Werk

Titel: Über einen Satz von F. Niiro und I. Sawashima.

Autor: Lotz, Heinrich P., Schaefer, Helmut H.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0108|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Z. 108, 33–36 (1968)

Über einen Satz von F. Niiro und I. Sawashima

HEINRICH P. LOTZ und HELMUT H. SCHAEFER

Für die im folgenden benötigte Theorie der reellen Banachverbände und der positiven Operatoren verweisen wir auf [7], für die der komplexen Banachverbände auf [1].

In [6] wurde die Frage gestellt, unter welchen allgemeinen Bedingungen für einen positiven Operator T in einem geordneten Banachraum die folgende Implikation gültig ist:

„Ist der Spektralradius $r(T)$ ein Pol der Resolvente $R(\lambda, T)$, so hat $R(\lambda, T)$ auf dem Spektralkreis $|\lambda| = r(T)$ nur Pole als Singularitäten."

Wie man an Beispielen zeigen kann, gilt diese Implikation im allgemeinen nicht, selbst nicht in Banachverbänden ([4], Ex. 9.1; [1], 4, Beispiel 2). Ein positives Ergebnis erhielt zuerst Niiro [2, 3], der zeigte, daß diese Implikation für irreduzible Operatoren in den Banachverbänden l^p bzw. L^p $(1 < p < \infty)$ gültig ist. Für Räume vom Typ $\mathscr{C}(X)$ wurde dann ein entsprechendes Ergebnis von Schaefer [8] und von Sawashima [5] bewiesen. Für irreduzible Operatoren in beliebigen Banachverbänden haben Niiro und Sawashima [4] die Gültigkeit der obigen Implikation gezeigt.

Für dieses ziemlich tiefliegende Theorem von Niiro und Sawashima soll hier ein neuer Beweis gegeben werden, der uns einfacher als der Originalbeweis erscheint; überdies ergibt sich ein noch allgemeinerer Satz (Thm. 2). Daß für einen irreduziblen Operator in einem Banachverband die *Eigenwerte* auf dem Spektralkreis Pole der Resolvente sind, falls nur der Spektralradius ein Pol der Resolvente ist, kann man recht einfach beweisen ([4], Thm. 5.1; [1], 5.4). Während in [4] darüber hinaus gezeigt wird, daß auf dem Spektralkreis dann das Residual- und das Kontinuierliche Spektrum leer ist, werden wir hier den allgemeinen Fall auf den des Punktspektrums zurückführen. Dabei werden wir uns der nachfolgend beschriebenen Modifikation der in [1] benützten Einbettung bedienen.

1. Es sei E ein Banachraum. Wie in [1], Abschnitt 2 bezeichnen wir mit $m(E)$ den Banachraum aller beschränkten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in E$, versehen mit der Norm $\|(x_n)\| = \sup \|x_n\|$. Im folgenden sei $\mathfrak{U}$ ein beliebiger, aber festgewählter, freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Sei $c_{\mathfrak{U}}(E)$ der abgeschlossene Teilraum derjenigen Folgen $(x_n) \in m(E)$ mit $\lim_{\mathfrak{U}} \|x_n\| = 0$. Der Quotientenraum $\hat{E} = m(E)/c_{\mathfrak{U}}(E)$ ist dann ebenfalls ein Banachraum, wobei die Norm für eine Äquivalenzklasse $\hat{x}$, die die Folge (x_n) enthält, durch $\|\hat{x}\| = \lim_{\mathfrak{U}} \|x_n\|$ gegeben wird. Für $T \in \mathscr{L}(E)$ wird vermöge $(x_n) \to (Tx_n)$ in $m(E)$ ein stetiger Operator definiert, der $c_{\mathfrak{U}}(E)$ invariant läßt. Dadurch wird in $\hat{E}$ in kanonischer Weise ein Operator $\hat{T}$ induziert. Für den Banachraum $\hat{E}$ und für die Abbildung

$T \to \hat{T}$ von $\mathscr{L}(E)$ nach $\mathscr{L}(\hat{E})$ gelten, wie man leicht sieht, die Sätze 2.2 bis 2.6 von [1] wörtlich mit $\hat{E}$ bzw. $\hat{T}$ anstelle von $\bar{E}$ bzw. $\bar{T}$. Auf diese entsprechenden Sätze werden wir uns im folgenden stützen.

2. Wir formulieren zunächst ein Lemma, das im folgenden wiederholt benötigt wird.

Lemma. *Sei E ein Banachverband, T ein stetiger Endomorphismus von E und F ein abgeschlossenes Ideal in E mit $TF \subset F$; sei T_1 der von T in E/F induzierte Operator, T_2 die Einschränkung von T auf F. Ist λ_0 ein Pol der Ordnung k_1 von $R(\lambda, T_1)$ und ein Pol der Ordnung k_2 von $R(\lambda, T_2)$, so besitzt $R(\lambda, T)$ im Punkt λ_0 einen Pol der Ordnung k mit* $\sup(k_1, k_2) \leqq k \leqq k_1 + k_2$.

Beweis. Da E' ein ordnungsvollständiger Banachverband ist und die Polare F^0 in E' ein Band ist, ist E' nach [7], V.7.3, die topologische direkte Summe von F^0 und $F^{0\perp}$. Wegen $TF \subset F$ gilt $T'F^0 \subset F^0$. Bezüglich der direkten Summe $E' = F^0 + F^{0\perp}$ läßt sich T' in Matrixform

$$T' = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

schreiben mit $A \in \mathscr{L}(F^0)$, $B \in \mathscr{L}(F^{0\perp}, F^0)$ und $C \in \mathscr{L}(F^{0\perp})$. Die Resolvente von T' hat dann die Darstellung

$$R(\lambda, T') = \begin{pmatrix} R(\lambda, A) & R(\lambda, A)\, B R(\lambda, C) \\ 0 & R(\lambda, C) \end{pmatrix}.$$

Nun ist der duale Banachraum $(E/F)'$ isomorph zu F^0 und der Banachraum F' isomorph zu $F^{0\perp}$. Daher kann man T_1' mit A und T_2' mit C identifizieren. Aus der Matrixdarstellung von $R(\lambda, T')$ ergibt sich dann die Behauptung über die Ordnung des Poles in λ_0 zunächst für $R(\lambda, T')$ und damit auch für $R(\lambda, T)$.

3. Der von Niiro und Sawashima bewiesene fundamentale Satz lautet nun wie folgt:

Theorem 1 (Niiro-Sawashima [4]). *Sei E ein Banachverband, T ein irreduzibler positiver Operator auf E mit $r(T) = 1$. Hat die Resolvente $R(\lambda, T)$ in $\lambda = 1$ einen Pol, so besteht das Spektrum von T auf dem Spektralkreis nur aus Polen von $R(\lambda, T)$*.*

Beweis. Wegen der Irreduzibilität von T ist 1 ein Pol erster Ordnung von $R(\lambda, T)$ und ein einfacher Eigenwert von T mit einem positiven Eigenvektor $u > 0$ ([1], 5.2 und 5.4). 1 ist daher auch ein Pol der Ordnung 1 von $R(\lambda, \hat{T})$ mit dem Residuum $\hat{P}$, wenn P das Residuum von $R(\lambda, T)$ in $\lambda = 1$ bezeichnet. Zunächst zeigen wir, daß 1 auch ein einfacher Eigenwert von $\hat{T}$ ist. Sei $\hat{T}\hat{x} = \hat{x}$; dann gilt $\hat{P}\hat{x} = \hat{x}$. Die Äquivalenzklasse $\hat{x}$ enthält daher eine Folge $(x_n) \in m(E)$ mit $\lim_{\mathfrak{U}}(Px_n - x_n) = 0$. Da 1 einfacher Eigenwert von T ist, haben wir $Px_n = \gamma_n u$, $\gamma_n \in \mathbb{C}$. Daher gilt $\hat{x} = \gamma\, \hat{u}$ mit $\gamma = \lim_{\mathfrak{U}} \gamma_n$ und $\hat{u}$ als kanonischem Bild von u.

* Diese Pole sind wegen der Irreduzibilität von T notwendig von 1. Ordnung und einfache Eigenwerte von T; sie bilden eine Gruppe von Einheitswurzeln. (Vgl. [1], 5.4.)

In $\hat{E}$ betrachten wir das abgeschlossene, $\hat{T}$-invariante Ideal

$$R=\{\hat{x}\colon \hat{P}|\hat{x}|=0\}.$$

$\tilde{T}$ bzw. $\tilde{P}$ sei der von $\hat{T}$ bzw. $\hat{P}$ in dem Banachverband $\tilde{E}=\hat{E}/R$ induzierte Operator. 1 ist ein Pol erster Ordnung von $R(\lambda, \tilde{T})$ mit $\tilde{P}$ als Residuum. $\tilde{u}$ sei das kanonische Bild von $\hat{u}$ in dem Quotientenraum $\tilde{E}$. Wegen $\tilde{T}\tilde{u}=\tilde{u}$ ist die komplexe lineare Hülle $\tilde{E}_{\tilde{u}}$ des Ordnungsintervalls $[-\tilde{u}, \tilde{u}]$ und daher auch die abgeschlossene Hülle F von $\tilde{E}_{\tilde{u}}$ ein $\tilde{T}$-invariantes Ideal. $S=\tilde{T}_{|F}$ ist auf F ein irreduzibler Operator: Sei etwa $G\neq\{0\}$ ein abgeschlossenes, S-invariantes Ideal von F. G ist dann auch ein $\tilde{P}$-invariantes Ideal in $\tilde{E}$. Nach Konstruktion von R ist $\tilde{P}$ strikt positiv, d.h. für $0<\tilde{x}\in\tilde{E}$ gilt $\tilde{P}\tilde{x}>0$. Da aber 1 einfacher Eigenwert von $\tilde{T}$ ist gilt $\tilde{u}\in G$; daher gilt also $G=F$, da $\tilde{u}$ ein quasi-innerer Punkt von F ist.

Nun sei $\alpha\in\sigma(T)$ mit $|\alpha|=1$. α ist dann Eigenwert von $\hat{T}$ ([1], 2.4). Sei $\hat{T}\hat{x}=\alpha\hat{x}\neq 0$, dann gilt $\hat{T}|\hat{x}|\geqq|\hat{x}|$ und $\hat{P}|\hat{x}|\geqq|\hat{x}|$. Also ist $\hat{x}\notin R$ und α damit auch Eigenwert von $\tilde{T}$. Sei nun $\tilde{T}\tilde{x}=\alpha\tilde{x}\neq 0$. Dann gilt $\tilde{T}|\tilde{x}|\geqq|\tilde{x}|$. Da $\tilde{P}\tilde{T}=\tilde{P}$ und $\tilde{P}$ strikt positiv ist, gilt $\tilde{T}|\tilde{x}|=|\tilde{x}|$. Daher ist $|\tilde{x}|$ ein Vielfaches von $\tilde{u}$, d.h. $\tilde{x}\in F$. Damit ist α auch Eigenwert von S. Da aber 1 ein Pol von $R(\lambda, S)$ ist, muß auch α ein Pol von $R(\lambda, S)$ sein ([1], 5.4; [4], Thm. 5.1).

$\tilde{T}$ induziert in dem Banachverband $\tilde{E}/F$ einen positiven Operator S_1, dessen Resolvente in 1 höchstens einen Pol erster Ordnung besitzen kann. Wegen $\tilde{P}\tilde{E}\subset F$ verschwindet das Residuum dieses Poles. Daher ist $r(S_1)<1$ und $R(\lambda, S_1)$ in α holomorph. Nach dem obigen Lemma ist dann α ein Pol (erster Ordnung) von $R(\lambda, \tilde{T})$ und damit auch von $R(\lambda, \hat{T})$, da ja $r(\hat{T}_{|R})<1$ ist. Folglich ist α auch ein Pol von $R(\lambda, T)$ ([1], 2.2). Q.e.d.

4. Man wird sich fragen, ob mit der Klasse der irreduziblen Operatoren der natürliche Geltungsbereich von Theorem 1 erschöpft ist; in der Tat ist dies nicht der Fall, wie das folgende Theorem 2 zeigt. Andererseits ist die Voraussetzung: $\dim PE<\infty$ unentbehrlich, wie ein in [1], (4, Beispiel 2) angegebenes Beispiel lehrt. Ein Vorläufer von Theorem 2 findet sich auch in [4] (Thm. 9.2).

Theorem 2. *Sei E ein Banachverband, T ein positiver Operator auf E mit $r(T)=1$. Ist 1 ein Pol von $R(\lambda, T)$ mit dem Residuum P und ist* $\dim PE=n<\infty$, *so hat $R(\lambda, T)$ auf dem Spektralkreis nur Pole als Singularitäten.*

Beweis. a) 1 sei ein Pol erster Ordnung. Dann ist P ein positiver Operator.

Wir nehmen zunächst an, P sei strikt positiv. Wegen $PT=P$ ist PE ein Unterverband von E; PE ist daher verbandsisomorph zu $\mathbb{C}^n$. Sei u ein innerer Punkt des positiven Kegels des Verbandes PE. u läßt sich dann zerlegen in $u=\sum_{i=1}^{n} u_i$, dabei sind die $u_i>0$, paarweise orthogonal und es gilt $Tu_i=u_i$. E_i sei die abgeschlossene Hülle von E_{u_i} (E_{u_i} ist das kleinste Ideal, welches u_i enthält). $T_{|E_i}$ ist auf E_i irreduzibel, da P strikt positiv ist. Nun sei F die (direkte) Summe der Ideale E_i. F ist abgeschlossen ([1], 1.12) und T-invariant. Daher hat nach Theorem 1 die Resolvente von $T_{|F}$ auf dem Spektralkreis $|\lambda|=1$ nur Pole als

Singularitäten. Der von T in E/F induzierte Operator hat wegen $PE \subset F$ einen Spektralradius, der kleiner ist als 1. Nach dem Lemma besteht dann das Spektrum von T auf dem Spektralkreis nur aus Polen.

Ist jedoch P nicht strikt positiv, so betrachten wir das abgeschlossene, T-invariante Ideal $R = \{x: P|x| = 0\}$. Da $P_{|R} = 0$ ist, gilt $r(T_{|R}) < 1$. Für den von T in E/R induzierten Operator gelten aber die vorhergehenden Betrachtungen. Nach dem Lemma hat daher auch $R(\lambda, T)$ auf dem Spektralkreis nur Pole als Singularitäten.

b) 1 sei ein Pol der Ordnung $k > 1$. Dann ist $Q = \lim_{\lambda \searrow 1} (\lambda - 1)^k R(\lambda, T)$ positiv. $F = \{x: Q|x| = 0\}$ ist ein abgeschlossenes, T-invariantes Ideal. Sei $T_1 = T_{|F}$ und T_2 der von T auf E/F induzierte Operator. Wegen $Q_{|F} = 0$ hat $R(\lambda, T_1)$ in 1 einen Pol der Ordnung $k_1 < k$. Wegen $Q^2 = 0$ hat $R(\lambda, T_2)$ in 1 einen Pol der Ordnung $k_2 < k$ (es gilt sogar $k_2 = 1$ (s. [1], Beweis von 4.10)). Beachtet man, daß mit P auch die Residuen von $R(\lambda, T_1)$ und $R(\lambda, T_2)$ in 1 einen endlichen Rang haben, so folgt mittels des Lemmas der Rest der Behauptung durch Induktion.

Literatur

1. Lotz, H. P.: Über das Spektrum positiver Operatoren. Math. Z. **108**, 15–32 (1968).
2. Niiro, F.: On indecomposable operators in l_p $(1 < p < \infty)$ and a problem of H. Schaefer. Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo **14**, 165–179 (1964).
3. – On indecomposable operators in L_p $(1 < p < \infty)$ and a problem of H. H. Schaefer. Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo **16**, 1–24 (1966).
4. Niiro, F., and I. Sawashima: On the spectral properties of positive irreducible operators in a arbitrary Banach lattice and problems of H. H. Schaefer. Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo **16**, 145–183 (1966).
5. Sawashima, I.: On spectral properties of positive irreducible operators in $C(S)$ and a problem of H. H. Schaefer. Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **17**, 1–15 (1966).
6. Schaefer, H. H.: Some spectral properties of positive linear operators. Pacific J. Math. **10**, 1009–1019 (1960).
7. – Topological vector spaces. New York: Macmillan 1966.
8. – Eine Klasse irreduzibler positiver Operatoren. Math. Ann. **165**, 26–30 (1965).

Dr. H. P. Lotz
Prof. Dr. H. H. Schaefer
Mathematisches Institut der Universität
74 Tübingen, Hölderlinstraße 19

(Eingegangen am 14. Juni 1968)