \sigma_{m-1} g_m) \circ \sigma_{m-1}.$$

σ_m setzt φ fort.

Zur Konstruktion der g_k können wir, indem wir die Folgerung (1.1.2) aus § 1 beachten, den Raum E mod $\mathfrak{r}$ reduzieren. Wir können uns dann sogar auf den Fall zurückziehen, daß A ein Körper ist.

Unsere Basis $x_1, \ldots, x_m$ von F war so gewählt, daß es einen Index t gibt, so daß die x_k mit $1 \leqq k \leqq t$ einen nicht entarteten Raum F_1 aufspannen, die x_k mit $t+1 \leqq k \leqq m$ hingegen einen zu F_1 orthogonalen totalisotropen Raum. Wegen $F \neq E$ ist das orthogonale Komplement $F_1^{\perp}$ von F_1 in E ein von Null verschiedener nicht entarteter Raum. $F_1^{\perp}$ enthält also sicher einen anisotropen Vektor h. Weiter gibt es, da E nicht entartet ist, Vektoren $y_1, \ldots, y_m$ in E mit $B(x_i, y_j) = \delta_{ij}$. Wir wählen nun die g_k $(k = 1, \ldots, m)$ auf folgende Weise: Ist $q(y_k) \neq 0$, so sei $g_k = y_k$. Ist $q(y_k) = 0$ und $k \leqq t$, so sei $g_k = y_k + h$. Ist $q(y_k) = 0$ und $k > t$, so sei $g_k = y_k + x_k$. Diese g_k leisten das Verlangte.

Es bleibt der Fall $F = E$ zu betrachten. Wir können eine orthogonale Zerlegung $E = E_1 \perp E_2$ finden, bei der E_2 frei vom Rang 2 ist, indem wir eine entsprechende Zerlegung von $E/\mathfrak{r}E$ liften (s. Lemma (1.1.4)). Auf ähnliche Weise finden wir in E_2 eine Basis x, y mit $B(x, y) = 1$. Die Einschränkung von φ auf $E_1 \perp Ax$ können wir nach dem schon Bewiesenen zu einem Produkt σ von $m-1$ Rückungen mod $\mathfrak{a}$ fortsetzen. $\sigma^{-1}\varphi$ hat die Gestalt $1 \perp \psi$ mit einem $\psi \in O(E_2, \mathfrak{a})$, das x festläßt. Wir zeigen, daß $\psi = 1$ sein muß. Damit ist dann Satz (4.2) auch in dem Falle $F = E$ bewiesen. Der Vektor ψy hat wegen $B(x, \psi y) = 1$ die Gestalt

$$\psi y = \alpha x + (1 - 2\alpha q(x)) y$$

mit einem $\alpha \in \mathfrak{a}$. Die Bedingung $q(\psi y) = q(y)$ führt auf

$$\alpha(1 - \alpha q(x))(1 - 4 q(x) q(y)) = 0.$$

Der letzte Faktor auf der linken Seite dieser Gleichung ist Einheit, da E nicht entartet ist, der mittlere ebenfalls, da α im Radikal liegt. Daher muß $\alpha = 0$ und somit $\psi = 1$ sein. q.e.d.

Als Nebenprodukt liefert uns der Spezialfall $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}$, $E = F$ des soeben bewiesenen Satzes zusammen mit dem in § 3 bewiesenen Satz (0.4) der Einleitung das folgende Resultat:

(4.3) **Satz.** *Sei E nicht entarteter Raum über einem semilokalen Ring A. Dann sind folgende Aussagen gleichwertig:*

(i) *Alle Elemente von $O^+(E)$ sind Produkte von Spiegelungen.*

(ii) *Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von A sind alle Elemente von $O^+(E/\mathfrak{m}E)$ Produkte von Spiegelungen.*

Beweis. Da die kanonische Abbildung von $O^+(E)$ in $O^+(E/\mathfrak{r}E) = \prod_{\mathfrak{m}} O^+(E/\mathfrak{m}E)$ surjektiv ist (Satz (0.4)), folgt aus (i) sicher (ii). Sei nun (ii) vorausgesetzt und σ ein Element von $O^+(E)$. Die Reduktion $\bar{\sigma}$ von σ mod $\mathfrak{r}$ läßt sich als Produkt von Spiegelungen schreiben, also zu einem Produkt ρ von Spiegelungen des Raumes E liften. $\rho^{-1}\sigma$ liegt in $O(E, \mathfrak{r})$, ist nach Satz (4.2) also ebenfalls Produkt von Spiegelungen. Somit ist σ Produkt von Spiegelungen. q.e.d.

Die Aussage (ii) läßt sich auch so formulieren:

(ii a) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ wird $O(E/\mathfrak{m}E)$ durch Spiegelungen erzeugt.

Besitzt A keine nichttrivialen Idempotente, so können wir aufgrund des Satzes (0.5) der Einleitung anstelle von (i) auch sagen:

(i a) $O(E)$ wird durch Spiegelungen erzeugt.

Damit erhalten wir aus Satz (4.3) den in der Einleitung angekündigten Satz (0.6).

§ 5

Es ist jetzt leicht, die noch fehlenden Teile des Fortsetzungssatzes (0.2) und des Liftungssatzes (0.3) aus der Einleitung zu beweisen.

(5.1) **Satz.** *F sei Teilraum eines nicht entarteten Raumes E über einem lokalen Ring A. Weiter sei $\mathfrak{c}$ ein Ideal von A.*

a) *Jede Isometrie $\varphi\colon F \to E$ läßt sich zu einem Automorphismus von E fortsetzen.*

b) *Jede Isometrie von $F/\mathfrak{c}F$ in $E/\mathfrak{c}E$ läßt sich zu einer Isometrie von F in E liften.*

Beweis. b) folgt unmittelbar aus a), da nach § 3 jeder Automorphismus von $E/\mathfrak{c}E$ zu einem Automorphismus von E geliftet werden kann.

Es bleibt Teil a) zu zeigen. Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von A. Es genügt, die Reduktion $\bar{\varphi}\colon F/\mathfrak{m}F \to E/\mathfrak{m}E$ von φ zu einem $\bar{\sigma} \in O(E/\mathfrak{m}E)$ fortzusetzen. Denn nach § 3 können wir $\bar{\sigma}$ zu einem $\sigma \in O(E)$ liften, und da $\sigma^{-1} \circ \varphi \bmod \mathfrak{m}$ zu der Inklusion von F in E kongruent ist, läßt sich $\sigma^{-1} \circ \varphi$ aufgrund von Satz (4.2) zu einem Automorphismus von E fortsetzen. Damit haben wir uns auf den Fall zurückgezogen, daß A ein Körper ist.

Es folgt die klassische Argumentation: Man erweitert die Räume F und $\varphi(F)$ durch hyperbolische Ergänzung ihrer Radikale zu nicht entarteten Räumen F_1 und F_1' und setzt φ auf naheliegende Weise fort zu einem Isomorphismus $\varphi_1\colon F_1 \to F_1'$ (s. z.B. [2], Theorem 3.8). φ_1 läßt sich nach § 2 zu einem Automorphismus von E fortsetzen. q.e.d.

(5.2) **Satz.** *Sei F Teilraum eines nicht entarteten Raumes E über einem semilokalen Ring A mit Radikal $\mathfrak{r}$. Die Menge $q(F^{\perp})$ erzeuge als Ideal ganz A. Sei $\mathfrak{a}$ ein in der $\mathfrak{r}$-adischen Topologie offenes Ideal von A und $\mathfrak{c}$ ein in $\mathfrak{r}$ enthaltenes Ideal. Dann gilt:*

a) *Jede Isometrie $\varphi\colon F \to E$, die $\bmod \mathfrak{a}$ zu der Inklusion von F in E kongruent ist, läßt sich zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a}) \cap O^+(E)$ fortsetzen.*

b) *Jede Isometrie von $F/\mathfrak{c}F$ in $E/\mathfrak{c}E$ läßt sich zu einer Isometrie von F in E liften.*

Beweis. b) folgt wieder aus a), da sich eigentliche Automorphismen von $E/\mathfrak{c}E$ nach Satz (0.4) zu Automorphismen von E liften lassen.

Es bleibt Teil a) zu beweisen. Sei $\mathfrak{r}^n$ eine in $\mathfrak{a}$ enthaltene Potenz des Radikals. Aufgrund von Satz (0.4) und (4.2), genügt es, die von φ induzierte Isometrie von $F/\mathfrak{r}^n F$ in $E/\mathfrak{r}^n E$ zu einem in $O^+(E/\mathfrak{r}^n E)$ und $O(E/\mathfrak{r}^n E, \mathfrak{a}/\mathfrak{r}^n)$ gelegenen Automorphismus fortzusetzen (gleiche Argumentation wie im Beweis von Satz (5.1)a)). Wir können also annehmen, daß eine Potenz von $\mathfrak{r}$ verschwindet. Da jetzt A Produkt (artinscher) lokaler Ringe ist (s. [4], § 2 Prop. 7 und Cor. 1 zu Prop. 9), können wir uns sogar auf den Fall zurückziehen, daß A (artinscher) lokaler Ring ist.

Nach Satz (5.1) läßt sich φ zu einem $\sigma \in O(E, \mathfrak{a})$ fortsetzen. Ist $\mathfrak{a} \neq A$, so ist σ automatisch eigentlich. Sei $\mathfrak{a} = A$ und σ nicht eigentlich. Aufgrund der Voraussetzung über $q(F^\perp)$, die bei allen Reduktionsschritten erhalten blieb, gibt es in $F^\perp$ einen strikt anisotropen Vektor h. Der Automorphismus $\sigma \circ \tau(h)$ ist eigentlich und setzt φ ebenfalls fort. q.e.d.

Literatur

1. Arf, C.: Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2 (Teil I). J. reine und angew. Math. **183**, 148 – 167 (1941).
2. Artin, E.: Geometric algebra. New York: Interscience 1957.
3. Bass, H.: Lectures on topics in algebraic K-theory. Tata Inst. of Fund. Research, Bombay (1967).
4. Bourbaki, N.: Algèbre commutative, Chap. IV. Paris: Hermann 1961.
5. Chevalley, C.: The algebraic theory of spinors. New York: Columbia Univ. Press 1954.
6. Demazure, M.: Automorphismes des groupes réductifs. Sém. schémas en groupes, Fasc. 7, Exp. 24, Inst. Hautes Ét. Sci. (1963 – 64).
7. Dieudonné, J.: Sur les groupes classiques, 3. Aufl. Paris: Hermann 1967.
8. – La géométrie des groupes classiques. Ergebnisse d. Math. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
9. Eichler, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952.
10. Grothendieck, A.: Morphismes étales. Sém. géométrie algébrique 1960 – 61, Fasc. 1, Exp. 1, Inst. Hautes Ét. Sci.
11. Hsia, J. S.: Integral equivalence of vectors over local modular lattices. Pacific J. Math. **23**, 527 – 542 (1967).
12. Jehne, W.: Die Struktur der symplektischen Gruppe über lokalen und dedekindschen Ringen. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. 1962 – 64, 3. Abh., S. 189 – 235.
13. Klingenberg, W.: Orthogonale Gruppen über lokalen Ringen. Amer. J. Math. **83**, 281 – 320 (1961).
14. Knebusch, M.: Grothendieck- und Wittringe von nichtausgearteten symmetrischen Bilinearformen, Teil I (erscheint demnächst).
15. Tamagawa, T.: On the structure of orthogonal groups. Amer. J. Math. **80**, 191 – 197 (1958).
16. Witt, E.: Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. J. reine u. angew. Math. **176**, 31 – 44 (1937).

Dr. M. Knebusch
Mathematisches Seminar der Universität
2 Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69

(Eingegangen am 23. Juli 1968)

Math. Z. 108, 269 – 284 (1969)

Nullstellen und kritische Stellen der Lösungen von Differentialgleichungen 2. Ordnung im Komplexen

HORST HEROLD

Mit $w(z)$ werde eine Lösung der Differentialgleichung

$$w''+Q(z)w=0,$$

deren Koeffizient auf einer Strecke S der komplexen Ebene stetig sei, bezeichnet, die in einem Endpunkt a von S der Bedingung $w(a)=0$ oder $w'(a)=0$ genügt. Durch Vergleich mit reellen linearen Differentialgleichungen werden einmal Bedingungen dafür angegeben, daß $w'(z)$ bzw. $w(z)$ auf S nullstellenfrei ist und zum anderen Aussagen über das Wachstum von $|w(z)|$ auf S hergeleitet. Bei Spezialisierung auf den reellen Fall ergeben sich unmittelbar bekannte Sturmsche Vergleichssätze. Durch Änderung der Richtung von S (bei festem Endpunkt a) wird ein Gebiet um a erhalten, in welchem $w'(z)$ bzw. $w(z)$ nullstellenfrei ist. Derartige nullstellenfreie Gebiete wurden zuerst von Hille [2] angegeben.

Eine Differentialgleichung, die auf einer Strecke, einem Kreisbogen oder in einem Gebiet der komplexen Ebene betrachtet wird, soll dort definit heißen, wenn keine nichttriviale Lösung existiert, die sowohl eine Nullstelle als auch eine Nullstelle der Ableitung auf der Strecke, dem Kreisbogen bzw. im Gebiet besitzt. In [5] (Theorem 2, S. 485) bewies nun Schwarz: Ist $p(z)$ in einem konvexen Gebiet G holomorph und beschränkt: $|p(z)|\leqq M$, so ist die Differentialgleichung

$$w''+p(z)w=0$$

in G definit, falls der Durchmesser von G kleiner als $1/\sqrt{M}$ ist. Mit Hilfe oben genannter Ergebnisse wird in dieser Arbeit bewiesen, daß als Durchmesser sogar $\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{M}}$ zulässig ist, wobei $\frac{\pi}{2}$ die bestmögliche Konstante ist. Ein weiterer Satz über die Definitheit einer linearen Differentialgleichung auf einer Strecke enthält nicht nur die betreffenden Ergebnisse von Hille [2] und Taam [6] als Spezialfälle, sondern macht gleichzeitig eine bestmögliche Aussage.

In einem weiteren Abschnitt werden Kriterien von anderer Art für die Definitheit einer linearen Differentialgleichung in einem Kreis hergeleitet.

Schließlich wird noch ein Satz über die Definitheit einer gewissen Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen in einem konvexen Gebiet angegeben.

1.

Die folgenden Sätze sind für ein Intervall auf der reellen Achse formuliert, lassen sich aber ohne Mühe auf eine beliebige Strecke der komplexen Ebene übertragen. Ausgangspunkt der Beweise wird die von Hille in [2] für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingeführte Greensche Transformierte sein. Von der trivialen Lösung ist stets abzusehen.

Satz 1. *Die komplexwertige Funktion* $Q(t)=Q_1+iQ_2$ *sei in* $[\alpha,\beta]$ *stetig. Es existiere eine reelle Konstante* γ *derart, daß in* (α,β)

$$Q_1+\gamma Q_2 \leqq \frac{\pi^2}{4(\beta-\alpha)^2}$$

gilt.

Dann ist die Differentialgleichung

$$w''+Q(t)w=0$$

in $[\alpha,\beta)$ *und* $(\alpha,\beta]$ *definit.*

$\pi^2/4$ *ist die bestmögliche Konstante.*

Bemerkung 1. Ist $Q_2 \not\equiv 0$ in $[\alpha,\beta]$, so ist die Voraussetzung trivialerweise erfüllbar. Wie die folgende Formel (1) zeigt, genügt es zu fordern, daß Q_2 in (α,β) keinen Vorzeichenwechsel besitzt und in keinem Teilintervall identisch verschwindet. Dieses Ergebnis hat bereits Hille [2] erzielt.

Bemerkung 2. Taam [6] bewies die Behauptung des Satzes unter der stärkeren Voraussetzung $Q_1+\gamma Q_2 \leqq 0$. Sein Ergebnis enthält das von Hille [2], der $Q_1 \leqq 0$ in (α,β) forderte.

Beweis. Es werde $w(t_1)=w'(t_2)=0$, $\alpha \leqq t_1 < t_2 \leqq \beta$, $(t_1,t_2) \neq (\alpha,\beta)$, angenommen (im Falle $t_2<t_1$ schließt man analog). Durch

$$w=uv \quad \text{mit} \quad u=\sin\frac{\pi}{2}\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$$

wird für $t_1 \leqq t \leqq t_2$ eine neue abhängige Veränderliche v in $w''+Q(t)w=0$ eingeführt. Aus $w'(t_2)=0$ folgt auf Grund der Wahl von u $v'(t_2)=0$. v genügt der Differentialgleichung

$$(u^2v')'+(Qu^2+uu'')v=0,$$

deren Greensche Transformierte gebildet wird:

$$[(u^2v')\bar{v}]_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}u^2|v'|^2\,dt+\int_{t_1}^{t_2}(Qu^2+uu'')|v|^2\,dt=0.$$

Wegen $u(t_1)=v'(t_2)=0$ verschwindet der Klammerausdruck, so daß

$$\int_{t_1}^{t_2}u^2\left(Q-\frac{\pi^2}{4(t_2-t_1)^2}\right)|v|^2\,dt=\int_{t_1}^{t_2}u^2|v'|^2\,dt$$

gilt. Trennung in Real- und Imaginärteil, Multiplikation der Gleichung für den Imaginärteil

$$\int_{t_1}^{t_2} u^2 Q_2 |v|^2 dt = 0 \tag{1}$$

mit γ und Addition ergeben

$$\int_{t_1}^{t_2} u^2 \left(Q_1 + \gamma Q_2 - \frac{\pi^2}{4(t_2-t_1)^2} \right) |v|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} u^2 |v'|^2 dt .$$

Hier ist die rechte Seite nicht negativ, während die linke wegen $t_2 - t_1 < \beta - \alpha$ negativ ausfällt, womit die Annahme als falsch erkannt ist.

Schließlich zeigt der Fall

$$Q(t) \equiv Q_1 \equiv \frac{(\pi+\varepsilon)^2}{4(\beta-\alpha)^2} \qquad (\varepsilon > 0),$$

daß $\pi^2/4$ die bestmögliche Konstante ist.

Satz 2. *Die komplexwertige Funktion $Q(t) = Q_1 + iQ_2$ und die reellwertige nicht negative Funktion $q(t)$ seien in $[a, b]$ stetig. Mit einer geeigneten reellen Konstanten γ gelte in (a, b)*

$$Q_1 + \gamma Q_2 \leqq q(t).$$

Die Differentialgleichung

$$u'' + q(t)u = 0$$

besitze eine Lösung $U(t)$ mit $U(a) = 0$, $U'(t) \neq 0$ in (a, b).

Dann ist für jede Lösung $w(t)$ mit $w(a) = 0$ von

$$w'' + Q(t)w = 0$$

$w'(t) \neq 0$ in (a, b).

Zusatz. Ist an einer Stelle $Q_1 + \gamma Q_2 < q(t)$ oder ist $q(t) \equiv 0$ in (a, b), so gilt $w'(t) \neq 0$ in $(a, b]$.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung über Q_1, Q_2 ist insbesondere erfüllt, wenn $|Q(t)| \leqq q(t)$ gilt: man wählt $\gamma = 0$.

Bemerkung 2. Im Falle $q(t) \equiv 0$ hat man $U(t) = t - a$.

Bemerkung 3. Die Differentialgleichung $w'' + w = 0$ zeigt, daß die Voraussetzung $U(a) = 0$ wesentlich ist.

Zum Beweis des Satzes wird der folgende Hilfssatz (mit den Bezeichnungen von Satz 2) benötigt:

Hilfssatz. *Es sei $q(t) \not\equiv 0$ in (a, t_0). Für den kleinsten Eigenwert λ_0 des positiv definiten Randwertproblems*

$$u'' + \lambda q(t) u = 0, \qquad u(a) = u'(t_0) = 0, \qquad a < t_0 \leqq b$$

gelte $\lambda_0 > 1$.

Dann existiert keine Lösung von

$$w''+Q(t)w=0$$

mit $w(a)=w'(t_0)=0$.

Ist an einer Stelle $Q_1+\gamma Q_2<q(t)$, *so genügt es,* $\lambda_0\geqq 1$ *zu fordern.*

Beweis. Es werde angenommen, daß eine Lösung $w(t)$ mit $w(a)=w'(t_0)=0$ existiert. Die Greensche Transformierte von $w''+Q(t)w=0$:

$$[\overline{w}\,w']_a^{t_0}-\int_a^{t_0}|w'|^2\,dt+\int_a^{t_0}Q(t)|w|^2\,dt=0,$$

in der der Klammerausdruck verschwindet, wird in Real- und Imaginärteil zerlegt. Multiplikation der Gleichung für den Imaginärteil mit γ und Addition liefern

$$\int_a^{t_0}(Q_1+\gamma Q_2)|w|^2\,dt=\int_a^{t_0}|w'|^2\,dt.$$

Auf Grund der Voraussetzung ergibt sich hieraus

$$\int_a^{t_0}q(t)|w|^2\,dt\geqq\int_a^{t_0}|w'|^2\,dt, \tag{2}$$

wobei das Ungleichheitszeichen gilt, falls an einer Stelle $Q_1+\gamma Q_2<q(t)$ ist.

Setzt man $w(t)=w_1+iw_2$, so ist $w_j(a)=w_j'(t_0)=0$ $(j=1,2)$. Deshalb folgt aus der Selbstadjungiertheit und Volldefinitheit des im Hilfssatz genannten Eigenwertproblems [1]

$$\lambda_0\int_a^{t_0}q(t)w_j^2\,dt\leqq\int_a^{t_0}w_j'^2\,dt.$$

Nach Addition erhält man

$$\lambda_0\int_a^{t_0}q(t)|w|^2\,dt\leqq\int_a^{t_0}|w'|^2\,dt,$$

was (2) widerspricht.

Beweis des Satzes. Wird mit $[a,c]$ $(a\leqq c\leqq b)$ das größte Intervall mit a als linkem Endpunkt bezeichnet, in dem $q(t)$ identisch verschwindet, so zeigt Formel (2), daß keine Lösung von $w''+Q(t)w=0$ mit $w(a)=w'(t_0)=0$, $a<t_0\leqq c$, existieren kann.

Im Falle $c<b$ wird gezeigt, daß für den kleinsten Eigenwert λ_0 des positiv definiten Problems

$$u''+\lambda q(t)u=0,\qquad u(a)=u'(t_0)=0$$

$\lambda_0\geqq 1$ gilt für jedes t_0 mit $c<t_0\leqq b$. Angenommen, es sei $0<\lambda_0<1$. $u(t)$ sei die zu λ_0 gehörige Eigenfunktion und es gelte ohne Einschränkung $u'(a)=U'(a)>0$.

1. Siehe Kamke [3], Satz 2, S. 773.

t_1 sei die erste Nullstelle von $u'(t)$ in $(c, t_0]$. Dann ist in (a, t_1) $u(t)>0$, $U'(t)>0$ und $U(t)>0$. Aus

$$U''+q(t)U=0$$

$$u''+\lambda_0 q(t)u=0$$

folgt

$$[U'u-u'U]_a^{t_1}=-(1-\lambda_0)\int_a^{t_1} q(t)U u\,dt.$$

Hier ist die rechte Seite negativ, während

$$[U'u-u'U]_a^{t_1}=U'(t_1)u(t_1)\geqq 0$$

ist. Da nun $\lambda_0\geqq 1$ bewiesen ist und im Falle $t_0\neq b$ $\lambda_0=1$ ausscheidet, weil sonst auf Grund der Anfangsbedingungen $u(t)\equiv U(t)$ gelten müßte, ist nach dem Hilfssatz der Satz samt dem Zusatz bewiesen.

Wie Satz 2 beweist man den

Satz 3. *Die komplexwertige Funktion $Q(t)=Q_1+iQ_2$ und die reellwertige nicht negative Funktion $q(t)$ seien in $[a, b]$ stetig. Mit einer geeigneten reellen Konstanten γ gelte in (a, b)*

$$Q_1+\gamma Q_2\leqq q(t).$$

Die Differentialgleichung

$$u''+q(t)u=0$$

besitze eine Lösung $U(t)$ mit $U'(a)=0$, $U(t)\neq 0$ in (a, b).

Dann ist für jede Lösung $w(t)$ mit $w'(a)=0$ von

$$w''+Q(t)w=0$$

$w(t)\neq 0$ in (a, b).

Zusatz. Ist an einer Stelle $Q_1+\gamma Q_2<q(t)$ oder ist $q(t)\equiv 0$ in (a, b), so gilt $w(t)\neq 0$ in $(a, b]$.

Bemerkung. Im Falle $q(t)\equiv 0$ hat man $U(t)\equiv \text{const}\neq 0$.

Aus den beiden letzten Sätzen läßt sich der folgende Satz herleiten:

Satz 4. *$Q(t)=Q_1+iQ_2$ sei in $[\alpha, \beta]$ stetig. Mit reellen Konstanten γ und M, $M\geqq 0$, gelte in (α, β)*

$$Q_1+\gamma Q_2\leqq M.$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$w''+Q(t)w=0$$

im Falle $M>0$ in $[\alpha, \delta)$ und $(\alpha, \delta]$ mit

$$\delta=\min\left(\beta, \alpha+\frac{\pi}{2\sqrt{M}}\right)$$

und im Falle $M=0$ in $[\alpha, \beta]$ definit. Die halboffenen Intervalle können nicht durch die abgeschlossenen ersetzt werden.

Beweis. Die letzte Behauptung des Satzes folgt daraus, daß $w''+Mw=0$ die Lösung $w=\sin(t-\alpha)\sqrt{M}$ mit

$$w(\alpha)=0, \quad w'\left(\alpha+\frac{\pi}{2\sqrt{M}}\right)=0$$

besitzt.

Zunächst wird der Fall $M>0$ behandelt. Sei $w(t)$ eine Lösung von $w''+Q(t)w=0$ mit $w(a)=0$, $\alpha\leqq a<\delta$. $u''+Mu=0$ hat die Lösung $U(t)=\sin(t-a)\sqrt{M}$, für die $U(a)=0$, $U'(t)\neq 0$ in (a,δ) gilt. Daher ist nach Satz 2 auch $w'(t)\neq 0$ in (a,δ).

Ist aber $w(t)$ eine Lösung von $w''+Q(t)w=0$ mit $w'(a)=0$, $\alpha\leqq a<\delta$, so ist $U(t)=\cos(t-a)\sqrt{M}$ eine Lösung von $u''+Mu=0$ mit $U'(a)=0$, $U(t)\neq 0$ in (a,δ). Daher gilt nach Satz 3 $w(t)\neq 0$ in (a,δ).

Entsprechend beweist man die Behauptung für das Intervall $(\alpha,\delta]$.

Der Fall $M=0$ läßt sich mit dem Zusatz und der Bemerkung 2 zu Satz 2, sowie dem Zusatz und der Bemerkung zu Satz 3 erledigen.

2.

Als Anwendung der erzielten Ergebnisse sollen jetzt zwei Sätze über die Definitheit einer linearen Differentialgleichung in einem konvexen Gebiet hergeleitet werden.

Satz 5. *$p(z)$ sei holomorph in $|z|<R$ und es gelte dort*

$$|p(z)|\leqq\frac{\pi^2}{16R^2}.$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$w''+p(z)w=0$$

in $|z|<R$ definit.

Die Konstante $\pi^2/16$ ist die bestmögliche.

Beispiele. Die Differentialgleichung

$$w''+z^n w=0, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

ist in $|z|<(\pi/4)^{\frac{2}{n+2}}$ definit.

Die Differentialgleichung

$$w''+e^{z^n}w=0, \qquad n=0,1,2,\ldots$$

ist in $|z|<R$ definit, wobei für R gilt: $Re^{\pm R^n}=\pi/4$.

Beweis. Es sei $w(z_1)=0$ ($|z_1|<R$) für eine Lösung der Differentialgleichung. S sei eine Strecke in $|z|<R$ mit z_1 als Endpunkt. S läßt sich durch

$$z=z_1+te^{i\vartheta}, \quad \vartheta \text{ fest}, \quad 0\leqq\vartheta<2\pi, \quad 0\leqq t\leqq\beta<2R$$

beschreiben. Wird t als neue Veränderliche in die gegebene Differentialgleichung eingeführt, so ergibt sich

$$v''+Q(t)\,v=0$$

mit $v(t)=w(z_1+t\,e^{i\vartheta})$ und $Q(t)=e^{2i\vartheta}\,p(z_1+t\,e^{i\vartheta})$.
Da $v(0)=0$ gilt, folgt wegen

$$|Q(t)|<\frac{\pi^2}{4\beta^2}$$

nach Satz 1 (mit $\gamma=0$) $v'(t)\neq 0$ in $(0,\beta)$, d.h. $w'(z)\neq 0$ im Innern von S.

Satz 6. *$p(z)$ sei holomorph in einem konvexen Gebiet G und dort beschränkt:*

$$|p(z)|\leqq M.$$

Der Durchmesser von G sei höchstens $\pi/2\sqrt{M}$.

Dann ist die Differentialgleichung

$$w''+p(z)\,w=0$$

in G definit.

Bemerkung 1. Der Fall $p(z)\equiv M$ zeigt, daß für G kein größerer Durchmesser zugelassen werden kann.

Bemerkung 2. Satz 5 folgt auch unmittelbar aus Satz 6.

Beweis. Es sei $w(z_1)=0$ $(z_1\in G)$ für eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Wie beim vorangegangenen Beweis geht man zur Differentialgleichung

$$v''+Q(t)\,v=0, \qquad 0\leqq t\leqq\beta<\frac{\pi}{2\sqrt{M}},$$

über. Wegen $|Q(t)|\leqq M$ folgt aus Satz 4, daß die Ableitung einer Lösung mit $v(0)=0$ in $(0,\beta)$ nicht verschwinden kann. Also muß auch $w'(z)\neq 0$ im Innern von S gelten.

3.

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt werden mit Hilfe einer Greenschen Funktion gewonnen. Diese Methode wurde von Nehari [4] und in der Folge insbesondere von Beesack [1] zur Herleitung von Sätzen über Nichtoszillation benutzt. C sei ein den Punkt z enthaltender Weg, der vom Punkt a zum Punkt b verläuft. Bezeichnet man mit C_1 und C_2 die Teile von C, die die Endpunkte a, z bzw. z, b besitzen, so gilt für die zu C gehörige Greensche Funktion $G(z,\zeta)$ des Problems

$$w''=0, \qquad w'(a)=w(b)=0:$$

$$G(z,\zeta)=\begin{cases} b-z & \text{für } \zeta\in C_1 \\ b-\zeta & \text{für } \zeta\in C_2. \end{cases}$$

Für eine Lösung $w(z)$ von

$$w''+p(z)\,w=0$$

mit $w'(a)=w(b)=0$ hat man – wie durch Differenzieren bestätigt werden kann – die Darstellung

$$w(z)=\int_C G(z,\zeta)\,p(\zeta)\,w(\zeta)\,d\zeta, \tag{3}$$

wobei C dem Holomorphiegebiet von $p(z)$ angehöre.

Satz 7. *z_1 und z_2 seien Endpunkte des Weges S, wobei S entweder eine Strecke sei oder auf einem Halbkreisbogen liege und dem Holomorphiegebiet von $p(z)$ angehöre. Falls*

$$\int_S |z_2-\zeta|\,|p(\zeta)|\,|d\zeta|\leqq 1$$

gilt, existiert für keine Lösung $w(z)$ von

$$w''+p(z)\,w=0$$

ein Punktepaar a, b auf S mit $|z_2-b|<|z_2-a|$, für das $w'(a)=w(b)=0$ ist.

Zusatz. Ist

$$\max_{j=1,2}\int_S |z_j-\zeta|\,|p(\zeta)|\,|d\zeta|\leqq 1$$

oder sogar

$$|z_2-z_1|\int_S |p(\zeta)|\,|d\zeta|\leqq 1,$$

so ist $w''+p(z)\,w=0$ auf S definit.

Beweis. $w(z)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung mit $w'(a)=w(b)=0$, $a\in S$, $b\in S$. C sei der Teil von S, der die Endpunkte a und b besitzt. Dann erhält man aus (3) wegen $|G(z,\zeta)|\leqq|b-\zeta|$ für $z,\zeta\in C$

$$|w(z)|\leqq\int_C |b-\zeta|\,|p(\zeta)|\,|w(\zeta)|\,|d\zeta|.$$

Ist z_0 ein Punkt auf C mit $|w(z)|\leqq|w(z_0)|$ für $z\in C$, so folgt

$$|w(z_0)|<|w(z_0)|\int_C |b-\zeta|\,|p(\zeta)|\,|d\zeta|$$

und da $|b-\zeta|\leqq|z_2-\zeta|$ gilt und C ein Teilbogen von S ist, ergibt sich

$$1<\int_S |z_2-\zeta|\,|p(\zeta)|\,|d\zeta|,$$

was der Voraussetzung im Satz widerspricht.

Der Zusatz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem Satz.

Die Überlegungen werden jetzt auf ein Kreisgebiet ausgedehnt, das ohne Einschränkung den Nullpunkt zum Mittelpunkt habe.

Satz 8. *$p(z)$ sei holomorph in $|z|<R$ und mit*

$$\max_{|z|=r}|p(z)|=M(r)$$

gelte

$$2R\int_0^R M(r)\,dr\leqq 1.$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$w''+p(z)\,w=0$$

in $|z|<R$ definit.

Beispiel. Für die Differentialgleichung

$$w''+z^n w=0,\qquad n=1,2,\ldots$$

gilt die Behauptung für

$$R=\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{n+2}}.$$

Zum Beweise nehmen wir an, es gebe eine Lösung der Differentialgleichung mit $w'(z_1)=w(z_2)=0$, $|z_j|<R$ $(j=1,2)$. Liegen z_1 und z_2 auf einem gemeinsamen Radius und ist S ihre Verbindungsstrecke, so folgt aus (3) wegen $|G(z,\zeta)|\leqq|z_2-z_1|$ auf S:

$$|w(z)|\leqq|z_2-z_1|\int_S|p(\zeta)|\,|w(\zeta)|\,|d\zeta|,$$

woraus

$$1\leqq|z_2-z_1|\int_S|p(\zeta)|\,|d\zeta|$$

folgt. Dann müßte auch im Widerspruch zur Voraussetzung

$$1\leqq R\int_0^R M(r)\,dr$$

gelten.

Es sei jetzt $|z_j|=R_j$ $(j=1,2)$, $\arg z_2\neq\arg z_1$. In (3) wird für C die Vereinigung der beiden Strecken mit $z_1,0$ bzw. $0,z_2$ als Endpunkten gewählt.

Ist z_0 ein Punkt auf C mit $|w(z)|\leqq|w(z_0)|$, $z\in C$, so folgt aus (3)

$$1\leqq\int_C|G(z_0,\zeta)|\,|p(\zeta)|\,|d\zeta|. \tag{4}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) $\arg z_0=\arg z_2$ oder $z_0=0$:

Aus (4) ergibt sich mit $|\zeta|=r$ und $|z_0|=\rho$, $0\leqq\rho<R_2$:

$$1\leqq(R_2-\rho)\left(\int_0^{R_1}M(r)\,dr+\int_0^{\rho}M(r)\,dr\right)+\int_{\rho}^{R_2}(R_2-r)\,M(r)\,dr$$

und hieraus folgt wegen $R_2-r\leqq R_2-\rho\leqq R_2$ im Widerspruch zur Voraussetzung

$$1<2R\int_0^R M(r)\,dr.$$

b) $\arg z_0 = \arg z_1$:

Aus (4) ergibt sich mit $|\zeta| = r$, $|z_0| = \rho$, $0 < \rho \leqq R_1$:

$$1 \leqq |z_2 - z_0| \int_{\rho}^{R_1} M(r)\, dr + \int_{0}^{\rho} |z_2 - \zeta|\, M(r)\, dr + \int_{0}^{R_2} (R_2 - r)\, M(r)\, dr.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite wird am größten für $|\arg z_2 - \arg z_1| = \pi$. Daher ist

$$1 \leqq (R_2 + \rho) \int_{\rho}^{R_1} M(r)\, dr + \int_{0}^{\rho} (R_2 + r)\, M(r)\, dr + \int_{0}^{R_2} (R_2 - r)\, M(r)\, dr.$$

Da rechts eine monoton wachsende Funktion von ρ steht, folgt

$$1 \leqq \int_{0}^{R_1} (R_2 + r)\, M(r)\, dr + \int_{0}^{R_2} (R_2 - r)\, M(r)\, dr.$$

Also müßte auch

$$1 < 2R \int_{0}^{R} M(r)\, dr$$

gelten.

Satz 9. *$p(z)$ sei holomorph in $|z| \leqq R$ und es gelte*

$$R \int_{|z| = R} |p(z)\, dz| \leqq 1.$$

Dann ist die Differentialgleichung

$$w'' + p(z)\, w = 0$$

in $|z| \leqq R$ definit.

Bemerkung 1. Ist $p(z)$ nur in $|z| < R$ holomorph und ist

$$R \int_{|z| = R} |p(z)\, dz| \leqq 1,$$

so gilt die Behauptung des Satzes in $|z| < R$, da $r \int_{|z| = r} |p(z)\, dz|$ $(r < R)$ monoton wächst.

Bemerkung 2. Schwarz [5] bewies die Behauptung des Satzes unter der stärkeren Voraussetzung $R \int_{|z| = R} |p(z)\, dz| \leqq \frac{2}{\pi}$ (S. 484).

Beweis. Es sei $w'(z_1) = w(z_2) = 0$ $(|z_j| \leqq R)$ für eine Lösung der Differentialgleichung angenommen. K sei der z_1 und z_2 enthaltende Orthogonalkreisbogen zu $|z| = R$ in $|z| \leqq R$ und C sei der Teilbogen von K mit den Endpunkten z_1 und z_2. Dann gilt nach (3) wegen $|G(z, \zeta)| \leqq |z_2 - z_1| \leqq 2R$:

$$1 \leqq |z_2 - z_1| \int_{C} |p(z)\, dz| \leqq 2R \int_{K} |p(z)\, dz|. \tag{5}$$

Wie Nehari [4] gezeigt hat, besteht die Ungleichung

$$\int_K |p(z)\,dz| < \tfrac{1}{2} \int_{|z|=R} |p(z)\,dz|.$$

Damit ist wegen (5)

$$1 < R \int_{|z|=R} |p(z)\,dz|,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

4.

Der Koeffizient $p(z)$ in der Differentialgleichung

$$w'' + p(z)\,w = 0$$

sei in einem einfach zusammenhängenden Gebiet G holomorph. $w(z)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung, die in einem Punkt a von G entweder der Anfangsbedingung $w(a)=0$ oder der Anfangsbedingung $w'(a)=0$ genügt. Ohne Einschränkung sei a der Nullpunkt. Führt man durch $z=r\,e^{i\vartheta}$, ϑ fest, $0 \leqq \vartheta < 2\pi$, die neue Veränderliche r in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man mit

$$e^{2i\vartheta}\,p(r\,e^{i\vartheta}) = Q(r,\vartheta) = Q_1(r,\vartheta) + i\,Q_2(r,\vartheta): \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + Q(r,\vartheta)\,w = 0.$$

Mit Hilfe der Sätze 1, 2, 3, 4 und 7 kann man nun eine vom Nullpunkt ausgehende Strecke, deren Richtung durch ϑ gekennzeichnet ist, angeben, auf der $w'(z)$ bzw. $w(z)$ nicht verschwinden. Wenn ϑ das Intervall $[0, 2\pi)$ durchläuft, erhält man somit ein Gebiet, das keine Nullstelle von $w'(z)$ bzw. $w(z)$ enthält. Zum Beispiel ergibt die

Anwendung von Satz 1. Es sei

$$Q_1(r,\vartheta) \leqq \frac{\pi^2}{4R^2} \qquad \text{für } 0 \leqq r \leqq R,\ \vartheta \text{ fest}.$$

Dann gilt für $w(z)$ $(z=r\,e^{i\vartheta})$ mit $w(0)=0$ $(w'(0)=0)$ $w'(z) \neq 0$ $(w(z) \neq 0)$ in $(0, R)$.

Beispiel. Für die Differentialgleichung

$$w'' + z^n\,w = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ist

$$Q_1(r,\vartheta) = r^n \cos(n+2)\,\vartheta,$$
$$Q_2(r,\vartheta) = r^n \sin(n+2)\,\vartheta.$$

Eine Lösung $w(z)$ mit $w(0)=0$ $(w'(0)=0)$ kann höchstens auf den Halbstrahlen

$$\vartheta = \frac{2k}{n+2}\,\pi, \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1,$$

Nullstellen von $w'(z)$ $(w(z))$ haben, da für alle anderen Winkel entweder $Q_1(r,\vartheta)\leqq 0$ ist oder (s. Bemerkung 1 zu Satz 1) $Q_2(r,\vartheta)$ für $r>0$ einerlei Vorzeichen besitzt. Der Betrag der nächsten Nullstelle von $w'(z)$ $(w(z))$ ist mindestens $(\pi/2)^{\frac{2}{n+2}}$.

Anwendung von Satz 4. Es sei $Q_1(r,\vartheta)\leqq M$ für $0\leqq r\leqq R$, ϑ fest. Dann gilt für $w(z)$ $(z=re^{i\vartheta})$ mit $w(0)=0$ $(w'(0)=0)$ $w'(z)\neq 0$ $(w(z)\neq 0)$ für $0<r<\min(R,\pi/2\sqrt{M})$, falls $M>0$ ist und $w'(z)\neq 0\,(w(z)\neq 0)$ für $0<r\leqq R$, falls $M\leqq 0$ ist.

Anwendung von Satz 7. Es sei

$$\int_0^R (R-r)\,|Q(r,\vartheta)|\,dr\leqq 1,$$

dann ist $w(re^{i\vartheta})$ mit $w'(0)=0$ in $(0,R]$ nullstellenfrei. Gilt insbesondere

$$\int_0^R (R-r)\,|p(re^{i\vartheta})|\,dr\leqq 1 \qquad \text{für jedes } \vartheta,$$

dann ist $w(z)$ mit $w'(0)=0$ in $|z|\leqq R$ nullstellenfrei.

Beispiele. Jede Lösung von

$$w''+z^n w=0, \qquad n=1,2,\ldots$$

mit $w'(0)=0$ ist in $|z|\leqq[(n+1)(n+2)]^{\frac{1}{n+2}}$ nullstellenfrei. Jede Lösung von

$$w''+e^{nz}w=0, \qquad n=1,2,\ldots$$

mit $w'(0)=0$ ist in $|z|\leqq R$ nullstellenfrei, wobei für R gilt: $e^{nR}=n^2+1+nR$.

5.

Im folgenden Satz werden gewisse Lösungen einer Differentialgleichung mit komplexwertigem Koeffizienten mit gewissen Lösungen einer Differentialgleichung mit reellem Koeffizienten verglichen. Re sei die Abkürzung für Realteil.

Satz 10. *Für die in $[a,b)$ komplexwertige stetige Funktion $Q(t)$ gelte in (a,b)* $\operatorname{Re} Q(t)\leqq q(t)$, *wo $q(t)$ in $[a,b)$ stetig sei.*
Die Differentialgleichung

$$u''+q(t)\,u=0$$

besitze eine Lösung $u(t)$ mit $u(t)\neq 0$ in (a,b).

1. *Ist $u'(a)=0$ und (ohne Einschränkung) $u(a)=1$, so gilt in $[a,b)$ für eine Lösung $w(t)$ von*

$$w''+Q(t)\,w=0$$

mit $\operatorname{Re}\overline{w}(a)\,w'(a)\geqq 0$, $w(a)\neq 0$:

$$|w(t)|\geqq u(t)\,|w(a)|.$$

Das Gleichheitszeichen kann höchstens dann gelten, wenn $\operatorname{Re}\overline{w}(a)\,w'(a)=0$ *und in* (a,t) $\operatorname{Re}Q\equiv q$ *ist.*

2. *Ist* $u(a)=0$ *und (ohne Einschränkung)* $u'(a)=1$, *so gilt für eine Lösung* $w(t)$ *von*

$$w''+Q(t)\,w=0$$

mit $w(a)=0$ *in* $[a,b)$

$$|w(t)|\geqq u(t)|\,w'(a)|.$$

Bemerkung. Insbesondere folgt $w(t)\neq 0$ in (a,b).

Man beachte, daß $q(t)\geqq 0$ nicht vorausgesetzt wird.

Beispiel. Es gelte $\operatorname{Re}Q\leqq M$ in (a,b).

1. Bei $\operatorname{Re}\overline{w}(a)\,w'(a)\geqq 0$ folgt:

$$|w(t)|\geqq|w(a)|\cos(t-a)\sqrt{M} \qquad \text{für } a\leqq t<\min\left(b,a+\frac{\pi}{2\sqrt{M}}\right), \qquad \text{falls } M>0,$$

$$|w(t)|\geqq|w(a)|\cosh(t-a)\sqrt{|M|} \qquad \text{für } a\leqq t<b, \qquad \text{falls } M<0,$$

$$|w(t)|\geqq|w(a)| \qquad \text{für } a\leqq t<b, \qquad \text{falls } M=0 \text{ ist.}$$

2. Bei $w(a)=0$ folgt:

$$|w(t)|\geqq|w'(a)|\frac{1}{\sqrt{M}}\sin(t-a)\sqrt{M} \qquad \text{für } a\leqq t<\min\left(b,a+\frac{\pi}{\sqrt{M}}\right), \text{falls } M>0,$$

$$|w(t)|\geqq|w'(a)|\frac{1}{\sqrt{|M|}}\sinh(t-a)\sqrt{|M|} \qquad \text{für } a\leqq t<b, \qquad \text{falls } M<0,$$

$$|w(t)|\geqq|w'(a)|(t-a) \qquad \text{für } a\leqq t<b, \qquad \text{falls } M=0 \text{ ist.}$$

Zum Beweis des Satzes wird der folgende Hilfssatz benutzt:

Hilfssatz. *In* (a,b) *seien die komplexwertige Funktion* $h(t)$ *und die reellwertige Funktion* $g(t)$ *stetig differenzierbar und es sei* $g(t)\neq 0$ *in* (a,b).

Dann gilt in (a,b)

$$|h'|^2\geqq g'\left(\frac{|h|^2}{g}\right)'.$$

Mit $h(t)=h_1+ih_2$ ist nämlich

$$\begin{aligned}|h'|^2-g'\left(\frac{|h|^2}{g}\right)' &= g^{-2}\left[g^2(h_1'^2+h_2'^2)+g'^2(h_1^2+h_2^2)-2g\,g'(h_1h_1'+h_2h_2')\right]\\ &= g^{-2}\left[(h_1g'-h_1'g)^2+(h_2g'-h_2'g)^2\right]\geqq 0.\end{aligned}$$

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, wird die Greensche Transformierte der Differentialgleichung

$$w''+Q(t)w=0$$

gebildet:

$$[\overline{w}\,w']_a^t-\int_a^t|w'|^2\,dt+\int_a^t Q(t)|w|^2\,dt=0.$$

Hieraus folgt durch Übergang zum Realteil:

$$\operatorname{Re}\overline{w}(t)w'(t)=\operatorname{Re}\overline{w}(a)w'(a)+\int_a^t|w'|^2\,dt-\int_a^t|w|^2\operatorname{Re}Q(t)\,dt.$$

Genügen $w(t)$ und $Q(t)$ den im Satz genannten Bedingungen und wird der Hilfssatz mit $h=w$ und $g=u$ angewandt, so ergibt sich

$$\operatorname{Re}\overline{w}(t)w'(t)\geqq\int_a^t u'\left(\frac{|w|^2}{u}\right)'dt-\int_a^t q(t)|w|^2\,dt,\tag{6}$$

wobei hier (und damit auch in den folgenden Ungleichungen) das Gleichheitszeichen höchstens im Falle $\operatorname{Re}Q\equiv q$ in (a,t) und $\operatorname{Re}\overline{w}(a)w'(a)=0$ gelten kann.

Aus (6) folgt nach Anwendung von partieller Integration auf das erste Integral wegen $u''/u=-q(t)$ und $u'(a)=0$

$$\operatorname{Re}\overline{w}(t)w'(t)\geqq\frac{u'}{u}(t)|w(t)|^2.$$

Berücksichtigt man hier $\operatorname{Re}\overline{w}(t)w'(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2$, so erhält man durch Integration (zunächst nur für eine (Halb-)Umgebung von a) die Behauptung des Satzes.

Zum Beweis des zweiten Teils des Satzes geht man von

$$[\overline{w}\,w']_{a+\varepsilon}^t-\int_{a+\varepsilon}^t|w'|^2\,dt+\int_{a+\varepsilon}^t Q(t)|w|^2\,dt=0\qquad(\varepsilon>0)$$

aus, woraus wie eben

$$\operatorname{Re}\overline{w}(t)w'(t)\geqq\operatorname{Re}\overline{w}(a+\varepsilon)w'(a+\varepsilon)+\left[u'\frac{|w|^2}{u}\right]_{a+\varepsilon}^t$$

geschlossen werden kann. Für $\varepsilon\to 0$ folgt

$$\operatorname{Re}\overline{w}(t)w'(t)\geqq\frac{u'}{u}(t)|w(t)|^2.$$

Integration ergibt

$$|w(t)|\geqq u(t)\left|\frac{w}{u}(a+\varepsilon)\right|$$

und der Grenzübergang liefert die Behauptung.

Als Anwendung des Satzes ergibt sich

Satz 11. *$p(z)$ sei holomorph in $|z|<R$ und es gelte dort $|p(z)|\leqq M$. Ist $w(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$w''+p(z)w=0$$

mit $w'(0)=0$ bzw. $w(0)=0$, so gilt mit $|z|=r$:

$$|w(z)|\geqq|w(0)|\cos r\sqrt{M} \qquad \text{in} \quad |z|<\min\left(R,\frac{\pi}{2\sqrt{M}}\right),$$

bzw.

$$|w(z)|\geqq|w'(0)|\frac{1}{\sqrt{M}}\sin r\sqrt{M} \quad \text{in} \quad |z|<\min\left(R,\frac{\pi}{\sqrt{M}}\right).$$

6.

Zum Abschluß wird noch ein Satz über die Definitheit einer Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen bewiesen.

Satz 12. *G_z sei ein konvexes Gebiet der z-Ebene und G_w ein Gebiet der w-Ebene. Für $z\in G_z$, $w\in G_w$ sei $F(z,w)$ regulär-analytisch und beschränkt:*

$$|F(z,w)|\leqq M.$$

Der Durchmesser von G_z sei höchstens $\pi/2\sqrt{M}$.

Dann ist die Differentialgleichung

$$w''=wF(z,w)$$

in G_z definit, falls nur Lösungen zugelassen werden, deren Wertevorrat in G_w enthalten ist.

Bemerkung. Falls $F(z,w)$ nicht von w abhängt, wird die Aussage von Satz 6 erhalten.

Beweis. Angenommen, es existiere eine Lösung $w(z)$ von $w''=wF(z,w)$ mit $w'(z_1)=w(z_2)=0$, $z_j\in G_z$ $(j=1,2)$. Durch $z=z_1+te^{i\vartheta}$, $0\leqq t\leqq T=|z_2-z_1|$, $\vartheta=\arg(z_2-z_1)$, wird eine neue Veränderliche t in die Differentialgleichung eingeführt. Mit $v(t)=w(z_1+te^{i\vartheta})$, $H(t,v)=e^{2i\vartheta}F(z_1+te^{i\vartheta},v)$ lautet die transformierte Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dt^2}=vH(t,v)$$

und diese müßte eine Lösung $v(t)$ mit $v'(0)=v(T)=0$ besitzen. Mit der Greenschen Funktion

$$G(t,\tau)=\begin{cases}T-t & \text{für } 0\leqq\tau\leqq t\leqq T\\ T-\tau & \text{für } 0\leqq t\leqq\tau\leqq T\end{cases}$$

läßt sich $v(t)$ in der Form

$$v(t)=-\int_0^T G(t,\tau)H(\tau,v(\tau))v(\tau)d\tau$$

darstellen. Man setzt $v(t)=u(t)\cos\frac{\pi}{2}\frac{t}{T}$ und findet

$$|u(t)|\leqq\frac{M}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{t}{T}}\int_0^T G(t,\tau)|u(\tau)|\cos\frac{\pi}{2}\frac{\tau}{T}\,d\tau.$$

Hieraus ergibt sich mit $\max\limits_{0\leqq t\leqq T}|u(t)|=u_0$

$$|u(t)|\leqq\frac{M}{\cos\frac{\pi}{2}\frac{t}{T}}u_0\int_0^T G(t,\tau)\cos\frac{\pi}{2}\frac{\tau}{T}\,d\tau=Mu_0\frac{4T^2}{\pi^2},$$

woraus

$$1\leqq M\frac{4T^2}{\pi^2}$$

folgt. Diese Ungleichung widerspricht aber der Voraussetzung über den Durchmesser von G_z.

Literatur

1. Beesack, P. R.: Nonoscillation and disconjugacy in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. **81**, 211–242 (1956).
2. Hille, E.: Oscillation theorems in the complex domain. Trans. Amer. Math. Soc. **23**, 350–385 (1922).
3. Kamke, E.: Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen. Math. Z. **45**, 759–787 (1939).
4. Nehari, Z.: On the zeros of solutions of second-order linear differential equations. Amer. J. Math. **76**, 689–697 (1954).
5. Schwarz, B.: Disconjugacy of complex differential systems. Trans. Amer. Math. Soc. **125**, 482–496 (1966).
6. Taam, C. T.: Nonoscillation and comparison theorems of linear differential equations with complex-valued coefficients. Portugal. Math. **12**, 57–72 (1953).

Dr. H. Herold
Mathematisches Institut der Universität
87 Würzburg, Klinikstraße 6

(Eingegangen am 23. Juli 1968)

Math. Z. 108, 285 – 287 (1969)

On Finitely Generated Subgroups of a Free Product

ABRAHAM KARRASS and DONALD SOLITAR

1. Introduction

Baumslag proved in [1] that if G is a non-trivial free product and H is a finitely generated subgroup containing a non-trivial normal subgroup of G, then H is of finite index in G.

In this note we modify his argument and prove the following two generalizations of the above result:

Let G be the free product $A*B$ with $A\neq 1$, $B\neq 1$, and let H be a finitely generated subgroup.

(1) *If H contains a non-trivial subnormal subgroup of G, then H is of finite index in G.*

(2) *If H contains a non-trivial normal subgroup of $K<G$, where K is not contained in a conjugate of A or B, then $H\cap K$ is of finite index in K.*

2. The Proofs

Lemma. *Let $G=A*B$ with $A\neq 1, B\neq 1$, and let K be a subgroup not contained in a conjugate of A or of B. Then some conjugate of K will contain an element beginning and ending with an A-syllable as well as one beginning and ending with a B-syllable, unless K is cyclic and has trivial intersection with the conjugates of the factors.*

Proof. Case 1. K (or a conjugate of K) contains a non-trivial element from A or B.

To be specific let $a(\neq 1)$ be in $A\cap K$. Since K is not contained in A, there exists u in K containing a B-syllable,

$$u=a_1 b_1 \ldots a_r b_r a_{r+1}$$

where a_1 or a_{r+1} is possibly trivial but b_1 is not. Then $L=a_1^{-1} K a_1$ contains an element $a'(\neq 1)$ in A and the element

$$v=b_1 \ldots a_r b_r a''.$$

Therefore $v a' v^{-1}$ is in L and begins and ends in a B-syllable.

Case 2. K has trivial intersection with the conjugates of A and of B.

Let L be a conjugate of K which contains an element $u \neq 1$ of minimal syllable length (over all conjugates of K) and an element v not a power of u of minimal syllable length (over all conjugates of K which have an element of the same syllable length as u). Clearly u has syllable length $\geqq 2$ and is cyclically reduced.

Suppose v is not cyclically reduced and begins with an A-syllable, say. Thus,

$$v = a_1' b_1' \dots b_t' a_{t+1}',$$

where a_1' and a_{t+1}' are not trivial. Replacing u by u^{-1} if necessary, we may assume that

$$u = a_1 b_1 \dots a_r b_r.$$

Now $a_1' \neq a_1$ and $a_{t+1}' \neq a_1^{-1}$. (For otherwise, $M = a_1^{-1} L a_1$ has an element u' of the same syllable length as that of u and an element v' not a power of u' of smaller syllable length than that of v.) Therefore $u^{-1} v u$ begins and ends with a B-syllable, and so $v, u^{-1} v u$ satisfy the desired requirements.

On the other hand, if v is cyclically reduced, then

$$v = a_1' b_1' \dots a_t' b_t'$$

and again we may suppose

$$u = a_1 b_1 \dots a_r b_r.$$

Clearly, $r \leqq t$. Now the elements $u^{-1} v$ and $v u^{-1}$ are not cyclically reduced and begin with an A-syllable and a B-syllable, respectively. (For otherwise one of these elements has syllable length less than that of v and is not a power of u.)

Theorem 1. *Let $G = A * B$ with $A \neq 1$, $B \neq 1$, and let H be a finitely generated subgroup of G. If K is any subgroup of G not contained in a conjugate of a factor A or B, and H contains a non-trivial normal subgroup N of K, then $H \cap K$ is of finite index in K.*

Proof. N is not contained in a conjugate of A or of B; for otherwise, K would be contained in a conjugate of a factor (see, e.g., Corollary 4.1.5 in [4]).

Moreover, if N is cyclic, then K is either cyclic or a free product of two cyclic groups each of order two; in either event N is of finite index in K, and so $H \cap K$ is of finite index in K.

Hence we may assume N is not cyclic, and so the lemma applies to N. If $k (\neq 1)$ is in K, then choose an element n in N such that the beginning and end syllable of n comes from a different factor (A or B) than the end syllable of k. Then knk^{-1} is in H and so $Hkn = Hk$ is a double ended coset of H in G; but H has only finitely many double ended cosets in G (see Lemma 3 in [1]). Thus K determines finitely many cosets of H, i.e., $H \cap K$ is of finite index in K.

Theorem 2. *Let $G = A * B$ with $A \neq 1$, $B \neq 1$, and let H be a finitely generated subgroup of G. If H contains a non-trivial subnormal subgroup N of G, then H is of finite index in G.*

Proof. We prove this by induction on the length r of a normal series

$$N = N_r \lhd N_{r-1} \lhd \cdots \lhd N_1 \lhd G.$$

If $r=1$, then Theorem 1 with $K=G$ applies. Suppose $r>1$; by Theorem 1, $H \cap N_{r-1}$ is of finite index j in N_{r-1} (that the subnormal subgroup N_{r-1} is not contained in a conjugate of A or of B follows easily from Corollary 4.1.5 in [4]). Therefore $H \cap N_{r-1}$ contains a non-trivial characteristic subgroup of N_{r-1} (e.g., the verbal subgroup $N_{r-1}(X^d)$ where $d=j!$). Hence H contains a non-trivial normal subgroup of N_{r-2} and therefore contains a subnormal subgroup of G with a normal series of length $r-1$. Therefore, by the inductive hypothesis, we have H has finite index in G.

Corollary. *Let $G=A*B$ with $A \neq 1$, $B \neq 1$, and let H be a finitely generated subgroup of G. If K is any subgroup of G not contained in a conjugate of A or B, and H contains a non-trivial subnormal subgroup of K, then $H \cap K$ is of finite index in K.*

Proof. Use the same argument as in the proof of Theorem 2.

Theorem 2 was proved for the case when G is free by Greenberg [2].

We conjecture the following: Let $G=A*B$ with $A \neq 1$, $B \neq 1$, and let H be a finitely generated subgroup of G. If H has a non-trivial intersection with every non-trivial normal subgroup of G, then H is of finite index in G. This assertion holds when G is free; if true for a non-trivial free product, it would be a generalization of Theorem 2 above since any two non-trivial subnormal subgroups of a free product intersect non-trivially (see [3]).

References

1. Baumslag, B.: Intersections of finitely generated subgroups in free products. Journal London Math. Soc. **41**, 673–679 (1966).
2. Greenberg, L.: Discrete groups of motions. Can. J. Math. **12**, 414–425 (1960).
3. Karrass, A., and D. Solitar: On finitely generated subgroups of a free group. To be submitted to Proc. Amer. Math. Soc.
4. Magnus, W., A. Karrass, and D. Solitar: Combinatorial group theory. New York: Interscience Publishers 1966.

Abraham Karrass
Donald Solitar
Mathematics Department
York University
Toronto 12, Ontario, Canada

(Received October 21, 1968)

Math. Z. 108, 288 – 312 (1969)

Unitary Groups in Hjelmslev-Moufang Planes

FERDINAND D. VELDKAMP

In a previous paper [13], Springer and the present author introduced the analogue over the split octaves of a projective octave plane over an octave field, the so-called Hjelmslev-Moufang plane. In [19] the author considered the projective groups of such a plane. In the present paper we generalize the theory of unitary groups in projective octave planes given in [18] to the case of Hjelmslev-Moufang planes. Thus we introduce polarities, the corresponding unitary groups PU and their subgroups PT generated by unitary transvections. These latter groups are shown to be simple (cf. also Tits [16]) and the factor groups PU/PT are studied; thus we find a geometric proof of a theorem of Jacobson [6] which says that the automorphism group of a split exceptional central simple Jordan algebra modulo its center is simple.

Our notation will be the same as in the two previous papers on Hjelmslev-Moufang planes [13, 19], to which we also refer for definitions and results concerning these planes that will be used throughout this paper. An important tool in the study of unitary groups is, just as in [18], a description of the subgroups consisting of unitary transformations leaving a certain line fixed; this is done in section 3. Section 1 gives generalities about polarities, section 2 deals with unitary transvections and dilatations. Section 4 consists of a series of technical lemmas, in 5 we prove the simplicity of PT, in 6 we deal with the factor groups PU/PT. In section 7 it is shown that the groups PT corresponding to the so-called nonlinear polarities are the outer forms of the simple algebraic group of type E_6 (the Chevalley group) which are split by a quadratic extension.

1.

We start by defining dualities and polarities.

(1.1) **Definition.** Let $\mathscr{P}(C)$ and $\mathscr{P}(D)$ be Hjelmslev-Moufang planes, C and D being split octave algebras over fields K and L respectively. A *duality* of $\mathscr{P}(C)$ onto $\mathscr{P}(D)$ consists of a mapping of the set of points of $\mathscr{P}(C)$ onto the set of lines of $\mathscr{P}(D)$, and a mapping of the set of lines of $\mathscr{P}(C)$ onto the set of points of $\mathscr{P}(D)$ such that a point and a line in $\mathscr{P}(C)$ are incident if and only if their images in $\mathscr{P}(D)$ are so. A *polarity* of $\mathscr{P}(C)$ is a duality of $\mathscr{P}(C)$ onto itself of order two.

If $\mathscr{P}(C)$ is coordinatized by a Jordan algebra $A(C)=A(C; 1, 1, 1)$, a polarity π_0 is given by:

$$\pi_0\colon\ x_* \leftrightarrow x^* \qquad \text{for } x\in A,\ x\times x=0.$$

This π_0 is called the *standard polarity* relative to the coordinate algebra $A(C)$. Any duality

$$\pi\colon \mathscr{P}(C) \to \mathscr{P}(D)$$

can be written as a product of π_0 with a collination, which by the fundamental theorem of Hjelmslev-Moufang planes ([19], Theorem (2.13)) is induced by some $1-1$ σ-linear $T\colon A(C) \to A(D)$ such that $det(Tx) = v\,\sigma(det\ x)$ for all $x \in A(C)$. So

$$\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner .$$

Since the action of $\ulcorner T \urcorner$ on the points is given by $x_* \mapsto (Tx)_*$, on the lines by $x^* \mapsto (\tilde{T}x)^*$, π is a polarity of $\mathscr{P}(C)$ if and only if $T\colon A(C) \to A(C)$ satisfies

$$\tilde{T}T = \alpha,$$

i.e.

$$T = \alpha T'.$$

Taking the adjoint of this equation we conclude that $\alpha\,\sigma(\alpha) = 1$, so for $\sigma = 1$, $\alpha = \pm 1$, and for $\sigma \neq 1$, $\alpha = \rho^{-1}\sigma(\rho)$ for some ρ. In the latter case

$$(\rho T)' = \rho T,$$

so we may assume $T = T'$. If for $\sigma = 1$, $T = -T'$, we would get $det\ T = -det\ T$, contradicting the fact that T is $1-1$. Thus we have shown.

(1.2) **Proposition.** *If π_0 is a standard polarity of $\mathscr{P}(C)$, any polarity of $\mathscr{P}(C)$ can be written as $\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner$, where T is σ-linear: $A(C) \to A(C)$, $det(Tx) = v\,\sigma(det\ x)$ for all x, $T = T'$, and conversely any such $\pi_0 \ulcorner T \urcorner$ is a polarity. $T = T'$ implies $\sigma^2 = 1$.*

The proof that $\sigma^2 = 1$ is as usual; cf. [18].

(1.3) **Definition.** A point x_* (line x^*) in $\mathscr{P}(C)$ is called *weakly isotropic* relative to a polarity $\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner$ if $x_* \simeq \pi x_*$ ($x^* \simeq \pi x^*$), i.e., if $(x, Tx) = 0$, *(strongly) isotropic* if $x_* | \pi x_*$ ($x^* | \pi x^*$), i.e., if $\langle x, Tx \rangle = 0$, and *anisotropic* if it is not weakyl isotropic. A polarity π is called *elliptic*, if there exist no weakly isotropic points relative to π, *weakly hyperbolic* if there exist weakly isotropic points but no strongly isotropic points relative to π, and *(strongly) hyperbolic* if there exist strongly isotropic points relative to π.

Notice that strongly isotropic points (lines) are weakly isotropic.

(1.4) **Definition.** A *polar triangle* with respect to a polarity π is a set of *three anisotropic points* x_{1*}, x_{2*}, x_{3*} such that $x_{i*} | \pi x_{j*}$ for all $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$.

We want to show the existence of anisotropic points and polar triangles. First a lemma.

(1.5) **Lemma.** *Assume x_* is strongly isotropic. Then all points $y_* | \pi x_*$ with $y_* \neq x_*$ are anisotropic.*

Proof. $y_* | \pi x_*$ implies $\pi y_* | x_*$. From $y_* \neq x_*$ it follows that $\pi y_* \neq \pi x_*$. Then it follows from [13], (3.10) (iv), that $y_* \neq \pi y_*$, i.e., y_* is anisotropic.

(1.6) **Lemma.** *For any polarity π there exist anisotropic points.*

Proof. Let u be a primitive idempotent.

Assume all points $x_*|u^*$ are weakly isotropic. So for $x\in R=K(e-u)+E_0$, $x\times x=0$ implies $(x, Tx)=0$, if $\pi=\pi_0{}^{\ulcorner}T^{\urcorner}$ with $T=T'$.

For $x\in R$, $x\times x=0$ if and only if $Q_1(x)=0$ (see [11]). So $Q_1(x)=0$ implies $(x, Tx)=0$. From this we shall derive that $(x, Ty)=\lambda Q_1(x, y)$, for some fixed $\lambda\in K$. In the proof of this we use the fact that Q_1 is a form of maximal index in an even dimensional space. But the result actually holds for arbitrary non-degenerate hermitian forms of index $\geqq 2$, as one can prove using the theory of [17].

So let V_1 and V_2 be maximal isotropic subspaces of R with respect to Q_1, with $V_1\cap V_2=0$. Since Q_1 is of maximal index in an even dimensional space, $V_1+V_2=R$. For $x_i\in V_i$, $Q_1(x_1, x_2)=0$ implies that $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2$ is Q_1-isotropic for all $\lambda_1, \lambda_2\in K$, hence $(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2,\ T(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2))=0$ for all λ_1, λ_2, so $(x_1, Tx_2)=0$. This implies that the forms $Q_1(x_1, x_2)$ and (x_1, Tx_2), $x_i\in V_i$, induce the same duality from V_1 onto V_2, hence there exists a $\lambda\in K$ such that $(x_1, Tx_2)=\lambda Q_1(x_1, x_2)$, $x_i\in V_i$. This implies in particular that T must be linear. Take a basis $e_1, \ldots, e_{10}$ for R such that $e_1, \ldots, e_5\in V_1$, $e_6, \ldots, e_{10}\in V_2$, $Q_1(e_i, e_{j+5})=\delta_{i,j}$. Then $(e_l, Te_m)=\lambda Q_1(e_l, e_m)$ for $1\leqq l,\ m\leqq 10$, hence $(x, Ty)=\lambda Q_1(x, y)$ for all $x, y\in R$.

After normalization of T we may assume that $(x, Ty)=Q_1(x, y)=(x, \bar{y})$, for $x, y\in R$. Hence

$$Ty=\lambda(y)\,u+\bar{y}+v(y) \qquad \text{for } y\in R,$$

where λ is linear: $R\to K$ and v linear: $R\to E_1$.

Now choose $x\in E_0$ with $Q(x)=0$, $\lambda(x)=0$. Then

$$Tx=-x+v(x).$$

It follows from [13], (1.3)(iii), that $\langle x, Tx\rangle=0$, i.e., x_* is strongly isotropic. The existence of anisotropic points now follows from the previous lemma.

(1.7) **Lemma.** *Any anisotropic point can be embedded in a polar triangle.*

Proof. Let u_* be anisotropic. After conjugation of π by some element of PS we may assume that u is a primitive idempotent and that $\pi u_*=u^*$. $x_*|u^*$ implies $\pi x_*|u_*$, so $x\in R$ implies $Tx\in R$. Assume $(x, Tx)=0$ for all $x\in R$ with $Q_1(x)=0$, i.e. with $x\times x=0$. The proof of the previous lemma tells us that in that case T may be normalized to the effect that

$$Tx=\bar{x} \qquad \text{for all } x\in R.$$

By [10], Proposition 3, or [11], section 3, this is impossible for a T satisfying $det(Tx)=\nu\, det\, x$ for all $x\in A(C)$. So there must exist an anisotropic $x_*|u^*$. u_*, x_* and $\pi(u\times x)^*$ then form a polar triangle.

(1.8) **Proposition.** *If $T=1$, i.e., $\pi=\pi_0$, the following are equivalent.*

(i) *x_* is strongly isotropic.*

(ii) *x_* is weakly isotropic.*

(iii) $x^2=0$.

Proof. The equivalence of (i) and (iii) is immediate from [13], (1.3)(iv). As for the equivalence of (ii) and (iii), we notice that $x \times x = 0$ if and only if either $x^2 = 0$, hence $(x, x) = 0$, or x is a primitive idempotent (up to a scalar multiple), hence $(x, x) \neq 0$.

It is not known whether there exist weakly hyperbolic polarities that are not strongly hyperbolic.

After conjugation of a given polarity π by an element of PS we may assume that $(1, 0, 0; 0, 0, 0)_*$, $(0, 1, 0; 0, 0, 0)_*$ and $(0, 0, 1; 0, 0, 0)_*$ form a polar triangle. The same proof as in section 2 of [18] then yields:

$$T = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3; T_1, T_2, T_3],$$

where T_1, T_2, T_3 form a related triple of semisimilarities of C. (2.13) of [18] goes through in the split case equally well, as was already remarked there, and so do (2.14) of the same paper and the discussion following it.

2.

In this section we shall derive some results about unitary groups in Hjelmslev-Moufang planes, in particular about unitary transvections and dilatations.

(2.1) **Definition.** Let π be a polarity. The group of elements of PG commuting with π is called the *unitary group* of π and denoted by $PU(\pi)$, or PU. Elements of PU are called *unitary transformations* of $\mathscr{P}(C)$.

Let $\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner$, for a fixed standard polarity π_0.

(2.2) **Proposition.** (i) $\ulcorner S \urcorner \in PU(\pi)$ *if and only if there exists a* $\lambda \in K$ *such that* $S' T S = \lambda T$. *Such a* λ *satisfies* $\lambda = \sigma(\lambda)$.

(ii) *Every element of* $PU(\pi)$ *can be written as* $\ulcorner S \urcorner$ *with* $S' T S = T$. *For such an* S, $\det S \cdot \sigma(\det S) = 1$.

(iii) *If* $\sigma = 1$, *i.e., if* π *is a linear polarity, then every element of* $PU(\pi)$ *can be written as* $\ulcorner S \urcorner$ *with* $S' T S = T$, $\det S = 1$; *such an* S *is uniquely determined by* $\ulcorner S \urcorner$.

Proof. The same as for (4.1) in [18].

We first consider unitary dilatations. The situation is the same as in the projective octave plane; a similar proof as for (5.1) in [18] yields the analogue for Hjelmslev-Moufang planes, which we therefore state without proof.

(2.3) **Proposition.** *A dilatation* $\ulcorner S \urcorner$ *belongs to* $PU(\pi)$ *if and only if one can write* $S = d_{a, Ta; \lambda}$ *with* $a_* \neq \pi a_*$, *i.e.* $(a, Ta) \neq 0$, *and* $\lambda \sigma(\lambda) = 1$.

For $\lambda = -1$ we get in particular *unitary reflections.*

The case of transvections is much more complicated than in the non-split projective octave plane, which is not amazing in view of the results on transvections in section 3 of [19].

(2.4) **Proposition.** *Let a_*, b_* and c_* be three collinear isotropic points, $a_* \neq b_*$, a_* and $b_* \neq \pi c_*$. Then there exists a unique unitary transvection with center c_* and axis πc_* which maps a_* on b_*; it is a transvection with unique center and axis. Any unitary transvection with unique center and axis has an isotropic center c_* and axis πc_*.*

Proof. We shall prove the existence of a unitary transvection with center c_* and axis πc_* which maps a_* on b_* in similar way as in [18], (5.3). The uniqueness is immediate from the dual of Lemma (2.7) of [19].

Let $p = Ta \times Tb$, so $p_* = \pi a_* \cap \pi b_* = \pi(a \times b)^*$. Since $c_* | (a \times b)^*$, $p_* | \pi c_*$. $a_* \neq \pi c_*$, hence $a_* \neq p_*$. So $\pi a_* = (a \times p)^*$. Similarly $\pi b_* = (b \times p)^*$. Consider the transvection $t_{a,\, b;\, Tc}$. It transforms $(p \times a)^*$ into $(p \times b)^*$ and has $(a \times b)^* \cap \pi c_* = c_*$ as center. Therefore

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{a,\, b;\, Tc} &= t_{p \times a,\, p \times b;\, c} \\ &= t_{Ta,\, Tb;\, \tilde{T} Tc} \\ &= T t_{a,\, b;\, Tc} T^{-1}, \end{aligned}$$

hence $t_{a,\, b;\, Tc}$ is unitary. Since $a_* \neq b_*$, it has unique center and axis by [19], Proposition (3.5). Conversely, let c_* be the unique center of a unitary transvection. Then πc_* is invariant, hence $c_* | \pi c_*$, i.e., c_* is isotropic. If $x_* | \pi c_*$, then $\pi x_* | c_*$, hence πx_* is invariant and therefore x_* is fixed. So πc_* is the axis of the transvection.

Remark. The unitary transvections whose center and axis are not unique can be shown to be of the form $\ulcorner S \urcorner$ with

$$S = 1 + \lambda \langle c, Tc \rangle, \qquad \lambda \in K^*, \qquad (c, Tc) = 0.$$

For c_* one can take any point in $(S-1)A$ with $\langle c, Tc \rangle \neq 0$; such points do exist.

One might expect the analogue of Proposition (2.4) for unitary transvections with nonunique center to hold also, with $a_* \simeq b_*$ in this case and c_* weakly isotropic. Unfortunately this is not true in general, as we shall see in section 3.

3.

In this section we continue the study of hyperbolic polarities and the corresponding unitary groups.

(3.1) **Lemma.** *Let u^* be an anisotropic line and y_* an isotropic point, $y_* | u^*$. Then there exists an isotropic point $z_* | u^*$ such that $y_* \neq z_*$.*

Proof. We may assume u to be a primitive idempotent. There exists an anisotropic point $v_* | u^*$ such that $(y, v) \neq 0$ and $(Ty, v) \neq 0$. Let z_* be the image of y_* under the unitary reflection with center v_* and axis πv_*. Then $y_* \neq z_*$ by [19], (3.1)(ii).

Next we want to prove a result analogous to (3.3) of [18], viz., that for a hyperbolic polarity $\pi=\pi_0\ulcorner T\urcorner$ coordinates can be chosen so as to bring T in one of three simple standard forms. We start by choosing an isotropic point v_*. Take any line $t^*|v_*$, $t^*\not\ni\pi v_*$, then by Lemma (1.5) t^* is anisotropic, hence by the previous lemma there exists an isotropic point $w_*|t^*$ with $v_*\not\ni w_*$.

Now choose $u_{1*}|\pi w_*$, $u_{1*}\not\ni w_*$, $u_{1*}\not\ni(\pi v_*\cap\pi w_*)=\pi t^*$. Then u_{1*} is anisotropic by Lemma (1.5), and by [13], (3.10)(iv), $u_{1*}\not\ni t^*$ and $u_{1*}\not\ni\pi v_*$. The last relation implies $u_{1*}\not\ni v_*$, hence $\pi u_{1*}\not\ni\pi v_*$, so πu_{1*} and πv_* have a unique point of intersection u_{2*}.

$u_{1*}\not\ni\pi t^*$ implies $t^*\not\ni\pi u_{1*}$; furthermore, $v_*\not\ni w_*=t^*\cap\pi u_1^*$, hence $v_*\not\ni\pi u_{1*}$ by [13], (3.10)(iv). Hence $v_*\not\ni u_{2*}$, so u_{2*} is anisotropic by (1.5). Taking $u_{3*}=\pi u_{1*}\cap\pi u_{2*}$, we find a polar triangle u_{1*}, u_{2*}, u_{3*}. After coordinate transformation by an element of the group PG, which is transitive on quadruples of points in general position, we may assume

$$u_1=(1,0,0;0,0,0),\quad u_2=(0,1,0;0,0,0),\quad u_3=(0,0,1;0,0,0),$$
$$v=(1,0,1;0,1,0),\quad w=(0,1,1;1,0,0).$$

From this point on we can follow the lines of the proof for (3.3) in [18], thus obtaining the following analogue of that proposition.

(3.2) **Proposition.** *If π is a hyperbolic polarity, then $\mathscr{P}(C)$ can be coordinatized with an algebra $A(C)$ in such a way that $\pi=\pi_0\ulcorner T\urcorner$, where $T=[1,1,1;-U,-U,U]$, U a σ-automorphism of C satisfying any of the following three conditions.*

(1) $\sigma=1$, $U=1$.

(2) $\sigma=1$, *U is a reflection in a quaternion subalgebra of C.*

(3) $\sigma\neq1$, $\sigma^2=1$, *$F=$fixed field of K under σ, $C=C_F\otimes_F K$, where C_F is an octave algebra over F, $U=1\otimes\sigma$.*

(3.3) **Definition.** A point x_* is called an *outer point* with respect to the hyperbolic polarity π, if x_* is anisotropic and πx_* is incident with an isotropic point.

In the proof of the above Proposition (3.2), u_{1*} may be any outer point. For choose $t^*|w_*$, $t^*\not\ni\pi u_{1*}$, $t^*\not\ni\pi w_*$, then t^* is anisotropic by Lemma (1.5), hence contains an isotropic $v_*\not\ni w_*$. Then continue the prove as above for (3.2); thus one finds

(3.4) **Corollary.** *In Proposition* (3.2) *coordinates can be chosen so that, moreover, any outer point u_{1*} gets coordinates $(1,0,0;0,0,0)_*$, whereas $\pi u_{1*}=(1,0,0;0,0,0)^*$.*

(3.5) **Proposition.** *Let u_* be an outer point. Let coordinates be chosen as in Proposition* (3.2) *so that $u_*=(1,0,0;0,0,0)_*$, $\pi u_*=u^*=(1,0,0;0,0,0)^*$. Then the isotropic points on u^* are the points $(0,\xi_2,\sigma(\xi_2);x_1,0,0)_*$, with $Ux_1=x_1$, $N(x_1)=\xi_2\sigma(\xi_2)$, and, in case $\sigma=1$ and U a reflection in a quaternion subalgebra of C, in addition the points $(0,\xi_2,-\xi_2;x_1,0,0)$, with $Ux_1=-x_1$, $\xi_2^2=-N(x_1)$.*

Proof. If $x_* | u^*$, then

$$x=(0, \xi_2, \xi_3; x_1, 0, 0),\ \xi_2\,\xi_3=N(x_1).$$

x_* is isotropic if and only if

$$\pi x_*=(x\times u)^*,$$

i.e.,

$$Tx=2\rho\, x\times u \qquad \text{for some } \rho\in K^*.$$

$$(0, \sigma(\xi_2), \sigma(\xi_3); -U x_1, 0, 0)=\rho(0, \xi_3, \xi_2; -x_1, 0, 0).$$

Hence $U x_1=\rho x_1$. $U^2=1$ implies $\rho\,\sigma(\rho)=1$. If $\sigma\neq 1$, there exists, by Hilbert's theorem 90, a τ such that $\rho=\tau\,\sigma(\tau)^{-1}$. Replacing x by τx, we find the equation

$$(0, \sigma(\xi_2), \sigma(\xi_3); -U x_1, 0, 0)=(0, \xi_3, \xi_2; -x_1, 0, 0),$$

which gives the result.

If $\sigma=1$, then $\rho^2=1$, so $\rho=\pm 1$. $\rho=1$ gives the same result as for $\sigma\neq 1$. $\rho=-1$ yields

$$x=(0, \xi_2, -\xi_2; x_1, 0, 0)$$

with $U x_1=-x_1$, $-\xi_2^2=N(x_1)$. Hence $U\neq 1$, so U is a reflection in a quaternion subalgebra D. Moreover, there must exist an $x_1\in D^\perp$, $x_1\neq 0$, with $\xi_2^2+N(x_1)=0$ for some $\xi_2\in K$, i.e., $N(\xi_2+x_1)=0$. Since the quadratic form N on C has index 4, such ξ_2, x_1 do exist.

We now want to obtain information about unitary transformations leaving an outer point fixed. The results and their proofs are fairly similar to those of section 6 of [18], with some extra complications due to the fact that the octave algebra C is split in the present situation.

Thus let u_* be an outer point. We coordinatize as in Proposition (3.2) and its corollary, so

$$u_*=(1, 0, 0; 0, 0, 0)_*, \qquad \pi u_*=(1, 0, 0; 0, 0, 0)^*,$$
$$\pi=\pi_0{}^{\ulcorner}T^{\urcorner}, \qquad T=[1, 1, 1; -U, -U, \dot{U}],$$

with U as in (3.2).

In the Peirce decomposition with respect to u we consider

$$R=K(e-u)+E_0.$$

For $x=(0, \xi_2, \xi_3; x_1, 0, 0)\in R$ we have the quadratic form

$$Q_1(x)=\xi_2\,\xi_3-N(x_1)$$

and the σ-hermitian form

$$(x, Tx)=\xi_2\,\sigma(\xi_2)+\xi_3\,\sigma(\xi_3)-(x_1, U x_1).$$

We first consider the case $\sigma=1$. Then we define quadratic forms Q^+ and Q^- on R by

$$Q^+(x)=\tfrac{1}{2}\{Q_1(x)+\tfrac{1}{2}(x, Tx)\},$$
$$Q^-(x)=\tfrac{1}{2}\{-Q_1(x)+\tfrac{1}{2}(x, Tx)\}. \tag{3.6}$$

Then

$$Q_1=Q^+-Q^-,$$
$$\tfrac{1}{2}(x, Tx)=Q^+(x)+Q^-(x).$$

We also need the bilinear form related to Q^+:

$$Q^+(x, y)=Q^+(x+y)-Q^+(x)-Q^+(y),$$

and similarly for Q^-.

In the subspace of R given by the equation $x_1=0$ we change coordinates

$$\zeta_2=\tfrac{1}{2}(\xi_2+\xi_3),$$
$$\zeta_3=\tfrac{1}{2}(\xi_2-\xi_3). \tag{3.7}$$

In the coordinates ζ_2, ζ_3, x_1 we have

$$Q_1(x)=\zeta_2^2-\zeta_3^2-N(x_1)$$
$$\tfrac{1}{2}(x, Tx)=\zeta_2^2+\zeta_3^2-\tfrac{1}{2}(x_1, U x_1). \tag{3.8}$$

Let R^+ be the radical of Q^-, R^- that of Q^+. Then, using the expressions for Q^+ and Q^- in the two different cases $U=1$ and U a reflection in a quaternion subalgebra, respectively, one readily sees that

$$R=R^+\oplus R^-.$$

For $x\in R$, write

$$x=x^+ + x^-, \qquad \text{with } x^+\in R^+,\ x^-\in R^-.$$

Then

$$x\times x=0 \Leftrightarrow Q_1(x)=0 \Leftrightarrow Q^+(x^+)=Q^-(x^-)$$
$$x \text{ is a weakly isotropic point} \Leftrightarrow Q^+(x^+)=Q^-(x^-)=0. \tag{3.9}$$

For the two standard forms for U in (3.2) in the case $\sigma=1$, one easily finds Q^+, Q^-, R^+, R^-:

(3.10) **Proposition.** *Notations as above for the case $\sigma=1$. If $U=1$, then*

$$Q^+(x)=\zeta_2^2-N(x_1), \qquad Q^-(x)=\zeta_3^2.$$
$$\dim R^+=9, \qquad \nu(Q^+|R^+)=4.$$
$$\dim R^-=1, \qquad \nu(Q^-|R^-)=0.$$

If U is the reflection in a quaternion subalgebra D of C, we decompose $x\in C$ as

$$x=x'+x'', \qquad x'\in D,\ x''\perp D,$$

so

$$Ux=x'-x''.$$

Then

$$Q^+(x)=\zeta_2^2-N(x_1'), \qquad Q^-(x)=\zeta_3^2+N(x_1'').$$

$$\dim R^+=\dim R^-=5.$$

$$\nu(Q^+|R^+)=\nu(Q^-|R^-)=1 \qquad \text{if } D \text{ is not split},$$

$$=2 \qquad \text{if } D \text{ is split}.$$

Q^+ and Q^- are equivalent in this case.

Proof. Only the last statement needs a proof. Choose $a\perp D$, $N(a)\neq 0$. Then

$$x'\mapsto a\,x'$$

is a $1-1$ linear transformation of D onto its orthogonal complement $D^\perp$. Then

$$N(x'+x'')=N(x'+a\,y')$$

$$=N(x')+N(a)\,N(y').$$

Since N assumes 0 on C, there exists $x\in D$ such that $N(a)=-N(x)$. After replacing a by $a\,x^{-1}$, we may assume that $N(a)=-1$. Then

$$Q^-(x)=\zeta_3^2+N(x_1'')$$

$$=\zeta_3^2+N(a\,x_1')$$

$$=\zeta_3^2-N(x_1'),$$

so $Q^-\sim Q^+$.

We notice that in the present case $\sigma=1$ the result of Proposition (3.5) can be reformulated as follows.

(3.11) **Proposition.** *If π is a linear polarity ($\sigma=1$) and u_* an outer point, $\pi u_*=u^*$, then $x_*|u^*$ is isotropic if and only if either $x\in R^+$ with $Q^+(x)=0$ or $x\in R^-$ with $Q^-(x)=0$. The latter can occur if and only if U is a reflection in a quaternion subalgebra of C.*

Proposition (6.9) of [18] about unitary transformations leaving an outer point fixed goes through in the split case with some changes.

(3.12) **Proposition.** *Notations as above for the case $\sigma=1$. Let u_* be an outer point, $\pi u_*=u^*$.*

(i) *If $\ulcorner S\urcorner\in PU(\pi)$, $S'TS=T$, $\det S=1$, then $\ulcorner S\urcorner u_*=u_*$ if and only if either $Su=u$ or $Su=-u$. Accordingly, S leaves R^+ and R^- invariant or interchanges them. $Su=-u$ can occur if and only if U is a reflection in a quaternion subalgebra of C.*

(ii) *Let* $S^+ : R^+ \to R^+$ *and* $S^- : R^- \to R^-$ *be linear transformations,* $S^+ \oplus S^- : R \to R$ *the linear transformation whose restriction to* $R^+(R^-)$ *is* $S^+(S^-)$. *Then* $S^+ \oplus S^-$ *can be extended to a linear transformation* S *of* A *leaving the cubic form det invariant and such that* $S'TS = T$, $Su = u$, *if and only if*

$$S^+ \in O^+(Q^+|R^+), \quad S^- \in O^-(Q^-|R^-), \quad sp(S^+) = sp(S^-),$$

sp denoting the spinor norm of a rotation. For given S^+ *and* S^-, *the extension* S *is unique up to a unitary reflection with* u_* *as center and* u^* *as axis.*

(iii) *Let* G *denote the group of extendable* $S^+ \oplus S^-$.

If $U = 1$, $G \simeq \Omega(Q^+|R^+)$, *where* Ω *denotes the commutator subgroup of the orthogonal group.*

If U *is a reflection in a quaternion subalgebra of* C, *we have the exact sequences*

$$1 \to \Omega(Q^+|R^+) \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} O^+(Q^-|R^-) \to 1,$$

where i *is the mapping* $S^+ \mapsto S^+ \oplus 1^-$ *(*$1^- =$ *identity on* R^-*),* j *the mapping* $S^+ \oplus S^- \mapsto S^-$, *and*

$$1 \to \Omega(Q^-|R^-) \xrightarrow{i'} G \xrightarrow{j'} O^+(Q^+|R^+) \to 1,$$

with $i' : S^- \mapsto 1^+ \oplus S^-$, $j' : S^+ \oplus S^- \mapsto S^+$.

Proof. (i) Let $\ulcorner S \urcorner u_* = u_*$. Then $Su = \lambda u$.

$$(Su, TSu) = (u, Tu)$$

implies that $\lambda^2 = 1$, so $\lambda = \pm 1$.

The invariance of *det* under S implies

$$det(\xi u + x) = det(\lambda \xi u + Sx)$$

for $x \in R$. Hence

$$\xi Q_1(x) = \lambda \xi Q_1(Sx),$$

so

$$Q_1(Sx) = \lambda^{-1} Q_1(x).$$

Furthermore

$$(Sx, TSx) = (x, Tx) \qquad \text{for } x \in R.$$

If $\lambda = 1$, these two equations imply

$$Q^+(Sx) = Q^+(x)$$
$$Q^-(Sx) = Q^-(x).$$

Since R^+ and R^- are the radicals of Q^- and Q^+, respectively, they are invariant. For $\lambda = -1$, on the contrary, we get

$$Q^+(Sx) = Q^-(x)$$
$$Q^-(Sx) = Q^+(x).$$

Hence R^+ and R^- are interchanged.

If $U=1$, $\dim R^+ \neq \dim R^-$, so then the latter cannot happen. If U is a reflection in a quaternion subalgebra D of C, we choose $a \in C$, $a \perp D$ with $N(a)=-1$; such an a exists by (3.10). We define a related triple of similarities in C:

$$S_1 \colon x \mapsto a\,x$$

$$S_2 \colon x \mapsto x\,a$$

$$S_3 \colon x \mapsto \bar{a}\,x\,\bar{a}.$$

Then $(x_1, x_2, x_3)=(S_1 x_1, S_2 x_2, S_3 x_3)$.

Let $S=[-1,-1,1; S_1, S_2, S_3]$. Then

$$det(S\,x)=det\,x, \qquad (S\,x, TS\,x)=(x, Tx).$$

This shows that $\ulcorner S \urcorner \in PU$, $S'TS=T$, $det\,S=1$ and $Su=-u$.

(ii) The proof of this statement is the same as for (ii) of Proposition (6.9) of [18], so we omit it.

(iii) If $U=1$, R^- is 1-dimensional as we have seen in Proposition (3.10), hence $O^+(Q^-|R^-)=1$. Hence for an extendable $S^+ \oplus S^-$ we have by (ii): $S^-=1$, $sp(S^+)=1$.

The exactness of the two sequences for the case $\sigma=1$, U a reflection in a quaternion subalgebra, is proved in a similar way as in (ii) of (6.9), [18].

We now consider the case $\sigma \neq 1$. Let $K=F(\theta)$, $\theta^2=\alpha \in F$, $\sigma|F=1$, $\sigma(\theta)=-\theta$. We may assume by (3.2) that

$$C=C_F \otimes_F K, \qquad U=1 \otimes \sigma,$$

C_F being an octave algebra over F, which may or may not be split. In R we introduce coordinates ζ_2, ζ_3, x_1 as in (3.6) for the case $\sigma=1$. The following notation will be used.

$$\begin{aligned} &\zeta_i=\zeta_i'+\theta\,\zeta_i'' && \text{with } \zeta_i', \zeta_i'' \in F,\ i=2,3 \\ &x_1=x_1'+\theta\,x_1'' && \text{with } x_1', x_1'' \in C_F. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Similarly as in [18], section 6, we split R into a direct sum of two F-linear spaces R^+ and R^-, where

$$\begin{aligned} R^+ &= \{x=(\zeta_2, \zeta_3, x_1) \mid \zeta_2''=\zeta_3'=0, x_1''=0\} \\ R^- &= \{x=(\zeta_2, \zeta_3, x_1) \mid \zeta_2'=\zeta_3''=0, x_1'=0\}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Furthermore, we introduce two F-quadratic forms Q^+ and Q^- on R and an F-bilinear form $\langle .,. \rangle$ between R^+ and R^- by

$$
\begin{aligned}
&Q^+(x)=\zeta_2'^2-\alpha\,\zeta_3''^2-N(x_1'), && x\in R\\
&Q^-(x)=\zeta_3'^2-\alpha\,\zeta_2''^2+\alpha\,N(x_1''), && x\in R\\
&\langle x^+, x^-\rangle=\zeta_2'\,\zeta_2''-\zeta_3'\,\zeta_3''-\tfrac{1}{2}(x_1', x_1''),\\
&\quad \text{for } x^+=(\zeta_2', \zeta_3'', x_1')\in R^+,\ x^-=(\zeta_2'', \zeta_3', x_1'')\in R^-.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

R^- is the radical of Q^+, R^+ that of Q^-. Obviously,

$$
\begin{aligned}
&Q_1(x)=Q^+(x)-Q^-(x)-2\theta\langle x^+, x^-\rangle\\
&\qquad \text{for } x=x^++x^-,\ x^+\in R^+,\ x^-\in R^-\\
&\tfrac{1}{2}(x, Tx)=Q^+(x)+Q^-(x).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

The result of (3.5) for this case can be reformulated as follows.

(3.17) **Proposition.** *Let $\sigma\neq 1$, notation as above. The isotropic points incident with u^* are the points x_* with $x\in R^+$, $Q^+(x)=0$.*

Furthermore, we have the following proposition on unitary transformations leaving u^* invariant.

(3.18) **Proposition.** *Notation as above for the case $\sigma\neq 1$. Let u_* be an outer point, $\pi u_*=u^*$.*

(i) *If $\ulcorner S\urcorner\in PU(\pi)$ with $S'TS=T$, $\det S=1$, $Su=u$, then S leaves the F-subspace R^+ invariant.*

(ii) *Let S^+ be an F-linear transformation: $R^+\to R^+$. Then there exists an $\ulcorner S\urcorner\in PU(\pi)$ with $S'TS=T$, $\det S=1$ and $Su=u$ whose restriction to R^+ is S^+ if and only if $S^+\in\Omega(Q^+|R^+)$, Ω denoting the commutator subgroup of the orthogonal group. S is uniquely determined by S^+ up to a unitary reflection with u_* as center and u^* as axis.*

Proof. The proof of the analogous Proposition (6.14) of [18] is easily seen to work in the present situation also, so we refer the reader to that paper.

We need some information about unitary transvections having unique center incident with $\pi u_*=u^*$, u_* being an outer point; cf. Proposition (2.4).

First, let either $U=1$ or $\sigma\neq 1$. Then the strongly isotropic points are of the form x_* with $x\in R^+$, $Q^+(x)=0$ and we can set up the same computations as in section 7 of [18]. From this we can again draw the conclusion that the restrictions of these unitary transvections to R generate a simple group $\cong\Omega(Q^+|R^+)$.

If $\sigma=1$, U a reflection in a quaternion subalgebra, the isotropic points are of the form x_* with either $x\in R^+$, $Q^+(x)=0$ or $x\in R^-$, $Q^-(x)=0$. If $x\in R^+$, $Q^+(x)=0$ and $y\in R^-$, $Q^-(y)=0$, then $Q_1(x, y)=0$, hence $x\times y=0$.

Let S be a unitary transvection with unique center c_*. Then c_* is isotropic, so assume first $c\in R^+$, $Q^+(c)=0$. Choose $a\in R^+$, $Q^+(a)=0$, $Q^+(a,c)\neq 0$. Then a_* is isotropic and $a_*\not\perp \pi c_*=(c\times u)^*$. If $S a_*=b_*$, then $a_*\not\perp b_*$, hence $b\in R^+$ too. A similar computation as in section 7 of [18] shows that the restriction of S to R^- is the identity and that the restrictions of these unitary transvections to R generate a simple group isomorphic to $\Omega(Q^+|R^+)$.

If c_* is isotropic with $c\in R^-$, $Q^-(c)=0$, we consider the conjugate of S under a unitary transformation leaving u_* fixed and interchanging R^+ and R^- (see Proposition (3.12), (i)); this conjugate has center d_* with $d\in R^+$, $Q^+(d)=0$. From this it is clear that the unitary transvections with isotropic center c_*, $c\in R^-$, generate the simple group $\Omega(Q^-|R^-)$.

We summarize these results as follows.

(3.19) **Proposition.** *Notations as above. Let u_* be an outer point with $\pi u_*=u^*$.*

If $U=1$ or $\sigma\neq 1$, then the restrictions to u^* of the unitary transvections with unique center incident with u^* generate a simple group isomorphic to $\Omega(Q^+|R^+)$.

If $\sigma=1$, U a reflection in a quaternion subalgebra, then the unitary transvections with unique center c_* incident with u^* are divided in two classes ($c\in R^+$ and $c\in R^-$ respectively). The restrictions to u^* of the transvections in each of these classes generate a simple group isomorphic to $\Omega(Q^+|R^+)$ and $\Omega(Q^-|R^-)$, respectively.

At the end of section 2 we remarked that for unitary transvections with a nonunique center one does not necessarily have the transitivity property analogous to Proposition (2.4). Assume U is a reflection in a quaternion subalgebra of C, u_* an outer point, $\pi u_*=u^*$. Choose $x\in R^+$ with $Q^+(x)=0$, $y\in R^-$ with $Q^-(y)=0$. Then x_* and y_* are isotropic points incident with u^*, $x_*\simeq y_*$.

Let $\ulcorner S\urcorner$ be any unitary transvection with weakly isotropic center $c_*|u^*$. Then $\pi c_*|u_*$, hence $S u=u$ (if S is normalized in the usual way). By Proposition (3.12), S leaves R^+ and R^- invariant, hence $\ulcorner S\urcorner$ cannot map x_* on y_*.

4.

This section consists of a series of lemmas, which are rather technical and which will serve to prove results on unitary groups in the next section. They all concern weakly and strongly isotropic points.

Let c_* be an isotropic point. Which points incident with πc_* are anisotropic, weakly or strongly isotropic, respectively?

(i) $x_*|\pi c_*$, $x_*\not\perp c_*$. Then x_* is anisotropic by Lemma (1.5).

(ii) $x_*|\pi c_*$, $x_*\simeq c_*$. Then $\pi x_*|c_*$, hence $x_*\simeq \pi x_*$ by [13], Proposition (3.10), (i). So x_* is weakly isotropic.

Which of these points are strongly isotropic? We coordinatize as in Proposition (3.2) such that $c=(0,1,1;1,0,0)$, $T=[1,1,1;-U,-U,U]$. Hence $Tc=(0,1,1;-1,0,0)$. $x_*|\pi c_*$ if and only if $(Tc)x=0$, since Tc is idempotent. From

this and the condition $x \times x = 0$ one easily derives that $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_2; \xi_2, x_2, \bar{x}_2)$ with $\xi_1 \xi_2 = N(x_2)$. x_* isotropic implies $x \times c = 0$ by (i), hence $\xi_1 = 0$.

If $\xi_2 \neq 0$ we may normalize such that $\xi_2 = 1$, so $x = (0, 1, 1; 1, x_2, \bar{x}_2)$. Then $x^2 = 2x$, so x is a multiple of an idempotent. Hence x_* isotropic if and only if $x\,Tx = 0$.

$$x\,Tx = \tfrac{1}{2}(0, (x_2, U x_2), -(x_2, U x_2); (x_2, U x_2) - 2 x_2\, \overline{U x_2}, 0, 0).$$

Since $x_2\, \overline{U x_2} = 0$ implies $(x_2, U x_2) = (x_2\, \overline{U x_2}, 1) = 0$, we find

$$x\,Tx = 0 \quad \text{if and only if} \quad x_2\, \overline{U x_2} = 0.$$

If $\xi_2 = 0$, then $x = (0, 0, 0; 0, x_2, \bar{x}_2)$, so $x^2 = 0$. Take $y = (0, 1, 1; 1, x_2, \bar{x}_2)$, then

$$\begin{aligned} x &= y - c \\ \langle x, Tx \rangle &= \langle y, Ty \rangle + \langle c, Tc \rangle - \langle c, Ty \rangle - \langle y, Tc \rangle \\ &= \langle y, Ty \rangle \end{aligned}$$

since c_* is isotropic and $y_* | \pi\, c_*$, so $c_* | \pi\, y_*$. So $\langle y, Ty \rangle = 0$ if and only if $y\,Ty = 0$, i.e., if $x_2\, \overline{U x_2} = 0$. Thus we have shown:

(4.1) For $x = (0, \xi_2, \xi_2; \xi_2, x_2, \bar{x}_2)$ with $N(x_2) = 0$, x_* is isotropic if and only if $x_2\, \overline{U x_2} = 0$.

Now we distinguish three cases.

(iii) $U = 1$. Then $x_2\, \overline{U x_2} = x_2\, \bar{x}_2 = N(x_2) = 0$, so all weakly isotropic points incident with $\pi\, c_*$ are isotropic (cf. Proposition (1.8)).

(iv) U is a reflection in a quaternion subalgebra D of C. Write $x \in C$ as $x = x' + x''$, $x' \in D$, $x'' \perp D$. Then

$$\begin{aligned} x_2\, \overline{U x_2} &= (x_2' + x_2'')(\overline{x_2'} + x_2'') \\ &= N(x_2') - N(x_2'') + x_2'\, x_2'' + x_2''\, \overline{x_2'} \\ &= N(x_2') - N(x_2'') + 2 x_2'\, x_2'', \end{aligned}$$

for

$$\begin{aligned} 0 = (x_2', x_2'') &= x_2'\, \overline{x_2''} + x_2''\, \overline{x_2'} \\ &= -x_2'\, x_2'' + x_2''\, \overline{x_2'}. \end{aligned}$$

Now

$$0 = N(x_2) = N(x_2') + N(x_2''),$$

and $x_2'\, x_2'' \perp D$, so we find

$$N(x_2) = 0, \quad x_2\, \overline{U x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_2' + x_2'', \quad N(x_2') = N(x_2'') = 0, \quad x_2'\, x_2'' = 0.$$

(v) $\sigma \neq 1$, $C = C_F \otimes_F K$, $U = 1 \otimes \sigma$, $K = F(\theta)$, $\theta^2 = \alpha \in F$, $\sigma(\theta) = -\theta$. Write $x \in C$ as $x = x' + \theta x''$ with $x', x'' \in C_F$.

$$0 = N(x_2) = N(x_2') + \alpha N(x_2'') + \theta(x_2', x_2''),$$

hence

$$N(x_2') + \alpha N(x_2'') = 0, \quad (x', x'') = 0.$$

$$0 = x_2 \overline{U x_2} = (x_2' + \theta x_2'')(\overline{x_2'} - \theta \overline{x_2''})$$
$$= N(x_2') - \alpha N(x_2'') + \theta(x_2'' \overline{x_2'} - x_2' \overline{x_2''}).$$

Since

$$0 = (x_2', x_2'') = x_2'' \overline{x_2'} + x_2' \overline{x_2''},$$

we find

$$N(x_2') = \alpha N(x_2''), \quad x_2' \overline{x_2''} = 0.$$

If $x_2' \neq 0 \neq x_2''$, $x_2' \overline{x_2''} = 0$ implies $N(x_2') = N(x_2'') = 0$. Thus we have shown:

$$N(x_2) = 0, \quad x_2 \overline{U x_2} = 0 \Leftrightarrow x_2 = x_2' + \theta x_2'', \quad N(x_2') = N(x_2'') = 0, \quad x_2' \overline{x_2''} = 0.$$

We summarize the above results in the following lemma.

(4.2) **Lemma.** *Let c_* be an isotropic point. We coordinatize so that $c = (0, 1, 1; 1, 0, 0)$, $\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner$, $T = [1, 1, 1; -U, -U, U]$. Then $x_* | \pi c_*$ is*

(i) *anisotropic if $x_* \neq c_*$, i.e., if $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_2; \xi_2, x_2, \bar{x}_2)$ with $\xi_1 \neq 0$, $\xi_1 \xi_2 = N(x_2)$,*

(ii) *weakly isotropic if $x_* \simeq c_*$, i.e. if $x = (0, \xi_2, \xi_2; \xi_2, x_2, \bar{x}_2)$ with $N(x_2) = 0$,*

(iii) *strongly isotropic if $x = (0, \xi_2, \xi_2; \xi_2, x_2, \bar{x}_2)$ with:*

for $U = 1$, $N(x_2) = 0$ ($\Leftrightarrow x_*$ weakly isotropic),

for U a reflection in a quaternion subalgebra D of C,

$$x_2 = x_2' + x_2'', \quad x_2' \in D, \quad x_2'' \perp D, \quad x_2' x_2'' = 0, \quad N(x_2') = N(x_2'') = 0,$$

for $\sigma \neq 1$, $C = C_F \otimes_F K$, $U = 1 \otimes \sigma$, $K = F(\theta)$, $\theta^2 \in F$, $\sigma(\theta) = -\theta$,

$$x_2 = x_2' + \theta x_2'' \quad \text{with} \quad x_2', x_2'' \in C_F, \quad x_2' \overline{x_2''} = 0, \quad N(x_2') = N(x_2'') = 0.$$

(4.3) **Lemma.** *Let x_* and y_* be isotropic points, $x_* \simeq y_*$, $x_* \neq y_*$. Then precisely one of the following two conditions holds.*

(i) *There exists an anisotropic line $v^* | x_*, y_*$.*

(ii) *$x_* | \pi y_*$, hence $y_* | \pi x_*$.*

Proof. Let us show first that (i) and (ii) exclude each other. Thus assume $x_*, y_* | v^*$, v^* anisotropic. $t_* = \pi v^* \neq v^*$, hence $x_* \neq t_*$ and $\pi x_* = (x \times t)^* \neq v^*$. Hence πx_* and v^* have a unique point in common, viz., x_*, therefore $y_* \not| \pi x_*$.

Now assume (i) does not hold, so $x_*, y_* | \pi v_*$ implies that v_* is weakly isotropic. $x_* \simeq y_*$, hence $\pi x_* \simeq \pi y_*$. So $\pi x_* \cap \pi y_* = V$, a space of the first kind in $\mathscr{P}(C)$.

We coordinatize as in Proposition (3.2) with

$$x=(0,1,1;1,0,0), \quad \pi=\pi_0{}^{\ulcorner}T^{\urcorner}, \quad T=[1,1,1;-U,-U,U].$$

By the above lemma, the weakly isotropic points on πx_* are the z_* with

$$z=(0,\zeta_2,\zeta_2;\zeta_2,z_2,\bar{z}_2), \quad N(z_2)=0.$$

V is a linear subspace of A consisting of such points, with $\dim(V)=5$. The maximal isotropic subspaces of the linear space $\{(0,\zeta_2,\zeta_2;\zeta_2,z_2,\bar{z}_2)|\zeta_2\in K, z_2\in C\}$ with respect to N have dimension 5 and all contain $x=(0,1,1;1,0,0)$. Hence V is such a maximal isotropic subspace, hence $x_*|V$, i.e., $x_*|\pi y^*$.

(4.4) **Lemma.** *Let a_{1*}, a_{2*} and a_{3*} be in general position, x_* a point $\not|(a_i\times a_j)^*$ for $i\neq j$. Then $x_*\simeq a_{i*}$ can hold for at most one i.*

Proof. Assume for instance $x_*\simeq a_{1*}$ and $x_*\simeq a_{2*}$.

Since $x_*\not|(a_1\times a_2)^*$, the $y_*|(a_1\times a_2)^*$ with $y_*\simeq x_*$ form a subspace of the second kind on $(a_1\times a_2)^*$. a_{1*} and a_{2*} are in this subspace, hence $a_{1*}\simeq a_{2*}$, which contradicts the assumption that the a_{i*} are in general position.

(4.5) **Corollary.** *If a_{1*}, a_{2*} and a_{3*} are in general position and x_* is any point, then $x_*\not\simeq a_{i*}$ for some i.*

Proof. If, for instance, $x_*|(a_1\times a_2)^*$, then $x_*\not\simeq a_3^*$. If $x_*\not|(a_i\times a_j)^*$ for $i\neq j$, then apply the lemma.

(4.6) **Lemma.** *For any line v^*, there exists an isotropic point $x_*\not\simeq v^*$.*

Proof. Coordinatize in such a way that $\pi=\pi_0{}^{\ulcorner}T^{\urcorner}$, $T=[1,1,1;-U,-U,U]$ as in (3.2). Take

$$a_1=(0,1,1;1,0,0), \quad a_2=(0,1,1;-1,0,0), \quad a_3=(1,0,1;0,1,0).$$

Then a_{1*}, a_{2*} and a_{3*} are isotropic points in general position and $(a_i\times a_j)^*$ is anisotropic for $i\neq j$. Assume $a_{i*}\simeq v^*$ for $i=1,2,3$. By the dual of the above corollary, $v^*\not\simeq(a_i\times a_j)^*$ for some pair i,j, say $v^*\not\simeq(a_1\times a_2)^*$. Let $b_*=v^*\cap(a_1\times a_2)^*$. Since $(a_1\times a_2)^*$ is anisotropic, there exists an isotropic $x_*|(a_1\times a_2)^*$ with $x_*\not\simeq b_*$, hence $x_*\not\simeq v^*$ by (3.10), (iv) of [13].

(4.7) **Lemma.** *For any point a_* there exist isotropic points x_* and y_* such that $x_*\not\simeq a_*\not\simeq y_*$, $(x\times a)^*$ and $(y\times a)^*$ anisotropic, $(x\times a)^*\not\simeq(y\times a)^*$. Choose $x'_*|(x\times a)^*$ and $y'_*|(y\times a)^*$ with $x'_*\not\simeq x_*$, $y'_*\not\simeq y_*$, then $a_*=\{(x\times x')\times(y\times y')\}_*$.*

Proof. By the previous lemma there exists an isotropic $x_*\not\simeq\pi a_*$. $a_*\not\simeq\pi x_*$ and $x_*|\pi x_*$ together imply that $a_*\not\simeq x_*$, hence $\pi a_*\not\simeq\pi x_*$ also. Let $z_*=\pi x_*\cap\pi a_*$. $x_*\not\simeq\pi a_*$ implies $x_*\not\simeq z_*$. $a_*\not\simeq\pi x_*$ implies $(x\times a)^*\not\simeq\pi x_*$. Hence $z_*\not\simeq(x\times a)^*=\pi z_*$, i.e., $(x\times a)^*$ is anisotropic. So we can find an isotropic $x'_*|(x\times a)^*$ with $x'_*\not\simeq x_*$. By (3.2) and (3.4) we may choose coordinates in such a way that $\pi=\pi_0{}^{\ulcorner}T^{\urcorner}$, $T=[1,1,1;-U,-U,U]$, $(x\times x')^*=(1,0,0;0,0,0)^*$.

Then $a=(0, \alpha_2, \alpha_3; a_1, 0, 0)$. From (3.12) and (3.17) one easily deduces that the hyperplane $\alpha_3=0$ in R is not invariant under all unitary transformations leaving the line $(1,0,0;0,0,0)^*$ invariant. So we may assume that $a=(0, \alpha_2, \alpha_3; a_1, 0, 0)$ with $\alpha_3 \neq 0$. Take $y=(1,0,1;0,1,0)$. Then $y^2=2y$ and $yTy=0$, hence $\langle y, Ty\rangle=0$, so y_* is strongly isotropic.

$$a \times y=(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_2; -a_1, \alpha_2, \bar{a}_1) \neq 0$$
$$(a \times y, T(a \times y))=\alpha_3 \sigma(\alpha_3) \neq 0$$
$$(a \times x) \times (a \times y)=\lambda a \text{ with } \lambda \neq 0.$$

So y_* has all the required properties. Finally we choose an isotropic $y'_* | (a \times y)^*$ with $y'_* \neq y_*$. The remainder of the proof is clear.

5.

In this section we shall prove that the subgroup of $PU(\pi)$ generated by unitary transvections with unique center and axis is a simple group.

(5.1) **Definition.** *Let π be a hyperbolic polarity. Then $PT(\pi)$ or PT is the subgroup of $PU(\pi)$ generated by unitary transvections having unique center and axis.*

(5.2) **Definition.** *The set of all isotropic points with respect to a hyperbolic polarity π will be denoted by $\mathscr{C}(\pi)$ or $\mathscr{C}$.*

(5.3) **Lemma.** *An element of PU that leaves all points in $\mathscr{C}$ fixed is necessarily the identity.*

Proof. This is immediate from Lemma (4.7).

From now on we consider PT as a group of permutations acting on $\mathscr{C}$.

(5.4) **Proposition.** *Every unitary reflection whose center is an outer point belongs to $PT(\pi)$.*

Proof. Coordinatize in such a way that u_* is the center and $\pi u_*=u^*$ the axis of the unitary reflection $\ulcorner S \urcorner$ and that $\pi=\pi_0 \ulcorner T \urcorner$ with $T=[1,1,1; -U, -U, U]$, as in Proposition (3.2). Let $c=(0,1,1;1,0,0)$, then c_* is isotropic. In a similar way as in the proof of (8.2) of [18] one can show that $\ulcorner S \urcorner$ coincides with a product of transvections $\ulcorner S' \urcorner$ on the points $(0,1,1;-1,0,0)_*$ and $(1, N(x_2), N(x_2); N(x_2), x_2, \bar{x}_2)_*$. The latter are precisely the points incident with πc_* but not connected with c_*. Hence $\ulcorner S \urcorner$ and $\ulcorner S' \urcorner$ must coincide on all points of πc_*. Therefore $\ulcorner S \urcorner = \ulcorner S' \urcorner$, since there are no unitary dilatations with isotropic center and axis.

The following is a lemma on transitivity properties of PT.

(5.5) **Lemma.** *Let c_*, x_*, y_* and z_* be distinct isotropic points, x_*, y_* and $z_* | \pi c_*$ (hence $\simeq c_*$), c_*, y_* and z_* collinear on the quadratic surface of points incident with πc_*, $x_* \neq y_*$ (hence $x_* \neq z_*$). Then there exists an element of PT leaving c_* and x_* fixed and mapping y_* on z_*.*

Proof. Let v_* be the point collinear with c_*, y_* and z_* on the quadratic surface of points on πc_* such that c_* and v_* are harmonic with respect to y_* and z_*, in the sense of projective geometry over the groundfield K. Choose a point $t_*|\pi c_*$ with $t_* \simeq x_*$, $t_* \simeq v_*$, $t_* \not\simeq c_*$. t_* is an anisotropic point. The unitary reflection with t_* as center, hence $\pi t_*|c_*$ as axis, leaves c_*, x_* and v_* fixed. On the line through c_* and v_* on the quadratic surface of points on πc_* this reflection induces an involution, hence y_* is mapped on z_*.

Before we can prove some other transitivity properties of PT, we need two lemmas about connectedness in $\mathscr{C}$.

(5.6) **Lemma.** *For any two isotropic points x_* and y_* there exists an isotropic point z_* with $x_* \not\simeq z_* \not\simeq y_*$.*

Proof. Choose a line $v^*|x_*, y_*$. By Lemma (4.6) there exists an isotropic $z_* \not\simeq v^*$. Then $z_* \not\simeq x_*$, $\not\simeq y_*$.

(5.7) **Lemma.** *Let x_* and y_* be isotropic, $x_* \not\simeq y_*$. Then the following hold.*

(i) *$(x \times y)^*$ is either anisotropic or strongly isotropic.*

(ii) *There exists an isotropic z_* with $x_* \not\simeq z_* \not\simeq y_*$ and such that $(x \times z)^*$ and $(y \times z)^*$ are anisotropic.*

Proof. In case $(x \times y)^*$ is anisotropic, we choose an isotropic $z_*|(x \times y)^*$ with $x_* \not\simeq z_* \not\simeq y_*$.

Next assume that $(x \times y)^*$ is isotropic; let $(x \times y)^* = \pi c_*$ for isotropic c_*. In the proof of (3.2) it was shown that we can coordinatize in such a way that $T = [1, 1, 1; -U, -U, U]$, $c = (0, 1, 1; 1, 0, 0)$. Then by (4.2), $x = (0, \xi_2, \xi_2; \xi_2, x_2, \bar{x}_2)$, $y = (0, \eta_2, \eta_2; \eta_2, y_2, \bar{y}_2)$. If $\xi_2 = 0$, we can find a transformation $\in PT$ mapping x_* on $(0, 1, 1; 1, x_2, \bar{x}_2)_*$ and leaving c_* and y_* fixed; similarly for y_*. Hence we may assume that ξ_2 and η_2 are both $\neq 0$. Take $z = (0, 1, 1; -1, 0, 0)$, then $x \times z = (2\xi_2, 0, 0; 0, -x_2, -\bar{x}_2)$, hence $(x \times z, T(x \times z)) = 4\xi_2 \sigma(\xi_2) \neq 0$, and similarly for $y \times z$.

Finally, assume that $(x \times y)^*$ is weakly but not strongly isotropic. Let $t_* = \pi x_* \cap \pi y_*$, then $t_* \simeq (x \times y)^*$, but $t_* \not\simeq (x \times y)^*$. πx_* is isotropic and $(x \times y)^*$ is weakly isotropic, hence by the dual of (1.5), $\pi x_* \simeq (x \times y)^*$; similarly, $\pi y_* \simeq (x \times y)^*$. On the other hand $\pi x_* \not\simeq \pi y_*$, which leads to a contradiction with the dual of Proposition (3.10), (iii) of [13].

Now we can prove some more transitivity properties of PT.

(5.8) **Lemma.** *PT permutes the points of $\mathscr{C}$ transitively.*

Proof. Let $x_*, y_* \in \mathscr{C}$. By the previous two lemmas there exists a series of points $x_* = x_{1*}, x_{2*}, \ldots, x_{n*} = y_*$ with $x_{i*} \in \mathscr{C}$, $x_{(i-1)*} \not\simeq x_{i*}$ and $(x_{i-1} \times x_i)^*$ anisotropic. So it suffices to consider the case $x_*, y_* \in \mathscr{C}$ with $x_* \not\simeq y_*$, $(x \times y)^*$ anisotropic. Take an isotropic point $z_*|(x \times y)^*$, $z_* \not\simeq x_*$, $\not\simeq y_*$. Since $(x \times y)^*$ is anisotropic, $(x \times y)^* \not\simeq \pi z_*$ by the dual of (1.5), hence $x_*, y_* \not\simeq \pi z_*$. Proposition (2.4) now ensures the existence of a unitary transvection with unique center z_* mapping x_* on y_*.

(5.9) **Lemma.** *Let c_* be an isotropic point, x_* and $y_*|\pi c_*$, x_* and $y_* \neq c_*$. Then there exists a transformation $\in PT$ which leaves c_* fixed and maps x_* on y_*.*

Proof. If $x_* \simeq y_*$, we can choose $z_*|\pi c_*$ with $z_* \neq c_*, x_*$ and y_*. So it suffices to prove the lemma in the case $x_* \neq y_*$.

Take $u_*|\pi c_*$ such that $H(x_*, y_*; c_*, u_*)$; then also $H(u_*, c_*; x_*, y_*)$ and $u_* \neq c_*$ by Lemma (2.12) of [19]. This implies that u_* is an outer point, hence the unitary reflection with center u_*, whose axis is incident with c_*, belongs to PT; it maps x_* on y_*.

In view of Lemma (4.2), the above lemma says that PT is transitive on the outer points incident with πc_*, hence on their polars, which are the anisotropic lines through c_*. Together with transitivity of PT on the points of $\mathscr{C}$, this gives the following corollary.

(5.10) **Corollary.** *PT is transitive on anisotropic lines intersecting $\mathscr{C}$, hence on outer points.*

Before we start proving the simplicity of PT, we need one more lemma.

(5.11) **Lemma.** *Let c_*, x_* and y_* be isotropic points with x_* and $y_*|\pi c_*$, $y_*|\pi x_*$. Then there exists an element of PT leaving c_* fixed and mapping x_* on y_*.*

Proof. We coordinatize so that $c=(0,1,1;1,0,0)$ and $T=[1,1,1;-U,-U,U]$ as in (3.2). Then $x=(0,\xi_2,\xi_2;\xi_2,x_2,\bar{x}_2)$ and $y=(0,\eta_2,\eta_2;\eta_2,y_2,\bar{y}_2)$ with $x_2 \overline{U x_2}=y_2 \overline{U y_2}=0$ by (4.1). Computations similar to those preceding (4.1) show that $y_*|\pi x_*$ is equivalent to $x_2 \overline{U y_2}=0$. In view of Lemma (5.5) we may assume that $\xi_2=\eta_2=0$. For all $z_2=\lambda x_2+\mu y_2$, $z_2 \overline{U z_2}=0$, i.e., $z_*=(0,0,0;0,z_2,\bar{z}_2)_*$ is isotropic. Choose $z_2=x_2+y_2$, $z_2'=x_2-y_2$, $z=(0,0,0;0,z_2,\bar{z}_2)$ and $z'=(0,0,0;0,z_2',\bar{z}_2')$. Then c_*, x_*, y_* and $z_*'|\pi z_*$. Choose $d_*|\pi z_*, d_* \neq z_*$, $d_* \simeq c_*, d_* \simeq z_*'$. d_* is an outer point, so the unitary reflection $\ulcorner A \urcorner$ with center d_* and axis πd_* belongs to PT. $\ulcorner A \urcorner$ leaves c_*, z_* and z_*' fixed, since $z_*|\pi d_*$, $\pi d_* \simeq c_* \simeq d_*$, $\pi d_* \simeq z_*' \simeq d_*$: see [19], Proposition (3.1). We may assume that the linear transformation A is of order 2 and that $Az=z$, $Az'=-z'$. Hence $Ax=y$, so $\ulcorner A \urcorner x_*=y_*$.

We shall now prove simplicity of PT. For the case of a nonlinear hyperbolic polarity this was already proved by Tits [16]; our proof covers the linear polarities too. It has a strong affinity to Tits' proof.

(5.12) **Theorem.** *If π is a hyperbolic polarity, $PT(\pi)$ is a simple group.*

Proof. (i) Let H be a normal subgroup of PT, $H \neq 1$. Take $\ulcorner A \urcorner \in H$, $\ulcorner A \urcorner \neq 1$, and $x_* \in \mathscr{C}$ such that $y_* = \ulcorner A \urcorner x_* \neq x_*$. We shall first prove the existence of $\ulcorner D \urcorner \in H$ such that $z_* = \ulcorner D \urcorner x_* \neq x_*$ and $(x \times z)^*$ is anisotropic.

(ii) Let $\ulcorner B \urcorner \in PT$ such that $\ulcorner B \urcorner y_* = y_*$. Then $\ulcorner BA^{-1}B^{-1}A \urcorner \in H$ and $\ulcorner BA^{-1}B^{-1}A \urcorner x_* = \ulcorner B \urcorner x_*$.

Consider first the case that $x_*, y_*|u^*$ for some anisotropic line u^*. If $x_* \simeq y_*$, there exists $\ulcorner B \urcorner \in PT$ leaving y_* fixed and transforming x_* into $z_*|u^*$ with $x_* \neq z_*$; this follows from (3.11), (3.17), (3.19) and the transitivity of the commutator subgroup Ω of an orthogonal group on pairs of orthogonal

isotropic points: see [3, 15]. $\ulcorner D\urcorner = \ulcorner BA^{-1}B^{-1}A\urcorner$ has the required properties in this case.

Now assume there is no anisotropic line incident with x_* and y_*. If $x_* \simeq y_*$, then $x_* | \pi y_*$ by (4.3). Coordinatize so that $T=[1,1,1;-U,-U,U]$ as in (3.2), $y_* = (0,1,1;1,0,0)_*$. By (4.1), $x_* = (0,\xi_2,\xi_2;\xi_2,x_2,\bar{x}_2)_*$ with $x_2 \overline{U x_2} = 0$. If $x'_* = (0,\xi'_2,\xi'_2;\xi'_2,x'_2,\bar{x}'_2)_*$ with $x'_2 \overline{U x'_2} = 0$, then $x_* | \pi x'_*$ is equivalent to $x_2 \overline{U x'_2} = 0$ as we have already remarked in the proof of (5.11). It is not hard to see that we can find x'_2 and $x''_2 \in C, \neq 0$, such that $x'_2 \overline{U x'_2} = x''_2 \overline{U x''_2} = x_2 \overline{U x'_2} = x'_2 \overline{U x''_2} = 0$, $(x_2, x''_2) = 0$, $x_2 \overline{U x''_2} \neq 0$; it suffices to separately consider the three possible forms of U in (3.2). Take $x' = (0,0,0;0,x'_2,\bar{x}'_2)$, $x'' = (0,0,0;0,x''_2,\bar{x}''_2)$. By Lemma (5.11) there exist elements of PT which leave y_* fixed and map x_* on x'_* and x'_* on x''_* respectively. So we find $\ulcorner B\urcorner \in PT$ with $\ulcorner B\urcorner y_* = y_*$, $\ulcorner B\urcorner x_* = x''_*$. $x \times x'' = -\frac{1}{2}(x_2, x''_2)(0,1,1;-1,0,0) = 0$. So $x_* \simeq x''_*$, but $x_* \not| \pi x''_*$, hence there exists an anisotropic $u^* | x_*, x''_*$ by (4.3). Replacing $\ulcorner A\urcorner$ by $\ulcorner BA^{-1}B^{-1}A\urcorner$ we are in the case considered above. Finally, assume there is no anisotropic line incident with x_* and y_*, and $x_* \not\perp y_*$. Then $(x \times y)^* = \pi c_*$ for an isotropic c_* by Lemma (5.7) (i). Choose coordinates as in (3.2) with $c_* = (0,1,1;1,0,0)_*$. Then $x = (0,\xi_2,\xi_2;\xi_2,x_2,\bar{x}_2)$ and $y = (0,\eta_2,\eta_2;\eta_2,y_2,\bar{y}_2)$ with $x_2 \overline{U x_2} = y_2 \overline{U y_2} = 0$ by (4.1). Take $z = (0,\zeta_2,\zeta_2;\zeta_2,x_2,\bar{x}_2)$ with $\zeta_2 \neq \xi_2$. Then z_* is an isotropic point and $z_* | \pi x_*$. By (5.5) there exists $\ulcorner B\urcorner \in PT$ with $\ulcorner B\urcorner y_* = y_*$, $\ulcorner B\urcorner x_* = z_*$. Then $\ulcorner BA^{-1}B^{-1}A\urcorner x_* = z_*$ and $z_* | \pi x_*$, $x_* \neq z_*$. So we have reduced the situation to the previously considered case.

(iii) So we may assume that there exists an $\ulcorner A\urcorner \in H$ with $\ulcorner A\urcorner x_* = y_* \not\perp x_*$ and $u^* = (x \times y)^*$ anisotropic, for some point $x_* \in \mathscr{C}$. Choose an isotropic $z_* | u^*$ with $z_* \not\perp x_*, y_*$. $\pi x_* \not\perp u^*$, hence $y_*, z_* \not\perp \pi x_*$. By Proposition (2.4) there exists a unitary transvection $\ulcorner B\urcorner$ with unique center x_* and $\ulcorner B\urcorner y_* = z_*$. $\ulcorner BAB^{-1}A^{-1}\urcorner \in H$ and $\ulcorner BAB^{-1}A^{-1}\urcorner u^* = u^*$, since $\ulcorner B\urcorner$ and $\ulcorner AB^{-1}A^{-1}\urcorner$ are transvections with centers x_* and y_* respectively. $\ulcorner BAB^{-1}A^{-1}\urcorner y_* \not\perp y_*$.

(iv) Let $\ulcorner A\urcorner \in H$ with $\ulcorner A\urcorner u^* = u^*$ for an anisotropic line u^* and $\ulcorner A\urcorner x_* = y_* \not\perp x_*$ for some isotropic $x_* | u^*$. In the notation of section 3 we have the following situation. If $\sigma = 1$, i.e., if π is a linear polarity, we may assume that $x \in R^+$. Then also $y \in R^+$, since y_* is isotropic and $x_* \not\perp y_*$. Choose an isotropic $z_* | u^*$, $z \in R^+$, $z_* \not\perp x_*, y_*$. Let $\ulcorner B\urcorner$ be the unitary transvection with center x_* such that $\ulcorner B\urcorner y_* = z_*$. Then $\ulcorner BAB^{-1}A^{-1}\urcorner \in H$, $\ulcorner BAB^{-1}A^{-1}\urcorner y_* = z_* \not\perp y_*$, $BAB^{-1}A^{-1} | R^- = 1$ since $B | R^- = 1$. Hence $BAB^{-1}A^{-1} | R^+$ belongs to $\Omega(Q^+ | R^+)$ by (3.12). If $\sigma \neq 1$, then $A | R^+ \in \Omega(Q^+ | R^+)$ by (3.18). In both cases $\Omega(Q^+ | R^+)$ is a simple group, containing the restrictions to R^+ of all unitary transvections with center p_*, $p \in R^+$.

(v) Thus we have shown: if $\ulcorner S\urcorner$ is any unitary transvection with center $p_* | u^*$, $p \in R^+$, then $S | R^+ = A | R^+$ for some $A \in H$. Let $\ulcorner D\urcorner$ be the unitary reflection whose axis is u^*. Then $S | R$ determines $\ulcorner S\urcorner$ uniquely up to $\ulcorner D\urcorner$; in other words: either $\ulcorner S\urcorner = \ulcorner A\urcorner$ or $\ulcorner SD\urcorner = \ulcorner A\urcorner$ for some $\ulcorner A\urcorner \in H$. In the latter case, $\ulcorner DS\urcorner = \ulcorner D(SD)D^{-1}\urcorner \in H$, hence $\ulcorner S^2\urcorner = \ulcorner (SD)(DS)\urcorner \in H$. So for any transvection $\ulcorner S\urcorner$ with center $p_* | u^*$, $p \in R^+$, we have $\ulcorner S^2\urcorner \in H$.

(vi) If $\ulcorner S \urcorner$ is a unitary transvection with unique center p_*, then there exists a unitary transvection $\ulcorner V \urcorner$ with unique center p_* such that $\ulcorner V^2 \urcorner = \ulcorner S \urcorner$. The proof of this statement is precisely the same as in [18], (8.5). Hence (v) implies: H contains all unitary transvections which have a certain isotropic point p_* as unique center. Since PT is transitive on isotropic points, any unitary transvection with unique center is conjugate to one with center p_*. This implies that H contains all such unitary transvections, hence PT.

Since the unitary reflections in outer points generate a normal subgroup of PT, an immediate consequence of the above theorem is the following corollary.

(5.13) **Corollary.** *PT is generated by unitary reflections in outer points.*

6.

This section is devoted to a study of the factorgroups $PU(\pi)/PT(\pi)$, for π a hyperbolic polarity. Most of these results are obtained in a similar way as in [18], so we merely indicate the points where the proof in the present situation is different.

First, we consider the case of a hermitian linear polarity, i.e., $U=1$ in the notation of (3.2). We choose coordinates as in (3.2), so $u_*=(1,0,0;0,0,0)_*$ is an outer point. Let $\ulcorner S \urcorner \in PU$. After multiplication of $\ulcorner S \urcorner$ by a suitable element of PT, we may assume that $\ulcorner S \urcorner u_* = u_*$, since PT is transitive on outer points. By Proposition (3.12), S can be chosen so as to satisfy the conditions $S'TS=T$, $\det S=1$, $Su=u$, $S|R^+ \in \Omega(Q^+|R^+)$, $S|R^-=1$.

By (3.19) this means that $S|R$ is induced by an element of PT, hence $\ulcorner S \urcorner \in PT$ or $\ulcorner SD \urcorner \in PT$, where $\ulcorner D \urcorner$ is the unitary reflection whose axis is u^*. But $\ulcorner D \urcorner \in PT$ by Proposition (5.4), hence $\ulcorner S \urcorner \in PT$. Thus we have shown a result already proved by Jacobson ([6], Theorem 14).

(6.1) **Proposition.** *If π is a hyperbolic hermitian linear polarity, then $PU(\pi)=PT(\pi)$.*

Next consider a nonhermitian linear polarity, so $\sigma=1$, U a reflection in a quaternion subalgebra D of C. In this case we have the following result, which gives somewhat more information then was available in the nonsplit case treated in [18]. Choose coordinates as above.

(6.2) **Proposition.** *Let π be a hyperbolic nonhermitian linear polarity. Then*

(i) *$PU(\pi)$ is generated by unitary reflections.*

(ii) *$PT(\pi)$ is the commutator subgroup of $PU(\pi)$.*

Proof. (i) Let $x_*|u^*$ be an isotropic point with $x \in R^+$. Consider any $\ulcorner S \urcorner \in PU$. Since PT is transitive on isotropic points and on anisotropic lines through a given isotropic point, we may assume after multiplication of $\ulcorner S \urcorner$ by a suitable element of PT that $\ulcorner S \urcorner x_* = x_*$, $\ulcorner S \urcorner u^* = u^*$. Then S must leave the subspaces R^+ and R^- invariant. The rest of the proof of (i) is the same as for (9.2) in [18], so it will be omitted.

(ii) $PT' = PT$ since PT is simple noncommutative, hence $PU' \supseteq PT$. Conversely, consider a commutator $\ulcorner U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1} \urcorner$, where $\ulcorner U_1 \urcorner, \ulcorner U_2 \urcorner \in PU$. As we have seen above, $\ulcorner U_i \urcorner = \ulcorner S_i \urcorner \ulcorner V_i \urcorner$ with $\ulcorner S_i \urcorner \in PT$ and $\ulcorner V_i \urcorner \in PU$ such that $\ulcorner V_i \urcorner u^* = u^*$, V_i leaves R^+ and R^- invariant. Since PT is a normal subgroup of PU,

$$\ulcorner U_1 U_2 U_1^{-1} U_2^{-1} \urcorner = \ulcorner S_3 \urcorner \ulcorner V_1 V_2 V_1^{-1} V_2^{-1} \urcorner$$

for some $\ulcorner S_3 \urcorner \in PT$. $V_1 V_2 V_1^{-1} V_2^{-1}$ induces in R^+ an element of the commutator-subgroup $\Omega(Q^+|R^+)$, in R^- an element of $\Omega(Q^-|R^-)$. These elements are induced by products of unitary transvections with unique center x_*, where $x \in R^+$ or R^- respectively: see (3.19). Hence $\ulcorner V_1 V_2 V_1^{-1} V_2^{-1} \urcorner = \ulcorner S_4 \urcorner$ or $\ulcorner S_4 \urcorner \ulcorner D \urcorner$, where $\ulcorner S_4 \urcorner \in PT$ and $\ulcorner D \urcorner$ is the unitary reflection with axis u^*. Since $\ulcorner D \urcorner \in PT$ by (5.4), this completes the proof.

Finally, let the hyperbolic polarity π be nonlinear, so in the notation of (3.2), $\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner$, $T = [1, 1, 1; -U, -U, U]$, $K = F(\theta)$, $\theta^2 = \alpha \in F$, σ F-automorphism of $K \neq \mathrm{id}$, $C = C_F \otimes_F K$, for C_F an octave algebra over F, $U = 1 \otimes \sigma$.

(6.3) **Definition.** Let u_* be a fixed outer point, $\ulcorner S \urcorner \in PU(\pi)$ with $\ulcorner S \urcorner u_* = u_*$, $S'TS = T$. Then $\gamma(S) \in K$ is defined by the relation $Su = \gamma(S)u$.

This is the analogue for the split case of Definition (9.3) in [18]. For u_* we take $(1, 0, 0; 0, 0, 0)_*$ in the given coordinatization.

(6.4) **Lemma.** *Let $b \in C_F$, $N(b) \neq 0$, then there exists $\ulcorner S \urcorner \in PU(\pi)$ with $\ulcorner S \urcorner u_* = u_*$, $S'TS = T$ such that $\gamma(S) = \beta\sigma(\beta)^{-1}$ for a β satisfying $\beta\sigma(\beta) = N(b)$.*

Proof. Similar to the proof of (9.4) in [18] in one direction: see the last paragraph of that proof.

In (9.4) in [18] it was also shown that every $\gamma(S)$ is of the form given above. This probably also holds in the split case; we have proved it for some possible cases for the structure of C_F, but we have not given a general proof, as we actually do not need this result.

(6.5) **Proposition.** *Let π be a hyperbolic nonlinear polarity. Then we have*

(i) $PT(\pi) = \{\ulcorner S \urcorner \in PU(\pi) | S'TS = T, \det S = 1\}$.

(ii) $PU(\pi)/PT(\pi) \cong N/N^3$, *where N is the multiplicative group of the $\lambda \in K$ with $\lambda\sigma(\lambda) = 1$, and where N^3 is the subgroup of all third powers of elements of N.*

(iii) $PU(\pi)$ *is generated by unitary dilatations.*

(iv) $PT(\pi)$ *is the commutator subgroup of $PU(\pi)$.*

Proof. The proof of (9.5) in [18] also holds for the present case with a couple of minor changes, which we indicate here.

(1) In the beginning of the proof of (i), v_* and $w_* | u^*$ have to be strongly isotropic, u^* anisotropic, $v_* \not\perp w_*$.

(2) In the last but one paragraph of the proof of (i) we must have the following. $\dim L = 8$, $\dim L_1 = 7$, hence $\dim(L_1 \cap S^* L_1) \geqq 6$. Therefore, there exists $(0, 0; x_1') \in L$ with $N(x_1') \neq 0$ such that $S^*(0, 0; x_1') = (0, 0; y_1') \in L_1$. The rest of the proof is the same.

Remark. In (9.5) (iii) of [18] we also included transvections among the generators of $PU(\pi)$, but these are redundant in view of (5.13).

7.

Let K be a quadratic extension of a field F, σ the nontrivial F-automorphism of K. We shall show in this section that the groups $PT(\pi)$, π a σ-linear polarity in a Hjelmslev-Moufang plane over K, are precisely the outer F-forms of the Chevalley group E_6 which are split by K.

Let C_F be the split octave algebra over the field F, $C=C_K=C_F\otimes_F K$ the split algebra over K. Let $\mathscr{P}=\mathscr{P}(C)$ be the Hjelmslev-Moufang plane over C, coordinatized by the split Jordan algebra $A=A(C)=A(C_F)\otimes_F K$. Let $T^0=1\otimes\sigma$ on $A(C)=A(C_F)\otimes_F K$, then $\pi^0=\pi_0\ulcorner T^0\urcorner$ is a σ-linear polarity. Any σ-linear polarity π can be written as $\pi=\pi_0\ulcorner T\urcorner$, T a σ-linear transformation of $A(C)$ onto itself such that $det(Tx)=v\,\sigma(det\,x)$ for all $x\in A$, $T=T'$. Let PS denote the group of projectivities of $\mathscr{P}$ of the form $\ulcorner T\urcorner$, T linear: $A\to A$, $det(Tx)=det\,x$ for all x. PS is isomorphic (in the sense of algebraic groups) to the Chevalley group of type E_6 over K: see [18], §15.

Let U_σ be the σ-linear automorphism of PS defined by

$$U_\sigma\ulcorner S\urcorner=\ulcorner T^{-1}\tilde{S}T\urcorner,$$

and similarly U_σ^0 with T^0 instead of T. $A_\sigma=U_\sigma^{0\,-1}U_\sigma$ is an outer 1-cocycle of $\langle\sigma\rangle$ in $\mathrm{Aut}(PS)$, the automorphism group of PS as an algebraic group (cf. [4, 8]); U_σ is the corresponding 1-precocycle in the terminology of [7]. A_σ defines an outer F-form of PS split by K, viz.,

$$\{\ulcorner T\urcorner\in PS\,|\,\ulcorner T^{-1}\tilde{S}T\urcorner=\ulcorner S\urcorner\}=PT(\pi)$$

by Proposition (6.5); cf. also [4], Theorem 2. The F-isomorphism classes of outer forms of PS split by K are in $1-1$ correspondence with the outer 1-cohomology classes $\in H^1(K/F,\mathrm{Aut}(PS))$. Let A_σ be any outer cocycle; by [14], A_σ is of the form

$$A_\sigma\ulcorner S\urcorner=\ulcorner V^{-1}\tilde{S}V\urcorner,$$

where $V=A\to A$ is linear such that $det(Vx)=v\,det\,x$ for all $x\in A$ and some fixed $v\in K^*$. Take $U_\sigma=U_\sigma^0A_\sigma$, then

$$U_\sigma\ulcorner S\urcorner=\ulcorner T^{-1}\tilde{S}T\urcorner$$

with $T=T^0V$, hence $T=A\to A$ is σ-linear such that $det(Tx)=v\,\sigma(det\,x)$ for $x\in A$. $A_\sigma\sigma(A_\sigma)=1$ implies by a straightforward computation

$$T_0T^{-1}T'T_0^{-1}=\mu$$

for some $\mu \in K^*$, hence

$$T' = \mu T.$$

So $\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner$ is a polarity and

$$A_\sigma \ulcorner S \urcorner = \pi^{-1} \ulcorner S \urcorner \pi.$$

Now assume A_σ and B_σ are cohomologuous cocycles. Let $A_\sigma \ulcorner S \urcorner = \pi^{-1} \ulcorner S \urcorner \pi$, $B_\sigma \ulcorner S \urcorner = \rho^{-1} \ulcorner S \urcorner \rho$ for σ-linear polarities $\pi = \pi_0 \ulcorner T \urcorner$, $\rho = \pi_0 \ulcorner U \urcorner$. $A_\sigma \sim B_\sigma$ means

$$(*) \qquad B_\sigma = D^{-1} A_\sigma \sigma(D)$$

for some $D \in \mathrm{Aut}(PS)$. If D is a inner automorphism, so

$$D \ulcorner S \urcorner = \ulcorner X^{-1} S X \urcorner$$

for some $\ulcorner X \urcorner \in PG$, then the condition $(*)$ is equivalent to

$$U = \mu \widetilde{\sigma(X)} T \sigma(X)^{-1}, \qquad \mu \in K^*,$$

which means that the polarities π and ρ are conjugate under a projectivity. For D an outer automorphism, so

$$D \ulcorner S \urcorner = \ulcorner X^{-1} \tilde{S} X \urcorner$$

for some $\ulcorner X \urcorner \in PG$, condition $(*)$ is equivalent to

$$U = \mu \sigma(X) \tilde{T} \sigma(X)^{-1}, \qquad \mu \in K^*,$$

which means that π and ρ are conjugate under a linear duality.

(7.1) **Definition.** Two polarities π and ρ in $\mathscr{P}(C)$ are called *equivalent* if there exists τ which is either a linear projectivity or a linear duality of $\mathscr{P}(C)$ such that $\rho = \tau^{-1} \pi \tau$.

Thus we have established a $1-1$ correspondence between outer cohomology classes $\in H^1(K/F, PS)$ and equivalence classes of σ-linear polarities. Hence we get the following result.

(7.2) **Proposition.** *Let F be a field. The groups $PT(\pi)$, where π is a nonlinear polarity in a Hjelmslev-Moufang plane $\mathscr{P}(C)$, C a split octave algebra over a quadratic extension K of F, are precisely the outer F-forms of the exceptional simple algebraic group E_6 without center which are split by a quadratic extension of F. Two such forms are F-isomorphic if and only if the corresponding polarities are equivalent in the sense of* (7.1).

In the field F is finite, every F-form of E_6 is split by a quadratic extension of F (see [4], Theorem 3), so in that case the groups $PT(\pi)$ as in (7.2) are all outer forms of E_6.

References

1. Blij, F. van der, and T. A. Springer: The arithmetics of octaves and of the group G_2. Proc. Akad. Amsterdam A **62**, (= Indag. Math. **21**), 406 – 418 (1959).
2. – – Octaves and triality. Nieuw Archief v. Wiskunde (3) **8**, 158 – 169 (1960).
3. Dieudonné, J.: La géometrie des groupes classiques. 2e éd. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.
4. Herzig, D.: Forms of algebraic groups. Proc. A. M. S. **12**, 657 – 660 (1961).
5. Jacobson, N.: Composition algebras and their automorphisms. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **7**, 1 – 26 (1958).
6. – Some groups of transformations defined by Jordan algebras II. J. reine angew. Math. **204**, 74 – 98 (1960).
7. – Forms of algebras. Belfer annual conf. Proc. **1**, 41 – 71 (1966).
8. Serre, J.-P.: Cohomologie Galoisienne. Lecture notes in Mathematics, vol. 5. Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer 1964.
9. Springer, T. A.: On a class of Jordan algebras. Proc. Akad. Amsterdam A **62** (= Indag. Math. **21**), 254 – 264 (1959).
10. – The projective octave plane. Ibid. **63** (= Indag. Math. **22**), 74 – 101 (1960).
11. – On the geometric algebra of the octave planes. Ibid. **65** (= Indag. Math. **24**), 451 – 468 (1962).
12. –, and F. D. Veldkamp: Elliptic and hyperbolic octave planes. Ibid. **66** (= Indag. Math. **25**), 413 – 451 (1963).
13. – – On Hjelmslev-Moufang planes. Math. Z. **107**, 249 – 263 (1968).
14. Steinberg, R.: Automorphisms of classical Lie algebras. Pacific J. Math. **11**, 1119 – 1129 (1961).
15. Tamagawa, T.: On the structure of orthogonal groups. Am. J. Math. **80**, 191 – 197 (1958).
16. Tits, J.: Les «formes réelles» des groupes de type E_6. Sém. Bourbaki 1957/1958, exposé 162.
17. Veldkamp, F. D.: Polar geometry. Proc. Akad. Amsterdam A **62** (= Indag. Math. **21**), 512 – 551 (1959).
18. – Unitary groups in projective octave planes. Compositio Mathematica **19**, 213 – 258 (1968).
19. – Collineation groups in Hjelmslev-Moufang planes. Math. Z. **108**, 37 – 52 (1968).

Dr. F. D. Veldkamp
Mathematisch Instituut
Universiteitscentrum de Uithof
Budapestlaan
Utrecht (Niederlande)

(Received July 4, 1968)

Math. Z. 108, 313–324 (1969)

Nilpotente Elemente in Ringen von endlicher globaler Dimension

HELMUT LENZING

1. Einleitung

Ist A ein Ring mit Einselement, so haben Hattori [9] und Stallings [13] gezeigt, daß man für jeden Endomorphismus f eines endlich erzeugbaren, projektiven A-Linksmoduls eine Spur $\mathrm{Tr}(f)$ erklären kann, die in $T(A)=A/[A,A]$ liegt, wobei $[A,A]$ die von den Lie-Kommutatoren $ab-ba$ $(a,b\in A)$ erzeugte Untergruppe von A ist. $T(A)$ heißt die *Spurgruppe* von A.

Falls A links-noethersch und von endlicher links-globaler Dimension ist (bzw. wenn A links-kohärent und die schwache globale Dimension von A endlich ist), läßt sich diese Spur auf die Endomorphismen von endlich erzeugbaren (bzw. endlich präsentierbaren) A-Linksmoduln fortsetzen. Diese Fortsetzung geschieht im Rahmen der algebraischen K-Theorie nach dem Vorbild von Grothendieck [5], man vergleiche dazu auch Bass, Heller, Swan [4].

Falls diese Fortsetzung möglich ist, hat jeder nilpotente Endomorphismus die Spur 0 (Satz 1). Insbesondere erhalten wir ohne weitere Strukturüberlegungen, daß jedes nilpotente Element von A in $[A,A]$ liegt, falls jedes Hauptideal von A eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive Moduln besitzt (Satz 5). Speziell hat ein derartiger kommutativer Ring keine nilpotenten Elemente.

Es folgen einige Bemerkungen zum Aufbau der Arbeit. In Abschnitt 2 wird die Spur von Endomorphismen und insbesondere die Spurgruppe in kategoriellem Rahmen definiert. Diese ergibt sich als modifizierte Grothendieck-Gruppe einer geeigneten Kategorie von Endomorphismen. Diese Betrachtungen sind etwas ausführlicher, als sie für die beabsichtigten ringtheoretischen Anwendungen unbedingt nötig wären. Man erhält in diesem Rahmen jedoch unmittelbar die Morita-Invarianz der Spurgruppe $T(A)$ von A (Satz 3).

In Abschnitt 3 wird die Spur von Endomorphismen endlich erzeugbarer, projektiver Moduln untersucht. Diese Betrachtungen schließen sich eng an die erwähnten Arbeiten von Hattori und Stallings an, betonen jedoch einen etwas anderen Standpunkt.

In Abschnitt 4 wird die Fortsetzung der zunächst für Endomorphismen endlich erzeugbarer, projektiver Moduln erklärten Spur auf weitere Klassen von Moduln diskutiert. Falls ein Modul eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive Moduln besitzt, ist diese Fortsetzung möglich (Satz 4).

In Abschnitt 5 finden sich die erwähnten ringtheoretischen Anwendungen (Satz 5). In diesem Zusammenhang sind Resultate von Small [11] von Interesse, der im kommutativen Fall unter Verwendung der Ergebnisse von Stallings [13] mit Hilfe von Methoden aus der lokalen Algebra präzisere Resultate nachweisen kann: Falls in einem kommutativen Ring jedes Hauptideal eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive Moduln besitzt, ist jedes Hauptideal schon projektiv. Allerdings läßt sich dieses präzisere Ergebnis im nichtkommutativen Fall nicht mehr sichern.

Im Abschnitt 6 werden die Spurgruppe der Kategorie der endlich erzeugbaren Moduln einerseits und der endlich erzeugbaren, projektiven Moduln andererseits in Verbindung gesetzt, vor allem für artinsche Ringe.

Alle betrachteten Ringe haben ein Einselement. Alle auftretenden Moduln sind unitäre Linksmoduln. $\mathrm{Mod}(A)$ ist die Kategorie der A-Moduln, $\mathrm{mod}(A)$ die Kategorie der A-Moduln von endlicher Länge und $\mathrm{proj}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugbaren, projektiven A-Moduln. Ist $\mathscr{C}$ eine Kategorie, so bezeichnet $\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ die Klasse der Objekte von $\mathscr{C}$. Wir nennen $\mathscr{C}$ klein, wenn die Isomorphieklassen von $\mathscr{C}$-Objekten eine Menge bilden.

2. Spur von Endomorphismen, Spurgruppe einer Kategorie

Sei $\mathscr{A}$ eine abelsche Kategorie und $\mathscr{C}$ eine (kleine) volle Unterkategorie von $\mathscr{A}$, die gegenüber der Bildung von endlichen direkten Summen abgeschlossen ist. $\mathscr{C}$ ist insbesondere eine additive Kategorie. Wir wollen ferner annehmen, daß für jede in $\mathscr{A}$ exakte Sequenz

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

mit $E, E'' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ auch $E' \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ gilt. Wenn später im Zusammenhang mit $\mathscr{C}$ von exakten Sequenzen die Rede ist, ist stets gemeint, daß diese Sequenzen in $\mathscr{A}$ exakt sind. In den Anwendungen ist zumeist $\mathscr{A} = \mathrm{Mod}(A)$ die Kategorie der Linksmoduln über einem Ring A und $\mathscr{C} = \mathrm{proj}(A)$ die volle Unterkategorie der endlich erzeugbaren, projektiven A-Moduln.

Wir untersuchen im folgenden die Kategorie $\mathscr{C}[X]$ der $\mathscr{C}$-Endomorphismen:

Objekte von $\mathscr{C}[X]$ sind die $\mathscr{C}$-Endomorphismen. Einen $\mathscr{C}$-Endomorphismus $f: E \to E$ werden wir der Deutlichkeit halber oft mit (E, f) bezeichnen.

Ein $\mathscr{C}[X]$-Morphismus $u: (E, f) \to (F, g)$ ist ein $\mathscr{C}$-Morphismus $u: E \to F$ mit $gu = uf$.

Die Komposition der Morphismen von $\mathscr{C}[X]$ ist die der Morphismen von $\mathscr{C}$.

Ist $A[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten über A, so gilt überdies $\mathrm{Mod}(A)[X] = \mathrm{Mod}(A[X])$, woraus sich die verwendete Bezeichnungsweise erklärt. Wir werden von dieser Tatsache im übrigen jedoch keinen Gebrauch machen.

$\mathscr{C}[X]$ ist eine volle Unterkategorie der abelschen Kategorie $\mathscr{A}[X]$. Daher hat es einen Sinn, von exakten Sequenzen in $\mathscr{C}[X]$ zu sprechen. Exaktheit

einer Sequenz $0 \to f' \to f \to f'' \to 0$ in $\mathscr{C}[X]$ meint daher, daß das $\mathscr{C}$-Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & E' & \to & E & \to & E'' \to 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} \\ 0 & \to & E' & \to & E & \to & E'' \to 0 \end{array}$$

kommutativ ist und daß seine Zeilen in $\mathscr{A}$ exakt sind.

Die Kategorie $\mathscr{C}[X]$ verfügt über Zusatzstruktur: Einem Paar $f, g: E \to E$ von $\mathscr{C}[X]$-Objekten kann man das $\mathscr{C}[X]$-Objekt $f+g: E \to E$ zuordnen. Wir betrachten nun eine modifizierte Grothendieck-Gruppe der Kategorie $\mathscr{C}[X]$, die diese Zusatzstruktur respektiert, und gelangen damit zum Begriff der universellen Spurabbildung für $\mathscr{C}$ und zum Begriff der Spurgruppe der Kategorie $\mathscr{C}$.

Definition 1. *Eine Abbildung* $t: \mathrm{Obj}(\mathscr{C}[X]) \to G$ *von der Klasse der* $\mathscr{C}$*-Endomorphismen in eine kommutative Gruppe* G *heißt Spurabbildung, wenn gilt:*

(Sp 1) *Für jede exakte Sequenz* $0 \to f' \to f \to f'' \to 0$ *von* $\mathscr{C}$*-Endomorphismen gilt* $t(f) = t(f') + t(f'')$.

(Sp 2) *Sind* $f, f': E \to E$ $\mathscr{C}$*-Endomorphismen, so gilt* $t(f+f') = t(f) + t(f')$.

Falls $\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}: \mathrm{Obj}(\mathscr{C}[X]) \to T(\mathscr{C})$ universell mit den Eigenschaften (Sp 1) und (Sp 2) ist, nennen wir $\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}$ *universelle Spurabbildung* und $T(\mathscr{C})$ „die" *Spurgruppe* der Kategorie $\mathscr{C}$. Existenz und „Eindeutigkeit" von $\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}$ und $T(\mathscr{C})$ werden auf übliche Art gesichert. Ist überdies G die Grothendieck-Gruppe der Kategorie $\mathscr{C}[X]$, ist $\varphi: \mathrm{Obj}(\mathscr{C}[X]) \to G$ die zugehörige universelle Abbildung, ist ferner U die von den Elementen $\varphi(f+g) - \varphi(f) - \varphi(g)$, $f, g: E \to E$, $E \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, erzeugte Untergruppe und $n: G \to G/U$ die natürliche Abbildung, so ist $G/U = T(\mathscr{C})$ und $\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}} = n\varphi$. Es sei hier noch bemerkt, daß $\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}$ eine surjektive Abbildung ist.

Bemerkung 1. Ist f ein $\mathscr{C}$-Endomorphismus und

$$(E, f) = (E_0, f_0) \supset (E_1, f_1) \supset \cdots \supset (E_n, f_n) = (0, 0)$$

eine Filtrierung von f mit Quotienten $f_i/f_{i+1} = (E_i/E_{i+1}, \bar{f}_i)$ – wobei wir an dieser Stelle voraussetzen wollen, daß die in $\mathscr{A}$ gebildeten Quotienten E_i/E_{i+1} schon in $\mathscr{C}$ liegen – so gilt

$$t(f) = \sum_i t(f_i/f_{i+1})$$

für jede Spurabbildung t, wie aus der Theorie der Grothendieck-Gruppen bekannt ist. Desgleichen gilt für jede exakte $\mathscr{C}[X]$-Sequenz $0 \to f_n \to f_{n-1} \to \cdots \to f_1 \to f_0 \to 0$

$$\sum_i (-1)^i t(f_i) = 0.$$

Hierbei geht die eingangs mit exakten Sequenzen formulierte Bedingung für $\mathscr{C}$ ein.

Bemerkung 2. Die Untersuchung der Spurgruppe von $\mathscr{C}$ verläuft der Untersuchung der Whitehead-Gruppe von $\mathscr{C}$ (vgl. Bass [3], Chap. III) weitgehend

parallel, jedoch macht (Sp 2) gewisse Vereinfachungen der Beweise im Fall der Spurgruppe möglich. Man vergleiche dazu etwa Abschnitt 4.

Wir wollen anschließend einfache Eigenschaften einer Spurabbildung t: Obj($\mathscr{C}[X]$) $\to G$ feststellen. Zum Beweis machen wir von der folgenden Tatsache ohne weiteren Kommentar Gebrauch: Sind E_k, F_i ($k=1,\dots,n$, $i=1,\dots,m$) Objekte einer additiven Kategorie, so ist ein Morphismus

$$f\colon E_1\oplus\cdots\oplus E_n\to F_1\oplus\cdots\oplus F_m$$

eindeutig durch eine Matrix (f_{ik}) mit $f_{ik}\colon E_k\to F_i$ beschrieben ($k=1,\dots,n$, $i=1,\dots,m$).

Lemma 1. *Ist*

$$f=\begin{pmatrix}0 & 0\\ u & 0\end{pmatrix}\colon E_1\oplus E_2\to E_1\oplus E_2$$

ein $\mathscr{C}$-Endomorphismus, so gilt $t(f)=0$.

Beweis. Die naheliegende $\mathscr{C}[X]$-Sequenz

$$0\to(E_2,0)\to(E_1\oplus E_2,f)\to(E_1,0)\to 0$$

ist exakt, somit gilt $t(f)=t(0)+t(0)=0$ wegen (Sp 1).

Lemma 2. *Ist $f=(f_{ik})\colon E_1\oplus E_2\to E_1\oplus E_2$ ein $\mathscr{C}$-Endomorphismus, so gilt $t(f)=t(f_{11})+t(f_{22})$.*

Beweis. Ist $g\colon E_1\oplus E_2\to E_1\oplus E_2$ durch $g_{11}=f_{11}$, $g_{12}=f_{12}$, $g_{21}=0$, $g_{22}=f_{22}$ definiert, so ist $t(f-g)=0$ (Lemma 1), somit $t(f)=t(g)$. Ferner zeigt die naheliegende exakte Sequenz

$$0\to(E_1,f_{11})\to(E_1\oplus E_2,g)\to(E_2,f_{22})\to 0$$

daß $t(f)=t(g)=t(f_{11})+t(f_{22})$ gilt.

Es ergibt sich unmittelbar

Lemma 3. *Ist $f=(f_{ik})\colon E_1\oplus\cdots\oplus E_n\to E_1\oplus\cdots\oplus E_n$ ein $\mathscr{C}$-Endomorphismus, so gilt $t(f)=\sum t(f_{ii})$.*

Weitere Einsicht in den Mechanismus von Spurabbildungen vermittelt der folgende Satz, der bei Stallings [13] als Ausgangspunkt der axiomatischen Spurdefinition dient.

Lemma 4. *Sind $u\colon E\to F$ und $v\colon F\to E$ $\mathscr{C}$-Endomorphismen, so gilt $t(uv)=t(vu)$.*

Beweis. Beachtet man, daß $\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}\colon E\oplus F\to E\oplus F$ ein Automorphismus mit Inversem $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -u & 1\end{pmatrix}$ ist, so zeigt die Gleichung

$$\begin{pmatrix}0 & v\\ u & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ u & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}vu & v\\ w & -uv\end{pmatrix},$$

mit $w=u-uvu$, daß

$$\begin{pmatrix}0 & v\\ u & 0\end{pmatrix}\colon E\oplus F\to E\oplus F \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}vu & v\\ w & -uv\end{pmatrix}\colon E\oplus F\to E\oplus F$$

isomorphe $\mathscr{C}[X]$-Objekte sind. Es folgt (Lemma 2)

$$0=t\begin{pmatrix}0 & v\\ u & 0\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}vu & u\\ w & -uv\end{pmatrix}=t(vu)-t(uv).$$

Lemma 4 hat die folgende Konsequenz: Für jedes $\mathscr{C}$-Objekt E liefert t einen Homomorphismus abelscher Gruppen $\varphi\colon \mathrm{End}_{\mathscr{C}}(E)\to G$, $f\mapsto t(f)$, der *symmetrisch* ist, d.h. der Bedingung $\varphi(fg)=\varphi(gf)$ genügt.

Bemerkung 3. Sind $\mathscr{C}$ und $\mathscr{D}$ Kategorien wie zu Beginn dieses Abschnittes definiert und ist $u\colon \mathscr{C}\to\mathscr{D}$ ein exakter, additiver Funktor, dann definiert u einen Homomorphismus $T(u)\colon T(\mathscr{C})\to T(\mathscr{D})$, so daß $T(u)(\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}(f))=\mathrm{Tr}_{\mathscr{D}}(u(f))$ für jeden $\mathscr{C}$-Endomorphismus f gilt. $T(u)$ hängt funktoriell von u ab. Insbesondere gilt: Ist $u\colon\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ eine Äquivalenz von Kategorien, so ist $T(u)\colon T(\mathscr{C})\to T(\mathscr{D})$ ein Isomorphismus.

Bemerkung 4. Definiert man das Zentrum $\mathrm{Zentr}(\mathscr{C})$ der Kategorie $\mathscr{C}$ als Ring der Endomorphismen des Funktors „Identität" $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C}\to\mathscr{C}$, so ist die Spurgruppe $T(\mathscr{C})$ in naheliegender Weise ein Modul über dem kommutativen Ring $\mathrm{Zentr}(\mathscr{C})$. Ist nämlich $\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}(f)$ ein Element von $T(\mathscr{C})$, $f\colon E\to E$, und ist $\sigma\colon \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}\to\mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ eine natürliche Transformation, so definiere man

$$\sigma\cdot\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}(f)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}(\sigma_E f)=\mathrm{Tr}_{\mathscr{C}}(f\sigma_E).$$

Ist $\mathscr{C}=\mathrm{proj}(A)$ für einen Ring A, so ist $\mathrm{Zentr}(\mathscr{C})$ gerade das Zentrum von A ([2], Chap. II).

Wir wenden uns nun der Untersuchung von nilpotenten Endomorphismen zu. Sei dazu $\mathscr{C}$ eine Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathscr{A}$, wie zu Beginn dieses Abschnitts beschrieben.

Definition 2 (Bass). *Ein $\mathscr{C}$-Endomorphismus $f\colon E\to E$ heißt $\mathscr{C}$-nilpotent, wenn es eine Filtrierung $E=E_0\supset E_1\supset\cdots\supset E_n=0$ von E gibt mit $E_i\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$, $E_i/E_{i+1}\in\mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ und $f(E_i)\subset E_{i+1}$ für $i=0,\ldots,n-1$.*

Jeder $\mathscr{C}$-nilpotente $\mathscr{C}$-Endomorphismus ist offensichtlich nilpotent (es ist $f^n=0$ mit den Bezeichnungen von Definition 2), aber nicht notwendig ist umgekehrt ein nilpotenter $\mathscr{C}$-Endomorphismus auch $\mathscr{C}$-nilpotent. Dies ist jedoch der Fall, wenn $\mathscr{C}$ eine abelsche Kategorie ist: Man braucht dann nur $E_i=\mathrm{Bild}(f^i)$ zu definieren. Es gilt nun

Satz 1. *Ist $t\colon\mathrm{Obj}(\mathscr{C}[X])\to G$ eine Spurabbildung und ist $f\colon E\to E$ $\mathscr{C}$-nilpotent, dann ist $t(f)=0$.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen von Definition 2 gilt insbesondere $f(E_i)\subset E_i$. f induziert daher Endomorphismen (E_i, f_i) und wegen $f(E_i)\subset E_{i+1}$ gilt $f_i/f_{i+1}=(E_i/E_{i+1},0)$. Somit ist (Bemerkung 1) $t(f)=\sum t(f_i/f_{i+1})=0$.

3. Spur von Endomorphismen projektiver Moduln

In diesem Abschnitt sei $\mathscr{P}$ stets die Kategorie proj(A) der endlich erzeugbaren, projektiven Linksmoduln über dem Ring A. Wir werden nach dem Vorgehen von Hattori [9] zeigen, daß die Spurgruppe von $\mathscr{P}$ gerade die in der Einleitung definierte Spurgruppe $T(A)=A/[A,A]$ des Ringes A ist. Ferner stimmt für kommutatives A $\mathrm{Tr}_{\mathscr{P}}$ mit der üblichen Spur für Endomorphismen von A^n überein.

Für jeden A-Linksmodul P ist $P^*=\mathrm{Hom}_A(P,A)$ ein A-Rechtsmodul. Es sei daran erinnert ([6], §4), daß es für $P\in\mathrm{Obj}(\mathscr{P})$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\theta_P\colon P^*\otimes_A P\to \mathrm{End}_A(P),\qquad u\otimes x\mapsto [y\mapsto u(x)\cdot y]$$

gibt. Ist dabei $\theta_P(\sum_i u_i\otimes x_i)=1_P$, d.h. gilt $\sum_i u_i(x)\cdot x_i=x$ für alle $x\in P$, so ist

$$\sigma_P\colon \mathrm{End}_A(P)\to P^*\otimes_A P,\qquad f\mapsto \sum_i u_i\otimes f(x_i)$$

die Umkehrabbildung zu θ_P.

Ist G eine abelsche Gruppe, so werden wir jeder additiven und symmetrischen Abbildung $\varphi\colon A\to G$ eine Spurabbildung $\mathrm{Tr}_\varphi\colon \mathrm{Obj}(\mathscr{P}[X])\to G$ zuordnen:

Für jeden A-Linksmodul P ist $\varphi_P\colon P^*\otimes_A P\to G$, definiert durch $u\otimes x\mapsto \varphi(u(x))$, ein Homomorphismus abelscher Gruppen. Falls P projektiv und endlich erzeugbar ist, ist die Komposition

$$\mathrm{End}_A(P)\xrightarrow{\sigma_P} P^*\otimes_A P\xrightarrow{\varphi_P} G$$

erklärt. Dadurch läßt sich eine Abbildung

$$\mathrm{Tr}_\varphi\colon \mathrm{Obj}(\mathscr{P}[X])\to G,\qquad (P,f)\mapsto \varphi_P\,\sigma_P(f),$$

definieren. Es gilt

$$\mathrm{Tr}_\varphi(f)=\varphi\Big(\sum_i u_i(f(x_i))\Big),\quad \text{falls}\quad \sigma_P(1_P)=\sum_i u_i\otimes x_i. \tag{1}$$

Überdies ist, wenn wir für $a\in A$ mit $a_r\colon A\to A$ die Rechtsmultiplikation mit a bezeichnen,

$$\mathrm{Tr}_\varphi(a_r)=\varphi(a)\qquad \text{für jedes } a\in A. \tag{2}$$

Wir können somit φ aus Tr_φ zurückgewinnen.

Satz 2. *Sei A ein Ring und $\mathscr{P}=\mathrm{proj}(A)$. Für jede additive, symmetrische Abbildung $\varphi\colon A\to G$ von A in eine abelsche Gruppe G ist Tr_φ eine Spurabbildung. Ist umgekehrt $t\colon \mathrm{Obj}(\mathscr{P}[X])\to G$ eine Spurabbildung, so gibt es genau eine additive, symmetrische Abbildung $\varphi\colon A\to G$ mit $t=\mathrm{Tr}_\varphi$.*

Beweis. Es ist klar, daß $\mathrm{Tr}_\varphi(f+g)=\mathrm{Tr}_\varphi(f)+\mathrm{Tr}_\varphi(g)$ für jedes Paar $f,g\colon P\to P$ von $\mathscr{P}$-Endomorphismen gilt. Sei ferner

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & P' & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p} & P'' & \to 0\\ & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f''} & \\ 0\to & P' & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{p} & P'' & \to 0 \end{array}$$

eine exakte Sequenz von $\mathscr{P}$-Endomorphismen. Die Zeilensequenzen sind exakt-direkt, da P'' projektiv ist. Es gibt somit Homomorphismen $j\colon P''\to P$, $q\colon P\to P'$ mit $qi=1_{P'}$, $pj=1_{P''}$ und $1_P=jp+iq$. Es gelte nun

$$\sigma_{P'}(1_{P'})=\sum u'_k\otimes x'_k,\qquad \sigma_{P''}(1_{P''})=\sum u''_l\otimes x''_l$$

mit $x'_k\in P'$, $u'_k\in\mathrm{Hom}(P',A)$ für $k=1,\dots,n$, und $x''_l\in P''$, $u''_l\in\mathrm{Hom}(P'',A)$ für $l=1,\dots,m$. Wir definieren dann $x_k=i(x'_k)\in P$, $u_k=u'_kq\in P^*$ für $k=1,\dots,n$, $y_l=j(x''_l)\in P$, $v_l=u''_lp\in P^*$ für $l=1,\dots,m$. Für $x\in P$ gilt

$$\begin{aligned}&\sum u_k(x)\cdot x_k+\sum v_l(x)\cdot y_l\\&=\sum u'_k(q(x))\cdot i(x'_k)+\sum u''_l(p(x))\cdot j(x''_l)\\&=i\Big[\sum u'_k(q(x))\cdot x'_k\Big]+j\Big[\sum u''_l(p(x))\cdot x''_l\Big]\\&=iq(x)+jp(x)=x.\end{aligned}$$

Das heißt $\sigma_P(1_P)=\sum u_k\otimes x_k+\sum v_l\otimes y_l$. Somit gilt (vgl. (1))

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_\varphi(f)&=\varphi\Big[\sum u_k(f(x_k))\Big]+\varphi\Big[\sum v_l(f(y_l))\Big]\\&=\varphi\Big[\sum u'_kqfi(x'_k)\Big]+\varphi\Big[\sum u''_lf''pj(x''_l)\Big]\\&=\varphi\Big[\sum u'_k(f'(x'_k))\Big]+\varphi\Big[\sum u''_l(f''(x''_l))\Big]\\&=\mathrm{Tr}_\varphi(f')+\mathrm{Tr}_\varphi(f'').\end{aligned}$$

Ist umgekehrt $t\colon \mathrm{Obj}(\mathscr{P}[X])\to G$ eine Spurabbildung, so definiert $a\mapsto t(a_r)$, eine additive, symmetrische Abbildung $\varphi\colon A\to G$ (Lemma 4). Wir zeigen $t=\mathrm{Tr}_\varphi$.

Es ist klar, daß $t'=t-\mathrm{Tr}_\varphi$ ebenfalls eine Spurabbildung ist. Wegen (2) ist $t'(a_r)=0$ für alle $a\in A$, somit gilt $t'(f)=0$ für jeden Endomorphismus $f\colon A^n\to A^n$ (Lemma 3). Ist $P\in\mathrm{Obj}(\mathscr{P})$, so gibt es $Q\in\mathrm{Obj}(\mathscr{P})$, so daß $P\oplus Q\cong A^n$ für ein geeignetes n gilt. $f\oplus 0\colon P\oplus Q\to P\oplus Q$ ist somit zu einem Endomorphismus von A^n isomorph, daher gilt $0=t'(f\oplus 0)=t'(f)$ (Lemma 2). Somit $t=\mathrm{Tr}_\varphi$.

Satz 2 impliziert unmittelbar das folgende Ergebnis.

Korollar. *Ist $\varphi\colon A\to G$ eine universelle additive, symmetrische Abbildung, so ist Tr_φ eine universelle Spurabbildung.*

Es ist offensichtlich, daß die natürliche Abbildung $\varepsilon\colon A\to A/[A,A]$ universell additiv, symmetrisch ist. Wir bezeichnen die zugehörige universelle Spurabbildung Tr_ε mit $\mathrm{Tr}_A\colon \mathrm{Obj}(\mathscr{P}[X])\to T(A)$. Somit $T(\mathrm{proj}(A))=T(A)$. Wegen der Gültigkeit von (2) werden wir in Zukunft auch die natürliche Abbildung $\varepsilon\colon A\to T(A)$ mit $\mathrm{Tr}_A\colon A\to T(A)$ bezeichnen.

Bemerkung 5. Die bisherigen Betrachtungen erlauben die Herleitung der folgenden bekannten Eigenschaft nilpotenter Matrizen mit Koeffizienten in einem kommutativen Ring A: Ist $f\colon A^n\to A^n$, $f=(f_{ik})$, $f_{ik}\in A$, ein nilpotenter Endomorphismus, so ist $\mathrm{Tr}_A(f)=\sum f_{ii}$ ein nilpotentes Element von A. Durch naheliegende Reduktion beschränkt man sich beim Beweis auf den Fall $A=$ kommutativer Körper. In diesem Fall zeigt Satz 1, daß $\mathrm{Tr}_A(f)=\sum f_{ii}=0$ ist.

Falls die Ringe A und B *Morita-äquivalent* sind, d.h. falls die Kategorien $\mathrm{Mod}(A)$ und $\mathrm{Mod}(B)$ äquivalent sind, sind auch die Kategorien $\mathrm{proj}(A)$ und $\mathrm{proj}(B)$ äquivalent. Somit sind die zugehörigen Spurgruppen isomorph:

Satz 3. *Sind die Ringe A und B Morita-äquivalent, so gibt es einen Isomorphismus $T(A) \to T(B)$. Insbesondere gilt also für jedes $n \geqq 1$ $T(M_n(A)) \cong T(A)$, wenn $M_n(A)$ den Ring der (n, n)-Matrizen über A bezeichnet.*

Beweis. Sei u: $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(B)$ eine Äquivalenz. Dann ist die Abbildung (vgl. Bemerkung 3) $T(A) \to T(B)$, $\mathrm{Tr}_A(a_r) \mapsto \mathrm{Tr}_B(u(a_r))$, $a \in A$, ein Isomorphismus.

Für $B = M_n(A)$ ist die explizite Angabe eines Isomorphismus $T(M_n(A)) \to T(A)$ von Interesse. Sei dazu v: $\mathrm{Mod}(M_n(A)) \to \mathrm{Mod}(A)$ die zu $\mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(M_n(A))$, $E \mapsto E^n$, inverse Äquivalenz. Für $a = (a_{ik}) \in M_n(A)$ ist $v(a_r)$: $A^n \to A^n$ die Rechtsmultiplikation mit der Matrix (a_{ik}), somit $\mathrm{Tr}_A(v(a_r)) = \mathrm{Tr}_A(\sum a_{ii})$ (Lemma 3). $T(M_n(A)) \to T(A)$, $\mathrm{Tr}_B(a) \mapsto \mathrm{Tr}_A(\sum a_{ii})$, ist folglich ein Isomorphismus.

Bemerkung 6. Die Zuordnung $A \mapsto T(A)$ definiert einen Funktor T von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der abelschen Gruppen. Für einen Ringhomomorphismus u: $A \to B$ ist dabei $T(u)$: $T(A) \to T(B)$ durch $\mathrm{Tr}_A(a) \mapsto \mathrm{Tr}_B(u(a))$ definiert.

$T(u)$ gestattet folgende Interpretation. Für u: $A \to B$ ist u^*: $\mathrm{proj}(A) \to \mathrm{proj}(B)$, $P \mapsto B \otimes_A P$, ein exakter, additiver Funktor, der folglich einen Homomorphismus $T(u^*)$: $T(A) \to T(B)$ definiert (Bemerkung 3). $T(u^*)$ und $T(u)$ stimmen überein.

4. Fortsetzung der für projektive Moduln definierten Spur

Wir wollen die bisher für Endomorphismen von endlich erzeugbaren, projektiven Moduln definierte Spur Tr_A auf größere Klassen von Moduln fortsetzen. Dies ist entscheidend für unsere beabsichtigten ringtheoretischen Anwendungen. Wir zeigen, daß diese Fortsetzung auf einfache Weise möglich ist, wenn die betrachteten Moduln eine endliche Auflösung aus endlich erzeugbaren, projektiven Moduln besitzen. Man vergleiche dazu Bass, Heller, Swan ([4], § 4).

Sei E ein A-Modul mit einer endlichen Auflösung

$$0 \to P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to E \to 0$$

durch endlich erzeugbare, projektive A-Moduln P_i. Ist f ein Endomorphismus von E, so läßt sich f zu einem Endomorphismus $f_\bullet$: $P_\bullet \to P_\bullet$ des Komplexes $P_\bullet = (P_n, d_n)$ fortsetzen ([8], Chap. V, Prop. 1.1).

Ist $\mathscr{P} = \mathrm{proj}(A)$ und t: $\mathrm{Obj}(\mathscr{P}[X]) \to G$ eine Spurabbildung, so wollen wir zeigen, daß

$$T(f) = \sum (-1)^i t(f_i)$$

nur von f abhängt.

Sei zunächst $g_\bullet$: $P_\bullet \to P_\bullet$ eine weitere „Fortsetzung" von f, dann gibt es ([8], Chap. V, Prop. 1.1) Homomorphismen h_i: $P_i \to P_{i+1}$ mit $f_i - g_i = d_{i+1} h_i +$

$h_{i-1}\, d_i$ für alle i. Somit gilt unter Verwendung von (Sp 2) und Lemma 4:

$$\begin{aligned}&\sum(-1)^i t(f_i)-\sum(-1)^i t(g_i)\\ &=\sum(-1)^i[t(d_{i+1}\, h_i+h_{i-1}\, d_i)]\\ &=\sum(-1)^i[t(h_i\, d_{i+1})+t(h_{i-1}\, d_i)]=0.\end{aligned}$$

$T(f)$ hängt also nicht von der „Fortsetzung" $f_\bullet$ von f ab.

Wir wollen nun zeigen, daß $T(f)$ auch nicht von der Wahl der Auflösung $P_\bullet$ von E abhängt. Sei $Q_\bullet \to E \to 0$ eine weitere endliche Auflösung von E durch endlich erzeugbare, projektive Moduln. Dann gibt es kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} Q_\bullet & \to & E \\ {\scriptstyle\lambda_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_E} \\ P_\bullet & \to & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P_\bullet & \to & E \\ {\scriptstyle\mu_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_E} \\ Q_\bullet & \to & E \end{array}$$

Und es gilt $\lambda_\bullet \mu_\bullet \simeq 1_{P_\bullet}$ bezüglich einer Homotopie $h_\bullet$, d.h. $\lambda_i \mu_i - 1_{P_i} = d_{i+1}\, h_i + h_{i-1}\, d_i$ für alle i. Es ist klar, daß $g_\bullet = \mu_\bullet f_\bullet \lambda_\bullet : Q_\bullet \to Q_\bullet$ eine „Fortsetzung" von f ist. Wegen

$$\begin{aligned}\lambda_i \mu_i f_i &= (1_{P_i} + d_{i+1}\, h_i + h_{i-1}\, d_i) f_i\\ &= f_i + d_{i+1}\, h_i\, f_i + h_{i-1}\, f_{i-1}\, d_i\end{aligned}$$

gilt unter Verwendung von Lemma 4

$$t(g_i) = t(f_i) + t(h_i\, f_i\, d_{i+1}) + t(h_{i-1}\, f_{i-1}\, d_i).$$

Somit

$$\sum(-1)^i t(f_i) = \sum(-1)^i t(g_i),$$

das war zu zeigen.

Im folgenden bezeichne $\mathfrak{D}$, genauer $\mathfrak{D}(A)$, die Kategorie derjenigen A-Moduln, die eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive A-Moduln besitzen. Ist $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, von denen zwei zu $\mathfrak{D}$ gehören, so liegt auch der dritte Modul in $\mathfrak{D}$, was man etwa in Anlehnung an ([7], Chap. I, § 2, Ex. 6) beweisen kann. Insbesondere genügt $\mathfrak{D}$ den zu Beginn von Abschnitt 2 formulierten Bedingungen.

Durch die vorangehenden Betrachtungen wird für jede Spurabbildung t: $\mathrm{Obj}(\mathfrak{P}[X]) \to G$ eine Abbildung T: $\mathrm{Obj}(\mathfrak{D}[X]) \to G$ definiert, von der klar ist, daß sie t fortsetzt. Es ist offensichtlich, daß (Sp 2) für T gilt. Zum Nachweis von (Sp 1) benutze man ([8], Chap. V, Prop. 2.3). T ist somit eine Spurabbildung. Für $t = \mathrm{Tr}_A$ bezeichnen wir T ebenfalls mit Tr_A. Es folgt dann unter Verwendung von Bemerkung 1, daß Tr_A: $\mathrm{Obj}(\mathfrak{D}[X]) \to T(A)$ eine universelle Spurabbildung für $\mathfrak{D}$ ist. Eine andere Formulierung dieses Sachverhaltes ist

Satz 4. *Für einen Ring A induziert die Inklusion i: $\mathrm{proj}(A) \to \mathfrak{D}(A)$ einen Isomorphismus $T(i)$: $T(A) \to T(\mathfrak{D})$.*

Es sei noch kurz auf die Bedeutung der Kategorie $\mathscr{D}(A)$ eingegangen. Zwei Fälle sind vor allem interessant:

a) Ist A links-noethersch und von endlicher links-globaler Dimension, so ist $\mathscr{D}(A)$ die Kategorie der endlich erzeugbaren A-Moduln.

b) Ist A links-kohärent (d.h. ist jedes endlich erzeugbare Linksideal von A endlich präsentierbar) und ist die schwache globale Dimension von A endlich, so ist $\mathscr{D}(A)$ die Kategorie der endlich präsentierbaren A-Moduln. Zum Beweis verwende man ([7], Chap. I, § 2, Ex. 11 – 12) und beachte, daß ein endlich präsentierbarer, flacher Modul projektiv ist.

5. Ringtheoretische Anwendungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt Ringe A, für die jedes Links-Hauptideal eine endliche Auflösung bestehend aus endlich erzeugbaren, projektiven Moduln besitzt. Jeder linkskohärente Ring mit endlicher schwacher globaler Dimension, insbesondere also jeder links-noethersche Ring mit endlicher links-globaler Dimension, besitzt diese Eigenschaft. Für derartige Ringe liegt jedes nilpotente Element in $[A, A]$. Etwas genauer gilt der folgende Satz.

Satz 5. *A sei ein Ring mit 1. Ist a ein nilpotentes Element von A und besitzt jedes Hauptideal $A \cdot a^n$, $n \geqq 1$, eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive A-Moduln, so liegt a in $[A, A]$, der von den Kommutatoren $cb - bc$ von A erzeugten Untergruppe von A. Insbesondere ist $a = 0$, wenn A kommutativ ist.*

Beweis. Ist $\mathscr{D}$ wie in Abschnitt 4 die Kategorie derjenigen A-Moduln, die eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive A-Moduln besitzen, so ist die Rechtsmultiplikation $a_r\colon A \to A$ $\mathscr{D}$-nilpotent, wie sich aus der Filtrierung $A \supset A \cdot a \supset A \cdot a^2 \supset \cdots \supset A \cdot a^n = 0$ von A ergibt. Denn $A \cdot a^k$ und $A \cdot a^k / A \cdot a^{k+1}$, $k = 0, \ldots, n-1$, gehören zu $\mathscr{D}$. Satz 1 in Verbindung mit Satz 4 zeigt $\mathrm{Tr}_A(a_r) = 0$. Somit ist $a \in [A, A]$.

Ist A zusätzlich kommutativ, so folgt $a = 0$. Dies ist seit langem bekannt, falls A ein kommutativer noetherscher Ring von endlicher globaler Dimension ist, da ein derartiger Ring nach Auslander und Buchsbaum [1] ein endliches Produkt von Integritätsbereichen ist. Wie schon in der Einleitung erwähnt, hat Small [11] darüber hinaus nachgewiesen, daß in einem kommutativen Ring, in dem jedes Hauptideal zu $\mathscr{D}$ gehört, jedes Hauptideal projektiv ist.

Jedoch läßt sich dieses Ergebnis im nichtkommutativen Fall nicht mehr sichern: Eine gegen Morita-Äquivalenz abgeschlossene Klasse von Ringen mit projektiven Links-Hauptidealen besteht nämlich nur aus links-halberblichen Ringen. Denn nach einem Satz von Small [12] ist A genau dann links-halberblich, falls für jedes $n \geqq 1$ in dem Matrizenring $M_n(A)$ jedes Links-Hauptideal projektiv ist.

Die folgenden Konsequenzen von Satz 5 sind vor allem von Interesse, wenn A ein links- oder rechts-artinscher Ring von endlicher globaler (= schwacher globaler) Dimension und N das Jacobson-Radikal von A ist.

Korollar. *A sei ein Ring, für den jedes Links-Hauptideal eine endliche Auflösung durch endlich erzeugbare, projektive Moduln besitzt. Es gilt*

a) *Ist $N \subset A$ ein Nilideal, so ist $N \subset [A, A]$.*

b) *Ist $N \subset A$ ein zweiseitiges Nilideal, so induziert n: $A \to A/N$ einen Isomorphismus $T(n)$: $T(A) \to T(A/N)$.*

c) *Ist $N \subset A$ ein zweiseitiges Nilideal von A, für das A/N kommutativ ist, so gilt $N = [A, A]$ = Menge der nilpotenten Elemente von A.*

6. Die Spurgruppe der Kategorie der endlich erzeugbaren Moduln

Sei A ein links-artinscher Ring, N das Jacobson-Radikal von A. Wir zeigen u.a., daß $T(\mathrm{mod}(A))$, die Spurgruppe der Kategorie der endlich erzeugbaren A-Moduln, zur Spurgruppe $T(A/N)$ von A/N isomorph ist (Satz 7). Man kann somit den Endomorphismen endlich erzeugbarer Moduln über artinschen Ringen eine Spur zuordnen, die in $T(A/N)$ liegt.

Der Beweis beruht auf dem folgenden auch für die Grothendieck- und die Whitehead-Gruppe von $\mathscr{C}$ gültigen Satz ([10], Prop. 1.1). Es sei daran erinnert, daß eine abelsche Kategorie $\mathscr{C}$ *artinsch* heißt, wenn jedes $\mathscr{C}$-Objekt von endlicher Länge ist.

Satz 6. *$\mathscr{C}$ sei eine (kleine) artinsche Kategorie. $\mathscr{C}'$ sei die volle Unterkategorie der halbeinfachen Objekte von $\mathscr{C}$. ($\mathscr{C}'$ genügt den in Abschnitt 2 formulierten Bedingungen.) Dann induziert die Inklusion i: $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ einen Isomorphismus $T(i)$: $T(\mathscr{C}') \to T(\mathscr{C})$.*

Beweis. Wir geben eine zu $T(i)$ inverse Abbildung ψ: $T(\mathscr{C}) \to T(\mathscr{C}')$ an. Mit $\mathrm{Tr}: \mathrm{Obj}(\mathscr{C}[X]) \to T(\mathscr{C})$ bzw. $\mathrm{Tr}': \mathrm{Obj}(\mathscr{C}'[X]) \to T(\mathscr{C}')$ seien die entsprechenden universellen Spurabbildungen bezeichnet. Sei (E, f) ein $\mathscr{C}$-Endomorphismus. Induktiv werden Unterobjekte E_i von E durch $E_0 = 0$ und $E_{i+1}/E_i = \mathrm{Soc}(E/E_i)$ definiert. Dabei bezeichne für ein $\mathscr{C}$-Objekt F $\mathrm{Soc}(F)$ die Summe der einfachen Unterobjekte von F. Weil E endliche Länge besitzt, gibt es ein n mit $E_n = E$. Dadurch ist eine Filtrierung

$$(E, f) = (E_n, f_n) \supset \cdots \supset (E_1, f_1) \supset (E_0, f_0) = (0, 0)$$

von f definiert, für die die Faktoren $(E_i/E_{i-1}, \bar{f}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, in $\mathscr{C}'[X]$ liegen.

Wir definieren für $f \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}[X])$ das Element $\varphi(f) \in T(\mathscr{C}')$ durch

$$\varphi(f) = \sum \mathrm{Tr}'(\bar{f}_i).$$

Es ist klar, daß φ der Bedingung (Sp 2) genügt. Daß auch (Sp 1) gilt, sieht man ein, indem man die obige Filtrierung zu einer Jordan-Hölder-Reihe in $\mathscr{C}[X]$ verfeinert. φ induziert somit einen Homomorphismus ψ: $T(\mathscr{C}) \to T(\mathscr{C}')$. Man rechnet leicht nach, daß ψ die gesuchte Umkehrabbildung zu $T(i)$ ist.

Sei A ein Ring, N das Jacobson-Radikal von A. $\mathscr{C} = \mathrm{mod}(A)$ sei die Kategorie der A-Linksmoduln von endlicher Länge. $\mathscr{C}$ ist eine artinsche Kategorie. Falls A/N artinsch, halbeinfach ist, besteht $\mathscr{C}'$ aus denjenigen $\mathscr{C}$-Objekten E

mit $N \cdot E = 0$, $\mathscr{C}'$ identifiziert sich folglich mit der Kategorie $\mathrm{mod}(A/N)$ der endlich erzeugbaren A/N-Moduln. Nach Satz 6 gilt $T(\mathrm{mod}(A)) \cong T(\mathrm{mod}(A/N))$. Wegen $\mathrm{mod}(A/N) = \mathrm{proj}(A/N)$ gilt darüber hinaus $T(\mathrm{mod}(A/N)) = T(A/N)$.

Satz 7. *Ist N das Jacobson-Radikal von A und A/N ein artinscher Ring, so induziert die „Inklusion“ $\mathrm{mod}(A/N) \to \mathrm{mod}(A)$ einen Isomorphismus $T(A/N) \to T(\mathrm{mod}(A))$.*

Bemerkung 7. Unter den Voraussetzungen von Satz 7 induziert die Inklusion i: $\mathrm{proj}(A) \to \mathrm{mod}(A)$ einen Homomorphismus $T(A) = T(\mathrm{proj}(A)) \to T(\mathrm{mod}(A)) \cong T(A/N)$. Dieser ist zu *unterscheiden* von dem Homomorphismus $T(n)$: $T(A) \to T(A/N)$, der durch den natürlichen Homomorphismus n: $A \to A/N$ induziert wird (Bemerkung 6). Ein Beispiel liefert der Homomorphismus n: $\mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2$. Es gilt $T(n) = n$, weil beide Ringe kommutativ sind. Dagegen ist $T(i)$: $\mathbf{Z}_4 \to \mathbf{Z}_2$ die Nullabbildung.

Satz 8. *A sei links-artinsch und habe endliche globale Dimension. Dann ist $T(A) \cong T(A/N) \cong T(\mathrm{mod}(A))$.*

Beweis. Satz 4 zeigt $T(A) \cong T(\mathrm{mod}(A))$. Man verwende nun entweder $T(A) \cong T(A/N)$ (Korollar zu Satz 5) oder $T(\mathrm{mod}(A)) \cong T(A/N)$ (Satz 7).

Literatur

1. Auslander, M., and D. A. Buchsbaum: Homological dimension in local rings. Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 390–405 (1957).
2. Bass, H.: Lectures on topics in algebraic K-theory. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research 1967.
3. – K-theory and stable algebra. Publications mathématiques I.H.E.S., No. 22. Bures-sur-Yvette 1964.
4. – A. Heller, and R. G. Swan: The Whitehead group of a polynomial extension. Publications mathématiques I.H.E.S., No. 22. Bures-sur-Yvette 1964.
5. Borel, A., et J. P. Serre: Le théorème de Riemann-Roch. Bull. Soc. math. France **86**, 97–136 (1958).
6. Bourbaki, N.: Algèbre, chap. 2. Paris: Hermann 1962.
7. – Algèbre commutative, chap. 1, 2. Paris: Hermann 1961.
8. Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological algebra. Princeton: Princeton University Press 1956.
9. Hattori, A.: Rank element of a projective module. Nagoya Math. J. **25**, 113–120 (1965).
10. Lam, T. Y.: Induction theorems for Grothendieck groups and Whitehead groups of finite groups. Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **1**, 91–148 (1968).
11. Small, L. W.: Some consequences of finite projective dimension. Vortrag gehalten auf der Tagung „Ringe und Moduln“, Oberwolfach, März 1968.
12. – Semi-hereditary rings. Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 656–658 (1967).
13. Stallings, J.: Centerless groups – an algebraic formulation of Gottlieb's theorem. Topology **4**, 129–134 (1965).

Dr. Helmut Lenzing
Freie Universität Berlin
II. Mathematisches Institut
1 Berlin 33, Königin-Luise-Straße 24/26

(Eingegangen am 12. Juli 1968)