Math. Zeitschr. 104, 372—387 (1968)

Über Charaktere semi-direkter Produkte diskreter Gruppen

EBERHARD KANIUTH

Eingegangen am 7. August 1967

Einleitung

In [6] hat THOMA einer diskreten Gruppe G den *dualen Raum* $E(G)$ aller normierten unzerlegbaren Charaktere (d.h. positiv-definiten Klassenfunktionen) zugeordnet. Ist G abelsch, so ist $E(G)$ die duale Gruppe $\hat{G}$ von G. In [7] wurde bewiesen, daß man den dualen Raum eines direkten Produktes abzählbarer Gruppen G_1 und G_2 mit $E(G_1)\times E(G_2)$ identifizieren kann vermöge $(\alpha_1, \alpha_2)\to\alpha$ mit $\alpha(x_1, x_2)=\alpha_1(x_1)\,\alpha_2(x_2)$. Die vorliegende Arbeit ist dem Problem gewidmet, für eine möglichst umfangreiche Klasse semi-direkter Produkte $A\times_\tau X$ abzählbarer, diskreter Gruppen den dualen Raum zu beschreiben durch die Faktoren A und X und die Wirkung τ von A auf X.

Ist X abelsch und Z ein zentraler Normalteiler in A, so gewinnen wir für den Charakter α über $A\times_\tau X$ eine Integraldarstellung $\alpha=\int\gamma\cdot\tilde{\sigma}_\gamma\,d\mu$ über der Menge $E(X, Z)$ aller unzerlegbaren unter den normierten, Z-invarianten Charakteren auf X. Dabei ist das eindeutig bestimmte Maß μ A-invariant, σ_γ ein bezüglich der Wirkung der Stabilitätsuntergruppe A_γ von γ invarianter Charakter auf einem geeigneten Normalteiler A^γ in A_γ und $\tilde{\sigma}_\gamma$ die triviale Erweiterung von σ_γ auf A. Ferner sind die σ_γ fast alle eindeutig bestimmt und erfüllen die Transformationsformel $\sigma_{\hat{\tau}_b\gamma}(a)=\sigma_\gamma(b^{-1}ab)=(\hat{\Gamma}_a\,\sigma_\gamma)\,(a)$ für $a\in A^{\hat{\tau}_\alpha\gamma}$ (Satz 1). In dieser Zerlegung ist die Menge aller γ mit $\sigma_\gamma\in E(A^\gamma, A_\gamma)$ meßbar (Satz 2) und μ ergodisch, falls α unzerlegbar ist. Hieraus ergibt sich sofort $E(A\times_\tau X)$ für endliche zentrale Erweiterungen A (Satz 3): zu $\alpha\in E(A\times_\tau X)$ existieren $\gamma\in E(X, Z)$ und $\sigma\in E(A^\gamma, A_\gamma)$ mit

$$\alpha=\frac{1}{[A:A_\gamma]}\sum_{a\in A/A_\gamma}\hat{\tau}_a\gamma\cdot\widetilde{\hat{\Gamma}_a\sigma};$$

umgekehrt definieren γ und σ durch diese Formel ein $\alpha\in E(A\times_\tau X)$.

Die Schwierigkeit, die Felder $\gamma\to\sigma_\gamma$ zu charakterisieren, die unzerlegbare α liefern, liegt darin begründet, daß im Träger des ergodischen Maßes μ auf $E(X, Z)$ kein Borel-Schnitt nach den Bahnen von A existiert, sofern nicht μ auf eine endliche Bahn konzentriert ist. Es scheint nicht möglich, $E(A\times_\tau X)$ ohne weitere Voraussetzungen über A und τ zu beschrieben. Unser allgemeinstes Resultat (Satz 6) ist dies: ist A klassenfinit, Z ein zentraler Normalteiler in A, so daß A/Z Torsionsgruppe ist (also etwa das Zentrum von A), μ ein ergodisches Maß auf $E(X, Z)$ und gilt für alle Normalteiler B in A mit $B\supset Z$ und

$[B:Z]<\infty$ eine gewisse Stetigkeitsforderung $[\mu, B]$ auf μ-fast allen Bahnen in $E(X, Z)$, so gehört $\alpha=\int \gamma\cdot\tilde{\sigma}_\gamma\, d\mu$ zu $E(A\times_\tau X)$ dann und nur dann, wenn fast überall $\sigma_\gamma\in E(A^\gamma, A_\gamma)$ gilt. Beispiel 2 in Abschnitt 3 zeigt, daß ohne die Forderung $[\mu, B]$ diese Aussage nicht immer richtig ist.

1. Grundlegende Vorbemerkungen

Es sei G eine diskrete Gruppe. Unter der *Gruppenalgebra* $\mathfrak{A}(G)$ von G verstehen wir den Vektorraum aller komplex-wertigen Funktionen auf G, die nur in endlich vielen Punkten von Null verschiedene Werte besitzen, mit der Faltung als Multiplikation und der üblichen Involution. Eine Basis von $\mathfrak{A}(G)$ bilden die Funktionen δ_a mit $\delta_a(a)=1$ und $\delta_a(x)=0$ für $x\neq a$. Ist G ein semidirektes Produkt $A\times_\tau X$, so ist $\mathfrak{A}(A\times_\tau X)$ isomorph zum Tensorprodukt $\mathfrak{A}(A)\otimes\mathfrak{A}(X)$, wenn wir hier die Multiplikation

$$\left(\sum\lambda_{a,x}\,\delta_a\otimes\delta_x\right)\left(\sum\mu_{b,y}\,\delta_b\otimes\delta_y\right)=\sum\lambda_{a,x}\,\mu_{b,y}\,\delta_{ab}\otimes\delta_{x\cdot\tau_a y}$$

und die Involution

$$\left(\sum\lambda_{a,x}\,\delta_a\otimes\delta_x\right)^*=\sum\bar{\lambda}_{a,x}\,\delta_{a^{-1}}\otimes\delta_{\tau_{a^{-1}}x^{-1}}$$

einführen.

Ist α eine positiv-definite Funktion auf G, so φ_α mit

$$\varphi_\alpha(f,g)=\sum_{x,y\in G} f(x)\,\overline{g(y)}\,\alpha(y^{-1}x)$$

eine positiv semi-definite hermitesche Form über $\mathfrak{A}(G)$ mit $\varphi_\alpha(fg,h)=\varphi_\alpha(g,f^*h)$, und α ist genau dann ein *Charakter* (d.h. eine Klassenfunktion), wenn φ_α eine *Spur* ist (vgl. [6] zu den folgenden Bemerkungen). $\alpha\to\varphi_\alpha$ ist eine eineindeutige Abbildung der Menge $P(G)$ $(L^+(G))$ aller positiv-definiten Funktionen (Charaktere) auf G auf die Menge $\mathfrak{P}(G)$ $(\mathfrak{L}^+(G))$ aller positiv semidefiniten hermiteschen Formen φ mit $\varphi(fg,h)=\varphi(g,f^*h)$ (Spuren) über $\mathfrak{A}(G)$. Der von $L^+(G)$ erzeugte reelle lineare Raum $L(G)$ wird mit der Topologie der punktweisen Konvergenz zum lokalkonvexen Raum. $K(G)=\{\alpha\in L^+(G)$: $\alpha(e)=1\}$ ist kompakt und konvex, die Menge $E(G)$ der Extremalpunkte von $K(G)$ heißt der *duale Raum* zu G. *Ist G abelsch, so ist $E(G)$ algebraisch und topologisch die duale Gruppe $\hat{G}$ von G.* In $L(G)$ wird in naheliegender Weise eine Ordnung definiert: $\alpha\in L^+(G)$ heißt *unzerlegbar*, wenn aus $\beta\in L^+(G)$, $\beta\leqq\lambda\alpha$ folgt $\beta=\mu\alpha$. $\alpha\in L^+(G)$ definiert eine unitäre Darstellung U^α von G. $\alpha\in K(G)$ *gehört zu $E(G)$ genau dann, wenn α unzerlegbar ist oder U^α primär ist* ([6], S. 115). Ist G *abzählbar*, so gilt folgender Zerlegungssatz ([6], S. 117): *$E(G)$ ist eine G_δ-Menge in $F(G)=\overline{E(G)}$, und zu $\alpha\in L^+(G)$ existiert genau ein positives Radon-Maß über $F(G)$ mit*

$$\mu\big(F(G)-E(G)\big)=0 \quad und \quad \alpha=\int_{F(G)}\beta\, d\mu.$$

Ist Γ ein Automorphismus von G, so ist $\hat{\Gamma}$: $L(G)\to L(G)$ mit $(\hat{\Gamma}\alpha)(x)=\alpha(\Gamma^{-1}x)$ eine lineare, ordnungstreue und topologische Abbildung, die $L^+(G)$, $K(G)$, $E(G)$, $F(G)$ auf sich abbildet (zum folgenden vgl. [8]). Ist $\mathfrak{N}$ eine Gruppe von Automorphismen von G, so sei $L(G, \mathfrak{N})=\{\alpha\in L(G): \hat{\Gamma}\alpha=\alpha$ für alle $\Gamma\in\mathfrak{N}\}$, $L^+(G, \mathfrak{N})=\{\alpha\in L(G, \mathfrak{N}): \alpha\geqq 0\}$, $K(G, \mathfrak{N})=K(G)\cap L^+(G, \mathfrak{N})$, $E(G, \mathfrak{N})$ die Menge der Extremalpunkte der kompakten, konvexen Menge $K(G, \mathfrak{N})$, $F(G, \mathfrak{N})=\overline{E(G, \mathfrak{N})}$. Für die $\alpha\in L^+(G, \mathfrak{N})$ gilt dann eine entsprechende Zerlegung über $F(G, \mathfrak{N})$.

Sei T ein kompakter, metrisierbarer Raum, $C(T)$ die Algebra der reellwertigen, stetigen Funktionen auf T. Im reellen linearen Raum $\mathfrak{M}(T)$ aller Radon-Maße auf T führen wir die schwächste Topologie ein, die alle $\mu\to\mu(f)$, $f\in C(T)$, stetig macht. Wir unterscheiden nicht zwischen Radon-Maßen und den zugehörigen Borel-Maßen auf T. Sei $\mathfrak{M}^+(T)$ die Menge aller positiven Radon-Maße, $\mathfrak{K}(T)=\{\mu\in\mathfrak{M}^+(T): \mu(T)=1\}$. Ist $\mathfrak{H}$ eine Gruppe von Homöomorphismen von T, so sei $\mathfrak{M}(T, \mathfrak{H})$ die Menge aller $\mathfrak{H}$-invarianten Radon-Maße, ferner $\mathfrak{M}^+(T, \mathfrak{H})=\mathfrak{M}(T, \mathfrak{H})\cap\mathfrak{M}^+(T)$, $\mathfrak{K}(T, \mathfrak{H})=\mathfrak{K}(T)\cap\mathfrak{M}^+(T, \mathfrak{H})$, $\mathfrak{E}(T, \mathfrak{H})$ die Menge der Extremalpunkte der kompakten, konvexen Menge $\mathfrak{K}(T, \mathfrak{H})$. Die $\mu\in\mathfrak{E}(T, \mathfrak{H})$ heißen $\mathfrak{H}$-ergodisch. Der σ-Körper der Borel-Mengen in $\mathfrak{E}(T, \mathfrak{H})$ ist der kleinste, der alle $\mu\to\mu(M)$, M eine Borel-Menge in T, meßbar macht [10]. Ist $\mathfrak{H}$ abzählbar, so können die $\mathfrak{H}$-ergodischen Maße auch folgendermaßen charakterisiert werden [8, 10]: $\mu\in\mathfrak{K}(T, \mathfrak{H})$ gehört zu $\mathfrak{E}(T, \mathfrak{H})$ a) genau dann, wenn $\mu(M)=0$ oder $=1$ ist für jede invariante Borel-Menge $M\subset T$; b) genau dann, wenn jede beschränkte, meßbare, invariante Funktion μ-fast überall konstant ist. Es existiert – als Spezialfall eines allgemeinen Satzes von CHOQUET [5] – zu $\mu\in\mathfrak{M}^+(T, \mathfrak{H})$ eine Zerlegung

$$\mu=\int_{\mathfrak{E}(T,\mathfrak{H})}\nu\, d\rho$$

in ergodische Maße, d. h. $\mu(f)=\int\nu(f)\,d\rho$ für alle $f\in C(T)$ (vgl. [5], [8] oder [10]). Diese Formel gilt dann auch für beschränkte, Borel-meßbare f.

Ist $\mathfrak{N}$ eine Automorphismengruppe von G und

$$\alpha=\int_{F(G)}\beta\, d\mu,$$

so gilt nach [8], Satz 1: $\alpha\in L^+(G, \mathfrak{N})$ *genau dann, wenn* $\mu\in\mathfrak{M}^+(F(G), \hat{\mathfrak{N}})$ *und* $\alpha\in E(G, \mathfrak{N})$ *genau dann, wenn* $\mu\in\mathfrak{E}(F(G), \hat{\mathfrak{N}})$. Ist μ ergodisch, so ist die Vereinigungsmenge aller Bahnen $o_{\mathfrak{H}}(t)=\{\Delta t: \Delta\in\mathfrak{H}\}$, die im Träger von μ dicht liegen, eine Borel-Menge vom Maß 1. Denn sei $\mathfrak{U}$ eine abzählbare, offene Basis des Trägers K von μ, zu $U\in\mathfrak{U}$ $\tilde{U}$ die Vereinigungsmenge aller Bahnen, die mit U keinen Punkt gemeinsam haben, d. h.

$$\tilde{U}=K-\bigcup_{\Delta\in\mathfrak{H}}\Delta U.$$

$\bigcup_{\Delta\in\mathfrak{H}}\Delta U$ ist offen und invariant, also $\mu(\tilde{U})=0$. Die Borel-Menge

$$K-\bigcup_{U\in\mathfrak{U}}\tilde{U}$$

besteht genau aus den Bahnen, die in K dicht liegen, und es ist

$$\mu(K - \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} \tilde{U}) = 1.$$

Ist H eine Untergruppe von G, so sei zu $a \in G$ Γ_a: $H \to a H a^{-1}$ der Isomorphismus $x \to a x a^{-1}$. Ist H Normalteiler und $\Gamma = \{\Gamma_a : a \in G\}$, so schreiben wir $L^+(H, G)$ statt $L^+(H, \Gamma)$, $\mathfrak{M}^+(F(H), G)$ statt $\mathfrak{M}^+(F(H), \hat{\Gamma})$ usw.

Es bedeutet in dieser Arbeit stets $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ die Menge der natürlichen, ganzen, reellen, komplexen Zahlen, T die Gruppe der $z \in \mathbb{C}$ vom Betrag 1, $\hat{G}$ die duale Gruppe der abelschen Gruppe G, Π' bzw. Π das schwache direkte bzw. direkte Produkt von Gruppen, $\mathfrak{S}_n$ bzw. $\mathfrak{A}_n$ die symmetrische bzw. alternierende Gruppe in n Elementen, $Z(M)$ den Zentralisator von $M \subset G$, $[G:H]$ den Index von H in G.

2. Zerlegung von Charakteren auf $A \times_\tau X$ über $E(X, Z)$

Zu $\varphi \in \mathfrak{L}^+(A \times_\tau X)$ und $s \in \mathfrak{A}(A)$ sei $\varphi_s(f, g) = \varphi(s \otimes f, s \otimes g)$ für $f, g \in \mathfrak{A}(X)$. φ_s ist eine positiv semi-definite hermitesche Form auf $\mathfrak{A}(X)$ mit $\varphi_s(fg, h) = \varphi_s(g, f^* h)$, jedoch im allgemeinen keine Spur auf $\mathfrak{A}(X)$. Ein Beispiel hierfür liefert bereits die $\mathfrak{S}_4$ als semi-direktes Produkt der $\mathfrak{S}_2$ mit der $\mathfrak{A}_4$. Wir setzen deshalb von nun an X als *abelsch* voraus. Ist $\varphi_{\delta_e} = \int \psi \, d\mu$ die Zerlegung von φ_{δ_e} über $\mathfrak{F}(X)$, so gewinnen wir wie in [7] eine Integraldarstellung

$$\varphi(s \otimes f, t \otimes g) = \int_{\mathfrak{F}(X)} \psi(f, g) \rho_\psi(s, t) \, d\mu, \tag{1}$$

$f, g \in \mathfrak{A}(X)$, $s, t \in \mathfrak{A}(A)$. Dabei sind die ρ_ψ positiv semi-definite hermitesche Formen auf $\mathfrak{A}(A)$ mit $\rho_\psi(rs, t) = \rho_\psi(s, r^* t)$ und $\rho_\psi(\delta_e, \delta_e) = 1$, aber im allgemeinen keine Spuren auf $\mathfrak{A}(A)$ und fast alle eindeutig bestimmt. Wir gehen nun von φ, ψ, ρ_ψ zu den zugehörigen positiv-definiten Funktionen α, β, ω_β auf den Gruppen über und bezeichnen das Zerlegungsmaß von $\alpha | X$ über $\hat{X}$ wieder mit μ:

$$\alpha(a, x) = \int_{\hat{X}} \beta(x) \omega_\beta(a) \, d\mu, \qquad a \in A, \ x \in X. \tag{2}$$

Da α Klassenfunktion ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(b^{-1} a b, x) - \alpha\big((b^{-1}, y)^{-1} (b^{-1} a b, x)(b^{-1}, y)\big) \\ &= \int \beta(x) [\omega_\beta(b^{-1} a b) - \omega_{\hat{\tau}_b \beta}(a) \overline{\beta(y)} \hat{\tau}_{b^{-1} a^{-1} b} \beta(y)] \, d\mu \end{aligned}$$

für alle $a, b \in A$ und $x, y \in X$. Da die Funktionen $\beta \to \beta(x)$, $x \in X$, eine in $L_2(\hat{X}, \mu)$ totale Menge bilden, folgt hieraus

$$\omega_\beta(b^{-1} a b) - \omega_{\hat{\tau}_b \beta}(a) \overline{\beta(y)} \hat{\tau}_{b^{-1} a^{-1} b} \beta(y) = 0. \tag{3}$$

(3) und die folgenden Gleichungen sind natürlich als μ-fast überall Aussagen zu verstehen. Wir können durch Abänderung auf Nullmengen erreichen, daß sie überall gelten, ohne daß sich an der Integralformel (2) etwas ändert. Mit

$y=e$ ergibt sich

(4) $$\omega_{\hat{\tau}_b\beta}(a)=\omega_\beta(b^{-1}ab),$$

ferner mit $b=a$ aus (3) und (4) $\omega_\beta(a)\,[1-\overline{\beta(y)}\,\hat{\tau}_{a^{-1}}\beta(y)]=0$, woraus

(5) $$\omega_\beta(a)=0 \qquad \text{für } a\notin A_\beta=\{a\in A\colon \hat{\tau}_a\beta=\beta\}$$

folgt. ω_β ist also die triviale Erweiterung eines $\sigma_\beta\in K(A_\beta)$ auf A. Umgekehrt folgt (3) aus (4) und (5). Damit haben wir bewiesen: zu $\alpha\in L^+(A\times_\tau X)$ existieren ein eindeutig bestimmtes Maß $\mu\in\mathfrak{M}^+(\hat{X},A)$ und eine μ-fast überall eindeutig bestimmte Abbildung $\beta\to\omega_\beta$ mit $\omega_\beta=\tilde{\sigma}_\beta$ und $\sigma_\beta\in K(A_\beta)$, $\sigma_{\hat{\tau}_b\beta}(a)=\sigma_\beta(b^{-1}ab)$ für $a\in A_{\hat{\tau}_b\beta}$, $\beta\to\tilde{\sigma}_\beta(a)$ ist meßbar für alle $a\in A$ und

(6) $$\alpha=\int_{\hat{X}}\beta\cdot\tilde{\sigma}_\beta\,d\mu.$$

Umgekehrt definieren $\mu\in\mathfrak{M}^+(\hat{X},A)$ und ein Feld $\beta\to\sigma_\beta$ mit den genannten Eigenschaften durch (6) ein $\alpha\in L^+(A\times_\tau X)$.

Es zeigt sich, daß es notwendig ist, eine allgemeinere Zerlegung zu betrachten. Sei Z ein zentraler Normalteiler in A und

$$\mu=\int_{\mathfrak{E}(\hat{X},Z)}\nu\,d\rho_\mu$$

die Zerlegung von μ in Z-ergodische Maße. Dann gilt

$$\alpha(a,x)=\int_{\mathfrak{E}(\hat{X},Z)}\Big(\int_{\hat{X}}\beta(x)\tilde{\sigma}_\beta(a)\,d\nu\Big)\,d\rho_\mu.$$

Die Funktionen $\beta\to\tilde{\sigma}_\beta(a)$ und $\beta\to f_a(\beta)$ mit $f_a(\beta)=1$ falls $a\in A_\beta$ und $=0$ sonst sind meßbar und Z-invariant, also ν-fast überall konstant für $\nu\in\mathfrak{E}(\hat{X},Z)$. Wegen der Abzählbarkeit von A existieren eine Untergruppe A^ν in A und ein $\sigma_\nu\in K(A^\nu)$ mit $A_\beta=A^\nu$ und $\sigma_\beta=\sigma_\nu$ ν-fast überall. Also gilt

(7) $$\alpha(a,x)=\int_{\mathfrak{E}(\hat{X},Z)}\tilde{\sigma}_\nu(a)\gamma_\nu(x)\,d\rho_\mu \quad\text{mit}\quad \gamma_\nu=\int_{\hat{X}}\beta\,d\nu.$$

$\nu\to\gamma_\nu$ ist eine lineare, topologische und ordnungstreue Abbildung von $\mathfrak{M}(\hat{X},Z)$ auf $L(X,Z)$, die $\mathfrak{E}(\hat{X},Z)$ auf $E(X,Z)$ abbildet, d.h. wir können die Zerlegung (7) auf $E(X,Z)$ übertragen.

Satz 1. *Sei Z ein zentraler Normalteiler in A. Zu $\alpha\in L^+(A\times_\tau X)$ existieren genau ein A-invariantes Maß μ auf $E(X,Z)$ und ein μ-fast überall eindeutig bestimmtes Feld $\gamma\to\sigma_\gamma$ auf $E(X,Z)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$\sigma_\gamma\in K(A^\gamma)$ und $\sigma_{\hat{\tau}_b\gamma}(a)=\sigma_\gamma(b^{-1}ab)$ für $a\in A^{\hat{\tau}_b\gamma}$;*
2. *$\gamma\to\tilde{\sigma}_\gamma(a)$ ist Borel-meßbar für alle $a\in A$;*
3. *$\alpha=\int_{E(X,Z)}\gamma\cdot\tilde{\sigma}_\gamma\,d\mu$.*

Umgekehrt definieren μ und $\gamma\to\sigma_\gamma$ mit 1. und 2. durch 3. ein $\alpha\in L^+(A\times_\tau X)$.

Aus 1. folgt $\sigma_\gamma \in K(A^\gamma, A_\gamma)$.

Satz 2. *Sei Z ein zentraler Normalteiler in A und*

$$\alpha = \int_{E(X,Z)} \gamma \cdot \tilde{\sigma}_\gamma \, d\mu \in L^+(A \times_\tau X).$$

Dann ist die Menge aller $\gamma \in E(X, Z)$ mit $\sigma_\gamma \in E(A^\gamma, A_\gamma)$ meßbar.

Beweis. Zur Definition der auftretenden Hilbert-Algebren, Hilberträume und v. Neumann-Algebren vgl. [6]. Sei B ein Normalteiler in C, $\rho \in L^+(B, C)$ und zu $c \in C$ W_c^ρ: $\mathfrak{A}(B)^\rho \to \mathfrak{A}(B)^\rho$ die Transformation $s^\rho \to (\delta_c s \, \delta_{c^{-1}})^\rho$. Wegen $\rho \in L^+(B, C)$ ist W_c^ρ eine Isometrie, läßt sich also eindeutig zu einer unitären Transformation, die wir wieder mit W_c^ρ bezeichnen, auf $\mathfrak{H}(B)^\rho$ fortsetzen. Ist $\sigma \in L^+(B)$, $\sigma \leqq \rho$ und $\sigma(b) = \langle A \delta_b^\rho, \delta_e^\rho \rangle$, so $\sigma \in L^+(B, C)$ genau dann, wenn $A \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}(B)^\rho) \cap \mathfrak{W}_\rho(B, C)'$, wo $\mathfrak{W}_\rho(B, C)$ die von den W_c^ρ, $c \in C$, erzeugte v. Neumannsche Algebra ist. Also ist $\rho \in E(B, C)$ gleichwertig mit

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}(B)^\rho) \cap \mathfrak{W}_\rho(B, C)' = \{\lambda \, \mathrm{Id} \colon \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Zu $\gamma \in F(X, Z) - E(X, Z)$ setzen wir $A^\gamma = \{e\}$ und $\sigma_\gamma(e) = 1$ und $\mu(M) = \mu(M \cap E(X, Z))$ für Borel-Mengen $M \subset F(X, Z)$. Dies geschieht nur, damit der Raum, über dem wir direkte Integrale betrachten, lokal-kompakt ist [2]. Zu $\gamma \in F(X, Z)$ sei

$$\mathfrak{H}_\gamma = \mathfrak{H}(\mathfrak{A}(A^\gamma)^{\sigma_\gamma}), \quad \mathfrak{U}_\gamma = \mathfrak{U}(\mathfrak{A}(A^\gamma)^{\sigma_\gamma}), \quad \mathfrak{B}_\gamma = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}(A^\gamma)^{\sigma_\gamma}) = \mathfrak{U}'_\gamma,$$
$$\mathfrak{Z}_\gamma = \mathfrak{U}_\gamma \cap \mathfrak{B}_\gamma, \quad \mathfrak{W}_\gamma = \mathfrak{W}_{\sigma_\gamma}(A^\gamma, A_\gamma)$$

und $\mathfrak{S}_\gamma$ die Algebra der skalaren Operatoren auf $\mathfrak{H}_\gamma$, ferner zu

$$d \in A \quad M_d = \{\gamma \in F(X, Z) \colon d \in A_\gamma\}, \qquad M^d = \{\gamma \in F(X, Z) \colon d \in A^\gamma\}.$$

M_d ist eine Borel-Menge und wegen

$$M^d \cap E(X, Z) = \{\gamma \in E(X, Z) \colon v_\gamma(M_d) = 1\}$$

dann auch M^d. Jedem $a \in A$ ordnen wir das Vektorfeld $\tilde{a}(\cdot) \colon \gamma \to \tilde{a}(\gamma)$ mit $\tilde{a}(\gamma) = 0$ falls $a \notin A_\gamma$ und $\tilde{a}(\gamma) = \delta_a^{\sigma_\gamma}$ falls $a \in A_\gamma$ zu. Die $\tilde{a}(\gamma)$, $a \in A$, bilden eine in $\mathfrak{H}_\gamma$ totale Menge, und $\gamma \to \langle \tilde{a}(\gamma), \tilde{b}(\gamma) \rangle = \chi_{M_a \cap M_b}(\gamma) \, \tilde{\sigma}_\gamma(b^{-1} a)$ ist meßbar. Es sei nun $\mathfrak{M}$ die Menge aller Vektorfelder $\xi(\cdot)$ auf $F(X, Z)$ mit $\xi(\gamma) \in \mathfrak{H}_\gamma$ und $\gamma \to \langle \xi(\gamma), \tilde{a}(\gamma) \rangle$ ist meßbar für alle $a \in A$. Wie in [2], S. 144, Prop. 4 zeigt man, daß $\xi(\cdot) \in \mathfrak{M}$ gleichwertig ist mit $\gamma \to \langle \xi(\gamma), \eta(\gamma) \rangle$ ist meßbar für alle $\eta \in \mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$ kann also als Menge der meßbaren Vektorfelder für ein direktes Integral $\mathfrak{H} = \int \mathfrak{H}_\gamma \, d\mu$ benutzt werden. $\mathfrak{H}$ ist die Menge aller $\xi(\cdot) \in \mathfrak{M}$ mit $\int \langle \xi(\gamma), \xi(\gamma) \rangle \, d\mu < \infty$, insbesondere ist $a(\cdot) \in \mathfrak{H}$. In $\mathfrak{H}$ müssen natürlich zwei Vektorfelder identifiziert werden, die sich nur auf einer Nullmenge unterscheiden. $\gamma \to \mathfrak{U}_\gamma$ und $\gamma \to \mathfrak{W}_\gamma$ sind meßbare Felder von v. Neumann-Algebren auf $F(X, Z)$. Für $\gamma \to \mathfrak{W}_\gamma$ etwa sieht man das so ein (vgl. [2], S. 157 und 180): die Folge $\gamma \to T_a(\gamma)$, $a \in A$, mit $T_a(\gamma) = W_a^{\sigma_\gamma}$ für $a \in A_\gamma$ und $= 0$ für $a \notin A_\gamma$ besteht wegen

$$\langle T_a(\gamma) \, \tilde{b}(\gamma), \tilde{c}(\gamma) \rangle = \chi_{M_a \cap M^b \cap M^c}(\gamma) \, \tilde{\sigma}_\gamma(c^{-1} \, a \, b \, a^{-1})$$

aus meßbaren Operatorfeldern, und $\mathfrak{W}_\gamma$ ist die von den $T_a(\gamma)$, $a\in A$, erzeugte v. Neumannsche Algebra. Die Menge $\mathfrak{U}[\mathfrak{W}]$ der zerlegbaren Operatoren $U=\int U(\gamma)\,d\mu$ $[W=\int W(\gamma)\,d\mu]$ mit $U(\gamma)\in\mathfrak{U}_\gamma[W(\gamma)\in\mathfrak{W}_\gamma]$ fast überall ist eine v. Neumann-Algebra, die die Algebra der diagonalisierbaren Operatoren enthält ([2], S. 180, Prop. 1). Da $F(X,Z)$ eine abzählbare Basis besitzt, gilt nach [2], S. 184, Theoreme 4: $\mathfrak{V}=\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}\cap\mathfrak{W}'$ sind zerlegbar, $\mathfrak{V}=\int\mathfrak{U}'_\gamma\,d\mu$, $\mathfrak{W}'=\int\mathfrak{W}'_\gamma\,d\mu$, und $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}\cap\mathfrak{W}'=\int(\mathfrak{Z}_\gamma\cap\mathfrak{W}'_\gamma)\,d\mu$. Sei $F(X,Z)_n$ die Menge aller $\gamma\in F(X,Z)$ mit $\dim\mathfrak{H}_\gamma=n$, $n=0,1,\ldots,\chi_0$, M_n die Menge aller $\gamma\in F(X,Z)_n$ mit $\mathfrak{Z}_\gamma\cap\mathfrak{W}'_\gamma=\mathfrak{S}_\gamma$. $F(X,Z)_n$ ist meßbar ([2], S. 143, Prop. 1). Es ist zu zeigen, daß M_n meßbar ist. Sei $\mathfrak{H}_n$ ein Hilbertraum der Dimension n, $\mathfrak{T}_n$ die Algebra der skalaren Operatoren in $\mathfrak{H}_n$, zu $\gamma\in F(X,Z)_n$ $T_n(\gamma)$ eine Isometrie von $\mathfrak{H}(\gamma)$ auf $\mathfrak{H}_n$, ferner $\gamma\to\mathfrak{K}(\gamma)$ bzw. $\gamma\to\mathfrak{L}(\gamma)$ das Feld von Hilberträumen bzw. v. Neumann-Algebren mit $\mathfrak{K}(\gamma)=\mathfrak{H}_n$ bzw. $\mathfrak{L}(\gamma)=\mathfrak{T}_n$ für $\gamma\in F(X,Z)_n$. $\gamma\to\mathfrak{K}(\gamma)$ und $\gamma\to\mathfrak{L}(\gamma)$ sind meßbar. Für $\gamma\in F(X,Z)_n$ ist $\mathfrak{Z}_\gamma\cap\mathfrak{W}_\gamma$ räumlich isomorph zu $\mathfrak{T}_n$ im Sinne von [2] genau dann, wenn $\gamma\in M_n$ ist. Die Menge dieser γ ist aber meßbar nach [2], S. 188, Prop. 5.

3. Unzerlegbare Charaktere. Stabilitätsgruppenabbildungen

Das anstehende Problem ist: *welche Maße μ und welche $\gamma\to\sigma_\gamma$ charakterisieren die unzerlegbaren*

$$\alpha=\int_{E(X,Z)}\gamma\cdot\tilde{\sigma}_\gamma\,d\mu\,?$$

Ist $\alpha\in E(A\times_\tau X)$, so $\alpha|X\in E(X,A\times_\tau X)$ ([6], Lemma 14), d.h. das Zerlegungsmaß von α über $\hat{X}$ ist ergodisch. Das ist aber, wie man sich leicht überlegt, gleichbedeutend mit der Ergodizität von μ. Die nach Satz 2 meßbare Menge aller γ mit $\sigma_\gamma\in E(A^\gamma,A_\gamma)$ ist auch invariant, also im Falle der Ergodizität von μ vom Maß 0 oder 1. Ist μ ergodisch und $\sigma_\gamma\in E(A^\gamma,A_\gamma)$ fast überall, so $\alpha\in E(A\times_\tau X)$. Die Umkehrung wäre richtig, wenn im Träger von μ ein Borel-Schnitt nach den Bahnen von A existierte. Das ist jedoch, abgesehen von dem trivialen Fall, daß μ auf eine endliche Bahn konzentriert ist, nicht der Fall nach [3], 2.9. Ist A endlich über dem zentralen Normalteiler Z, so muß das ergodische Maß μ auf eine endliche Bahn konzentriert sein, woraus sich unmittelbar ergibt:

Satz 3. *Sei A endlich über dem zentralen Normalteiler Z. Zu $\alpha\in E(A\times_\tau X)$ existieren dann $\gamma\in E(X,Z)$ und $\sigma\in E(A^\gamma,A_\gamma)$ mit*

$$\alpha=\frac{1}{[A:A_\gamma]}\sum_{a\in A/A_\gamma}\hat{\tau}_a\gamma\cdot\widetilde{\hat{\Gamma}_a\sigma}. \tag{8}$$

Umgekehrt definieren γ und σ durch (8) *ein $\alpha\in E(A\times_\tau X)$. Die Darstellung* (8) *ist eindeutig.*

Korollar 1. *Ist A abelsch, so ist $\alpha\in E(A\times_\tau X)$ genau dann, wenn es die Gestalt*

$$\alpha=\tilde{\sigma}\cdot\int_{\hat{X}}\beta\,d\mu \qquad \textit{mit } \mu\in\mathfrak{E}(\hat{X},A) \textit{ und } \sigma\in\hat{A}^\mu \textit{ hat.} \tag{9}$$

Ist A endlich, so $\alpha \in E(A \times_\tau X)$ genau dann, wenn

$$\alpha = \frac{1}{[A:A_\beta]} \sum_{a \in A/A_\beta} \widetilde{\hat{\tau}_a \beta \cdot \hat{\Gamma}_a \sigma} \qquad \text{mit } \beta \in \hat{X},\ \sigma \in E(A_\beta). \tag{10}$$

In der Menge $\mathfrak{U}(A)$ aller Untergruppen von A führen wir die Topologie ein, in der die Mengen $U(C,D) = \{U \in \mathfrak{U}(A)\colon U \cap C = \emptyset,\ U \supset D\}$, $C, D \subset A$ endlich, eine Basis bilden. Damit wird $\mathfrak{U}(A)$ ein kompakter und, da A abzählbar ist, metrisierbarer Raum.

Korollar 2. *Sei A endlich über dem zentralen Normalteiler Z. Ist $E(X,Z)$ kompakt und $\gamma \to A^\gamma$ sowie $\gamma \to A_\gamma$ stetig, so ist $E(A \times_\tau X)$ kompakt.*

Beweis. Sei

$$\alpha_n = \frac{1}{[A:A_{\gamma_n}]} \sum_{a \in A/A_{\gamma_n}} \widetilde{\hat{\tau}_a \gamma_n \cdot \hat{\Gamma}_a \sigma_n} \to \alpha \in K(A \times_\tau X).$$

Wegen $[A:Z] < \infty$ können wir $A_{\gamma_n} = B$ annehmen, ferner, da $E(X,Z)$ und die Menge aller normierten positiv-definiten Funktionen auf A in der Topologie der punktweisen Konvergenz kompakt sind, $\gamma_n \to \gamma \in E(X,Z)$ und $\sigma_n \to \omega$. Wegen der Stetigkeit von $\delta \to A_\delta$ und $\delta \to A^\delta$ ist dann $A_\gamma = B$ und $\omega = \tilde{\sigma}$ mit $\sigma \in K(A^\gamma, B)$, also

$$\alpha = \frac{1}{[A:B]} \sum_a \widetilde{\hat{\tau}_a \gamma \cdot \hat{\Gamma}_a \sigma}.$$

B wirkt effektiv nur endlich auf A^γ. Nach [9], Lemma 1 ist $\sigma \in E(A^\gamma, B)$ genau dann, wenn

$$\sum_{c \in o(b)} \sigma(a\,c) = \operatorname{ord} o(b)\, \sigma(a)\, \sigma(b)$$

gilt für jedes $a \in A^\gamma$ und jede Bahn $o(b)$, $b \in A^\gamma$. Dies folgt aber aus der Gültigkeit dieser Formel für die σ_n und der Stetigkeit von $\delta \to A^\delta$.

Beispiel 1. Es sei A die von

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Gruppe,

$$X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \qquad \tau_{U^n} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = U^n \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}.$$

Für $\chi_{s,t} \in \hat{X} = T \times T$ ist dann $o(\chi_{s,t}) = \{\chi_{s,\,ns+t}\colon n \in \mathbb{Z}\}$, also $o(\chi_{s,t})$ endlich genau dann, wenn s rational ist. Ist $s = a/b$, $(a,b) = 1$, so ist das zu $\chi_{a/b,t}$ gehörige $\gamma \in E(X,A)$ gegeben durch

$$\gamma_{a/b,t} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \exp\left[2\pi i \left(\dfrac{a}{b} n_1 + t\, n_2\right)\right] & \text{falls } n_2 \in \mathbb{Z} b, \\ 0 & \text{falls } n_2 \notin \mathbb{Z} b. \end{cases} \tag{11}$$

Es ist $\gamma_{a/b,t'} = \gamma_{a/b,t}$ genau dann, wenn $t' \equiv t \bmod 1/b$.

Wegen $A^{\gamma_{a/b,t}}=\{U^n: n\in\mathbb{Z}b\}$ erhält man alle unzerlegbaren Erweiterungen von $\gamma_{a/b,t}$ in der Form

$$\alpha_{a/b,t,r}\left(U^n, \binom{n_1}{n_2}\right)=\begin{cases}\exp\left[2\pi i\left(\frac{a}{b}n_1+t n_2+r n\right)\right] & \text{falls } n, n_2\in\mathbb{Z}b,\\ 0 & \text{sonst},\end{cases} \tag{12}$$

mit $0\leqq r<1/b$.

Ist μ ein ergodisches Maß auf $T\times T$, das nicht auf eine endliche Bahn konzentriert ist, so folgt Träger $\mu=\overline{o(\chi_{s,t})}=\{\chi_s\}\times T$, s irrational. Da μ invariant gegen die Transformationen $z\to z\cdot\exp(2\pi ins)$ ist, induziert μ auf T das Haarsche Maß. Zu jedem irrationalen s existiert demnach genau ein $\gamma_s\in E(X,A)$, nämlich

$$\gamma_s\binom{n_1}{n_2}=\begin{cases}\exp(2\pi i n_1 s) & \text{für } n_2=0,\\ 0 & \text{sonst}.\end{cases} \tag{13}$$

A^{γ_s} ist trivial, also existiert genau eine unzerlegbare Erweiterung α_s von γ_s: $\alpha_s=\tilde{\gamma}_s$. Wir definieren auch für rationales s γ_s durch (13) und $\alpha_s=\tilde{\gamma}_s$. Dann ist $F(A\times_\tau X)=\{\alpha_s: 0\leqq s<1\}\cup(\bigcup E_{a/b})$, wo die Vereinigung über alle a, b mit $0\leqq a<b$ ganz, $(a,b)=1$ genommen wird und

$$E_{a/b}=\left\{\alpha_{a/b,t,r}: 0\leqq t, r<\frac{1}{b}\right\}$$

ist. Auf $\{\alpha_s: 0\leqq s<1\}$ bzw. $E_{a/b}$ übertragen wir die Topologie von T bzw. $T\times T$. Die folgendermaßen definierte Menge $\mathfrak{B}$ ist dann eine Basis der Topologie in $F(A\times_\tau X)$: $M\in\mathfrak{B}$ genau dann, wenn

1. $M\cap\{\alpha_s: 0\leqq s<1\}$ ist offen,
2. $M\cap E_{a/b}$ ist offen für alle a, b,
3. bis auf endlich viele rationale s gilt: $\alpha_s\in M$ folgt $E_s\subset M$.

Beispiel 2. Sei B die Gruppe mit den Erzeugenden a, b, c und den definierenden Relationen $a^2=b^2=c^2=e$, $ac=ca$, $bc=cb$ und $a^{-1}b^{-1}ab=c$, ferner

$$A=B\times\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' A_\nu, \qquad A_\nu=\mathbb{Z}_2 \qquad \text{für alle } \nu,$$

$$X=\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' X_\nu \quad \text{mit} \quad X_\nu=\mathbb{Z}_3 \qquad \text{für alle } \nu,$$

$\tau_b=\tau_c=$Identität, $\tau_a(x_1,x_2,\ldots)=(2x_1,2x_2,\ldots)$ (wir schreiben $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ additiv), $\tau_{(a_\nu)}(x_1,x_2,\ldots)=(\tau_{a_1}x_1,\tau_{a_2}x_2,\ldots)$ mit $\tau_{a_\nu}x_\nu=x_\nu$ für $a_\nu=0$ und $=2x_\nu$ für $a_\nu=1$. Das Zentrum Z von A ist

$$\langle c\rangle\times\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' A_\nu,$$

und wegen $\tau_c=$Identität ist

$$E(X,Z)=E\left(X,\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' A_\nu\right).$$

Ferner gilt
$$\prod_{\nu=1}^{\infty}{}' A_\nu \times_\tau \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' X_\nu = \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' (A_\nu \times_{\tau_\nu} X_\nu).$$
Sei $\hat{X}_\nu = \{\chi_{\nu,i}: i=0, 1, 2\}$, $\chi_{\nu,0}$ der Einheitscharakter. Es ist genau dann
$$\gamma \in E\left(X, \prod_{\nu=1}^{\infty}{}' A\right),$$
wenn
$$\gamma = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \qquad \text{mit } \gamma_\nu \in E(X_\nu, A_\nu).$$
Sei
$$\gamma_\nu = \tfrac{1}{2}(\chi_{\nu,1} + \chi_{\nu,2}), \qquad \gamma = \bigotimes_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu = \int_{\hat{X}} \beta \, d\mu.$$
Dann ist $A_\gamma = A$, μ das Produktmaß
$$\mu = \prod_{\nu=1}^{\infty} \mu_\nu \quad \text{mit} \quad \mu_\nu(\{\chi_{\nu,i}\}) = \tfrac{1}{2}$$
für $i=1, 2$ und $=0$ für $i=0$ und $A^\gamma = \langle b, c\rangle$. Es ist $\tilde{\sigma} \cdot \gamma \in E(A \times_\tau X)$ für alle $\sigma \in E(\langle b,c\rangle, A)$. Da $\widehat{\langle b,c\rangle}$ die Punkte von $\langle b,c\rangle$ trennt und a wegen $a^{-1} b^{-1} a = c b^{-1}$ nicht den trivialen Automorphismus in $\langle b,c\rangle$ erzeugt, existiert ein $\sigma \in E(\langle b,c\rangle, A)$, $\sigma \notin \widehat{\langle b,c\rangle}$. Setzen wir $\sigma_\beta = \sigma$ für alle $\beta \in$ Träger μ, so ist $\alpha = \int \beta \cdot \tilde{\sigma}_\beta \, d\mu \in E(A \times_\tau X)$, aber $\sigma_\beta \notin E(A_\beta)$ für alle β.

Zum Schluß dieses Abschnittes betrachten wir noch die relevanten Stabilitätsgruppenabbildungen. Sei A klassenfinit, Z ein zentraler Normalteiler in A und $B \supset Z$ ein Normalteiler in A mit $[B:Z] < \infty$, ferner $\mu \in \mathfrak{E}(\hat{X}, A)$ und M die Menge aller $\beta \in \hat{X}$, deren Bahn im Träger von μ dicht liegt (M ist eine Borel-Menge mit $\mu(M)=1$): die Einschränkung auf M der Abbildung $\beta \to A_\beta \cap B$ ist stetig und nimmt nur endlich viele Werte an. Der Beweis ergibt sich aus der Definition von M, der Klassenfinitheit von A und $[A_\beta \cap B : A_\beta \cap Z] < \infty$. Die entsprechende Aussage gilt für $\gamma \to A_\gamma \cap B$ und ein ergodisches Maß auf $E(X, Z)$.

Satz 4. *Sei A klassenfinit, Z ein zentraler Normalteiler in A, B ein Normalteiler in A mit $B \supset Z$ und $[B:Z] < \infty$. Ist ρ ein ergodisches Maß auf $E(X,Z)$, so existiert eine Borel-Menge $Q \subset E(X,Z)$ mit $\rho(Q)=1$, so daß die Einschränkung auf Q von $\gamma \to A^\gamma \cap B$ stetig ist und nur endlich viele Werte annimmt.*

Beweis. Wir betrachten die Transformationsgruppe $(\hat{X}, Z)$. Nach [10], Theorem 4.2 existiert eine Zerlegungsabbildung von $(\hat{X}, Z)$, d.h. eine Abbildung Φ: $\beta \to \nu_\beta$ von $\hat{X}$ in $\mathfrak{E}(\hat{X}, Z)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. Φ ist eine Borel-Funktion;
2. $\nu_{\hat{\tau}_z \beta} = \nu_\beta$ für alle $\beta \in \hat{X}$ und $z \in Z$;
3. ist zu $\nu \in \mathfrak{E}(\hat{X}, Z)$ $\hat{X}_\nu = \{\beta \in \hat{X}: \nu_\beta = \nu\}$, so $\nu(\hat{X}_\nu) = 1$;
4. für $\mu \in \mathfrak{M}^+(\hat{X}, Z)$ und Borel-Mengen $M \subset \hat{X}$ gilt
$$\mu(M) = \int_{\hat{X}} \nu_\beta(M) \, d\mu.$$

Wir behaupten: zu Φ und $\mu \in \mathfrak{M}^+(\hat{X}, Z)$ gibt es eine Borel-Menge $M \subset X$ mit $\mu(M) = \mu(\hat{X})$, so daß die Abbildungen $\beta \to A_\beta$ und $\beta \to A^{\nu_\beta}$ auf M übereinstimmen. Zu $a \in A$ sei

$$\hat{X}_a = \{\beta \in \hat{X} : a \in A_\beta\}$$

und

$$\hat{X}'_a = \{\beta \in \hat{X} : a \in A^{\nu_\beta}\} = \Phi^{-1}(\{\nu \in \mathfrak{E}(\hat{X}, Z) : a \in A^\nu\})$$
$$= \Phi^{-1}(\{\nu \in \mathfrak{E}(\hat{X}, Z) : \nu(\hat{X}_a) = 1\}).$$

Dann sind

$$\hat{X}_{U(C,D)} = \{\beta \in \hat{X} : A_\beta \in U(C, D)\} = (\bigcap_{a \in D} \hat{X}_a) \cap (\bigcap_{b \in C} (\hat{X} - \hat{X}_b))$$

und

$$\hat{X}'_{U(C,D)} = \{\beta \in \hat{X} : A^{\nu_\beta} \in U(C, D)\} = (\bigcap_{a \in D} \hat{X}'_a) \cap (\bigcap_{b \in C} (\hat{X} - \hat{X}'_b))$$

Borel-Mengen. Sei nun M die Menge aller β, auf der die Abbildungen $\beta \to A_\beta$ und $\beta \to A^{\nu_\beta}$ übereinstimmen. Dann gilt

$$M = \bigcap_{U(C,D)} [(\hat{X}_{U(C,D)} \cap \hat{X}'_{U(C,D)}) \cup ((\hat{X} - \hat{X}_{U(C,D)}) \cap (\hat{X} - \hat{X}'_{U(C,D)}))],$$

also ist M eine Borel-Menge. Nach 3. und 4. gilt $\mu(M) = \int \nu_\beta(M)\, d\mu = \mu(\hat{X})$; denn ist etwa $\nu(\hat{X}_{U(C,D)}) = 1$, so auch $\nu(\hat{X}'_{U(C,D)}) = 1$ wegen $\hat{X}_{U(C,D)} \cap \hat{X}_\nu \cap \{\gamma \in \hat{X} : A_\gamma = A^\nu\} \subset \hat{X}'_{U(C,D)}$.

$$\mu = \int_{\mathfrak{E}(\hat{X}, Z)} \nu\, d\rho$$

ist ein A-ergodisches Maß auf X. Sei M eine invariante Borel-Menge in $\hat{X}$ mit $\mu(M) = 1$, so daß $A_\beta \cap B = A^{\nu_\beta} \cap B$ gilt für $\beta \in M$ und $\beta \to A_\beta \cap B | M$ stetig ist und nur endlich viele Werte annimmt. $Q = \{\nu \in \mathfrak{E}(\hat{X}, Z) : \nu(M) = 1\}$ ist eine Borel-Menge in $\mathfrak{E}(\hat{X}, Z)$ mit $\rho(Q) = 1$. $M_D = \{\beta \in M : A^{\nu_\rho} \cap B = D\}$, $D \in \mathfrak{U}(A)$, ist offen-abgeschlossen in M. Seien ν, $\nu_n \in Q$, $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n \to \nu$, $A^{\nu_n} \cap B = D' \neq D$, $A^\nu \cap B = D$, so ist $\nu(M_D) = 1$ und $\nu_n(M_D) = 0$. Sei O offen in X mit $O \cap M = M_D$ und $K \subset O$ kompakt mit $\nu(K) > 0$, f eine stetige Funktion mit $0 \leqq f(\beta) \leqq 1$, $f | K = 1$, $f | \hat{X} - O = 0$. Dann ist $\nu(f) = \int f\, d\nu > 0$, aber $\nu_n(f) = 0$.

Bemerkung. Ist $\beta \to \gamma_\beta$ eine Zerlegungsabbildung von $(\hat{X}, Z)$,

$$\alpha = \int_{\hat{X}} \beta \cdot \tilde{\sigma}_\beta\, d\omega \quad \text{und} \quad \alpha = \int_{E(X,Z)} \gamma \cdot \tilde{\sigma}_\gamma\, d\mu,$$

so ist $\sigma_\gamma \in E(A^\gamma, A_\gamma)$ μ-fast überall gleichwertig mit $\sigma_\beta \in E(A^{\gamma_\beta}, A_{\gamma_\beta})$ ω-fast überall.

4. Über $E(A \times_\tau X)$ für klassenfinite A

Ist Z ein zentraler Normalteiler in A, μ ein A-ergodisches Maß auf $E(X, Z)$ und B ein Normalteiler in A mit $B \supset Z$, so sagen wir, daß die *Bedingung* $[\mu, B]$ erfüllt ist, wenn eine *Borel-Menge* $Q \subset E(X, Z)$ *mit* $\mu(Q) = 1$ *existiert*, so daß gilt: *zu* $\gamma \in Q$ *gibt es eine Umgebung* $W(\gamma)$, *so daß aus* $\hat{\tau}_a \gamma \in W(\gamma)$ *folgt*

$$a \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (A_\gamma Z(A^\gamma \cap B))^n = D_{\gamma, B},$$

wo $Z(A^\gamma \cap B)$ den Zentralisator von $A^\gamma \cap B$ bezeichnet. Ist A klassenfinit und $[B:Z]<\infty$, so $D_{\gamma,B}$ von endlichem Index in A.

Satz 5. *Sei A klassenfinit, Z ein zentraler Normalteiler in A, B ein Normalteiler in A mit $B\supset Z$ und $[B:Z]<\infty$ und μ ein A-ergodisches Maß auf $E(X,Z)$. Ist ferner die Bedingung $[\mu, B]$ erfüllt, so gilt für alle*

$$\alpha=\int_{E(X,Z)} \gamma\cdot\tilde{\sigma}_\gamma \, d\mu \in K(A\times_\tau X):\ \alpha|B\times_\tau X\in E(B\times_\tau X, A\times_\tau X)$$

genau dann, wenn $\sigma_\gamma|A^\gamma\cap B$ zu $E(A^\gamma\cap B, A_\gamma)$ gehört fast überall.

Beweis. a) Sei Y ein topologischer Raum, ρ ein endliches Borel-Maß auf Y, $Z\subset Y$ eine Borel-Menge mit $\rho(Y-Z)=0$, $\mathfrak{N}=\{\Phi_i: i\in\mathbb{N}\}$ eine Folge von maßtreuen Borel-Isomorphismen von Z, $o(z)$ die Bahn von z unter der Wirkung von $\mathfrak{N}$, ord $o(z)\leqq q$ für alle $z\in Z$, ferner $Q\subset Z$ eine Borel-Menge, die aus jeder Bahn genau ein Element enthält. Es sei $Q_0=Q$ und

$$Q_i=\Phi_i(Q)-\bigcup_{\nu=0}^{i-1} Q_\nu \qquad \text{für } i\geqq 1.$$

Es gilt

$$Z=\bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i,$$

Q_i ist eine Borel-Menge und enthält aus jeder Bahn höchstens ein Element. Die beschränkte Funktion $z\to\lambda_z(B)=\text{ord}\,(o(z)\cap B)$, B eine Borel-Menge in Y, ist borelsch. Denn ist $D_m=\{z\in Q: \lambda_z(B)\geqq m\}$, so

$$D_m=\bigcup_{(l_1,\ldots,l_m)}\left[\bigcap_{\nu=1}^{m}\Phi_{l_\nu}^{-1}(Q_{l_\nu}\cap B)\right],$$

da $\lambda_z(B)\geqq m$ gleichwertig ist mit der Existenz von $l_1,\ldots,l_m$ mit

$$z\in\bigcap_{\nu=1}^{m}\Phi_{l_\nu}^{-1}(Q_{l_\nu}\cap B).$$

Also sind die D_m Borel-Mengen, da die Q_l es sind und die Φ_l Borel-Isomorphismen sind. Durch

$$\tilde{\rho}(B)=\int_Q \lambda_z(B)\,d\rho$$

wird ein Borel-Maß auf Y definiert, das mit ρ übereinstimmt. Hieraus folgt

$$\int_Y f\,d\rho=\int_Q \sum_{y\in o(z)} f(y)\,d\rho(z)$$

für einfache Funktionen. Wegen ord $o(z)\leqq q$ gilt dies dann aber auch für beschränkte, Borel-meßbare Funktionen.

b) Sei $\tilde{M}$ eine invariante Borel-Menge in $E(X,Z)$ mit $\mu(M)=1$, so daß die Einschränkungen der Abbildungen $\gamma\to A_\gamma\cap B$ und $\gamma\to A^\gamma\cap B$ auf M stetig sind und nur endlich viele Werte annehmen und die zu $[\mu, B]$ gehört. Da B endlich über Z ist, existiert nach [3], Theorem 2.9 im kompakten, metrischen Raum

$F(X,Z)$ eine Borel-Menge $Q\subset E(X,Z)$, die aus jeder B-Bahn in $E(X,Z)$ genau ein Element enthält. Zu $\psi\in E(B\times_\tau X)$ existieren dann eindeutig bestimmte $\gamma\in Q$ und $\sigma\in E(A^\gamma\cap B,\, A_\gamma\cap B)$ mit

$$\psi=\frac{1}{[B:B\cap A_\gamma]}\sum_a \hat{\tau}_a\gamma\cdot\widetilde{\hat{\Gamma}_a\sigma};$$

wir schreiben dann $\psi=(\gamma,\sigma)$. Man bestätigt durch Rechnung $\Gamma_{c,z}(\gamma,\sigma)=(\hat{\tau}_c\gamma,\hat{\Gamma}_c\,\sigma)$ für $(c,z)\in A\times_\tau X$, ferner

$$o(\gamma,\sigma)=\{(\hat{\tau}_d\gamma,\hat{\Gamma}_{b\,d}\sigma):\hat{\tau}_d\gamma\in Q,\, b\in A^{\hat{}}_{\tau_d\gamma}\}.$$

Zu $R\subset M=\tilde{M}\cap Q$ sei $E_R=\{(\gamma,\sigma)\in E(B\times_\tau X):\gamma\in R\}$. Ist R eine Borel-Menge, so auch E_R. Zum Beweis betrachten wir die stetigen Abbildungen

$$f:R\to E(X,B),\quad f(\gamma)=\frac{1}{[B:A_\gamma\cap B]}\sum_b\hat{\tau}_b\gamma$$

und

$$g:E(B\times_\tau X)\to E(X,B),\quad g(\gamma,\sigma)=(\gamma,\sigma)\,|\,X.$$

f ist eineindeutig und $f(R)=g(E_R)$. f ist ein Borel-Isomorphismus nach [4], Theorem 3.2; denn R ist als Borel-Menge im kompakten, metrischen Raum $F(X,Z)$ ein Standard-Borel-Raum, und $F(X,B)$ besitzt eine abzählbar erzeugte Borel-Struktur. Also ist $E_R=g^{-1}f(R)$ eine Borel-Menge.

Sei

$$\alpha\,|\,B\times_\tau X=\int_{E(B\times_\tau X)}(\gamma,\sigma)\,d\nu\in E(B\times_\tau X,\,A\times_\tau X).$$

Ist μ_f bzw. ν_g das stetige Bild von μ bzw. ν bei f bzw. g, so gilt

$$\alpha\,|\,X=\int_M\sum\hat{\tau}_b\gamma\,d\mu=\int_{f(M)}\lambda_\omega\cdot\omega\,d\mu_f,$$

wo $\lambda_\omega=[B:A_\gamma\cap B]$ für $\omega=f(\gamma)$, andererseits

$$\alpha\,|\,X=\int(\gamma,\sigma)\,|\,X\,d\nu=\int_{E(X,B)}\omega\,d\nu_g,$$

woraus wegen der Eindeutigkeit des Zerlegungsmaßes von $\alpha\,|\,X\in K(X,B)$ auf $E(X,B)$ folgt $d\nu_g(\omega)=\lambda_\omega\,d\mu_f(\omega)$, also

$$\nu(E_R)=\nu_g(f(R))=\int_{f(R)}\lambda_\omega\,d\mu_f=\int_R\sum\hat{\tau}_b\gamma(e)\,d\mu=\mu\Big(\bigcup_{b\in B}\hat{\tau}_b R\Big),$$

d.h. insbesondere $\nu(E_R)=1$ genau dann, wenn $\mu(R)=\mu(M)$.

c) Ist $\tilde{S}$ die Menge aller $(\gamma,\sigma)\in E_M$, deren Bahn im Träger von ν dicht liegt, so ist $\tilde{S}$ invariant und $\nu(\tilde{S})=1$. Wir zeigen: ist $(\gamma,\sigma),(\gamma,\sigma')\in\tilde{S}$, so $\sigma'\in o_{A_\gamma}(\sigma)$. Es gibt eine Folge $(\hat{\tau}_{a_n}\gamma,\hat{\Gamma}_{a_n}\hat{\Gamma}_{c_n}\sigma)\to(\gamma,\sigma')$ mit $c_n\in A_\gamma$, $\hat{\tau}_{a_n}\gamma\in M$. Wir können $A_{\hat{\tau}_{a_n}\gamma}\cap B=C$, $A^{\hat{\tau}_{a_n}\gamma}\cap B=D$ annehmen, ferner $\hat{\Gamma}_{a_n}\hat{\Gamma}_{c_n}\sigma=\omega$ und $\hat{\tau}_{a_n}\gamma\to\delta\in F(X,Z)$. Dann gilt also

$$\frac{1}{[B:C]}\sum_{b\in B/C}\hat{\tau}_b(\hat{\tau}_{a_n}\gamma)\cdot\widetilde{\hat{\Gamma}_b\omega}\to\frac{1}{[B:C]}\sum_{b\in B/C}\hat{\tau}_b\delta\cdot\widetilde{\hat{\Gamma}_b\omega}=(\gamma,\sigma').$$

Wegen $A_\delta \cap B \supset C$ ist

$$\frac{1}{[B:C]}\sum_b \hat{\tau}_b\,\delta = \frac{1}{[B:A_\delta \cap B]}\sum_d \hat{\tau}_d\,\delta\,,$$

woraus $\delta = \hat{\tau}_b\,\gamma$ mit einem $b \in B$ folgt. Dann ist auch $A_\delta \cap B = C$, $A^\delta \cap B = D$ und $(\delta, \omega) \in E(B \times_\tau X)$, woraus sich $\omega = \hat{\Gamma}_b\,\sigma'$ oder $\sigma' = \hat{\Gamma}_{b^{-1}a_n c_n}\sigma$ ergibt. $\hat{\tau}_{b^{-1}a_n}\gamma \to \gamma$ bedeutet

$$b^{-1}a_n \in \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left(A_\gamma Z(A^\gamma \cap B)\right)^m,$$

d.h. $\hat{\Gamma}_{b^{-1}a_n c_n}\,\sigma \in o_{A_\gamma}(\sigma)$ für $n \geqq n_0$, also $\sigma' \in o_{A_\gamma}(\sigma)$.

Zu $a \in A$ sei Δ_a: $\tilde{S} \to \tilde{S}$ definiert durch $\Delta_a(\gamma, \sigma) = (\gamma, \hat{\Gamma}_a\,\sigma)$ falls $a \in A_\gamma$ und $=(\gamma, \sigma)$ sonst. Δ_a ist ein maßtreuer Borel-Isomorphismus: $\{\gamma \in M\colon a \in A_\gamma\}$ ist eine Borel-Menge in $E(X, Z)$, also

$$\tilde{S}_a = \{(\gamma, \sigma) \in \tilde{S}\colon a \in A_\gamma\} = \tilde{S} \cap E_{\{\gamma \in M\colon a \in A_\gamma\}}$$

eine solche in $E(B \times_\tau X)$ und $\Delta_a | \tilde{S}_a = \hat{\Gamma}_a$, $\Delta_a | \tilde{S} - \tilde{S}_a = $ Identität. $\Delta = \{\Delta_a\}$ definiert eine Äquivalenzrelation in $\tilde{S}$, die wir trivial (d.h. $\psi \notin \tilde{S}$: $\psi \sim \psi' \Leftrightarrow \psi' = \psi$) auf $F(X, Z)$ fortsetzen. Nach [1], S. 135, Théorème 4 existiert ein Borel-Schnitt $S = \{(\gamma, \sigma_\gamma^S)\} \subset \tilde{S}$ nach den Δ-Bahnen. Die Abbildung π: $S \to R = \pi(S)$, π: $(\gamma, \sigma_\gamma^S) \to \gamma$ ist ein Borel-Isomorphismus; dies folgt wiederum aus [4], Theorem 3.2. Wegen $\tilde{S} \subset E_R$ und $\nu(\tilde{S}) = 1$ ist $\mu(R) = \mu(M)$.

d) Wir wenden nun a) an auf die Systeme $(F(B \times_\tau X), \tilde{S}, S, \nu, \Delta)$ und $(F(X, Z), \tilde{R}, R, \mu, \{\hat{\tau}_b\colon b \in B\})$:

$$\alpha | X = \int_{\tilde{S}} (\gamma, \sigma) | X\, d\nu = \int_S \frac{\operatorname{ord} o_{A_\gamma}(\sigma_\gamma^S)}{\operatorname{ord} o_B(\gamma)} \sum_{b \in B/B \cap A_\gamma} \hat{\tau}_b\,\gamma\, d\nu = \int_{g(S)} \eta_\omega \cdot \omega\, d\nu_g(\omega)$$

mit $\eta_\omega = \operatorname{ord} o_{A_\gamma}(\sigma_\gamma^S)$ für $\omega = g(\gamma, \sigma_\gamma^S)$, andererseits

$$\alpha | X = \int_R \sum \hat{\tau}_b\,\gamma\, d\mu = \int_{f(R)} \lambda_\omega \cdot \omega\, d\mu_f$$

mit $\lambda_\omega = \operatorname{ord} o_B(\gamma)$ für $\omega = f(\gamma)$, woraus $\lambda_\omega\, d\mu_f(\omega) = \eta_\omega\, d\nu_g(\omega)$ folgt. Ist ν_π das Bild bei π des von ν auf S induzierten Maßes, so folgt daraus für Borel-Mengen $T \subset R$

$$\nu_\pi(T) = \nu_g(f(T)) = \int_{f(T)} \frac{\lambda_\omega}{\eta_\omega}\, d\mu_f = \int_T \frac{\operatorname{ord} o_B(\gamma)}{\operatorname{ord} o_{A_\gamma}(\sigma_\gamma^S)}\, d\mu$$

und damit durch erneute Anwendung von a)

$$\begin{aligned}
\alpha | B \times_\tau X &= \int_{\tilde{S}} (\gamma, \sigma)\, d\nu = \int_S \sum_{a \in A_\gamma / A_{\sigma_\gamma^S}} (\gamma, \hat{\Gamma}_a\,\sigma_\gamma^S)\, d\nu \\
&= \int_R \sum_{a \in A_\gamma / A_{\sigma_\gamma^S}} \left(\frac{1}{\operatorname{ord} o_B(\gamma)} \sum_{b \in B/B \cap A_\gamma} \hat{\tau}_b\,\gamma \cdot \widehat{\hat{\Gamma}_b\,\hat{\Gamma}_a\,\sigma_\gamma^S}\right) d\nu_\pi(\gamma) \\
&= \int_R \sum_{b \in B/A_\gamma \cap B} \hat{\tau}_b\,\gamma \cdot \hat{\Gamma}_b \left(\frac{1}{\operatorname{ord} o_{A_\gamma}(\sigma_\gamma^S)} \sum_{a \in A_\gamma / A_{\sigma_\gamma^S}} \hat{\Gamma}_a\,\sigma_\gamma^S\right) d\mu\,,
\end{aligned}$$

wo $A_{\sigma_\gamma^S} = \{a \in A_\gamma\colon \hat{\Gamma}_a\,\sigma_\gamma^S = \sigma_\gamma^S\}$.

e) Ist

$$\delta = \hat{\tau}_b \gamma \in \tilde{R} = \bigcup_{b \in B} \hat{\tau}_b R, \qquad \gamma \in R,$$

so sei $\sigma_\delta^S = \Gamma_b \sigma_\gamma^S$ (diese Definition ist konsistent). Wir behaupten:

$$\delta \to h_c(\delta) = \Big(\sum_{a \in A_\delta / A_{\sigma_\delta^S}} \hat{\Gamma}_a \sigma_\delta^S \Big)(c)$$

(und dann auch $\delta \to h_c(\delta)\, \delta(x)$) ist Borel-meßbar. Sei $B = \{b_i : i \in \mathbb{N}\}$, $R_0 = R$ und für $i \geqq 1$

$$R_i = \hat{\tau}_{b_i} R - \bigcup_{\nu=0}^{i-1} R_\nu;$$

die R_i sind disjunkte Borel-Mengen mit

$$R = \bigcup_{i=0}^{\infty} R_i.$$

Ist $\delta \in R_i$, so $h_c(\delta) = h_{b_i^{-1} c b_i}(\hat{\tau}_{b_i^{-1}} \delta)$. Also brauchen wir nur zu zeigen, daß $\gamma \to h_c(\gamma) \mid R$ borelsch ist für alle $c \in A$. Zu $C, D \in \mathfrak{U}(B)$ sei $R(C,D) = \{\gamma \in R: A^\gamma \cap B = D, A_\gamma \cap B = C\}$: die $R(C,D)$ sind Borel-Mengen und nur endlich viele $\neq \emptyset$. Zu $\sigma \in E(D,C)$ sei $\Phi_\sigma : R(C,D) \to F(B \times_\tau X)$ definiert durch $\Phi_\sigma(\gamma) = (\gamma, \sigma)$; Φ_σ ist, erneut nach [4], Theorem 3.2, ein Borel-Isomorphismus, also $S \cap \Phi_\sigma(R(C,D))$ eine Borel-Menge. Es gibt nur endlich viele σ mit $S \cap \Phi_\sigma(R(C,D)) \neq \emptyset$. Ist $(\gamma, \sigma_\gamma^S) \in \Phi_\sigma(R(C,D)) \cap S$, so $\sigma_\gamma^S = \sigma$; die $\pi(S \cap \Phi_\sigma(R(C,D)))$ sind Borel-Mengen in $F(X,Z)$ mit

$$\bigcup_{C,D} \bigcup_{\sigma} \pi(\Phi_\sigma(R(C,D)) \cap S) = R,$$

und $\gamma \to \sigma_\gamma^S$ ist konstant auf $\pi(\Phi_\sigma(R(C,D)) \cap S)$. Wir wenden nun a) an auf $(F(X,Z), R, R, \mu, \{\hat{\tau}_b : b \in B\})$ und die Funktion $\delta \to h_c(\delta)\, \delta(x)$. Dann folgt

$$\int_{\tilde{R}} \delta \left(\frac{1}{\operatorname{ord} o_{A_\gamma}(\sigma_\gamma^S)} \sum_a \hat{\Gamma}_a \sigma_\gamma^S \right) d\mu$$

$$= \int_R \sum_{b \in B/B \cap A_\gamma} \widehat{\hat{\tau}_b \gamma \cdot \hat{\Gamma}_b \left(\frac{1}{\operatorname{ord} o_{A_\gamma}(\sigma_\gamma^S)} \sum_a \hat{\Gamma}_a \sigma_\gamma^S \right)}\, d\mu = \alpha \mid B \times_\tau X.$$

Ist

$$\alpha \mid B \times_\tau X = \int_{E(X,Z)} \delta \cdot \widehat{\sigma_\delta \mid B \cap A^\gamma}\, d\mu,$$

so ergibt sich

$$\sigma_\delta \mid B \cap A^\gamma = \frac{1}{\operatorname{ord} o_{A_\delta}(\sigma_\delta^S)} \sum_a \hat{\Gamma}_a \sigma_\delta^S$$

mit $\sigma_\delta^S \in E(A^\delta \cap B, A_\delta \cap B)$, d.h. $\sigma_\delta \mid B \cap A^\delta \in E(A^\delta \cap B, A_\delta)$ für fast alle δ. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Ist A klassenfinit und Z ein zentraler Normalteiler in A, so daß A/Z Torsionsgruppe ist (also etwa Z das Zentrum von A), so existiert eine aufsteigende

Folge $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ von Normalteilern in A mit $A_n \supset Z$, $[A_n : Z] < \infty$ und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$$

$A_n \times_\tau X$ bzw. $A_n \cap A^\gamma$ ist dann eine aufsteigende Folge von Normalteilern in $A \times_\tau X$ bzw. A^γ mit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \times_\tau X = A \times_\tau X \quad \text{bzw.} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A^\gamma = A^\gamma.$$

Ist $\alpha \in E(A \times_\tau X)$, so $\alpha | A_n \times_\tau X$ aus $E(A_n \times_\tau X, A \times_\tau X)$ für alle n ([6], Lemma 14). Ist umgekehrt $\sigma \in K(A^\gamma, A_\gamma)$ und $\sigma | A^\gamma \cap A_n \in E(A^\gamma \cap A_n, A_\gamma)$ für alle n, so $\sigma \in E(A^\gamma, A_\gamma)$. Dies bedeutet, daß wir uns bei Untersuchungen im Falle klassenfiniter A auf die Situation in Satz 5 beschränken können. Dann folgt unmittelbar

Satz 6. *Sei A klassenfinit, Z ein zentraler Normalteiler in A, so daß A/Z Torsionsgruppe ist, und μ ein A-ergodisches Maß auf $E(X, Z)$. Für jeden Normalteiler B in A mit $B \supset Z$ und $[B:Z] < \infty$ gelte $[\mu, B]$. Dann gilt:*

$$\alpha = \int_{E(X,Z)} \gamma \cdot \tilde{\sigma}_\gamma \, d\mu$$

gehört zu $E(A \times_\tau X)$ genau dann, wenn fast überall $\sigma_\gamma \in E(A^\gamma, A_\gamma)$ ist.

Dem Verfasser ist nicht bekannt, ob die Bedingung $[\mu, B]$ auch notwendig dafür ist, daß für alle $\alpha = \int \gamma \cdot \tilde{\sigma}_\gamma \, d\mu$ mit $\alpha | B \times_\tau X \in E(B \times_\tau X, A \times_\tau X)$ gilt $\sigma_\gamma | A^\gamma \cap B \in E(A^\gamma \cap B, A_\gamma)$ fast überall. Beispiel 2 in Abschnitt 3 zeigt, daß Satz 6 nicht allgemein, d.h. ohne die Voraussetzung $[\mu, B]$, richtig ist.

Literatur

1. Bourbaki, N.: Topologie générale, Chap. 9. Paris: Hermann 1958.
2. Dixmier, J.: Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien. Paris: Gauthier-Villars 1957.
3. Effros, E. G.: Transformation groups and C^*-algebras. Ann. Math. **81**, 38—55 (1965).
4. Mackey, G. W.: Borel structure in groups and their duals. Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 134—165 (1957).
5. Phelps, R.: Lectures on Choquet's theorem. New York: van Nostrand 1966.
6. Thoma, E.: Über unitäre Darstellungen abzählbarer, diskreter Gruppen. Math. Ann. **153**, 111—138 (1964).
7. — Über positiv-definite Klassenfunktionen abzählbarer Gruppen. Math. Z. **84**, 389—402 (1964).
8. — Invariante positiv-definite Klassenfunktionen und ergodische Maße. Math. Ann. **162**, 172—189 (1965).
9. — Zur harmonischen Analyse klassenfiniter Gruppen. Inventiones math. **3**, 20—42 (1967).
10. Varadarajan, V. S.: Groups of automorphisms of Borel spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **109**, 191—220 (1963).

Dr. E. Kaniuth
II. Mathematisches Institut
der Universität
44 Münster/Westfalen
Ludgeristraße 93—109