## Werk

**Titel:** Über die wesentliche Maximalität gleichmäßig stark elliptischer Operatoren in L2 ...

**Autor:** Hess, Peter

**Jahr:** 1968

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0107|log14


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Math. Zeitschr. 107, 67–70 (1968)

# Über die wesentliche Maximalität gleichmäßig stark elliptischer Operatoren in $L^2(R^n)$

PETER HESS

## 1. Einleitung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die wesentliche Maximalität gleichmäßig stark elliptischer Differentialoperatoren der Ordnung $2m$ in $L^2(R^n)$. Der Begriff „wesentliche Maximalität eines Differentialoperators" erweitert den Begriff „wesentliche Selbstadjungiertheit" für den Fall nicht formal selbstadjungierter Differentialausdrücke.

Es sei
$$l=\sum_{|p|,|q|\leqq m}(-1)^{|p|}D^p a_{pq}(x)D^q$$
ein linearer partieller Differentialausdruck der Ordnung $2m$ [1], definiert auf dem $n$-dimensionalen reellen euklidischen Raum $R^n$. Wir treffen die folgenden Voraussetzungen:

1) Die komplexwertigen Koeffizienten $a_{pq}$ sind von der Klasse $C^{|p|+|q|}$ [2] und mitsamt ihren partiellen Ableitungen aller Ordnungen $\leqq \max(|p|,|q|)$ gleichmäßig beschränkt auf $R^n$.

2) Die Funktionen $a_{pq}$ sind für $|p|=|q|=m$ gleichmäßig stetig auf $R^n$.

3) Der Ausdruck $l$ ist gleichmäßig stark elliptisch auf $R^n$, d.h. es existiert eine positive Zahl $K_0$ derart, daß
$$\mathrm{Re}(-1)^m\sum_{|p|=|q|=m}a_{pq}(x)\,\xi^p\,\xi^q\geqq K_0|\xi|^{2m}$$
für alle reellen Vektoren $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ und alle $x\in R^n$ gilt, wobei definitionsgemäß $|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$ und $\xi^p=\xi_1^{p_1}\ldots\xi_n^{p_n}$ $(p=(p_1,\ldots,p_n))$ ist.

Der zu $l$ formal adjungierte Differentialausdruck $l'$ ist gegeben durch
$$l'=\sum_{|p|,|q|\leqq m}(-1)^{|p|}D^p\overline{a_{qp}(x)}D^q.$$
Für Funktionen $\varphi,\psi\in C_0^\infty$ gilt dann [3]
$$(l\varphi,\psi)_0=(\varphi,l'\psi)_0.$$
Falls speziell $a_{pq}=\bar{a}_{qp}$ ist, heißt der Ausdruck $l$ *formal selbstadjungiert.*

[1] Dabei ist $p=(p_1,\ldots,p_n)$ ein Multiindex mit nichtnegativen ganzen Zahlen $p_1,\ldots,p_n$, $|p|=p_1+\cdots+p_n$, $D^p=D_1^{p_1}\ldots D_n^{p_n}$ $(D_i=\partial/\partial x_i)$.

[2] $C^t$ ist die Menge der $t$-mal stetig differenzierbaren komplexwertigen, auf $R^n$ definierten Funktionen und $C^\infty=\bigcap_{t=0}^{\infty}C^t$. Die Menge der Funktionen aus $C^\infty$, die je einen kompakten Träger haben, bezeichnen wir mit $C_0^\infty$.

[3] $(\ ,\ )_0$ bedeutet das Skalarprodukt im Hilbertraum $L^2(R^n)$.

Die durch die Ausdrücke $l$ und $l'$ auf der Menge $C_0^\infty$ definierten linearen Operatoren des Raumes $L^2(R^n)$ seien $L_0$ bzw. $L_0'$. Da in $L^2(R^n)$ die Beziehung

$$L_0 \subset (L_0')^* \tag{1.1}$$

gilt, ist der Operator $L_0$ abschließbar. Die durch $l$ erzeugten „minimalen" und „maximalen" Operatoren $L_{\min}$ bzw. $L_{\max}$ sind durch

$$L_{\min} = (L_0)^{**} \quad \text{bzw.} \quad L_{\max} = (L_0')^* \tag{1.2}$$

definiert. Entsprechend sind die Operatoren $L'_{\min}$ und $L'_{\max}$ durch

$$L'_{\min} = (L_0')^{**} \quad \text{bzw.} \quad L'_{\max} = (L_0)^* \tag{1.3}$$

erklärt. Aus (1.1) folgt

$$L_{\min} \subset L_{\max}. \tag{1.4}$$

Der Operator $L_0$ heißt *wesentlich maximal* in $L^2(R^n)$, falls $L_{\min} = L_{\max}$ gilt. Den Definitionen (1.2) und (1.3) entnehmen wir, daß mit $L_0$ auch der Operator $L_0'$ wesentlich maximal ist in $L^2(R^n)$, und umgekehrt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz.** *Es sei $l$ ein auf $R^n$ definierter linearer partieller Differentialausdruck der Ordnung $2m$, der die Voraussetzungen 1)–3) erfüllt. Dann ist der Operator $L_0$ wesentlich maximal in $L^2(R^n)$.*

Wenn der Ausdruck $l$ formal selbstadjungiert ist, ist der Operator $L_0$ also wesentlich selbstadjungiert in $L^2(R^n)$.

Dieser Satz läßt sich aus einem Resultat von Browder ([2], Theorem 21) folgern. Wir bringen jedoch einen eigenen Beweis, der nirgends die explizite Kenntnis des Definitionsbereiches des „maximalen" Differentialoperators $L_{\max}$ verlangt.

## 2. Gleichmäßig stark elliptische Differentialausdrücke

Der Ausdruck $l$ erfülle die Voraussetzungen 1)–3). Dann existieren zwei reelle Konstanten $c_0 > 0$ und $k_0$ derart, daß die Gårding-Ungleichung

$$\mathrm{Re}(L_0\varphi, \varphi)_0 = \mathrm{Re}(L_0'\varphi, \varphi)_0 \geqq c_0 \|\varphi\|_m^2 - k_0 \|\varphi\|_0^2 \tag{2.1}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$ erfüllt ist (vgl. [1], Kapitel 7). Dabei ist definitionsgemäß

$$\|\varphi\|_t^2 = \sum_{|p| \leqq t} \int_{R^n} |D^p \varphi|^2 \, dx.$$

Auf Grund der Voraussetzung 1) gibt es außerdem eine Zahl $c$ mit der Eigenschaft, daß

$$|(L_0\varphi, \psi)_0| \leqq c \|\varphi\|_m \|\psi\|_m \tag{2.2}$$

für alle $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ gilt (vgl. [1], S. 99). Mit Hilfe des Darstellungssatzes von Lax und Milgram beweist man die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des verallgemeinerten Dirichletproblems:

**Lemma 1.** ([1], S. 97–102.) *Sei $f \in L^2(R^n)$ beliebig vorgegeben. Unter den Voraussetzungen 1)–3) existiert eine und nur eine Funktion $u \in H_0^m(R^n)$ so, daß*

$$((L_0' + k_0)\varphi, u)_0 = (\varphi, f)_0 \tag{2.3}$$

*für alle $\varphi \in C_0^\infty$ gilt*[4].

Für den Beweis unseres Satzes benötigen wir noch das folgende

**Lemma 2.** *Der Differentialausdruck $l$ erfülle die Voraussetzungen 1)–3), und die Funktion $u \in L^2(R^n)$ genüge mit einer positiven Konstanten $K$ der Ungleichung*

$$|(L_0' \varphi, u)_0| \leqq K \|\varphi\|_0 \tag{2.4}$$

*für alle $\varphi \in C_0^\infty$. Dann ist $u \in H^{2m}(R^n)$.*

*Beweis.* Da mit $l$ auch der Ausdruck $l'$ den Bedingungen 1)–3) genügt, liefert ein bekannter Regularitätssatz (vgl. z. B. [1], Satz 6.3) die Beziehung $u \in H_{\mathrm{loc}}^{2m}(R^n)$. Damit sind aber die Voraussetzungen von Satz 3 aus [2] erfüllt[5], und es folgt $u \in H^{2m}(R^n)$.

### 3. Beweis des Satzes

Wir zeigen zunächst, daß[6]

$$K(L_{\max} + k_0) = K(L_{\max}' + k_0) = \{0\} \tag{3.1}$$

ist: Sei $u \in L^2(R^n)$ eine Funktion aus dem Kern von $L_{\max} + k_0$. Dann gilt

$$(L_0' \varphi, u)_0 = -(\varphi, k_0 u)_0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$, und die Voraussetzungen von Lemma 2 sind erfüllt mit $K = |k_0| \|u\|_0$. Die Funktion $u$ liegt folglich in $H^{2m}(R^n)$ und ist deshalb in $H^m(R^n)$ enthalten. Da für $\Omega = R^n$ die Räume $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$ identisch sind, ist $u$ eine Lösung der Gl. (2.3) mit $f = 0$. Aus der Eindeutigkeit dieser Lösung folgt $u = 0$. Analog ergibt sich $K(L_{\max}' + k_0) = \{0\}$.

Aus (2.1) erhalten wir die Beziehung

$$\|(L_0 + k_0)\varphi\|_0 \geqq c_0 \|\varphi\|_0 \tag{3.2}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$; der Operator $L_0 + k_0$ besitzt also ein beschränktes Inverses $(L_0 + k_0)^{-1}$. Wir schließen daraus, daß die Wertemenge der Abschließung $L_{\min} + k_0$ des Operators $L_0 + k_0$ abgeschlossen ist in $L^2(R^n)$ (vgl. [3], S. 475, Satz 2). Der orthogonalen Zerlegung

$$L^2(R^n) = K(L_{\max}' + k_0) \oplus W(L_{\min} + k_0)$$

des Raumes $L^2(R^n)$ entnehmen wir unter Verwendung von (3.1) die Relation

$$W(L_{\min} + k_0) = L^2(R^n). \tag{3.3}$$

---

[4] Wegen der Definition der Räume $H^l(\Omega)$, $H_{\mathrm{loc}}^l(\Omega)$ und $H_0^l(\Omega)$ vergleiche man [1], S. 2, 8 bzw. 97.

[5] Beachte, daß für ein beliebiges Gebiet $\Omega \subset R^n$ die Gleichheit $W^{2m}(\Omega) = H^{2m}(\Omega)$ gilt ([1], S. 11).

[6] Mit $K(A)$ bezeichnen wir den Kern, mit $W(A)$ die Wertemenge des Operators $A$.

Wegen (1.4) gilt folglich auch

$$W(L_{\max}+k_0)=L^2(R^n). \tag{3.4}$$

Die Operatoren $L_{\min}+k_0$ und $L_{\max}+k_0$ sind dank (1.4) und (3.1) invertierbar. Da

$$(L_{\min}+k_0)^{-1}\subset(L_{\max}+k_0)^{-1}$$

und die Definitionsmengen der Operatoren $(L_{\min}+k_0)^{-1}$ und $(L_{\max}+k_0)^{-1}$ zusammenfallen, gilt

$$(L_{\min}+k_0)^{-1}=(L_{\max}+k_0)^{-1},$$

und es folgt

$$L_{\min}=L_{\max}, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

## Literatur

1. Agmon, S.: Lectures on elliptic boundary value problems. Princeton, N.J.: Van Nostrand matematical studies 1965.
2. Browder, F. E.: On the spectral theory of elliptic differential operators I. Math. Ann. **142**, 22–130 (1961).
3. Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil V. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

Peter Hess
Scheideggstraße 124
CH 8038 Zürich

*(Eingegangen am 14. November 1967)*