Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1968

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0103|log47

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

7

A 21267 D

X, 82

Mathematische Zeitschrift

Herausgegeben von **H. Wielandt,** Tübingen

unter Mitwirkung von **B. Eckmann,** Zürich
E. Heinz, Göttingen
R. Nevanlinna, Helsinki
K. Zeller, Tübingen

Wissenschaftlicher Beirat A. E. Ingham †, Cambridge
H. Kneser, Tübingen
W. Magnus, New York
O. Perron, München
G. Pickert, Gießen

Band 103 · (Schluß-)Heft 5 · 1968

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Z. 26. Februar 1968

Die „**Mathematische Zeitschrift**“ wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

„**Mathematische Zeitschrift**“ was founded in 1918 and edited by *L. Lichtenstein* in cooperation with *K. Knopp*, *E. Schmidt* and *I. Schur*; after Lichtenstein's death, 1933, it was edited by *K. Knopp*. The Editorial Committee was increased to include *E. Kamke* and *F. K. Schmidt* in 1933, *R. Nevanlinna* in 1936 and *H. Wielandt* in 1950. The latter became Managing Editor in 1952.

*

Die Zeitschrift erscheint, um eine rasche Publikation zu ermöglichen, in einzelnen Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Ein Band besteht im allgemeinen aus 5 Heften. Der Preis eines Bandes beträgt DM 96,—.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht auch das Recht der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Von jeder Arbeit werden 75 Sonderdrucke kostenlos zur Verfügung gestellt, weitere können zum Selbstkostenpreis bezogen werden.

In the interest of speedy publications, this journal is issued at frequent intervals according to the material received. As a rule five numbers constitute one volume. The price is DM 96.— per volume.

"Mathematische Zeitschrift" is devoted primarily to pure mathematics; papers on theoretical physics and astronomy may be accepted if they present interesting mathematical results. Reviews, problems etc. will not be published.

It is incumbent upon the author to submit no manuscript which has been or will be published elsewhere either at home or abroad. Unless special permission has been granted by the publishers, no photographic reproductions, microfilms, microphotos, or other reproductions of a similar nature may be made of the issues or of individual contributions contained therein or of extracts therefrom.

75 reprints of each paper are provided free of charge; additional copies may be ordered at cost price.

Manuskripte nehmen entgegen / Manuscripts may be sent to:

B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule
E. Heinz, 34 Göttingen, Math. Inst. d. Universität
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Computing Center, University of Helsinki, Töölönkatu
H. Wielandt, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität
K. Zeller, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität

Springer-Verlag

69 Heidelberg 1
Postfach 1780
Fernsprecher 49101
Fernschreibnummer 04-61723

1 Berlin 33
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher 830301
Fernschreibnummer 01-83319

Springer-Verlag
New York Inc.
175 Fifth Avenue
New York, N.Y. 10010

Math. Zeitschr. 103, 333–357 (1968)

Über die Erzeugung von eigentlichen Transformationsgruppen

HERBERT ABELS

Eingegangen am 6. Juli 1967

Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von WEIL [14] und [15] Appendix I (s. § 3, Satz 6ff.). Die Beweismethode soll in der folgenden Inhaltsübersicht skizziert werden.

In der ganzen Arbeit werden nur lokal kompakte topologische Gruppen betrachtet, die als stetige Transformationsgruppen auf lokal kompakten topologischen Räumen operieren. Der erste Paragraph bringt außer den nötigen Vorbereitungen einige Aussagen, die mit dem Begriff der Fundamentalmenge (s. § 1, Definition 4) einer eigentlichen Transformationsgruppe zusammenhängen. Am Ende des Paragraphen (Definition 5) wird definiert, was unter einem Fundamentalsystem verstanden werden soll. Das ist, grob gesagt, die Angabe einer offenen Teilmenge einer Transformationsgruppe G, die sich in einer Umgebung einer abgeschlossenen Teilmenge F des Raumes X, auf dem G operiert, so verhält, als ob F eine Fundamentalmenge für die Transformationsgruppe wäre.

Im zweiten Paragraphen wird dann die Frage behandelt: Gegeben sei ein Fundamentalsystem, wann ist F wirklich eine Fundamentalmenge? Den Anstoß zu dieser Fragestellung gab ein Satz von POINCARÉ [13], der es erlaubt, viele eigentlich diskontinuierliche Gruppen von biholomorphen Abbildungen des Einheitskreises der komplexen Ebene auf geometrischem Weg zu erzeugen. Die Verbindung zwischen der vorliegenden Arbeit und dem klassischen Resultat von POINCARÉ wird in [1] hergestellt. Zur Beantwortung der Frage, wann F wirklich eine Fundamentalmenge ist, wird ein Raum „über" dem gegebenen Raum X konstruiert, d.h. ein Raum X' und ein lokaler Homöomorphismus π von X' in X. Das Hauptresultat des zweiten Paragraphen lautet: F ist genau dann eine Fundamentalmenge, wenn $\pi: X' \to X$ surjektiv und eigentlich ist. Der im Paragraphen 2 konstruierte Raum X' ist für lokal kompakte Räume eine Verallgemeinerung eines Raumes, den GERSTENHABER [10] und BEHR [2] betrachtet haben, um die Relationen in gewissen eigentlich diskontinuierlich operierenden Gruppen von Homöomorphismen zu bestimmen. Sie betrachten dabei nicht die Gruppe von Homöomorphismen selbst, sondern die von Erzeugenden der Gruppe erzeugte freie Gruppe modulo lokalen Relationen.

Als Anwendung des Ergebnisses von Paragraph 2 wird das Hauptergebnis dieser Arbeit (§ 3, Satz 6) bewiesen. Um diesen Satz auf zusammenhängende lokal kompakte topologische Gruppen anwenden zu können (§ 3, Satz 8), braucht man die Lösung des 5. Hilbertschen Problems.

Bezeichnungen. Es wird durchweg vorausgesetzt, daß die auftretenden topologischen Räume Hausdorffsch und lokal kompakt sind. Der Einfachheit halber nennen wir sie „Räume". Unter dem Wort „Gruppe" wollen wir durchweg eine lokal kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe verstehen. Die Linkstranslation $h \to g \cdot h$ (Rechtstranslation $h \to h \cdot g$) der Gruppe G mit einem Element $g \in G$ bezeichnen wir mit L_g bzw. R_g. Das Komplement einer Teilmenge A einer Menge X wird mit $C_X A$ oder, wenn klar ist, um welche Menge X es sich handelt, einfach mit CA bezeichnet. Wenn A und B zwei Teilmengen einer Menge X sind, so bezeichnen wir mit $A - B$ die Menge der Elemente von A, die nicht in B liegen. Die abgeschlossene Hülle (der offene Kern) einer Teilmenge A eines Raumes X wird wie üblich mit $\bar{A}$ bzw. $\mathring{A}$ bezeichnet.

Alle Aussagen (Propositionen, Sätze usw.) sind innerhalb jedes Paragraphen fortlaufend numeriert, ebenso die Definitionen.

§ 1

Es sei eine stetige Operation der Gruppe G auf den Raum X gegeben, d.h. eine stetige Abbildung $\tau\colon G \times X \to X$, so daß $\tau(g_1, \tau(g_2, x)) = \tau(g_1 \cdot g_2, x)$ und $\tau(e, x) = x$ für alle Elemente g_1, g_2 aus G und $x \in X$ gilt, wobei e das neutrale Element der Gruppe G ist. Wenn g ein Element aus G ist, so bezeichnen wir die Abbildung $\tau(g, \cdot)\colon X \to X$, die jedem Punkt $x \in X$ den Punkt $\tau(g, x)$ zuordnet, mit $\tau(g)$; $\tau(g)$ ist ein Homöomorphismus von X auf sich. Die Operation τ ist im ganzen Paragraphen fest. Wir sagen deshalb auch: G ist eine stetige Transformationsgruppe auf X, und schreiben statt $\tau(g, x)$ einfach gx. Entsprechend schreiben wir für Teilmengen $H \subset G$ und $A \subset X$ statt

$$\bigcup_{\substack{g \in H \\ x \in A}} gx$$

einfacher HA. Wenn H eine Teilmenge von G und A und B zwei Teilmengen von X sind, sei $H(A, B) = \{h \in H\colon A \cap hB \neq \emptyset\}$, oder wenn angedeutet werden soll, um welche Operation τ es sich handelt: $H_\tau(A, B)$. Dann gelten für $g \in G$ die Formeln: $G(A, gB) = R_{g^{-1}} G(A, B)$,

$$G(gA, B) = L_g G(A, B) \tag{1.1}$$

und $G(B, A) = [G(A, B)]^{-1}$. Wenn A abgeschlossen in X und B kompakt sind, so ist $G(A, B)$ abgeschlossen in G [1].

Definition 1. Man sagt, *die stetige Transformationsgruppe G operiere eigentlich auf dem Raum X*, wenn die Abbildung $\theta\colon G \times X \to X \times X$ mit $\theta(g, x) = (gx, x)$ eigentlich ist [2].

Wenn G eine stetige Transformationsgruppe auf dem Raum X ist, so operiert G genau dann eigentlich auf X, wenn $G(K, L)$ für je zwei kompakte Teilmengen K und L von X relativ kompakt ist [1]. $G(K, L)$ ist dann sogar kompakt. Wenn τ_K die Einschränkung der Operationsabbildung τ auf $G \times K$ bedeutet, dann ist $\tau_K\colon G \times K \to X$ für jede kompakte Teilmenge K von X eigentlich. Aus

[1] Siehe [5], § 4, n° 5, Théorème 1.

[2] Vgl. [5], § 4.

der Definition einer eigentlichen Abbildung[3] folgt, daß HK abgeschlossen ist, wenn H eine abgeschlossene Teilmenge von G und K eine kompakte Teilmenge von X ist.

Die stetige Transformationsgruppe G induziert auf X die Äquivalenzrelation: x äquivalent zu y genau dann wenn $y \in Gx$. X/G sei die Menge der Äquivalenzklassen nach dieser Äquivalenzrelation. Durch die gröbste Topologie, für die natürliche Abbildung $\pi: X \to X/G$ stetig ist, wird X/G zu einem topologischen Raum. Die natürliche Abbildung π ist dann offen. Wenn G eigentlich operiert, ist der topologische Raum X/G Hausdorffsch[4] und lokal kompakt[5], also ein Raum im Sinne unserer Bezeichnungen.

Wenn G stetig auf X operiert, so operiert G auch stetig auf $X \times X$ vermöge $g(x,y)=(gx,gy)$. Wenn p_i die Projektion von $X \times X$ auf die i-te Komponente ist, und K und L zwei Teilmengen von $X \times X$ sind, so gilt

$G(K,L) \subset G(p_1 K, p_1 L) \cap G(p_2 K, p_2 L)$. Wenn die Gruppe G eigentlich auf X operiert, operiert sie also auch eigentlich auf $X \times X$.

Definition 2. G sei eine stetige Transformationsgruppe auf dem Raum X. Eine uniforme Struktur[6] $\mathfrak{U}$ auf X heißt *G-invariant*, wenn sie eine Basis $\mathfrak{B}$ besitzt, so daß für alle $g \in G$ und alle $B \in \mathfrak{B}$ gilt $gB \subset B$.

Ein Element $U \in \mathfrak{U}$ mit der Eigenschaft, daß $gU \subset U$ für alle $g \in G$ gilt, heißt G-invariant. Eine uniforme Struktur $\mathfrak{U}$ ist genau dann G-invariant, wenn die Menge der G-invarianten Elemente $U \in \mathfrak{U}$ eine Basis bildet.

Definition 3. Wenn X eine Menge ist, so heißt eine Abbildung $d: X \times X \to [0; \infty]$ *Abweichung*[7] auf X, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

A1: Für alle $x \in X$ gilt $d(x,x)=0$.

A2: Für alle x und y aus X gilt $d(x,y)=d(y,x)$.

A3: Für je drei Elemente x, y und z aus X gilt:

$$d(x,y) \leqq d(x,z)+d(z,y).$$

Wenn $\mathfrak{D}=\{d_i, i \in I\}$ eine Familie von Abweichungen auf X ist, so nennt man die gröbste uniforme Struktur, die alle Mengen der Form $d_i^{-1}[0,a)$ mit $0<a<\infty$ enthält, die durch $\mathfrak{D}$ definierte uniforme Struktur. Sei nun X ein Raum; dann heißt eine Abweichung d auf X G-invariant, wenn $d(x,y)=d(gx, gy)$ für alle $g \in G$ und alle x und y aus X gilt. Eine Familie von G-invarianten Abweichungen definiert offenbar eine G-invariante uniforme Struktur.

Proposition 1. *Die Gruppe G operiere eigentlich auf dem Raum X. Dann definiert die Familie der G-invarianten stetigen Abweichungen auf X eine G-invariante uniforme Struktur $\mathfrak{U}$ auf X. $\mathfrak{U}$ induziert die Topologie von X. $\mathfrak{U}$ ist die feinste G-invariante uniforme Struktur, die eine gröbere Topologie als die auf X gegebene induziert.*

[3] Siehe [3], § 10.

[4] Siehe [5], § 4, n° 2, Proposition 3.

[5] Siehe [5], § 4, n° 5, Proposition 9.

[6] Siehe [4].

[7] „Abweichung" ist eine Übersetzung von „écart" im Sinne von [6], § 1.

Beweis. $\mathfrak{D}$ sei die Familie der stetigen G-invarianten Abweichungen auf X. Die durch $\mathfrak{D}$ definierte uniforme Struktur $\mathfrak{U}$ ist G-invariant. Da alle Abweichungen $d \in \mathfrak{D}$ stetig sind, induziert $\mathfrak{U}$ eine gröbere Topologie als auf X gegeben ist. Sei nun U eine kompakte Umgebung eines Punktes $x \in X$. Da X lokal kompakt also uniformierbar[8] ist, gibt es eine stetige Funktion $f\colon X \to [0,1]$, die in CU verschwindet und im Punkte x den Wert 1 hat [9]. Dann ist $d'(y,z) = |f(y)-f(z)|$ eine stetige Abweichung auf X. Der Träger S von d' ist enthalten in $U \times X \cup X \times U$. Für jede kompakte Teilmenge K von $X \times X$ ist dann $G(K,S)$ als Teilmenge von $G(p_1 K, U) \cup G(p_2 K, U)$ relativ kompakt und, da G stetig operiert, sogar kompakt. Folglich ist $GK \cap S$ als Teilmenge von $G(K,S)K$ relativ kompakt und, da S und GK abgeschlossen sind, sogar kompakt. Sei nun dg ein nicht verschwindendes rechtsinvariantes Haarsches Maß[10] auf der Gruppe G. Dann ist

$$d(y,z) = \int_G d'(g\,y, g\,z)\, dg$$

stetig und G-invariant und verschwindet außerhalb von GS. Da die Integration eine lineare Operation ist und nicht negative Funktionen zu nicht negativen Funktionen integriert werden, ist d eine Abweichung auf X. Wir zeigen nun: Es gibt eine positive reelle Zahl c, so daß alle Punkte $y \in X$ mit $d(y, x) < c$ in U liegen. Damit ist dann bewiesen, daß die durch $\mathfrak{U}$ induzierte Topologie feiner als die Topologie von X ist. Wenn $d'(gx, gy) > 0$ ist, so liegt (gx, gy) in $U \times X \cup X \times U$.

$$U_r = \{y \in X\colon d'(x,y) < r\} = \{y \in X\colon f(y) > 1 - r\} \subset U$$

ist für $0 < r < 1$ eine relativ kompakte Umgebung von x. Die Menge

$$M_{r',r} = C\,G(C\,U_r, \overline{U}_{r'}) = \{g \in G\colon g\,\overline{U}_{r'} \subset U_r\}$$

ist für $0 < r' < r < 1$ eine relativ kompakte Umgebung des neutralen Elements e der Gruppe G, ebenso

$$(M_{r',r})^{-1} = \{g \in G\colon \overline{U}_{r'} \subset g\,U_r\} \quad \text{und} \quad M = G(x, U_{\frac{1}{3}}) \cap (M_{\frac{1}{3},1})^{-1}.$$

Für g aus M gilt nun: $g(CU) \subset C\overline{U}_{\frac{1}{3}}$ und $gx \in U_{\frac{1}{3}}$; also gilt für $y \in CU$:

$$d(x,y) = \int_G d'(g\,x, g\,y)\, dg \geqq \int_M d'(g\,x, g\,y)\, dg \geqq \int_M \tfrac{1}{3}\, dg.$$

Da das Maß dg nicht verschwindet, ist

$$\int_M dg > 0.$$

Die Zahl

$$c = \tfrac{1}{3} \int_M dg$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

[8] Siehe [4], § 4, n° 1, Corollaire 2.
[9] Siehe [6], § 9, n° 5, Théorème 2.
[10] Siehe etwa [8], § 2.

Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{U}$ die feinste G-invariante uniforme Struktur auf X ist, die eine gröbere Topologie induziert, als auf X gegeben ist. Sei also $\mathfrak{V}$ eine G-invariante uniforme Struktur, die auf X eine gröbere Topologie induziert, als auf X gegeben ist; sei $\mathfrak{B}$ das System der G-invarianten Elemente $B\in\mathfrak{V}$. $\mathfrak{B}$ ist dann eine Basis für $\mathfrak{V}$. Mit $B\in\mathfrak{B}$ liegen auch B^{-1} und $U_1=B\cap B^{-1}$ in $\mathfrak{B}$ [11]. Nun wählen wir rekursiv eine Folge von symmetrischen Mengen $U_n\in\mathfrak{B}$, so daß $U_{n+1}^3\subset U_n$ für $n\geqq 1$ gilt. Diese Folge ist Basis einer uniformen Struktur $\mathfrak{V}_B$, die B enthält. Die Konstruktion beim Beweis von [6], § 1, n° 4, Proposition 2 liefert dann eine Abweichung d auf X, die $\mathfrak{V}_B$ definiert. Aus der Konstruktion sieht man, daß d stetig und G-invariant ist. $\mathfrak{V}$ ist aber die gröbste uniforme Struktur, die feiner als alle $\mathfrak{V}_B$ ist, wo B die Basis $\mathfrak{B}$ durchläuft. Daher läßt sich $\mathfrak{V}$ durch eine Familie stetiger G-invarianter Abweichungen definieren, ist also gröber als $\mathfrak{U}$.

Definition 4. *G sei eine stetige Transformationsgruppe auf dem Raum X. Eine Teilmenge $F\subset X$ heißt Fundamentalmenge für G in X, wenn $GF=X$ ist, und für jede kompakte Teilmenge K von X die Menge $G(K,F)$ relativ kompakt ist.*

Proposition 2. *G sei eine stetige Transformationsgruppe auf dem Raum X. Die abgeschlossene Hülle einer Fundamentalmenge für G in X ist ebenfalls eine Fundamentalmenge für G in X.*

Beweis. F sei eine Fundamentalmenge für G in X, K eine kompakte Teilmenge von X und L eine kompakte Umgebung von K. Wenn $g\in G(\bar{F},K)$ ist, gilt $\bar{F}\cap gK\neq\emptyset$, folglich $F\cap gL\neq\emptyset$. Also ist $G(\bar{F},K)$ als Teilmenge von $G(F,L)$ relativ kompakt, also auch $G(K,\bar{F})=[G(\bar{F},K)]^{-1}$.

Proposition 3. *Wenn eine stetige Transformationsgruppe auf einem Raum eine Fundamentalmenge besitzt, so operiert die Gruppe eigentlich.*

Beweis. F sei eine Fundamentalmenge für die stetige Transformationsgruppe G auf dem Raum X; K und L seien zwei kompakte Teilmengen von X. Sei nun $g\in G(K,L)$; dann gibt es einen Punkt $x\in L$ mit $gx\in K$. Da aber $GF=X$ ist, gibt es ein Element $h\in G$ mit $hx\in F$. Dann gilt $(gh^{-1})(hx)\in K$. Also ist $G(K,L)$ als Teilmenge von $G(K,F)\cdot G(F,L)$ relativ kompakt.

Proposition 4. *Die Gruppe G operiere vermöge τ: $G\times X\to X$ eigentlich auf dem Raum X. F sei eine abgeschlossene Teilmenge von X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

F1: *F ist eine Fundamentalmenge für G in X.*

F2: *Die Einschränkung der Operationsabbildung τ zu τ: $G\times F\to X$ ist surjektiv und eigentlich.*

F3: *Die Einschränkung der natürlichen Abbildung π zu π: $F\to X/G$ ist surjektiv und eigentlich.*

[11] Für $A\subset X\times X$ sei $A^{-1}=\{(x,y)\colon (y,x)\in A\}$. A heißt symmetrisch, wenn $A=A^{-1}$ ist. Wenn A und B Teilmengen von $X\times X$ sind, so sei $AB=\{(x,z)$: es existiert ein $y\in X$, so daß $(x,y)\in A$ und $(y,z)\in B\}$. Vgl. [4].

Beweis. Für die in F2 und F3 genannten Abbildungen schreiben wir in diesem Beweis σ bzw. φ. Für die Projektion von $G \times F$ auf G und F schreiben wir p_1 bzw. p_2.

F1 $\rightarrow$ F2: Offenbar ist σ surjektiv. Wenn K eine kompakte Teilmenge von X ist, so ist $\sigma^{-1}(K) = \{(g,y) \in G \times F : gy \in K\}$. Dann ist $p_1 \sigma^{-1}(K) = G(K,F)$ kompakt und weiter $p_2 \sigma^{-1}(K)$ als Teilmenge von $F \cap [G(K,F)]^{-1} K$ relativ kompakt. Folglich ist $\sigma^{-1}(K)$ relativ kompakt und, da σ stetig ist, sogar kompakt.

F2 $\rightarrow$ F3: Offenbar ist φ surjektiv. Sei K' eine kompakte Teilmenge von X/G. Da $\pi: X \rightarrow X/G$ offen ist, gibt es eine kompakte Teilmenge K von X mit $\pi(K) = K'$ [12]. Dann ist $\sigma^{-1}(K)$ kompakt, also auch $\varphi^{-1}(K') = p_2 \sigma^{-1}(K)$.

F3 $\rightarrow$ F1: Da φ surjektiv ist, gilt $GF = X$. Wenn K eine kompakte Teilmenge von X ist, so sind auch $\pi(K)$ und weiter $L = \varphi^{-1} \pi(K) = GK \cap F$ kompakt. Dann gilt aber $G(F,K) = G(L,K)$. Da G eigentlich operiert ist diese Menge kompakt.

Nach Proposition 3 erhebt sich die Frage: Besitzt jede eigentliche Transformationsgruppe auf einem Raum eine Fundamentalmenge? Wir können diese Frage nur teilweise beantworten.

Satz 5. *Die stetige Transformationsgruppe G operiere eigentlich auf dem Raum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *X/G ist parakompakt,*

2) *X ist parakompakt und G besitzt eine Fundamentalmenge.*

Beweis. 2) $\rightarrow$ 1): F sei eine abgeschlossene Fundamentalmenge für G in X, $\varphi: F \rightarrow X/G$ sei die Beschränkung der natürlichen Abbildung $\pi: X \rightarrow X/G$. F ist dann lokal kompakt und parakompakt. Nun ist ein Raum (im Sinne unserer Bezeichnungen) genau dann parakompakt, wenn er topologische Summe von σ-kompakten Teilräumen ist [13]. Dabei heißt ein Raum σ-kompakt (dénombrable à l'infini), wenn er abzählbare Vereinigung von kompakten Teilmengen ist. F sei also topologische Summe der σ-kompakten Teilräume F_α, α aus einer Indexmenge A. Die Menge $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ bezeichnen wir mit Σ. $\mathfrak{F}$ sei die Familie der Teilmengen von F, die abzählbare Vereinigungen von Elementen aus Σ sind. Jedes Element $M \in \mathfrak{F}$ ist also eine σ-kompakte Teilmenge von F. Da für jede kompakte Teilmenge K von X die Menge $GK \cap F = \varphi^{-1} \pi(K)$ kompakt ist, trifft GK nur endlich viele Elemente aus Σ. Für jedes Element $M \in \mathfrak{F}$ trifft also GM nur abzählbar viele Elemente aus Σ. Folglich ist die Vereinigungsmenge M' derjenigen Elemente $F_\alpha \in \Sigma$, für die $GM \cap F_\alpha$ nicht leer ist, wieder in $\mathfrak{F}$. Wir erhalten so eine Abbildung $M \rightarrow M'$ von $\mathfrak{F}$ in sich. Wir zeigen nun, daß $\varphi(M')$ eine Umgebung von $\varphi(M)$ ist. Sei x ein Punkt aus M, U eine kompakte Umgebung von x in X. Dann ist $G(F,U)$ kompakt, folglich auch $F \cap G(F,U)\, U = GU \cap F$. GU trifft also nur endlich viele Elemente aus Σ. Anders ausgedrückt: GF_α trifft U nur für endlich viele Indizes α. Nach Proposition 4 F2 sind die Mengen GF_α abgeschlossen. Es gibt also eine Umgebung U' von x, so daß GU' ein Element $F_\alpha \in \Sigma$ dann und nur dann trifft, wenn Gx es trifft, folg-

[12] Siehe [3], § 10, n° 4, Proposition 10.

[13] Siehe [3], § 9, n° 10, Théorème 5.

lich $F_\alpha \subset M'$ ist. Also gilt $GM' \supset U'$. Da π offen ist, ist $\varphi(M')$ eine Umgebung von $\varphi(x)$. Folglich ist $\varphi(M')$ eine Umgebung von $\varphi(M)$.

Für ganze Zahlen $n \geqq 0$ und $M \in \mathfrak{F}$ definieren wir nun rekursiv: $M^{(0)} = M$ $M^{(n+1)} = [M^{(n)}]'$. Dann liegt auch

$$M^\infty = \bigcup_{n \geqq 0} M^{(n)}$$

in $\mathfrak{F}$. Betrachten wir nun die Mengen F_α^∞ mit $F_\alpha \in \Sigma \subset \mathfrak{F}$. Wir zeigen: Aus $F_\alpha^\infty \cap F_\beta^\infty \neq \emptyset$ folgt $F_\alpha^\infty = F_\beta^\infty$. Wenn $F_\alpha^\infty \cap F_\beta^\infty \neq \emptyset$ ist, gibt es nicht negative ganze Zahlen n und m, so daß $F_\alpha^{(n)} \cap F_\beta^{(m)} \neq \emptyset$ gilt. Wenn beide Zahlen gleich null sind, ist nichts zu beweisen. Sei also etwa $m > 0$. Da jedes Element $F_\gamma \in \Sigma$ ein Element $M \in \mathfrak{F}$ entweder nicht trifft, oder in ihm enthalten ist, enthält $F_\alpha^{(n)} \cap F_\beta^{(m)}$ ein Element $F_\gamma \in \Sigma$. Nun gilt nach Konstruktion $GF_\gamma \cap F \subset F_\alpha^{(n+1)}$. Anderseits gilt nach Konstruktion $F_\gamma \cap GF_\beta^{(m-1)} \neq \emptyset$, folglich $GF_\gamma \cap F_\beta^{(m-1)} \neq \emptyset$. Also gilt $GF_\gamma \cap F_\beta^{(m-1)} \subset GF_\gamma \cap F \subset F_\alpha^{(n+1)}$ und es folgt $F_\alpha^{(n+1)} \cap F_\beta^{(m-1)} \neq \emptyset$. Durch vollständige Induktion folgt: $F_\alpha^{(m+n)} \cap F_\beta^{(0)} \neq \emptyset$, also gilt $F_\beta^{(0)} \subset F_\alpha^{(m+n)}$. Vertauschen wir die Indizes, so ergibt sich $F_\alpha^{(0)} \subset F_\beta^{(m+n)}$. Aus diesen beiden Inklusionen folgt die behauptete Gleichung: $F_\alpha^\infty = F_\beta^\infty$. Da $\varphi(M')$ für alle $M \in \mathfrak{F}$ eine Umgebung von $\varphi(M)$ ist, ist $\varphi(F_\alpha^\infty)$ für alle $F_\alpha \in \Sigma$ offen in X/G. Ferner ist $\varphi(F_\alpha^\infty)$ σ-kompakt. Aus $\varphi^{-1}(\pi F_\alpha^{(n)}) \subset F_\alpha^{(n+1)}$ folgt $\varphi^{-1}\pi F_\alpha^\infty = F_\alpha^\infty$. Aus $\pi(F_\alpha^\infty) \cap \pi(F_\beta^\infty) \neq \emptyset$ folgt also $F_\alpha^\infty \cap F_\beta^\infty \neq \emptyset$ und weiter $F_\alpha^\infty = F_\beta^\infty$. X/G ist also disjunkte Vereinigung der offenen, folglich abgeschlossenen, σ-kompakten φ-Bilder der verschiedenen unter den Mengen F_α^∞. X/G ist also parakompakt. Man bemerke, daß beim Beweis nur verwendet wurde, daß G eine abgeschlossene parakompakte Fundamentalmenge besitzt.

Die Umkehrung 1) $\rightarrow$ 2) ist einfacher. Wenn X/G topologische Summe der σ-kompakten Teilräume Y_α ist, so ist X topologische Summe der Teilräume $\pi^{-1}(Y_\alpha)$. Wir dürfen daher annehmen, daß X/G σ-kompakt ist. Dann gibt es eine Folge U_n von relativ kompakten offenen Teilmengen von X/G, so daß $U_{n+1} \supset \overline{U}_n$ für $n \geqq 1$ gilt und

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = X/G$$

ist. Zu jeder der kompakten Mengen $K_n = \overline{U}_n - U_{n-1}$ für $n > 1$ und $K_1 = \overline{U}_1$ gibt es dann eine kompakte Teilmenge L_n von X, so daß $\pi(L_n) = K_n$ ist[12]. Wir setzen

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n .$$

Die Abbildung $\varphi = \pi | F$: $F \rightarrow X/G$ ist nach Konstruktion surjektiv. Wenn K eine kompakte Teilmenge von X/G ist, dann gibt es eine natürliche Zahl n, so daß $K \subset U_n$ ist. Dann ist

$$\varphi^{-1}(K) = \pi^{-1}(K) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} L_k \right)$$

kompakt. Wenn V eine kompakte Umgebung eines Punktes $x \in X$ ist, so ist also $V \cap F = V \cap (\pi^{-1}\pi(V) \cap F) = V \cap \varphi^{-1}\pi(V)$ kompakt. Folglich ist F abge-

schlossen in X. F ist dann nach Proposition 4 F3 eine Fundamentalmenge für G in X.

Es bleibt zu zeigen, daß X parakompakt ist. Nehmen wir zu jeder der kompakten Mengen L_n eine kompakte Umgebung L_n' und bilden

$$F' = \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n'.$$

F' ist eine Umgebung von F und

$$G(F, F') = \bigcup_{n,m} G(L_n, L_m')$$

ist eine σ-kompakte Umgebung des neutralen Elements e der Gruppe G. Die von $G(F,F')$ erzeugte Untergruppe G' von G ist also σ-kompakt und offen, folglich abgeschlossen. Dann ist $X' = G'F$ σ-kompakt. Für jeden Punkt $x \in G'F$ ist $G'F' \subset G'(G'F) = G'F = X'$ eine Umgebung. X' ist also offen in X. Seien nun g und h zwei Elemente aus G. Wir zeigen: Aus $gX' \cap hX' \neq \emptyset$ folgt $gX' = hX'$. Seien x_1, x_2 zwei Punkte aus X', so daß $gx_1 = hx_2$ gilt. Dann gibt es Punkte z_i aus F und Elemente $g_i \in G'$, so daß $x_i = g_i z_i$ für $i = 1,2$ gilt. Dann folgt $g_2^{-1}h^{-1}gg_1z_1 = z_2$. Da z_1 und z_2 in F liegen, ist $g_2^{-1}hg^{-1}g_1 \in G'$ und folglich $h^{-1}g \in G'$. Dann folgt aber: $gX' = hX'$. X ist also disjunkte Vereinigung der verschiedenen unter den Mengen gX', wo g in G läuft. Da alle diese Mengen offen und σ-kompakt sind, ist X parakompakt.

Korollar 6. *Die stetige Transformationsgruppe G operiere eigentlich auf dem Raum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1) *X/G ist kompakt.*

2) *G besitzt eine kompakte Fundamentalmenge.*

3) *Jede abgeschlossene Fundamentalmenge für G in X ist kompakt.*

Wenn eine dieser Bedingungen erfüllt ist, ist X parakompakt und vollständig[14] *in jeder G-invarianten uniformen Struktur, die die Topologie von X induziert.*

Die letzte Aussage ist eine Verallgemeinerung von [12] Theorem 5.1.

Beweis. Alle Aussagen bis auf die letzte folgen aus Satz 5 und Proposition 4 F3. Sei K eine kompakte Teilmenge von X; sei $\mathfrak{U}$ eine G-invariante uniforme Struktur, die die Topologie von X induziert. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ ein Element $W \in \mathfrak{U}$, so daß $W(x) = \{y \in X: (x,y) \in W\}$ relativ kompakt ist. Sei V ein symmetrisches Element aus $\mathfrak{U}$, für das $V^2 \subset W$ ist. Für jeden Punkt $y \in V(x)$ ist dann $V(y)$ als Teilmenge von $W(x)$ relativ kompakt. Endlich viele solche Umgebungen $V(x)$ überdecken K. Der Durchschnitt U der zugehörigen $V \in \mathfrak{U}$ liegt in $\mathfrak{U}$, und $U(K)$ ist eine relativ kompakte Umgebung von K. Sei nun $\mathfrak{F}$ ein Cauchyfilter auf X, d.h. der von den Mengen $A \times A$ mit $A \in \mathfrak{F}$ erzeugte Filter ist feiner als $\mathfrak{U}$. Sei K eine kompakte Fundamentalmenge für G

[14] „vollständig" ist eine Übersetzung von „complet" im Sinne von [4], § 3.

in X. Wählen wir ein G-invariantes symmetrisches Element $U \in \mathfrak{U}$, so daß $U(K)$ relativ kompakt ist. Dann gibt es eine Menge $A \in \mathfrak{F}$, so daß $A \times A \subset U$ ist. Da K eine Fundamentalmenge ist, gibt es ein Element $g \in G(K, A)$; $gA \cap K$ ist also nicht leer, enthalte etwa den Punkt x. Da U G-invariant ist, gilt $gA \times gA \subset U$, insbesondere also $gA \subset U(x)$. Folglich enthält $g\mathfrak{F} \mid \overline{U(x)} = \{gA \cap \overline{U(x)} \text{ mit } A \in \mathfrak{F}\}$ die leere Menge nicht. Offenbar ist $g\mathfrak{F} \mid \overline{U(x)}$ ein Filter auf der kompakten Menge $\overline{U(x)}$; er besitzt also einen Häufungspunkt z. Der Punkt $g^{-1}z$ ist dann ein Häufungspunkt von $\mathfrak{F}$; X ist also vollständig.

Ein anderes Beispiel, in dem X/G parakompakt ist, gibt

Proposition 7. *Die stetige Transformationsgruppe G operiere eigentlich auf dem Raum X. Wenn X lokal zusammenhängend und parakompakt ist, so ist auch X/G lokal zusammenhängend und parakompakt.*

Beweis. Setzen wir zunächst nur voraus, daß G eigentlich auf dem lokal zusammenhängenden Raum X operiert. Da die natürliche Abbildung $\pi: X \to X/G$ offen ist, ist auch X/G lokal zusammenhängend. Sei $\{X_\alpha;\ \alpha \text{ aus einer Indexmenge } A\}$ die Menge der Zusammenhangskomponenten von X. Jedes Element aus G vertauscht die Zusammenhangskomponenten. Daher gilt für zwei Indizes α und β aus A entweder $\pi(X_\alpha) = \pi(X_\beta)$ oder $\pi(X_\alpha) \cap \pi(X_\beta) = \emptyset$. Das System der verschiedenen unter den Mengen $\pi(X_\alpha)$ ist also eine Überdeckung von X/G durch zusammenhängende, offene, disjunkte, folglich abgeschlossene Teilmengen. Für jede Zusammenhangskomponente X_α von X ist also $\pi(X_\alpha)$ eine Zusammenhangskomponente von X/G. Nun ist ein (lokal kompakter) Raum genau dann parakompakt, wenn er topologische Summe von σ-kompakten Räumen ist. Hieraus folgt, daß ein lokal zusammenhängender Raum genau dann parakompakt ist, wenn jede Zusammenhangskomponente σ-kompakt ist. Daraus ergibt sich die Aussage der Proposition.

Man kann nun beweisen, daß jede eigentliche Transformationsgruppe auf einem zusammenhängenden, lokal zusammenhängenden und σ-kompakten Raum eine Fundamentalmenge besitzt, die zusammenhängend ist. Diese Aussage werden wir aber nicht brauchen und deshalb hier nicht beweisen.

Proposition 8. *Die stetige Transformationsgruppe G operiere eigentlich auf dem Raum X, F sei eine abgeschlossene Fundamentalmenge für G in X und U eine Umgebung von F. Wenn X zusammenhängend ist, erzeugt $G(U,F)$ die Gruppe G. Jedes Element $g \in G$ läßt sich sogar als Produkt von Potenzen von Elementen aus $G(U,F)$ mit positiven Exponenten darstellen.*

Beweis. G' sei die Halbgruppe der Produkte von Potenzen von Elementen aus $G(U,F)$ mit positiven Exponenten. Da F eine Fundamentalmenge ist, ist $G(U,F)\ F \supset U$; folglich ist $G'F = G'U$ offen in X. $G(U,F)$ ist eine offene Umgebung des neutralen Elements e der Gruppe G. G' ist also offen in G. Dann ist G' aber auch abgeschlossen in G; denn sei $g \in \overline{G'}$ und sei V eine Umgebung von e, so daß $V^{-1} \subset G(U,F)$ gilt; dann trifft gV die Halbgruppe G'; sei etwa $g' \in gV \cap G'$, dann ist $g \in g'V^{-1} \subset g' \cdot G(U,F) \subset G'$; g gehört also zu G'. Nach

Proposition 4 F2 ist dann $G'F$ abgeschlossen in F. Folglich ist $G'F=X$. Sei nun $g\in G$. Dann gibt es ein Element $h\in G'$, so daß $\emptyset\neq gF\cap hF=h(h^{-1}gF\cap F)$. Dann liegt $h^{-1}g$ in $G(F,F)$, also liegt g in $hG(F,F)\subset G'$. Damit ist alles bewiesen.

Jetzt kommen wir zu der für den Rest der Arbeit wichtigen

Definition 5. G sei eine stetige Transformationsgruppe auf dem Raum X, F sei eine abgeschlossene Teilmenge von X, Q eine offene Umgebung von F und E eine offene Umgebung des neutralen Elements der Gruppe G. Dann heißt das Tripel $\mathfrak{E}=(F,Q,E)$ ein *Fundamentalsystem für G in X*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

FS1: $E(Q,F)=E$.

FS2: Für jede kompakte nicht leere Teilmenge K von Q ist $E(K,F)$ nicht leer und kompakt.

FS3: Für jeden Punkt $x\in Q$ und jedes Element $g\in E(x,F)$ gilt:

$$E(g^{-1}x,F)=L_{g^{-1}}E(x,F).$$

FS4: E erzeugt die Gruppe G.

Für zwei Teilmengen M und N von X bedeutet dabei nach unserer Vereinbarung $E(M,N)$ die Menge der Elemente $g\in E$, für die $M\cap gN$ nicht leer ist. Es gilt also $E(M,N)=G(M,N)\cap E$. Die folgende Aussage ist nun trivial:

Proposition 9. *Die stetige Transformationsgruppe G operiere eigentlich auf dem zusammenhängenden Raum X, F sei eine Fundamentalmenge für G in X, Q eine offene Umgebung von F. Dann ist $\mathfrak{E}=(F,Q,G(Q,F))$ ein Fundamentalsystem für G auf X.*

§ 2

Wir erinnern daran, daß wir unter dem Wort „Gruppe" immer eine lokal kompakte Hausdorffsche topologische Gruppe verstehen wollen und unter dem Wort „Raum" immer einen lokal kompakten Hausdorff-Raum verstehen wollen.

Wenn ein Fundamentalsystem (F,Q,E) gegeben ist, erheben sich die beiden Fragen: 1. Wann operiert die Gruppe G eigentlich auf X? 2. Wann ist F eine Fundamentalmenge für G in X? Wenn F eine Fundamentalmenge ist, so operiert G eigentlich auf X (s. § 1, Proposition 3). Die beiden Fragen sind aber nicht äquivalent, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. $\mathbb{C}$ sei der Körper der komplexen, $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen versehen mit der euklidischen Topologie. X sei der Zylinder der Paare $(z,x)\in\mathbb{C}\times\mathbb{R}$ mit $|z|=1$, versehen mit der Relativtopologie des Produkts $\mathbb{C}\times\mathbb{R}$. G sei die diskrete additive Gruppe der ganzen Zahlen. Wenn α eine reelle Zahl ist, operiert G vermöge der Schraubung $g(z,x)=(z\cdot e^{i\alpha g},x+g)$ eigentlich auf X. Eine Fundamentalmenge für diese Gruppe ist die kompakte Teilmenge der Paare $(z,x)\in X$ mit $0\leqq x\leqq 1$. Sei exp: $(-\pi,+\pi)\to\mathbb{C}$ die injektive Abbildung

$\exp(r)=e^{ir}$. Wenn $0<\alpha<\alpha+\varepsilon<2\pi$ gilt, dann ist

$$F=\exp\left[\frac{-\alpha}{2},\frac{+\alpha}{2}\right]\times R$$

abgeschlossen in X und

$$Q=\exp\left(\frac{-(\alpha+\varepsilon)}{2},\frac{\alpha+\varepsilon}{2}\right)\times R$$

eine offene Umgebung von F in X. Sei ferner $E=\{-1,0,1\}\subset G$. Dann gilt offenbar für $(z,x)\in Q$:

$$E((z,x),F)=\begin{cases}\{-1\} & \text{für } -\alpha-\varepsilon<2\exp^{-1}(z)<-\alpha\\ \{-1,0\} & \text{für } 2\exp^{-1}(z)=-\alpha\\ \{0\} & \text{für } -\alpha<2\exp^{-1}(z)<+\alpha\\ \{0,1\} & \text{für } 2\exp^{-1}(z)=\alpha\\ \{1\} & \text{für } \alpha<2\exp^{-1}(z)<\alpha+\varepsilon.\end{cases}$$

Nun ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{E}=(F,Q,E)$ ein Fundamentalsystem für G in X ist. Obwohl aber G eigentlich auf X operiert, ist F keine Fundamentalmenge für G in X.

Die beiden oben gestellten Fragen sind also nicht äquivalent. Wir werden uns nur mit der zweiten beschäftigen: Wann ist F eine Fundamentalmenge für G in X?

Zu einem Fundamentalsystem $\mathfrak{E}=(F,Q,E)$ für die stetige Transformationsgruppe $\tau\colon G\times X\to X$ definieren wir die *zugehörige Abbildung* ε von Q in die Potenzmenge von G durch $\varepsilon(x)=E(x,F)=\{g\in E\colon x\in gF\}$. Dann ist $\varepsilon(x)$ nach FS2 kompakt. Die Menge der kompakten Teilmengen von G bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(G)$. Für $g\in\varepsilon(x)$ ist das folgende Diagramm nach FS3 kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & \mathfrak{K}(G)\\ {\scriptstyle\tau(g^{-1})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_g{}^{-1}}\\ F\ni g^{-1}x & \longrightarrow & \mathfrak{K}(G).\end{array}$$

Die Idee der folgenden Konstruktion ist: Wir wollen die Abbildung ε so auf $\tau(G\times F)$ fortsetzen, daß dieses Diagramm für jeden Punkt x und für jedes Element $g\in\varepsilon(x)$ kommutativ ist. Die Abbildung ε bleibt dabei im allgemeinen nicht eindeutig. Wir werden also einen Raum X' „über" dem gegebenen Raum X konstruieren.

Y sei ein Raum (im Sinne unserer Bezeichnungen). $\mathfrak{K}(Y)$ sei die Menge der kompakten Teilmengen von Y. Das System $\{\mathfrak{K}(U)\subset\mathfrak{K}(Y)\colon U$ offene Teilmenge von $Y\}$ ist Basis einer Topologie auf $\mathfrak{K}(Y)$. Eine Teilmenge $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{K}(Y)$ ist dann und nur dann Umgebung eines Elements K in $\mathfrak{K}(Y)$, wenn es eine Umgebung U von K in Y mit $\mathfrak{M}\supset\mathfrak{K}(U)$ gibt. Insbesondere enthält jede Umgebung von K in $\mathfrak{K}(Y)$ alle kompakten Teilmengen von K als Elemente. $\mathfrak{K}(Y)$ erfüllt also nicht einmal das Trennungsaxiom T_1. Zwei Elemente K_1 und K_2 aus $\mathfrak{K}(Y)$ besitzen genau dann punktfremde Umgebungen in $\mathfrak{K}(Y)$, wenn $K_1\cap K_2=\emptyset$ ist.

Proposition 1. *Die zu einem Fundamentalsystem gehörende Abbildung* ε: $Q \to \mathfrak{K}(G)$ *ist stetig.*

Beweis. Wir müssen zeigen: Wenn $x \in Q$ ist, und W eine Umgebung von $\varepsilon(x)$ in G ist, dann gibt es eine Umgebung V von x, für die

$$\varepsilon(V) = \bigcup_{y \in V} \varepsilon(y)$$

in W enthalten ist. Für den Rest dieses Beweises können wir $\mathfrak{K}(G)$ vergessen. Sei $K \subset Q$ eine kompakte Umgebung von x. Die Menge $\mathfrak{U}$ der Umgebungen U von x, die in K enthalten sind, bildet einen Filter auf K. Die Menge $\varepsilon(\mathfrak{U}) = \{\varepsilon(U);\ U \in \mathfrak{U}\}$ ist eine Filterbasis auf $\varepsilon(K)$. Da aber $\varepsilon(K)$ nach FS2 kompakt ist, besitzt $\varepsilon(\mathfrak{U})$ einen Häufungspunkt $g \in \varepsilon(K) \subset E$. Sei nun g ein Häufungspunkt von $\varepsilon(\mathfrak{U})$. Dann gilt für jede Umgebung W von g und jedes $U \in \mathfrak{U}$: $W \cap \varepsilon(U) \neq \emptyset$, d.h. $W^{-1} U \cap F \neq \emptyset$. Da G stetig operiert und F abgeschlossen ist, folgt daraus $g \in \varepsilon(x)$; denn sonst gäbe es eine Umgebung W von g und ein $U \in \mathfrak{U}$, so daß $W^{-1} U \cap F = \emptyset$ wäre. Die Menge A der Häufungspunkte von $\varepsilon(\mathfrak{U})$ ist also in $\varepsilon(x)$ enthalten. Dann gehört aber jede Umgebung von A in $\varepsilon(K)$ zu dem von $\varepsilon(\mathfrak{U})$ erzeugten Filter (s. [3], § 9, n° 1, Théorème 1). Folglich gibt es eine Umgebung $V \subset K$ von x, für die $\varepsilon(V) \subset W$ ist.

Wegen Proposition 1 ist die Abbildung s: $Q \to X \times \mathfrak{K}(G)$ mit $s(x) = (x, \varepsilon(x))$ ein Homöomorphismus von Q auf $s(Q)$. Die Umkehrabbildung ist die Projektion von $s(Q) \subset X \times \mathfrak{K}(G)$ auf die erste Komponente. G operiert als stetige Transformationsgruppe τ': $G \times X \times \mathfrak{K}(G) \to X \times \mathfrak{K}(G)$ auf $X \times \mathfrak{K}(G)$ vermöge $\tau'(g, x, K) = (\tau(g, x), L_g K)$. Als *Definitionsraum des Fundamentalsystems* $\mathfrak{E} = (F, Q, E)$ bezeichnen wir die Teilmenge $X' = \tau'(G \times s(Q))$ von $X \times \mathfrak{K}(G)$ versehen mit der Relativtopologie. G operiert stetig auf X'. Die wesentlichen Eigenschaften von X' sind zusammengefaßt in

Proposition 2. *X' ist ein Raum, und $s(F)$ ist eine abgeschlossene Fundamentalmenge für G in X'; G operiert also eigentlich auf X'.*

Beweis. Wir bezeichnen die Projektionen von $X' \subset X \times \mathfrak{K}(G)$ auf die erste bzw. zweite Komponente mit π bzw. α. Dann ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\pi} & X' & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{K}(G) \\ {\scriptstyle \tau(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau'(g)} & & \downarrow{\scriptstyle L_g} \\ X & \xleftarrow{\pi} & X' & \xrightarrow{\alpha} & \mathfrak{K}(G) \end{array} \tag{2.1}$$

für jedes Element $g \in G$ kommutativ. Für Punkte $x' \in s(Q)$ gilt

$$\alpha(x') = \varepsilon \circ \pi(x'). \tag{2.2}$$

Für $x \in Q$ und $g \in \varepsilon(x)$ folgt aus FS3: $\tau'(g^{-1}, s(x)) = s(g^{-1} x) \in s(F)$. Also gilt $X' = \tau'(G \times s(F))$. Für $x \in Q$ folgt ferner

$$\alpha(s(x)) \subset \{g \in G:\ s(x) \in \tau'(g, s(F))\} = G_{\tau'}(x, s(F))$$

in der am Anfang von § 1 eingeführten Bezeichnung. Sei umgekehrt $\tau'(g^{-1}, s(x)) \in s(F)$, etwa gleich $s(y)$. Da das neutrale Element e in $\varepsilon(y) = \alpha(s(y))$ liegt, folgt für Punkte $x' \in s(Q)$ aus der Kommutativität von (2.1) die Gleichung

$$\alpha(x') = G_{\tau'}(x', s(F)). \tag{2.3}$$

Da beide Seiten dieser Gleichung sich in der gleichen Weise transformieren, $\alpha(\tau'(g,x')) = L_g \alpha(x')$ und $G_{\tau'}(\tau'(g,x'), s(F)) = L_g G_{\tau'}(x', s(F))$ nach (1.1), gilt (2.3) für alle Punkte $x' \in X'$. Aus (2.3) folgt, daß ein Punkt $x' \in X'$ genau dann in $s(F)$ liegt, wenn das neutrale Element $e \in \alpha(x')$ ist. Das Komplement von $s(F)$ ist also gleich $\alpha^{-1}\mathfrak{R}(G - \{e\}) \cap X'$. Folglich ist $s(F)$ abgeschlossen in X'.

Jetzt zeigen wir: Wenn für zwei Punkte x'_1 und x'_2 aus X' gilt $\pi(x'_1) = \pi(x'_2)$ und $\alpha(x'_1) \cap \alpha(x'_2) \neq \emptyset$, dann ist $x'_1 = x'_2$. Sei etwa $g \in \alpha(x'_1) \cap \alpha(x'_2)$. Dann liegen die beiden Punkte $y'_i = \tau'(g^{-1}, x'_i)$, $i = 1, 2$ in $s(F)$. Wegen (2.1) gilt $\pi(y'_1) = \pi(y'_2)$. Da aber $\pi | s(Q)$ eineindeutig ist, folgt $x'_1 = x'_2$.

Hieraus folgt, daß X' ein Hausdorff-Raum ist. Wenn $\pi(x'_1) \neq \pi(x'_2)$ ist, besitzen x'_1 und x'_2 punktfremde Umgebungen. Sei also $\pi(x'_1) = \pi(x'_2)$. Die zwei Mengen $\alpha(x'_1)$ und $\alpha(x'_2)$ besitzen genau dann punktfremde Umgebungen in $\mathfrak{R}(G)$, wenn $\alpha(x'_1) \cap \alpha(x'_2) = \emptyset$ ist, d. h. wenn $x'_1 \neq x'_2$ ist.

Weiter folgt

$$s(Q) = X' \cap Q \times \mathfrak{R}(E). \tag{2.4}$$

Die linke Seite ist offenbar in der rechten enthalten. Sei umgekehrt

$$x' \in X' \cap Q \times \mathfrak{R}(E) \quad \text{und} \quad g \in \alpha(x') \subset E.$$

Aus (2.1) und (2.2) folgt $g^{-1}\pi(x') \in F$, also $g \in \varepsilon(\pi(x'))$. Nach dem vorletzten Abschnitt ist dann $x' = (\pi(x'), \varepsilon \circ \pi(x')) \in s(Q)$. Aus (2.4) folgt, daß $s(Q)$ offen in X' ist. Wegen der Kommutativität des Diagramms (2.1) ist dann $\pi: X' \to X$ ein lokaler Homöomorphismus. X' ist also lokal kompakt.

Es bleibt zu zeigen, daß $G_{\tau'}(K, s(F))$ für jede kompakte Teilmenge K von X' relativ kompakt ist. Es genügt, zu jedem Punkt $x' \in X'$ eine Umgebung U' so zu finden, daß $G_{\tau'}(U', s(F))$ relativ kompakt ist. Sei $g \in \alpha(x')$. Dann wählen wir eine kompakte Umgebung U' von x' so, daß $V' = \tau'(g^{-1}, U') \subset s(Q)$ ist. Dann ist

$$G_{\tau'}(U', s(F)) = L_g G_{\tau'}(V', s(F)) = L_g \alpha(V') = L_g \varepsilon(\pi(V'))$$

nach FS2 kompakt.

Es interessiert uns aber nicht, wie G auf X' operiert, sondern wie G auf X operiert. Hierüber gilt

Satz 3. *$\mathfrak{E} = (F, Q, E)$ sei ein Fundamentalsystem für die stetige Transformationsgruppe G auf dem Raum X, (X', π, α) sei der Definitionsraum für $\mathfrak{E}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *F ist eine Fundamentalmenge für G in X.*

b) *$\pi: X' \to X$ ist surjektiv und eigentlich.*

c) *Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung U, so daß $\pi^{-1}(U)$ nicht leer ist und sich so als topologische Summe von endlich vielen Teilmengen U_i darstellen läßt, daß $\pi: U_i \to U$ für jedes i ein Homöomorphismus ist.*

Beweis. Wir beweisen zuerst die Äquivalenz von a) und b). F' sei eine Fundamentalmenge für G auf X', die unter π zu F homöomorph ist. Dann betrachten wir das kommutative Diagramm;

$$\begin{array}{ccc} G \times F' & \xrightarrow{\tau'} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ G \times F & \xrightarrow{\tau} & X. \end{array}$$

Dabei sei $\varphi: G \times F' \to G \times F$ der Homöomorphismus $\varphi(g, x') = (g, \pi(x'))$. F' ist eine abgeschlossene Fundamentalmenge; also ist $\tau': G \times F' \to X'$ surjektiv und eigentlich. Wenn nun π surjektiv und eigentlich ist, dann haben auch $\pi \circ \tau' = \tau \circ \varphi$ und $\tau: G \times F \to X$ diese Eigenschaft. F ist dann also eine Fundamentalmenge für G in X. Wenn umgekehrt $\tau: G \times F \to X$ surjektiv und eigentlich ist, so hat auch $\tau \circ \varphi = \pi \circ \tau'$ diese Eigenschaft und folglich auch π [15].

Aus c) folgt b) leicht. Sei umgekehrt $\pi: X' \to X$ surjektiv und eigentlich. Wenn x ein Punkt aus X ist, besteht $\pi^{-1}(x)$ aus $n \geqq 1$ Punkten $y_1, \ldots, y_n$. Da π ein lokaler Homöomorphismus ist, gibt es zu jedem Punkt y_i eine offene Umgebung W_i, so daß $\pi: W_i \to \pi(W_i)$ ein Homöomorphismus ist. Da X' ein Hausdorff-Raum ist, darf man annehmen, daß die Mengen W_i paarweise punktfremd sind. Sei nun K eine kompakte Umgebung von x. Da π eigentlich ist, ist $L = \pi^{-1}(K)$ kompakt. Die Menge $\mathfrak{U}$ der Umgebungen $U \subset K$ von x bildet einen Filter. Die Menge $\pi^{-1}(U) = \{\pi^{-1}(U): U \in \mathfrak{U}\}$ bildet eine Filterbasis auf dem kompakten Raum L. Die Menge der Häufungspunkte von $\pi^{-1}(\mathfrak{U})$ ist offenbar gleich $\pi^{-1}(x)$. Dann ist der von $\pi^{-1}(\mathfrak{U})$ erzeugte Filter auf L feiner als der Umgebungsfilter von $\pi^{-1}(x)$ (s. [3], § 9, n° 1, Théorème 1). Es gibt also eine Umgebung $U \subset K$ von x, für die $\pi^{-1}(U) \subset \bigcup W_i$ ist. U erfüllt offenbar c) mit $U_i = \pi^{-1}(U) \cap W_i$.

Wir erwähnen noch: Sei G eine eigentliche Transformationsgruppe auf dem zusammenhängenden Raum X und F eine Fundamentalmenge für G in X. Nach § 1, Proposition 9, ist dann $(F, Q, E = G(Q, F))$ ein Fundamentalsystem für G in X. Sei X' der zugehörige Definitionsraum, $x' \in X'$ und $g \in \alpha(x')$. Dann gilt

$$\alpha(x') = L_g\, \alpha(\tau'(g^{-1}, x')) = L_g\, \varepsilon(g^{-1}\pi(x')) = L_g\, G_\tau(g^{-1}\pi(x'), F) = G_\tau(\pi(x'), F).$$

Daher ist $\pi: X' \to X$ ein Homöomorphismus. Vermöge der Identifizierung $\pi: X' \to X$ gilt $\alpha(x) = G_\tau(x, F)$. Allgemein folgt aus der Kommutativität von (2.1) und aus (2.3)

$$G_\tau(x, F) = \bigcup_{\pi(x') = x} \alpha(x'). \tag{2.5}$$

[15] Siehe [3], § 10, n° 1, Proposition 5b).

Da $s(F)$ eine Fundamentalmenge für G in X' ist, ist $\alpha(x')=G_{\tau'}(x', s(F))$ für keinen Punkt $x'\in X'$ leer. Folglich gilt $GF=GQ=\pi(X')$.

§ 3

Auch in diesem Paragraphen sollen alle auftretenden topologischen Räume und topologischen Gruppen lokal kompakt sein. Wir nennen sie wieder „Räume" bzw. „Gruppen".

Definition 1. *X sei ein lokal zusammenhängender und zusammenhängender Raum, X' sei ein zusammenhängender Raum und $p\colon X'\to X$ sei eine stetige Abbildung von X' in X. Dann heißt das Paar (X', p) ein Überlagerungsraum von X,* wenn es zu jedem Punkt $x\in X$ eine zusammenhängende Umgebung U gibt, so daß p eingeschränkt auf jede Zusammenhangskomponente U' von $p^{-1}(U)$ ein Homöomorphismus von U' auf U ist. *Ein Überlagerungsraum heißt trivial,* wenn p ein Homöomorphismus ist. Ein Raum heißt *einfach zusammenhängend,* wenn er zusammenhängend und lokal zusammenhängend ist und jeder Überlagerungsraum trivial ist.

Wenn (X', p) ein Überlagerungsraum des Raumes X ist, dann ist p surjektiv. Ferner ist X' lokal zusammenhängend. Bezeichnen wir für eine natürliche Zahl n mit X_n die Menge der Punkte $x\in X$, für die $p^{-1}(x)$ aus genau n Punkten besteht! Dann sind die Mengen X_n offen, abgeschlossen und disjunkt, also entweder leer oder gleich X. Wenn $X=X_n$ ist, so heißt (X', p) ein n-blättriger Überlagerungsraum. Wenn X_n für alle natürlichen Zahlen leer ist, so heißt (X', p) unendlichblättrig, andernfalls endlichblättrig.

Aus § 2, Satz 3, folgt

Korollar 1. *Die Voraussetzungen von § 2, Satz 3, seien erfüllt. X sei lokal zusammenhängend und X' sei zusammenhängend. Dann ist F genau dann eine Fundamentalmenge für G in X, wenn (X', π) ein endlichblättriger Überlagerungsraum von X ist.*

Für einfach zusammenhängende Räume X besteht also nun die Aufgabe darin, Bedingungen anzugeben, unter denen (X', π) ein Überlagerungsraum ist.

Proposition 2. *$\mathfrak{E}=(F,Q,E)$ sei ein Fundamentalsystem für die stetige Transformationsgruppe G auf dem Raum X, (X', π, α) sei der Definitionsraum für $\mathfrak{E}$. Ferner gelte:*

1. *X ist lokal zusammenhängend und zusammenhängend.*

3. *Q ist zusammenhängend.*

3. *Es gibt eine G-invariante uniforme Struktur $\mathfrak{U}$, die die Topologie von X induziert.*

4. *Es gibt ein $W\in\mathfrak{U}$, so daß $W(F)\subset Q$ gilt.*

Dann ist (X', π) ein Überlagerungsraum von X.

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen und setzen $s(Q)=Q'$. Wir zeigen zuerst, daß X' zusammenhängend ist. Bezeichnen wir für eine natürliche Zahl n mit G_n diejenige Teilmenge von G, die aus Pro-

dukten von höchstens n Elementen aus E oder E^{-1} besteht, wo $E^{-1}=\{g\in G: g^{-1}\in E\}$ bedeutet. Setzen wir noch $G_0=\{e\}$, e das neutrale Element der Gruppe G. Da E die Gruppe G erzeugt (FS 4), genügt es zu zeigen, daß G_nQ' für $n\geqq 0$ zusammenhängend ist. Für $n=0$ ist das nach Voraussetzung richtig. Sei nun G_nQ' zusammenhängend. Wenn $g\in G_{n+1}$ ist, läßt g sich als $g=g'\cdot g_1$ schreiben mit $g'\in G_n$ und $g_1\in E$ oder E^{-1}. Nach FS1 gilt dann $g_1Q\cap Q\neq\emptyset$ und folglich $\emptyset\neq gQ'\cap g'Q'\subset gQ'\cap G_nQ'$. Also ist $G_{n+1}Q'$ zusammenhängend. Folglich ist X' zusammenhängend.

Als nächstes zeigen wir, daß $GF=X$ ist. Aus $GF\supset Q$ folgt $GF=GQ$; da Q offen ist, ist auch $GF=GQ$ offen in X. Sei nun W ein G-invariantes symmetrisches Element aus der uniformen Struktur $\mathfrak{U}$, so daß $W^2(F)\subset Q$ ist. Sei x ein Häufungspunkt von GF. Dann gibt es ein Element $g\in G$, so daß $gF\cap W(x)$ nicht leer ist. Da W G-invariant ist, folgt $W(g^{-1}x)\cap F\neq\emptyset$. Da W symmetrisch ist, gilt $g^{-1}x\in W(F)\subset Q$. Also ist $x\in GQ=GF$. GF ist also offen, abgeschlossen und nicht leer, da X zusammenhängend ist, also gleich X.

Nun können wir beweisen, daß (X', π) ein Überlagerungsraum von X ist. Da $\pi: Q'\to Q$ ein Homöomorphismus der offenen Teilmenge Q' von X' auf Q ist, ist X' offenbar lokal zusammenhängend. Mit $s: Q\to Q'$ bezeichnen wir die Umkehrabbildung von $\pi: Q'\to Q$. Wenn x ein Punkt aus X ist, sei U eine zusammenhängende Umgebung von x, die in $W(x)$ enthalten ist. Sei $y\in U$, $y'\in\pi^{-1}(y)$ und $g\in\alpha(y')$. Dann ist $U'(y,g)=\tau'(g)\circ s\circ g^{-1}U$ eine zusammenhängende Teilmenge von X' und $\pi: U'(y,g)\to U$ ist ein Homöomorphismus; $U'(y,g)$ ist also eine zusammenhängende Umgebung eines Punktes aus $\pi^{-1}(x)$. Da $\pi^{-1}(U)$ gleich der Vereinigung dieser Mengen $U'(y,g)$ mit $y\in U$, $g\in\alpha\,\pi^{-1}(y)$ ist, genügt es zu zeigen, daß diese Mengen in $\pi^{-1}(U)$ abgeschlossen sind. Wenn $z'\in\pi^{-1}(U)$ ein Häufungspunkt von $U'(y,g)$ ist, dann gibt es einen Punkt $z''\in U'(g,y)$, so daß $\pi(z')=\pi(z'')$ ist. Wenn die beiden Punkte z' und z'' verschieden sind, dann gibt es punktfremde Umgebungen $V''\subset U'(y,g)$ und V' von $z''\in U'(y,g)$ bzw. z', so daß $\pi(V')=\pi(V'')$ etwa gleich $V\subset U$ ist und $\pi: V'\to V$ und $\pi: V''\to V$ Homöomorphismen sind. Für jeden Punkt v' aus $V'\cap U'(y,g)$ gilt dann $\pi(v')\in V$, also $v'\in[\pi\,|\,U'(y,g)]^{-1}V=V''$. Die beiden Mengen V' und V'' wären also nicht punktfremd.

Wenn F kompakt ist, ist die Voraussetzung 4 immer erfüllt (s. § 1, Korollar 6, erster Teil des Beweises). Wir erhalten also:

Korollar 3. *$\mathfrak{E}=(F,Q,E)$ sei ein Fundamentalsystem für die stetige Transformationsgruppe G auf dem Raum X, (X', π, α) sei der Definitionsraum für $\mathfrak{E}$. Ferner gelte:*

1. *X ist lokal zusammenhängend und zusammenhängend.*
2. *Q ist zusammenhängend.*
3. *Es gibt eine G-invariante uniforme Struktur $\mathfrak{U}$, die die Topologie von X induziert.*
4. *F ist kompakt.*

Dann ist (X', π) ein Überlagerungsraum von X.

Auf die Voraussetzung 3 kann man nicht verzichten, wie Beispiel 1 am Ende dieses Paragraphen zeigt.

Definition 2. Ein Raum X heißt *einfach zusammenhängend im Unendlichen*, wenn er lokal zusammenhängend und zusammenhängend ist und eine kompakte Teilmenge K mit folgender Eigenschaft besitzt: Wenn es zu einem Überlagerungsraum (X', p) des Raumes X eine Teilmenge L von X' gibt, so daß $p|L$ ein Homöomorphismus von L auf K ist, dann ist der Überlagerungsraum trivial.

Zur Illustration dieses Begriffes beweisen wir:

Proposition 4. *X sei ein lokal zusammenhängender und zusammenhängender (lokal kompakter) Raum, der einen einfach zusammenhängenden Überlagerungsraum besitzt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *Die Fundamentalgruppe von X ist endlich erzeugbar.*

b) *Es gibt eine nicht leere kompakte Teilmenge K von X, so daß für jeden Überlagerungsraum (X', p) von X die Menge $p^{-1}(K)$ zusammenhängend ist.*

c) *X ist einfach zusammenhängend im Unendlichen.*

Wir beweisen a)$\leftrightarrow$b) und b)$\leftrightarrow$c). Zunächst eine einfache, aber nützliche Bemerkung: Wenn X ein lokal zusammenhängender Raum ist und K eine kompakte Teilmenge von X ist, dann gibt es eine relativ kompakte offene zusammenhängende Umgebung von K. Für den Beweis nennen wir zwei Punkte x und y aus X verbindbar, wenn es eine relativ kompakte offene zusammenhängende Teilmenge Z von X gibt, die x und y enthält. Z heißt dann eine Verbindungsmenge von x und y. Aus den Voraussetzungen folgt, daß die Menge der Punkte, die mit einem beliebigen Punkt $x\in X$ verbindbar sind, gleich X ist. Sei x ein Punkt aus K. Zu jedem Punkt $y\in K$ wählen wir eine Verbindungsmenge Z_y von x und y. Endlich viele der offenen Mengen Z_y überdecken K. Ihre Vereinigung erfüllt die Behauptung.

a)$\rightarrow$b) (Y, π) sei der einfach zusammenhängende Überlagerungsraum von X, y ein Punkt aus Y und S eine endliche Menge von Erzeugenden der Fundamentalgruppe von X, d.h. der Gruppe der Decktransformationen von Y über X. Dann gibt es nach der Bemerkung eine kompakte zusammenhängende Teilmenge L von Y, die y und Sy enthält. Sei $K=\pi(L)$. Wir beweisen, daß $\pi^{-1}(K)$ zusammenhängend ist. Sei $x_1\in K$ und $\pi(y_1)=x_1$. Dann gibt es eine Decktransformation g, so daß y_1 in gL liegt. Sei etwa $g=h_1^{\varepsilon_1}h_2^{\varepsilon_2}\dots h_n^{\varepsilon_n}$ mit $h_i\in S$ und $\varepsilon_i=\pm 1$. Setzen wir $g_i=h_1^{\varepsilon_1}\dots h_i^{\varepsilon_i}$ für $1\leqq i\leqq n$ und g_0 gleich der identischen Abbildung von Y. Da für alle Abbildungen $h\in S$ gilt: $hL\cap L\neq\emptyset$ folgt durch vollständige Induktion, daß

$$\bigcup_{i=0}^{m} g_i L$$

für $0\leqq m\leqq n$ zusammenhängend ist. Also ist

$$\bigcup_{i=0}^{n} g_i L$$

eine zusammenhängende Teilmenge von $\pi^{-1}(K)$, die y und y_1 enthält. Folglich ist $\pi^{-1}(K)$ zusammenhängend.

Wenn nun (X', p) ein Überlagerungsraum von X ist, dann gibt es eine stetige Abbildung f: $Y \to X'$, so daß $p \circ f = \pi$ ist. Man sieht leicht, daß f surjektiv und (Y, f) sogar ein Überlagerungsraum von X' ist. Dann ist $p^{-1}(K) = f(\pi^{-1}(K))$ zusammenhängend, q.e.d.

b) $\to$ a) Wenn (Y, π) der einfach zusammenhängende Überlagerungsraum von X ist, dann versehen wir die Fundamentalgruppe G mit der diskreten Topologie. Sie operiert dann eigentlich auf Y. Sei $K \subset X$, so daß $\pi^{-1}(K)$ zusammenhängend ist, dann operiert G auch eigentlich auf dem zusammenhängenden Raum $\pi^{-1}(K)$. Da $\pi^{-1}(K)/G = K$ kompakt ist, folgt a) aus § 1, Korollar 6 und § 1, Proposition 8.

b) $\to$ c) Sei K wie in b) angegeben. Dann ist K zusammenhängend. Sei nun (X', p) ein Überlagerungsraum von X und L eine Teilmenge von X', so daß p: $L \to K$ ein Homöomorphismus ist. Die Umkehrabbildung von p: $L \to K$ bezeichnen wir mit q: $K \to L$. L ist kompakt, also abgeschlossen in $p^{-1}(K)$. Wir zeigen: L ist auch offen in der Relativtopologie von $p^{-1}(K)$. Dazu muß man beweisen: Zu jedem Punkt x' aus L gibt es eine offene Teilmenge V' von X', so daß $p^{-1}(K) \cap V' \subset L$ gilt. Sei U' eine Umgebung von $x' \in L$, so daß $p \mid U'$ eineindeutig ist. Da q stetig ist, gibt es eine offene Umgebung V von $p(x')$, so daß $q(V \cap K) \subset L \cap U'$ ist. $V' = (p \mid U')^{-1} V$ ist eine offene Umgebung von x'. Wenn $z' \in V' \cap p^{-1}(K) \subset U'$ ist, liegt $y' = q \circ p(z')$ in $L \cap U'$ und es gilt $p(y') = p(z')$. Da aber beide Punkte y' und z' in U' liegen, folgt $y' = z'$. Wir haben damit bewiesen: $V' \cap p^{-1}(K) \subset L \cap U'$. Daher ist L offen und abgeschlossen in der nach Voraussetzung zusammenhängenden Menge $p^{-1}(K)$, also gilt $L = p^{-1}(K)$. (X', p) ist folglich eine einblättrige Überlagerung, also trivial.

c) $\to$ b) K sei eine kompakte Teilmenge von X, die die in Definition 2 formulierte Eigenschaft hat. Dann gibt es nach der Bemerkung eine offene, zusammenhängende, relativ kompakte Umgebung Z von K. (Y, π) sei der einfach zusammenhängende Überlagerungsraum von X. Um b) zu beweisen, genügt es wieder zu zeigen, daß $\pi^{-1}(\bar{Z})$ zusammenhängend ist. Sei L_0 eine Zusammenhangskomponente von $\pi^{-1}(Z)$. Dann ist L_0 zusammen mit $\pi: L_0 \to Z$ ein Überlagerungsraum von Z. G_0 sei die Gruppe derjenigen Decktransformationen g von (Y, π) über X, für die $gL_0 = L_0$ ist. G_0 versehen mit der diskreten Topologie operiert eigentlich auf Y. Mit ν bezeichnen wir die natürliche Abbildung von Y auf den Quotientenraum Y/G_0. Y/G_0 zusammen mit der Abbildung p: $Y/G_0 \to X$, für die $p \circ \nu = \pi$ ist, bildet einen Überlagerungsraum von X. Offenbar ist $p \mid \nu(L_0)$ ein Homöomorphismus von $\nu(L_0)$ auf Z. Es gibt also eine Teilmenge von Y/G_0, die unter p zu K homöomorph ist. Nach Voraussetzung ist dann p ein Homöomorphismus von Y/G_0 auf X. Dann folgt $G = G_0$ und weiter $L_0 = \pi^{-1}(Z)$. Dann folgt aber unmittelbar aus der Definition eines Überlagerungsraumes, daß $\pi^{-1}(\bar{Z})$ zusammenhängend ist, q.e.d.

Satz 5. *Jede zusammenhängende Liesche Gruppe ist im Unendlichen einfach zusammenhängend.*

Beweis. Jede zusammenhängende Liesche Gruppe G besitzt eine maximale kompakte Untergruppe K, die zusammenhängend ist, und G läßt sich als topologisches Produkt $K \times Z$ darstellen, wo Z ein euklidischer Raum R^n ist[16]. Dann ist die Fundamentalgruppe von G isomorph zum direkten Produkt der Fundamentalgruppen von K und Z[17]. Der Satz folgt dann aus Proposition 4.

Sei nun G eine Gruppe, X ein Raum. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}(G,X)$ die Menge aller Operationen $\tau\colon G \times X \to X$ von G auf X, d.h. aller stetigen Abbildungen $\tau\colon G \times X \to X$, so daß für je zwei Elemente g_1 und g_2 aus G und jeden Punkt $x \in X$ gilt: $\tau(g_1, \tau(g_2, x)) = \tau(g_1 \cdot g_2, x)$, und für das neutrale Element e der Gruppe G gilt: $\tau(e,x) = x$. Wenn $g \in G$ ist, bezeichnen wir wieder mit $\tau(g)$ den Homöomorphismus von X, der x in $\tau(g,x)$ abbildet. Betrachten wir die Anwendungsabbildung $\beta\colon \mathfrak{T}(G,X) \times G \times X \to X$ mit $\beta(\tau,g,x) = \tau(g,x)$. Auf $\mathfrak{T}(G,X)$ führen wir die gröbste Topologie ein, für die β stetig ist. Diese Topologie wird von den Mengen der Form $W(K,U) = \{\tau\colon \tau(K) \subset U\}$ erzeugt, wo K eine kompakte Teilmenge von $G \times X$ und U eine offene Teilmenge von X ist[18].

Bemerkung. Wenn M eine beliebige Teilmenge von G ist, und $U(K)$ eine offene (kompakte) Teilmenge von X ist, dann ist die Menge der Operationen $\tau \in \mathfrak{T}(G,X)$, für die $\tau(M)\,U \supset K$ gilt, offen in $\mathfrak{T}(G,X)$.

Beweis. Wenn für $\tau_0 \in \mathfrak{T}(G,X)$ gilt $\tau_0(M)\,U \supset K$, dann gibt es zu jedem Punkt $x \in K$ ein Element $g \in M$, so daß x in $\tau_0(g)\,U$ liegt. Wenn $V \subset \tau_0(g)\,U$ eine relativ kompakte Umgebung von x ist, dann ist die Menge W der $\tau \in \mathfrak{T}(G,X)$ für die $\tau(g)\,U \supset \overline{V}$, oder anders geschrieben $\tau(g^{-1})\,\overline{V} \subset U$ gilt, eine offene Umgebung von τ_0 in $\mathfrak{T}(G,X)$. Endlich viele der Umgebungen V überdecken K. Der Durchschnitt W^* der entsprechenden W ist eine Umgebung von τ_0 und für $\tau \in W^*$ gilt: $\tau(M)\,U \supset K$.

Mit $\mathfrak{T}_0(G,X)$ bezeichnen wir den Teilraum der $\tau \in \mathfrak{T}(G,X)$, für die erstens τ eine eigentliche Operation ist, d.h. für die die Abbildung $\theta\colon G \times X \to X \times X$ mit $\theta(g,x) = (\tau(g,x),x)$ eigentlich ist, und zweitens der Quotientenraum X/G kompakt ist. In Analogie zum Ergebnis von Weil [14] erwartet man vielleicht, daß $\mathfrak{T}_0(G,X)$ offen in $\mathfrak{T}(G,X)$ ist. Daß das nicht der Fall ist, zeigt Beispiel 1 (s. unten, am Ende des Paragraphen). Es scheint, daß man nur die Transformationen betrachten darf, die eine uniforme Struktur auf X invariant lassen. Genauer gesagt: Sei $\mathfrak{U}$ eine uniforme Struktur auf X, die die Topologie von X induziert. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}^{\mathfrak{U}}(G,X)$ den Teilraum von $\mathfrak{T}(G,X)$ derjenigen Operationen, die die uniforme Struktur $\mathfrak{U}$ invariant lassen (s. § 1, Definition 2). Eine Operation $\tau \in \mathfrak{T}(G,X)$ liegt genau dann in $\mathfrak{T}^{\mathfrak{U}}(G,X)$, wenn es zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein $V \in \mathfrak{U}$ gibt, so daß $\tau(g)\,V \subset U$ für alle $g \in G$ gilt. Schließlich sei $\mathfrak{T}_0^{\mathfrak{U}}(G,X) = \mathfrak{T}_0(G,X) \cap \mathfrak{T}^{\mathfrak{U}}(G,X)$. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

[16] Siehe [11], Theorem 6, p. 530.

[17] Siehe [9], Chapter II, § VIII, Proposition 4.

[18] Siehe [7], § 3, n° 4, Corollaire 1.

Satz 6. *G sei eine Gruppe, X ein Raum versehen mit einer uniformen Struktur $\mathfrak{U}$, die die Topologie von X induziert. X sei im Unendlichen einfach zusammenhängend. Dann ist $\mathfrak{T}_0^{\mathfrak{U}}(G,X)$ offen in $\mathfrak{T}^{\mathfrak{U}}(G,X)$.*

Beweis. Sei $\tau_0 \in \mathfrak{T}_0^{\mathfrak{U}}(G,X)$. Die Idee des Beweises ist, zunächst eine geeignete Fundamentalmenge F und eine geeignete Umgebung Q von F zu finden, dann τ so nahe bei τ_0 zu wählen, daß wir auf natürliche Weise ein Fundamentalsystem erhalten, das dem Fundamentalsystem von § 1, Proposition 9, „benachbart" ist. Aus Korollar 3 und aus dem einfachen Zusammenhang im Unendlichen wird der Satz dann folgen.

Zu τ_0 gibt es nach § 1, Korollar 6, eine kompakte Fundamentalmenge F_1 für G in X bezüglich der Operation τ_0 von G auf X. Aus der Definition einer Fundamentalmenge folgt, daß jede kompakte Teilmenge von X, die F_1 enthält, selbst eine Fundamentalmenge ist. Da X im Unendlichen einfach zusammenhängend ist, dürfen wir annehmen, daß jeder Überlagerungsraum (X', p), der eine unter p zu F_1 homöomorphe Teilmenge enthält, trivial ist. Nach der Bemerkung beim Beweis von Proposition 4 dürfen wir annehmen, daß F_1 zusammenhängend ist. Dann gibt es eine relativ kompakte zusammenhängende Umgebung Q_1 von F_1. Die Teilmenge

$$A = G_{\tau_0}(Q_1, F_1) = \{g \in G\colon Q_1 \cap \tau_0(g) F_1 \neq \emptyset\}$$

von G ist eine relativ kompakte offene Umgebung des neutralen Elements e der Gruppe G. Nun sei $B = \overline{(A \cup A^{-1})^2} - A$, d.h. B sei die abgeschlossene Hülle der Menge der Elemente aus G, die sich in der Form $g_1^{\varepsilon_1} \cdot g_2^{\varepsilon_2}$ mit $g_i \in A$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ darstellen lassen, aber nicht in A liegen (abgeschlossene Hülle der „zweiten Generation" von A). B ist kompakt und $B \cup A$ ist eine kompakte Umgebung von $\bar{A}$. Wir zeigen nun, daß es eine kompakte Teilmenge F von X und eine offene zusammenhängende Teilmenge Q von X gibt, so daß folgende Beziehungen gelten:

$$F_1 \subset \mathring{F} \subset F \subset Q \subset \bar{Q} \subset Q_1, \tag{3.1}$$

$$\tau_0(B) F \cap \bar{Q} = \emptyset. \tag{3.2}_0$$

Nehmen wir eine zusammenhängende Umgebung Q von F_1, so daß $\bar{Q} \subset Q_1$ ist. Nun liegt $\tau_0(B \times F_1)$ im Komplement von Q_1, also auch im Komplement von $\bar{Q}$. Die Teilmengen von $G \times X$ der Form $U \times V$, wo U eine Umgebung von B und V eine kompakte Umgebung von F_1 ist, bilden eine Umgebungsbasis der kompakten Teilmenge $B \times F_1$. Nun folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von τ_0.

Da Q_1 in $\tau_0(A) F_1$ enthalten ist, gilt erst recht:

$$\tau_0(A) \mathring{F} \supset \bar{Q}. \tag{3.3}_0$$

Betrachten wir die Menge der $\tau \in \mathfrak{T}^{\mathfrak{U}}(G,X)$, für die die Formeln

$$\tau(B) F \cap \bar{Q} = \emptyset, \tag{3.2}$$

$$\tau(A) \mathring{F} \supset \bar{Q} \tag{3.3}$$

gelten. Die Topologie, die wir auf $\mathfrak{T}(G,X)$ definiert haben, ist gleich fein mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz bezüglich $\mathfrak{U}$ auf kompakten Teilmengen von $G\times X$ [19]. Wie beim Beweis von § 1, Korollar 6, sieht man, daß es ein (nicht notwendig invariantes) symmetrisches Element $U\in\mathfrak{U}$ gibt, so daß $U(F)\subset Q$ ist. Betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}$ derjenigen $\tau\in\mathfrak{T}^{\mathfrak{U}}(G,X)$, die (3.2) und (3.3) erfüllen, und für die außerdem

$$(\tau(g,x),\tau_0(g,x))\in U \tag{3.4}$$

für alle $g\in\bar{A}$ und alle $x\in F$ gilt. $\mathfrak{M}$ ist eine Umgebung von τ_0. Der Satz ist bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{T}_0^{\mathfrak{U}}(G,X)$ ist. Für den Rest des Beweises betrachten wir eine beliebige aber feste Operation $\tau\in\mathfrak{M}$. Wir lassen daher die Bezeichnung der Operation weg und benutzen die handlichere Schreibweise, die wir auch im § 1 benutzt haben: Wir schreiben also statt $\tau(g,x)=\tau(g)\,x$ einfach $g\,x$ usw. Aus (3.2) folgt: Für $g\in B$ gilt $gF\cap Q=\emptyset$; anders geschrieben:

$$G(Q,F)\cap B=\emptyset. \tag{3.5}$$

Wir beweisen zuerst, daß $\mathfrak{E}=(F,Q,G(Q,F)\cap A)$ ein Fundamentalsystem ist. Wir setzen $E=G(Q,F)\cap A$. Für jedes Element $g\in E$ gilt nach Definition von E: $Q\cap gF\neq\emptyset$; also gilt $E\subset E(Q,F)$. Weil die umgekehrte Inklusion trivial ist, ist FS 1 erfüllt. Für jede nicht leere Teilmenge K von Q ist

$$E(K,F)=\{g\in E\colon gF\cap K\neq\emptyset\}=\{g\in A\colon gF\cap K\neq\emptyset\}$$

nach (3.3) nicht leer. Da G vermöge τ stetig auf X operiert, ist $G(K,F)$ abgeschlossen in G, wenn K kompakt ist; folglich ist

$$G(K,F)\cap(B\cup A)=\big(G(K,F)\cap A\big)\cup\big(G(K,F)\cap B\big)$$

kompakt. Der erste Anteil ist aber $E(K,F)$, der zweite leer. Damit ist FS 2 bewiesen. Wenn x ein Punkt aus Q ist und g und h Elemente von $E(x,F)$ sind, so gilt $g^{-1}x\in F$, $x\in hF$, $g^{-1}x\in g^{-1}hF$ und $g^{-1}h\in E^{-1}E\subset A\cup B$. Wieder folgt aus (3.5), daß $g^{-1}h$ in E liegt. Wir haben damit erhalten: $L_{g-1}E(x,F)\subset E(g^{-1}x,F)$. Sei umgekehrt $g\in E(x,F)$, $f\in E(g^{-1}x,F)$, dann gilt $g\,g^{-1}x\in gfF$ und $gf\in A\cup B$. Wie eben folgt $gf\in E$, also $L_gE(g^{-1}x,F)\subset E(x,F)$. Aus diesen beiden Inklusionen folgt FS 3. Sei schließlich $g\in G_{\tau_0}(F,F)$, etwa $x\in F$ und $\tau_0(g,x)\in F$. Nach (3.4) gilt dann $\tau(g,x)\in U(F)\subset Q$. Also gilt $E\supset G_{\tau_0}(F,F)$. Da aber $G_{\tau_0}(F,F)\supset G_{\tau_0}(F,F_1)$ nach § 1, Proposition 8, die Gruppe G erzeugt, erzeugt erst recht E unsere Gruppe. $\mathfrak{E}$ ist also ein Fundamentalsystem.

Sei nun (X',π,α) der Definitionsraum für $\mathfrak{E}$. Da die Voraussetzungen von Korollar 3 erfüllt sind, ist (X',π) ein Überlagerungsraum von X. Nach Konstruktion des Definitionsraumes enthält er eine Teilmenge F', die unter π zu F homöomorph ist. Daher ist π ein Homöomorphismus, Korollar 1 ist also erfüllt. Damit ist der Satz bewiesen.

[19] Siehe [7].

Wir haben beim Beweis noch etwas mehr erhalten: F ist eine Fundamentalmenge für alle Operationen $\tau \in \mathfrak{M}$. Aus den Formeln (2.3) und (2.5) des § 2 folgt

$$G_\tau(x, F) = E(x, F) \cap A$$

für alle Punkte $x \in Q$ und alle Operationen $\tau \in \mathfrak{M}$. Wenn K und L zwei kompakte Teilmengen von X sind, so darf man annehmen, daß $K \cup L$ in F_1 enthalten ist. Da A relativ kompakt ist, folgt

Zusatz 7. *Unter den Voraussetzungen des Satzes 6 gilt: Wenn K und L zwei kompakte Teilmengen von X sind, dann gibt es zu jeder Operation $\tau_0 \in \mathfrak{T}_0^{\mathfrak{u}}(G, X)$ eine Umgebung $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{T}_0^{\mathfrak{u}}(G, X)$, so daß*

$$\bigcup_{\tau \in \mathfrak{M}} G_\tau(K, L)$$

relativ kompakt ist.

Wenn G und H Gruppen (im Sinne dieser Arbeit) sind, dann betrachten wir die Menge $\mathfrak{R}(G, H)$ der stetigen Homomorphismen von G in H. Wenn man jedem Element $r \in \mathfrak{R}(G, H)$ die Operation $\tau: G \times H \to H$ mit $\tau(g, h) = r(g) \cdot h$ zuordnet, kann man $\mathfrak{R}(G, H)$ als Teilmenge von $\mathfrak{T}(G, H)$ betrachten. Man sieht leicht, daß die dadurch auf $\mathfrak{R}(G, H)$ induzierte Topologie die kompakt-offen Topologie ist, das ist die Topologie, die von den Mengen der Form $W(K, U) = \{r \in \mathfrak{R}(G, H): r(K) \subset U\}$ erzeugt wird, wo K eine kompakte Teilmenge von G und U eine offen Teilmenge von H ist. Ferner ist ein stetiger Homomorphismus $r: G \to H$ genau dann eigentlich, wenn die zugehörige Operation $(g, h) \to r(g) \cdot h$ eigentlich ist. Wenn r eigentlich ist, ist $r(G)$ eine abgeschlossene Untergruppe von H und der Restklassenraum $H/r(G)$ der Mengen $r(G) \cdot h$ ist genau der im § 1 für die zugehörige Operation definierte Quotientenraum. Mit $\mathfrak{R}_0(G, H)$ bezeichnen wir die Menge der eigentlichen Homomorphismen von G in H, für die $H/r(G)$ kompakt ist. Die zu einem Homomorphismus $r: G \to H$ gehörende Operation läßt die linksinvariante uniforme Struktur[20] der Gruppe H invariant. Dann gilt

Satz 8. *G sei eine (lokal kompakte topologische) Gruppe, H eine zusammenhängende (lokal kompakte topologische) Gruppe. Dann ist $\mathfrak{R}_0(G, H)$ offen in $\mathfrak{R}(G, H)$. Zu jedem Homomorphismus $r_0 \in \mathfrak{R}_0(G, H)$ gibt es sogar eine Umgebung $\mathfrak{M}$ und eine kompakte Teilmenge F von H, so daß $r(G)F = H$ für alle Homomorphismen $r \in \mathfrak{M}$ gilt und für jede kompakte Teilmenge K von H die Vereinigung*

$$\bigcup_{r \in \mathfrak{M}} r^{-1}(K)$$

der Urbilder von K unter den Abbildungen $r \in \mathfrak{M}$ eine relativ kompakte Teilmenge von G ist.

Beweis. Setzen wir zunächst voraus, daß H eine zusammenhängende Liegruppe ist. Dann folgt aus Satz 5 und 6, daß $\mathfrak{R}_0(G, H)$ offen in $\mathfrak{R}(G, H$ ist).

[20] Das ist die „structure uniforme gauche" von [5], § 3, n° 1.

Aus dem Beweis von Satz 6 folgt, daß es zu jedem Homomorphismus $r_0 \in \mathfrak{R}_0(G,H)$ eine Umgebung $\mathfrak{M}$ und eine kompakte Teilmenge F von H gibt, so daß F für alle Homomorphismen $r \in \mathfrak{M}$ eine Fundamentalmenge ist, d.h. $r(G)F=H$ ist. Sei nun $V \subset H$ eine relativ kompakte offene Umgebung von e. Dann ist FV eine relativ kompakte Umgebung von F. Nach Zusatz 7 dürfen wir annehmen, daß die Menge

$$W = \bigcup_{r \in \mathfrak{M}} r^{-1}(F V F^{-1}) = \bigcup_{\tau \in \mathfrak{M}} G_\tau(F V, F)$$

relativ kompakt ist. Betrachten wir einen Homomorphismus $r \in \mathfrak{M}$. Da F eine Fundamentalmenge ist, gilt $r(W)F \supset FV$. Durch vollständige Induktion ergibt sich $r(W^n)F \supset F \cdot V^n$ für alle natürlichen Zahlen n. Ferner sieht man, daß

$$\bigcup_{n>0} F V^n$$

offen und abgeschlossen in H, also gleich H ist. Zu jeder kompakten Teilmenge K von H gibt es dann eine natürliche Zahl n, so daß $K \subset F \cdot V^n$. Für jeden Homomorphismus $r \in \mathfrak{M}$ gilt dann erst recht $r(W^n)F \supset K$. Man beachte, daß n unabhängig von r ist. Sei nun $x \in G$ und $r(x) \in K$. Dann gibt es ein $g \in W^n$, so daß $r(x) \in r(g)F$ gilt. Hieraus folgt $r(x \cdot g^{-1}) \in F$ und weiter $x g^{-1} \in W$, also $x \in W^{n+1}$. Es folgt also $r^{-1}(K) \subset W^{n+1}$, wobei n nicht von r abhängt. Hieraus folgt die letzte Behauptung des Satzes für Liegruppen H. Sei nun H eine beliebige zusammenhängende lokal kompakte topologische Gruppe. Dann läßt sich H durch zusammenhängende Liegruppen approximieren[21]. Insbesondere gibt es einen kompakten Normalteiler N von H, so daß $H' = H/N$ eine Liegruppe ist. Sei ν: $H \to H'$ der natürliche Homomorphismus von H auf H'. Der Homomorphismus ν induziert eine Abbildung ν_*: $\mathfrak{R}(G,H) \to \mathfrak{R}(G,H')$ mit $\nu_*(r) = \nu \circ r$. Offenbar ist ν_* stetig. Das ν_*-Urbild von $\mathfrak{R}_0(G,H')$ ist gleich $\mathfrak{R}_0(G,H)$. Nun folgt der Satz aus dem ersten Teil des Beweises.

Korollar 9. *G und H seien Gruppen wie in Satz 8. Wenn G keine kleinen Untergruppen enthält, ist die Menge der eigentlichen Isomorphismen r von G in H, für die $H/r(G)$ kompakt ist, offen in $\mathfrak{R}(G,H)$.*

Beweis. Man sagt, eine Gruppe G enthält keine kleinen Untergruppen, wenn es eine Umgebung V des neutralen Elements i von G gibt, die keine Untergruppe außer der trivialen $\{i\}$ enthält. Es sei r_0 ein eigentlicher Isomorphismus von G in H, für den $H/r_0(G)$ kompakt ist. Dann sei $\mathfrak{M}$ eine Umgebung von r_0, die in $\mathfrak{R}_0(G,H)$ enthalten ist, und für die die Menge

$$L = \bigcup_{r \in \mathfrak{M}} r^{-1}(r_0 V)$$

relativ kompakt ist. Die Menge der Homomorphismen r aus $\mathfrak{M}$, für die $r(\overline{L-V})$ das neutrale Element e der Gruppe H nicht enthält, ist eine Umgebung von r_0. Der Kern dieser Homomorphismen liegt in L, sogar in V, ist also trivial.

[21] Siehe [11, 16, 17].

Beispiel 1. Korollar 3 wird falsch, wenn man nicht voraussetzt, daß es eine G-invariante uniforme Struktur gibt. Es sei $X=R$ die reelle Zahlengerade. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine C^∞-differenzierbare Funktion f_n mit folgenden Eigenschaften:

$$f_n(x)=1 \quad \text{für } -(n+1)\leqq x\leqq n,$$

$$f_n(x)=0 \quad \text{für } x\leqq -(n+2) \text{ und } x\geqq n+2,$$

$$f_n'(x)>-1 \quad \text{für alle } x.$$

G sei die diskrete Gruppe der ganzen Zahlen. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es dann genau eine Operation τ_n von G auf X, für die $\tau_n(1,x)=x+f_n(x)$ ist. Sei $F=[-1,0]$, $Q=(-2,1)$ und $E=\{-1,0,1\}$. Dann ist (F,Q,E) für jede Operation τ_n ein Fundamentalsystem für G auf X. Aber es gilt $GF=GQ\subset [-(n+2),n+2]$. Aus § 2, Formel (2.5), folgt dann, daß (X',π) kein Überlagerungsraum von X ist, π ist nicht einmal surjektiv. Die Folge τ_n konvergiert gegen die Operation τ mit $\tau(n,x)=x+n$. Obwohl τ in $\mathfrak{T}_0(G,X)$ liegt, gehört keine der Operationen τ_n zu $\mathfrak{T}_0(G,X)$. Satz 6 wird also auch falsch, wenn wir auf die Voraussetzung verzichten, daß alle betrachteten Operationen eine uniforme Struktur invariant lassen.

Beispiel 2. Korollar 9 wird falsch, wenn G kleine Untergruppen besitzt. Sei $G=H=T^\infty$ der unendlichdimensionale Torus

$$\prod_{i=1}^{\infty} T_i,$$

wo T_i für jedes i die Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag eins ist. Für jede natürliche Zahl n sei r_n: $T^\infty\to T^\infty$ die Abbildung, die der Folge $(x_i)_{i=1,2,\ldots}\in T^\infty$ die Folge $(y_i)_{i=1,2,\ldots}$ zuordnet, wo

$$y_i=x_i \quad \text{für } i<n$$

und

$$y_i=x_{i+1} \quad \text{für } i\geqq n$$

gilt. Der Kern von r_n ist die Menge der Folgen, deren sämtliche Glieder bis auf höchstens das n-te gleich null sind. Die Folge r_n konvergiert aber gegen die identische Abbildung von T^∞ auf sich.

Literatur

1. ABELS, H.: Geometrische Erzeugung von diskontinuierlichen Gruppen. Schriftenreihe des Math. Inst. der Univ. Münster **33** (1966).
2. BEHR, H.: Über die endliche Definierbarkeit von Gruppen. Crelle's Journal **211**, 116–122 (1962).
3. BOURBAKI, N.: Eléments de mathématiques, 3e éd. Livre III: Topologie générale, Chap. I, Structures topologiques. Paris: Hermann 1961.
4. — Chap. II: Structures uniformes, 3e éd. Paris: Hermann 1961.
5. — Chap. III: Groupes topologiques, 3e éd. Paris: Hermann 1960.

6. — Chap. IX: Utilisation des nombres réels en top. gén. 2e éd. Paris: Hermann 1958.
7. — Chap. X: Espaces fonctionnels, 2e éd. Paris: Hermann 1961.
8. — Livre VI, Intégration, Chap. VII: Mesure de Haar, 1e éd. Paris: Hermann 1963.
9. CHEVALLEY, C.: Theory of Lie groups, vol. I. Princeton Math. Ser. no. 8. Princeton: Univ. Press 1946.
10. GERSTENHABER, M.: On the algebraic structure of discontinuous groups. Proc. AMS **4**, 745—750 (1953).
11. IWASAWA, K.: On some types of topological groups. Ann. of Math. (2) **50**, 507—558 (1949).
12. KOBAYASHI, S.: Geometry of bounded domains. Transactions AMS **92**, 267—290 (1959).
13. POINCARÉ, H.: Théorie des groupes fuchsiens. Oeuvres vol. 2, p. 108—168. Paris: Gauthiers-Villars 1952 (Neudruck).
14. WEIL, A.: On discrete subgroups of Lie groups I. Ann. of Math. **72**, 369—384 (1960).
15. — On discrete subgroups of Lie groups II. Ann. of Math. **75**, 578—602 (1962).
16. YAMABE, H.: On the conjecture of Iwasawa and Gleason. Ann. of Math. **58**, 48—54 (1953).
17. — A generalization of a theorem of Gleason. Ann. of Math. **58**, 351—365 (1953).

H. ABELS
Mathematisches Institut
der Ruhr-Universität
463 Bochum
Friederikastr. 11

Math. Zeitschr. 103, 358–362 (1968)

On Comparison of the Total Strength of some Hausdorff Methods. II

S. K. Basu

Received May 23, 1967

Introduction. The problems of total relative strength (for definition see [2], 51, footnote) of some Hausdorff methods (H-methods) or matrices defining such methods (for properties of Hausdorff matrices, see [5], Chap. XI, or [6]) have already been considered by Rhoades ([7–10]) and the author ([1–4]). The present paper deals with some more problems of similar nature concerning H-methods, a list of which is given below in §1.

1. The Hausdorff transformation of a real sequence $\{s_n\}$ is defined by

$$t_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k\cdot s_k \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{1}$$

where $\{\mu_n\}$ is a moment sequence and

$$\Delta^0\mu_k=\mu_k, \quad \Delta^n\mu_k=\Delta^{n-1}\mu_k-\Delta^{n-1}\mu_{k+1} \qquad (n\geqq 1).$$

If H denotes the matrix transformation (1), we wirte $H\sim\mu_n$.

The following are some of the H-methods with which we shall be concerned here:

(i) $$c^\alpha\sim\frac{1}{\binom{n+\alpha}{n}} \qquad (\alpha>-1),$$

(ii) $$H^\alpha\sim\frac{1}{(n+1)^\alpha} \qquad (\alpha>-1),$$

(iii) $$\Gamma_a^\alpha\sim\left(\frac{a}{n+a}\right)^\alpha \qquad (\alpha, a>0),$$

(iv) $$L_a^l\sim\left\{\frac{\log a}{\log(n+a)}\right\}^l \qquad (a>1, l>0).$$

It is known that for $a>1$ and $l, \alpha>0$, Γ_a^α is stronger than L_a^l, the matrix corresponding to the logarithmic scale (see [6], 94, or [5], 268). We naturally enquire if Γ_a^α is totally stronger than L_a^l. It is to be noted that L_a^l is a totally

regular metrix. For, the moment sequence $\{\mu_n\}$ for L_a^l is given by

$$\mu_n=\int_0^\infty e^{-(n+1)t}\psi(t)\,dt,$$

where

$$\psi(t)=(\log a)^l\cdot\frac{e^{(1-a)t}}{t\Gamma(l)}\int_0^\infty\frac{u^{l-1}t^u}{\Gamma(u)}\,du>0$$

(see [5], 268).

Hence the corresponding moment function $\mu(t)$ is totally monotone (see [11], 160), and accordingly L_a^l is totally regular (see [1], 451).

We note that for $l'>l>0$,

$$\frac{L_a^{l'}}{L_a^l}\sim\left\{\frac{\log a}{\log(n+a)}\right\}^{l'-l}.$$

Hence, for $l'>l>0$, $L_a^{l'}\ t\cdot s\cdot L_a^l$.

The following theorem will now be proved.

Theorem 1. (i) *If* $l\geqq 1$, $\Gamma_a^\alpha\ n\cdot t\cdot s\cdot L_a^l$ *for* $\alpha>0$ *and* $a>1$.

(ii) *If* $0<l<1$, $\Gamma_a^\alpha\ n\cdot t\cdot s\cdot L_a^l$ *for* $\alpha>0$ *and*

(A) $$\frac{l}{\log a}+\frac{l}{(\log a)^2}>\alpha.$$

Proof. We start with the regular matrix $\Gamma_a^\alpha/L_a^1\sim\mu_n$. Then

$$\mu_n=\frac{\log(n+a)}{\log a}\cdot\left(\frac{a}{n+a}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{\log a}\cdot\frac{\log(n+a)}{(n+a)^\alpha}$$

$$=\int_0^\infty e^{-nt}\varphi(t)\,dt,$$

where

$$\varphi(t)=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)\log a}\cdot e^{-at}t^{\alpha-1}\left\{\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}-\log t\right\}.$$

Hence

$$\varphi(t)<0,$$

for

$$\log t>\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Hence Γ_a^α/L_a^1 cannot be totally regular (see [11], 160) and so

$$\Gamma_a^\alpha\ n\cdot t\cdot s\cdot L_a^1.$$

Suppose now, if possible, that for $l>1$,

$$\Gamma_a^\alpha\ t\cdot s\cdot L_a^1.$$

Then, as

$$L_a^l t \cdot s \cdot L_a^1,$$

if follows that

$$\Gamma_a^\alpha t \cdot s \cdot L_a^1,$$

contrary to what has just been proved. Hence for $l \geqq 1$, and $\alpha > 0$, $a > 1$,

$$\Gamma_a^\alpha n \cdot t \cdot s \cdot L_a^l.$$

This proves (i).

The proof of (ii) is similar to that of Theorem 5 ([4], 307) and is, therefore, omitted.

The question whether $\Gamma_a^\alpha n \cdot t \cdot s \cdot L_a^l$ for $\alpha > 0$ and $0 < l < 1$, when (A) does not hold remains open. It is conjectured that the result in (ii) can be extended in this case.

2. The following results are well-known ([1], 450):

Although for $\alpha > -1$, $H^\alpha/c^\alpha \approx c^\alpha/H^\alpha \approx I$ (identity matrix), for $-1 < \alpha < 0$ or, for $\alpha > 1$, H^α/c^α is totally regular, but not c^α/H^α; for $0 < \alpha < 1$, c^α/H^α is totally regular but H^α/c^α is not.

From what has been said above, one may conclude that the behaviour of the matrix H^α/c^α, as regards its total strength, differs along with the order α lying in the different ranges

$$-1 < \alpha < 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \text{and} \quad \alpha > 1.$$

It is, therefore, natural to enquire as to how the total strength of H^α/c^α varies along with the variation of $\alpha > -1$; or, in other words, the following questions may be raised:

Is $H^\alpha/c^\alpha \; t \cdot s \cdot H^\beta/c^\beta$ for $-1 < \beta < \alpha < 0$, or for $1 < \beta < \alpha$, with a similar question concerning c^α/H^α for $0 < \alpha < 1$. The answers to the first two questions will be found in the Theorem that follows. The third question still remains open.

Theorem 2. (i) *For* $-1 < \beta < \alpha < 0$, $H^\beta/c^\beta \; t \cdot s \cdot H^\alpha/c^\alpha$.

(ii) *For* $1 < \beta < \alpha$, $H^\alpha/c^\alpha \; t \cdot s \cdot H^\beta/c^\beta$.

Proof. For the proof of (i) we consider the matrix $(H^\beta/c^\beta)/(H^\alpha/c^\alpha)$.

The moment sequence for this matrix is given by

$$\mu_n = (n+1)^{\alpha-\beta} \cdot \frac{\binom{n+\beta}{n}}{\binom{n+\alpha}{n}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)} \cdot \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \cdot (n+1)^{\alpha-\beta}.$$

For $-1<\beta<\alpha<0$, it is known that the sequence $\{\mu_n\}$ is totally monotone (see [6], 96).

There is, of course, some difference in notations regarding α, β; thus $\alpha-1$ in [6] takes the place of our β and $\beta-1$, the place of α.

Hence for $-1<\beta<\alpha<0$, $H^\beta/c^\beta \; t\cdot s\cdot \; H^\alpha/c^\alpha$.

In order to prove (ii) we have to consider the matrix $(H^\alpha/c^\alpha)/(H^\beta/c^\beta)$, the moment sequence for which is

$$\mu_n=\frac{1}{(n+1)^{\alpha-\beta}}\cdot\frac{\binom{n+\alpha}{n}}{\binom{n+\beta}{n}}$$

$$=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+1)}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\alpha-\beta}}.$$

Then

$$\mu(t)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{\Gamma(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\beta+1)}\cdot\frac{1}{(t+1)^{\alpha-\beta}}=e^{\sigma(t)},$$

say, so that

$$\sigma(t)=\log\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}-(\alpha-\beta)\log(t+1)+\log^{\Gamma}(t+\alpha+1)-\log^{\Gamma}(t+\beta+1).$$

Therefore,

$$\sigma'(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{m+t+\beta+1}-\frac{1}{m+t+\alpha+1}\right\}-\frac{\alpha-\beta}{t+1};$$

and for $n=1, 2, 3, \ldots,$

$$\frac{(-1)^n\sigma^{(n)}(t)}{(n-1)!}=(\alpha-\beta)\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(m+t+1)^n}-\frac{1}{(m+t+2)^n}\right\}$$
$$-\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(m+t+\beta+1)^n}-\frac{1}{(m+t+\alpha+1)^n}\right\}, \tag{2}$$

the term-by-term differentiation being justified by the uniform convergence of the differentiated series.

From the well-known inequality

$$r\,x^{r-1}(x-y)>x^r-y^r>r\,y^{r-1}(x-y),$$

where $x, y>0$, $x\neq y$, $r<0$, putting

$$x=m+t+\beta+1, \quad y=m+t+\alpha+1, \quad r=-n,$$

we have

$$(m+t+\beta+1)^{-n}-(m+t+\alpha+1)^{-n}<-n(m+t+\beta+1)^{-n-1}(\beta-\alpha)$$
$$=n(\alpha-\beta)(m+t+\beta+1)^{-n-1}. \tag{3}$$

Similarly, putting

$$x=m+t+1, \quad y=m+t+2, \quad r=-n,$$

we have

$$(m+t+1)^{-n}-(m+t+2)^{-n}>n(m+t+2)^{-n-1}. \tag{4}$$

Hence with the help of (2), (3), (4), we have

$$\frac{(-1)^n\sigma^{(n)}(t)}{(n-1)!}>n(\alpha-\beta)\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(m+t+2)^{n+1}}-\frac{1}{(m+t+\beta+1)^{n+1}}\right\},$$

for $\alpha>\beta>1$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Accordingly,

$$(-1)^n\sigma^{(n)}(t)>0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

and $\mu(t)$ is, therefore, totally monotone (see [6], 95).

This completes the proof of (ii) (see Lemma 1, [1], 451).

If follows from Theorem 2 that for $-1<\alpha<0$, the total strength of $H^\alpha/c^\alpha\downarrow$ with $\alpha\uparrow$; it is completely lost for $0<\alpha<1$, since H^α/c^α is not totally regular. And for $\alpha>1$, the total strength of $H^\alpha/c^\alpha\uparrow$ with $\alpha\uparrow$.

References

1. Basu, S. K.: On the total relative strength of the Hölder and Cesàro methods. Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 447–462 (1949).
2. — On the total relative strength of the Riesz and Cesàro methods. J. London Math. Soc. **24**, 51–59 (1949).
3. — On hypergeometric summability involving infinite limits. Proc. American Math. Soc. **5**, 226–238 (1954).
4. — On comparison of the total strength of some Hausdorff methods. Math. Z. **67**, 303–309 (1957).
5. Hardy, G. H.: Divergent Series. Oxford Univ. Press 1949.
6. Hausdorff, F.: Summationsmethoden und Momentfolgen I. Math. Z. **9**, 74–109 (1921).
7. Rhoades, B. E.: Total comparison among some totally regular Hausdorff methods. Math. Z. **72**, 463–466 (1960).
8. — Total comparison among some totally regular Hausdorff methods. II. Math. Z. **80**, 1–3 (1962).
9. — Hausdorff summability methods. Trans. American Math. Soc. **101**, 396–425 (1961).
10. — A sufficient condition for total monotonicity. Trans. American Math. Soc. **107**, 309–319 (1963).
11. Widder, D. V.: The Laplace transform. Princeton Univ. Press 1949.

Presidency College, Calcutta 12, India

Math. Zeitschr. 103, 363—388 (1968)

Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module

JACQUES FORT*

Reçu le 12 Juin 1967

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier les sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles d'un module M, et d'utiliser les résultats obtenus, d'une part pour étudier les $\cap$-décompositions irréductibles réduites des sous-modules de M, d'autre part pour étendre à un module quelconque une notion de dimension introduite par GOLDIE, sous des hypothèses de finitude, dans [7].

Au paragraphe I, nous rappelons les notions utilisées: extension essentielle d'un module, module co-irréductible, enveloppe injective d'un module.

Le paragraphe II comporte l'étude des sommes directes maximales de co-irréductibles, et conduit à une décomposition de tout module injectif en somme directe de deux composants, l'un privé de sous-modules co-irréductibles, l'autre «riche» en sous-modules co-irréductibles.

Le paragraphe III est consacré à l'étude des modules privés de sous-modules co-irréductibles; nous établissons en particulier que, dans un tel module, il n'existe pas d'$\cap$-décomposition irréductible réduite de 0.

Le paragraphe IV décrit les modules riches en co-irréductibles; les caractérisations que nous proposons au théorème 3 de [13] (développées au théorème 3 de la présente étude), ont été exprimées, pour une catégorie de GROTHENDIECK, par NASTASESCU et POPESCU dans [19].

Au paragraphe V, la comparaison des diverses sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles conduit à une notion de dimension d'un module injectif et à un théorème d'unicité généralisant (pour les modules injectifs) celui de AZUMAYA (cf. [1]).

Au paragraphe VI, l'utilisation systématique des enveloppes injectives permet d'adapter à un module quelconque, les notions et les résultats du paragraphe précédent.

Enfin, au paragraphe VII, nous proposons des résultats récents obtenus sur ces questions:

— CHAMARD dans [18] donne une caractérisation des modules riches en co-irréductibles au moyen de chaînes de sous-modules compléments.

— CAILLEAU dans [17] décrit l'anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles.

* Cette étude est le développement d'une note présentée à l'Académie des Sciences de Paris le 16 Mai 1966 (cf. [13]), et d'un exposé donné au Séminaire d'Algèbre DUBREIL-PISOT le 28 Novembre 1966 (cf. [14]).

I. Préliminaires

Rappelons l'essentiel des notions et propriétés utilisées dans cette étude.

Un sous-module C d'un A-module (à gauche) M est, par définition, *co-irréductible* si $C \neq 0$ et si deux sous-modules non nuls de C ont une intersection non nulle (i.e. sous-module *uniforme* suivant la terminologie de GOLDIE dans [6] et [7]).

M étant un sous-module du A-module E, on dit que E est une *extension essentielle* de M si, X étant un sous-module de E, la relation $M \cap X = 0$ implique $X = 0$. On dit aussi que M est un *sous-module essentiel* de E, ou que M est essentiel dans E.

Si M est sous-module du module injectif Q, toute extension essentielle E de M est isomorphe relativement à M (chaque élément de M est invariant) à un sous-module de Q contenant M; si M est injectif, il ne possède pas d'extension essentielle propre — pour ces propriétés et les suivantes cf. ECKMANN et SCHOPF [3], ou LESIEUR et CROISOT [8].

M étant un A-module donné, il existe un A-module E contenant M, défini à un isomorphisme près relativement à M, et ayant les propriétés équivalentes suivantes:

a) E est une extension essentielle maximale de M;

b) E est une extension essentielle injective de M;

c) E est une extension injective minimale de M.

Un module E satisfaisant aux propriétés précédentes s'appelle (une) *l'enveloppe injective* de M et se note $E(M)$; on voit aisément que, dans toute extension injective de M, il existe une enveloppe injective de M.

Les relations entre les notions de module co-irréductible et d'enveloppe injective sont précisées par l'énoncé (cf. MATLIS [10]):

Soit M un A-module non nul. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

a) 0 est $\cap$-irréductible dans M (i.e. M est co-irréductible);

b) l'enveloppe injective $E(M)$ est indécomposable (en somme directe);

c) $E(M)$ est l'enveloppe injective de tout sous-module non nul de M (ou de $E(M)$).

Il en résulte que: pour que deux modules co-irréductibles C_1 et C_2 aient leurs enveloppes injectives isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un sous-module non nul de C_1 isomorphe à un sous-module de C_2.

Nous utiliserons les deux propriétés suivantes des sommes directes:

Proposition 1. *Soient* $(X_i)_{i \in I}$ *une famille* indépendante *de sous-modules d'un A-module M*

$$\left(i.e. \sum_{i \in I} X_i \text{ est directe}\right),$$

et pour chaque i, un sous-module Y_i extension essentielle *de* X_i; *dans ces conditions, la somme*

$$\sum_{i \in I} Y_i$$

est directe et est extension essentielle de

$$\bigoplus_{i \in I} X_i .$$

La preuve de cette proposition peut se conduire en l'établissant d'abord pour deux sous-modules X_1 et X_2, puis pour n sous-modules (par induction), et enfin pour I quelconque en considérant que

$$\bigoplus_{i \in I} X_i$$

est la réunion des

$$\bigoplus_{i \in F} X_i$$

lorsque F décrit l'ensemble des parties finies de I (pour plus de détails consulter par exemple BOURBAKI [2]; à l'exercice 15, p. 267).

Proposition 2. *Soient*

$$\bigoplus_{i \in I} X_i$$

une somme directe de sous-modules ($\neq 0$) *de* M, *et* Y *un sous-module de* M; *si*

$$Y \cap \left(\bigoplus_{i \in I} X_i \right)$$

n'est pas nul, il existe alors un sous-module non nul *de l'un des* X_i *isomorphe à un sous-module de* Y.

Preuve. 1) Si $\operatorname{card} I = 2$[1]: Posons $Z = Y \cap (X_1 \oplus X_2) \neq 0$; si $Z \cap X_1 = 0$, alors $((Z \oplus X_1) | X_1) \approx Z$ et $(Z \oplus X_1) | X_1$ est sous-module de $((X_2 \oplus X_1) | X_1) \approx X_2$; Z est bien isomorphe à un sous-module de X_2.

Si $Z \cap X_1 \neq 0$, c'est alors un sous-module non nul commun à Y et à X_1.

2) Si $\operatorname{card} I = n$ ($\geqq 1$): Supposons la proposition 2 établie pour les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$, de $\operatorname{card} I$, et considérons:

$$Z = Y \cap (X_1 \oplus \cdots \oplus X_n) \neq 0;$$

Si $Y \cap (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{n-1}) \neq 0$, il suffit d'appliquer l'hypothèse d'induction au sous-module $Z' = Y \cap (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{n-1})$ de Z.

Si $Z' = Y \cap (X_1 \oplus \cdots \oplus X_{n-1}) = 0$, le cas 1) s'applique alors à $Y \cap [(X_1 \oplus \cdots \oplus X_{n-1}) \oplus X_n]$, et Z est alors isomorphe à un sous-module de X_n.

3) Si $\operatorname{card} I$ est quelconque: Soit

$$x \in Y \cap \left(\bigoplus_{i \in I} X_i \right), \qquad x \neq 0;$$

[1] Cardinal de l'ensemble I.

il existe une partie *finie* F de I telle que x appartienne à

$$Y \cap \left(\bigoplus_{i \in F} X_i \right),$$

et

$$Ax = Ax \cap \left(\bigoplus_{i \in F} X_i \right) \neq 0.$$

Le cas 2) s'applique alors au sous-module (monogène) Ax.

II. Sommes directes maximales de co-irréductibles

Soit $(C_i)_{i \in I}$ la famille collectivisante ($i \leftrightarrow C_i$ est bijectif) des sous-modules co-irréductibles du module M, cette famille pouvant être vide (cf. § III). L'ensemble $\mathscr{A}$ des parties A de I telles que la somme

$$\sum_{i \in A} C_i$$

soit directe, ordonné par inclusion, est inductif; il résulte qu'il existe des sommes directes *maximales* de co-irréductibles:

$$S = \bigoplus_{i \in H} C_i \tag{1}$$

définies par le choix d'un élément maximal H dans $\mathscr{A}$ — si la famille des C_i est vide, $S=0$ par convention —; et toute somme directe

$$\bigoplus_{i \in A} C_i$$

de co-irréductibles peut être étendue en une telle somme maximale (1), avec $A \subseteq H$.

Si X est un sous-module qui contient un sous-module co-irréductible C, alors $S \cap X \neq 0$ pour *toute* somme maximale S de co-irréductibles; en effet $S \cap X = 0$ entraine $S \cap C = 0$, et la somme $S + C$ serait directe, ce qui contredirait le caractère maximal de S.

Inversement, $S \cap X \neq 0$ et la proposition 2 du § I montrent que X contient un sous-module X_0 isomorphe à un sous-module $\neq 0$ d'un co-irréductible C_i; X contient le co-irréductible X_0, d'où:

Proposition 3. *Pour une somme directe maximale S de sous-modules co-irréductibles d'un module M, et pour un sous-module X de M, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

a) $S \cap X \neq 0$;

b) X contient un sous-module co-irréductible.

Certaines substitutions sont permises sur les composantes d'une somme directe maximale de co-irréductibles; plus précisément:

Proposition 4. *Etant donnée une somme directe maximale*

$$S = \bigoplus_{i \in H} C_i$$

de sous-modules co-irréductibles C_i d'un module M, on obtient une nouvelle somme directe maximale de co-irréductibles,

a) En remplaçant chacun des C_i par un de ses sous-modules non nuls C_i';

b) En remplaçant chacun des C_i par une de ses extensions essentielles E_i dans M.

Preuve de a). Il est évident que

$$S' = \sum_{i \in H} C_i'$$

est directe et que chacun des C_i' est co-irréductible; S' est maximale car si, pour un sous-module co-irréductible C, la somme $S'+C$ était directe, il en serait de même de $S+C$ (la proposition 1 du § I s'applique puisque chaque C_i est extension essentielle d'un quelconque de ses sous-modules non nuls).

Preuve de b).

$$S^* = \sum_{i \in H} E_i$$

est directe (Proposition 1) et chaque E_i est co-irréductible (contrôle facile, cf. Proposition 5.4, p. 13 de [4]); le caractère maximal de S^* est évident: si S^*+C était somme directe, il en serait de même de $S+C$.

Remarquons que les E_i peuvent être choisis, pour chaque i, dans l'ensemble des extensions essentielles *maximales* de C_i dans M; de tels E_i sont des «enveloppes injectives» des C_i au sens donné dans l'étude du cas abstrait des $(\mathscr{T})$-algèbres modulaires (cf. chap. VII de [4]).

Par une démarche opposée, considérons l'ensemble $\mathscr{B}$ des sous-modules B de M qui ne contiennent aucun sous-module co-irréductible; 0 est un tel sous-module. $\mathscr{B}$ ordonné par inclusion est *inductif*; en effet, si la réunion

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i$$

d'une famille totalement ordonnée d'éléments B_i de $\mathscr{B}$ contenait un co-irréductible C, alors, pour $x \in C-\{0\}$, il existerait un B_i contenant le sous-module co-irréductible Ax.

$\mathscr{B}$ est *invariant* par des *extensions essentielles* dans M effectuées sur ses éléments: Soient E une extension essentielle dans M de $B \in \mathscr{B}$, et C un co-irréductible de M; $C \cap E \neq 0$ entraînerait $C \cap B = (C \cap E) \cap B \neq 0$, et B contiendrait le co-irréductible $C \cap B$.

En particulier tout élément maximal K de $\mathscr{B}$ est sans *extension essentielle propre* dans M; lorsque M est un A-module injectif, K est alors injectif (cf. § I), donc facteur direct dans M.

La comparaison d'*un* tel K maximal dans $\mathscr{B}$ avec *une* quelconque des sommes directes maximales

$$S = \bigoplus_{i \in H} C_i$$

de co-irréductibles est précisée par l'assertion (X étant un sous-module):

$$X \neq 0 \quad \text{et} \quad K \cap X = 0 \Rightarrow S \cap X \neq 0. \tag{2}$$

Supposons en effet que $S \cap X = 0$; la proposition 3 de ce § II montre alors que X ne contiendrait aucun co-irréductible; la somme directe $K \oplus X$ aurait aussi cette propriété (appliquer la proposition 1 du § I), ce qui est en contradiction avec la maximalité de K.

Cette même proposition 3 entraîne aussi $S \cap K = 0$; de plus, (2) implique que cette somme directe $S \oplus K$ admet M comme extension essentielle, c'est-à-dire que $S \oplus K$ est un sous-module *essentiel* de M:

Si X est un sous-module de M, $(S \oplus K) \cap X = 0$ entraîne $S \cap X = 0$ et $K \cap X = 0$; et d'après (2), $X = 0$.

Nous pouvons énoncer le théorème:

Théorème 1. *Pour tout A-module M, il existe des sommes directes maximales S de sous-modules de M co-irréductibles, et des sous-modules K maximaux parmi ceux qui ne contiennent aucun co-irréductible. Si S et K sont deux tels sous-modules:*

a) la somme $S+K$ est directe;

b) $S+K$ est un sous-module essentiel *de M.*

Si $M = Q$ est un A-module *injectif*, Q contient une enveloppe injective $E(S)$ de S; K étant sans extension essentielle propre dans Q est aussi injectif (il coïncide avec toutes ses enveloppes injectives dans Q). D'après la proposition 1 du § I, la somme $E(S)+K$ est directe; d'autre part Q étant extension essentielle de $S \oplus K$, est à fortiori extension essentielle de l'injectif $E(S) \oplus K$. Donc: $Q = E(S) \oplus K$.

Corollaire. *Dans les conditions du théorème 1, si $M = Q$ est* injectif, *alors:*

$$Q = E(S) \oplus K,$$

où $E(S)$ est une enveloppe injective de S dans Q. De plus, si $Q = E(S') \oplus K'$ est une autre telle décomposition, il existe un automorphisme φ *de Q tel que:*

$$\varphi(E(S)) = E(S'), \quad \varphi(K) = K'.$$

En effet, le couple (S', K) définit la décomposition $Q = E(S') \oplus K$ et l'isomorphisme $\varphi_1 : E(S) \to Q \mid K \to E(S')$;

et le couple (S, K') définit la décomposition $Q = E(S) \oplus K'$ et l'isomorphisme $\varphi_2 : K \to Q \mid E(S) \to K'$; il suffit de prendre $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Le théorème 1 et son corollaire incitent à une étude élémentaire des modules M:

– qui ne contiennent aucun co-irréductible (§ III);

– en lequels il existe une somme directe maximale de co-irréductibles qui soit essentielle dans M (§ IV).

III. Modules sans co-irréductibles

Nous établirons essentiellement *l'existence* de tels modules (caractérisés aussi par le fait que 0 est $\cap$-décomposable dans tout sous-module non nul).

Théorème 2. *Soit*

$$A=\prod_{i\in I} A_i$$

l'anneau produit d'une famille infinie *d'anneaux* unitaires, *et soit* $\mathfrak{a}$ *l'idéal bilatère des* $x=(x_i)_{i\in I}$ *qui ont un support fini; alors,*

dans l'anneau $B=A|\mathfrak{a}$ *il n'existe pas d'idéal à gauche co-irréductible.*

Preuve. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal à gauche de A qui contient *strictement* $\mathfrak{a}$. Pour établir le théorème, il suffit de montrer qu'il existe alors deux idéaux à gauche $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{b}_2$ de A tels que:

$$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}_1\subseteq\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}_2\subseteq\mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a}=\mathfrak{b}_1\cap\mathfrak{b}_2.$$

Il existe $b=(b_i)_{i\in I}$, $b\in\mathfrak{b}$, $b\notin\mathfrak{a}$; le support de b,

$$J=\{i\,|\,i\in I,\ b_i\neq 0\}$$

est infini. Considérons une partition $J=H+K$ de J en deux ensembles infinis H et K, et définissons les éléments $h=(h_i)_{i\in I}$ et $k=(k_i)_{i\in I}$ de A par:

$$h_i=1 \text{ si } i\in H \text{ et } h_i=0 \text{ si } i\notin H;$$

$$k_i=1 \text{ si } i\in K \text{ et } k_i=0 \text{ si } i\notin K.$$

Il est aisé de vérifier que les éléments $r=hb=bh$ et $s=kb=bk$ n'appartiennent pas à $\mathfrak{a}$ et ont pour supports respectifs H et K; Posons:

$$\mathfrak{a}'=(\mathfrak{a}+Ar)\cap(\mathfrak{a}+As),$$

Ar et As étant les idéaux à gauches monogènes engendrés par r et s; et soit $x=(x_i)_{i\in I}$ un élément de $\mathfrak{a}'$;

$$x=a+\lambda r=a'+\mu s, \qquad \text{avec } a \text{ et } a'\in\mathfrak{a},\ \lambda \text{ et } \mu\in A.$$

Supp a et Supp a' étant les supports de a et a' respectivement, les trois ensembles suivants:

$$(\text{Supp}\,a)\cap K, \quad (\text{Supp}\,a')\cap H, \quad (\text{Supp}\,a)\cap(I-J)=(\text{Supp}\,a')\cap(I-J),$$

sont *finis*, ce qui entraine que le support de x est fini car:

$$i\in(\mathrm{Supp}\,x)\cap H\Rightarrow s_i=k_i b_i=0, \qquad a_i'\neq 0, \qquad i\in(\mathrm{Supp}\,a')\cap H;$$
$$i\in(\mathrm{Supp}\,x)\cap K\Rightarrow r_i=h_i b_i=0, \qquad a_i\neq 0, \qquad i\in(\mathrm{Supp}\,a)\cap K;$$
$$i\in(\mathrm{Supp}\,x)\cap(I-H-K)\Rightarrow s_i=r_i=0, \quad a_i=a_i'\neq 0, \quad i\in(\mathrm{Supp}\,a)\cap(I-J).$$

Donc $\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}+Ar)\cap(\mathfrak{a}+As)$, et il suffit de prendre $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}+Ar$ et $\mathfrak{b}_2=\mathfrak{a}+As$.

Remarque. $\mathfrak{a}$ considéré comme sous-module du A-module (à g.) A est sous-module *essentiel* de A. Soit en effet $x=(x_i)_{i\in I}$, $x\in A$, $x\neq 0$; pour une partie finie *non vide* F du support de x, définissons $f=(f_i)_{i\in I}$ par:

$$f_i=1 \text{ si } i\in F \text{ et } f_i=0 \text{ si } i\notin F; \text{ on a bien } fx\neq 0,\ fx\in\mathfrak{a}.$$

Rappelons qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-modules d'un A-module M est une *décomposition $\cap$-irréductible réduite* de 0 dans M si chacun des X_i est $\cap$-irréductible dans M, si

$$\bigcap_{i\in I} X_i=0,$$

et si aucun des X_i ne contient

$$\overline{X}_i=\bigcap_{j\in I-\{i\}} X_j.$$

Si 0 est $\cap$-réductible, alors $\forall i\in I$, $X_i\neq 0$, $\overline{X}_i\neq 0$, $X_i\cap\overline{X}_i=0$, et cardinal $I\geqq 2$; dans ce cas, chaque X_i est $\cap$-irréductible non essentiel, complément de $\overline{X}_i$ dans M (cf. Théorème 8.2, p. 62 de [4]), et chaque $\overline{X}_i$ est *co-irréductible* (cf. Proposition 8.1, p. 65 de [4]).

Si M est un module non nul ne contenant aucun co-irréductible (tel $A\,|\,\mathfrak{a}$ du théorème 2), il résulte de ce qui précède que 0 *n'a pas de décomposition $\cap$-irréductible réduite* dans M; néanmoins 0 est $\cap$-réductible dans M (par définition de M) et est l'intersection de tous les sous-modules $\cap$-irréductibles $(E_\alpha)_{\alpha\in L}$ de M (cf. Proposition 1.1 de [8]):

$$0=\bigcap_{\alpha\in L} E_\alpha;$$

il n'existe pas d'élément minimal H_0 dans l'ensemble $\mathscr{H}$ des parties H de L telles que:

$$0=\bigcap_{\alpha\in H} E_\alpha,$$

sinon $(E_\alpha)_{\alpha\in H_0}$ serait une décomposition irréductible réduite de 0 dans M. Il en résulte en particulier que le cardinal de L est *infini* (ainsi que celui de toutes les parties H de $\mathscr{H}$).

Enfin, chacun des E_α est nécessairement *essentiel* dans M, car s'il existait un sous-module $X\neq 0$ de M tel que $E_\alpha\cap X=0$, le raisonnement fait plus haut entrainerait alors que X est co-irréductible de M.

Application aux filtres sur un ensemble infini

L'ensemble $\mathscr{E}=\mathscr{P}(I)$ des parties d'un ensemble I (infini) est un anneau de Boole pour la somme symétrique des parties (addition) et la réunion des parties (multiplication):

$$X+Y=(\complement X\cap\complement Y)\cup(X\cap Y),\qquad X\cdot Y=X\cup Y.$$

Cet anneau $\mathscr{E}$ est isomorphe à l'anneau produit

$$A=\prod_{i\in I}A_i,\quad \forall i\quad A_i=\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

(corps à deux éléments), par l'application:

$$x=(x_i)_{i\in I}\longrightarrow\Phi(x)\quad\text{où}\quad\Phi(x)=\{i\mid i\in I,\ x_i=0\}.$$

Les idéaux propres de $\mathscr{E}$ ne sont autres que les filtres sur I, et on sait que les notions suivantes coïncident:

> idéal propre $\cap$-irréductible $\Leftrightarrow$ idéal propre premier $\Leftrightarrow$ idéal maximal $\Leftrightarrow$ ultrafiltre.

Le théorème 2 s'applique à A, et l'idéal $\mathfrak{a}$ des éléments de A à support fini, a pour image par Φ le *filtre* $\mathscr{C}$ des *complémentaires des parties finies* de I. $\mathscr{C}$ est donc $\cap$-réductible dans tout filtre $\mathscr{F}$ qui le contient strictement; $\mathscr{C}$ est l'intersection des ultra-filtres qui le contiennent (ce sont les ultra-filtres non principaux), et $\mathscr{C}$ ne peut être intersection *réduite* de tels ultrafiltres.

Observons enfin que $\mathscr{E}$, étant extension essentielle de $\mathscr{C}$, est aussi extension essentielle des ultra-filtres $\mathscr{U}$ plus fin que $\mathscr{C}$. Ces ultra-filtres sont donc tous *essentiels* dans $\mathscr{E}$ (en fait, un filtre $\mathscr{F}$ est essentiel dans $\mathscr{E}$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est plus fin que $\mathscr{C}$).

IV. Modules riches en co-irréductibles

Théorème 3[2]. *Soit M un A-module non nul; les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) 0 *possède une $\cap$-décomposition* irréductible réduite *dans tout sous-module non nul de M;*

b) Tout sous-module non nul de M contient un sous-module co-irréductible;

c) Il existe une somme directe *de sous-modules co-irréductibles de M, qui est* essentielle *dans M.*

Preuve de a)$\Rightarrow$b). Dans le sous-module non nul N, 0 possède une décomposition irréductible réduite,

$$0=\bigcap_{i\in I}X_i,$$

[2] Pour les catégories de GROTHENDIECK, cf. Proposition 1 de [19].

avec $X_i \subseteq N$; nous savons que, dans ces conditions, les

$$\overline{X_i} = \bigcap_{j \neq i} X_j$$

sont co-irréductibles (si card $I = 1$, 0 est $\cap$-irréductible dans N, et N est alors co-irréductible).

Preuve de b)⇒c). La famille des co-irréductibles de $M \neq 0$ n'est pas vide. Considérons une somme directe maximale

$$S = \bigoplus_{i \in H} C_i$$

de sous-modules co-irréductibles. Si S n'était pas essentiel dans M, il existerait un sous-module $X \neq 0$ tel que $S \cap X = 0$; par hypothèse X contient un co-irréductible C; la somme $S + C$ serait alors directe, ce qui contredirait la maximalité de S.

Preuve de c)⇒b). Soit N un sous-module *non nul* de M, et soit

$$S = \bigoplus_{i \in H} C_i$$

la somme directe essentielle donnée par l'hypothèse c).

M étant extension essentielle de S, $N \cap S \neq 0$; il existe alors un sous-module non nul de N, soit N_0, isomorphe à un sous-module C_i' de l'un des C_i (cf. proposition 2 du § I). C_i' étant co-irréductible, il en est de même de N_0.

Preuve de b)⇒a). Soit N un sous-module *non nul* de M; N, tout comme M, a tous ses sous-modules non nuls qui contiennent au moins un co-irréductible. b) implique donc c) pour le module N, et il existe donc dans N une somme directe

$$S = \bigoplus_{i \in H'} C_i'$$

de sous-modules de N co-irréductibles, et qui soit sous-module essentiel dans N. Posons

$$\overline{C_i'} = \bigoplus_{j \neq i} C_j';$$

chacun des $\overline{C_i'}$ est *$\cap$-irréductible* dans S, car $S \mid \overline{C_i'}$ est isomorphe au co-irréductible C_i (si card $H' = 1$, alors S est co-irréductible ainsi que son extension essentielle N).

Il est aisé de contrôler que

$$0 = \bigcap_{i \in H'} \overline{C_i'}$$

est une décomposition irréductible réduite de 0 *dans* S; pour terminer il suffit de prouver que cette décomposition s'étend à l'extension essentielle N de S; le théorème 3 est alors conséquence de la proposition:

Proposition 5. *Soit E une extension* essentielle *du A-module M*

a) Pour que 0 *soit* $\cap$*-irréductible dans M il faut et il suffit qu'il le soit dans E.*

b) Pour que

$$0=\bigcap_{i\in I} X_i$$

soit une décomposition irréductible réduite de 0 dans *M, il faut et il suffit que chaque* X_i *soit* la trace *sur M de sous-modules* X_i' *de E tels que*

$$0=\bigcap_{i\in I} X_i'$$

soit une décomposition irréductible réduite de 0 dans *E.*

Preuve de a). C'est la proposition 5.4, p. 43 de [4].

Preuve de b). Nous établirons tout d'abord le lemme.

Lemme. *E étant une extension (pas nécessairement essentielle) du A-module M, pour qu'un sous-module X de M soit* $\cap$*-irréductible dans M, il faut et il suffit qu'il soit la trace sur M d'un sous-module* $\cap$*-irréductible de E.*

La condition est nécessaire. Soit X' un complément de M sur X dans E, $X'\cap M=X$ (c'est-à-dire un maximal dans l'ensemble des sous-modules Y de E tels que $Y\cap M=X$); Si X' était $\cap$-réductible dans E, il existerait des sous-modules X_1' et X_2' tels que:

$$X'=X_1'\cap X_2',\quad X_1'\supset X',\quad X_2'\supset X' \qquad \text{(inclusions strictes)};$$

cela entraînerait (maximalité de X'):

$$X_1'\cap M\supset X,\quad X_2'\cap M\supset X,\quad X=(X_1'\cap M)\cap(X_2'\cap M),$$

et X serait $\cap$-réductible dans M.

La condition est suffisante. Soit $X=X'\cap M$; Si X était $\cap$-réductible dans M, alors 0 le serait dans $(M+X')|X'$ à cause de l'isomorphisme $M|X\approx(M+X')|X'$; et X' serait $\cap$-réductible dans $M+X'$ (à fortiori dans E).

retour à la preuve de b).

La condition est nécessaire. D'après le lemme il existe, pour chaque i, un $\cap$-irréductible X_i' dans E tel que $X_i=X_i'\cap M$, ce qui entraine:

$$0=\bigcap_{i\in I}(X_i'\cap M)=M\cap\Big(\bigcap_{i\in I}X_i'\Big);$$

E étant extension essentielle de M:

$$0=\bigcap_{i\in I}X_i',$$

et cette décomposition est réduite car:

$$X_i'\subseteq\bigcap_{j\neq i}X_j'\ \Rightarrow\ X_i=X_i'\cap M\subseteq\bigcap_{j\neq i}(X_j'\cap M)=\bigcap_{j\neq i}X_j.$$

La condition est suffisante. Soit

$$0=\bigcap_{i\in I} X_i'$$

une décomposition irréductible réduite de 0 dans E; d'après le lemme, les $X_i=X_i'\cap M$ sont $\cap$-irréductibles dans M.

$\forall\, i\in I \quad X_i\subseteq X_i'$, entraîne:

$$0=\bigcap_{i\in I} X_i;$$

et cette décomposition est réduite car:

$$0=\bigcap_{i\neq j}(X_i'\cap M)=M\cap\Big(\bigcap_{i\neq j} X_i'\Big) \quad \text{entraîne} \quad 0=\bigcap_{i\neq j} X_i'$$

(E étant extension essentielle de M), ce qui est contraire au fait que

$$0=\bigcap_{i\in I} X_i'$$

est réduite.

Définition. Un module *riche* en co-irréductibles est un module vérifiant l'une des conditions équivalentes exprimées au théorème 3.

Etudions quelques classes de modules riches en co-irréductibles.

1) Tout A-module noethérien (artinien) est riche en co-irréductibles: la condition d'existence des décompositions irréductibles réduites étant réalisée.

2) Si A est un anneau tel que, pour tout idéal à gauche $\mathfrak{a}$ de A, le A-module à gauche $A|\mathfrak{a}$ soit riche en co-irréductibles, alors *tout* A-module (à gauche) M est riche en co-irréductibles:

En effet tout sous-module monogène non nul de M est isomorphe à un quotient $A|\mathfrak{a}$ qui, par hypothèse, contient au moins un sous-module co-irréductible.

En particulier:

3) Tout module (à gauche) sur un anneau noethérien (ou artinien) à gauche, est riche en co-irréductibles.

4) Pour que l'anneau

$$A=\prod_{i\in I} A_i$$

produit d'une famille (finie ou infinie) d'anneaux *unitaires* soit riche en idéaux (à gauche) co-irréductibles, il faut et il suffit que tous les A_i soient riches en idéaux (à gauche) co-irréductibles:

La condition est nécessaire puisque A contient des sous-anneaux (qui sont des idéaux bilatères) isomorphes aux A_i.

Pour montrer que la condition est suffisante, considérons un idéal à gauche monogène Ax de A, non nul, engendré par l'élément $x=(x_i)_{i\in I}$. Pour un indice μ du support de x ($x_\mu \neq 0$) définissons $e=(\varepsilon_i)_{i\in I}$ par: $\varepsilon_\mu=1$, et si $i\neq\mu$ $\varepsilon_i=0$; et posons $u=ex$.

Ax contient alors l'idéal à gauche non nul Au; Au est contenu dans le sous-anneau A'_μ de A canoniquement isomorphe à A_μ; de plus, l'ensemble des idéaux à gauche *de* A contenus dans A'_μ, coïncide avec l'ensemble des idéaux à gauche *de* A'_μ. Mais, par hypothèse, Au contient un idéal à gauche co-irréductible C de l'anneau A'_μ; et C est aussi un idéal à gauche co-irréductible (dans Ax) de l'anneau A.

En particulier l'algèbre de toutes les fonctions numériques sur un ensemble X, $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})\approx \mathbb{R}^X$, est riche en co-irréductibles (cf. l'idéal des fonctions nulles sur le complémentaire d'un point fixé de X).

Problème. Quelles sont les sous-algèbres usuelles de $\mathscr{F}(X, \mathbb{R})$ riches en idéaux co-irréductibles?

5) Pour qu'une somme directe

$$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$$

d'une famille (finie ou infinie) de A-modules M_i soit riche en co-irréductibles, il faut et il suffit que tous les M_i soient riches en co-irréductibles:

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 du § I.

6) *Remarque.* Un quotient $M|X$ d'un module M riche en co-irréductibles n'est pas nécessairement riche en co-irréductibles. Au théorème 2 du § III, il est possible de choisir chacun des A_i riche en idéaux (à gauche) co-irréductibles; A a alors cette même propriété (cf. ci-dessus le cas 4)). L'anneau $B=A|\mathfrak{a}$ est privé d'idéaux (à gauche) co-irréductibles (d'après ce théorème 2), et les idéaux à gauche de l'anneau B coïncident avec les sous-modules du A-module quotient B.

Corollaire (du théorème 3). *Si M est un module riche en co-irréductibles, alors toute extension essentielle (en particulier l'enveloppe injective de M) est riche en co-irréductibles.*

Cela résulte de la condition c) du théorème 3, et du fait que tout sous-module co-irréductible d'un module M est co-irréductible dans toute extension essentielle de M.

Le théorème 1.1 de GOLDIE dans [7] s'étend au cas d'un module non soumis à des conditions de finitude, par le théorème:

Théorème 4. *Dans un module $M\neq 0$,* riche *en co-irréductibles, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

a) E est un sous-module essentiel *de M (i.e. M est extension essentielle de E).*

b) E coupe selon un sous-module non nul toutes *les composantes d'une quelconque somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de M.*

c) E contient une somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de M.

Preuve. Il est évident que a) entraîne b) et que b) entraîne c).

Montrons que c) entraîne a): Soit

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i$$

une somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de M contenue dans E. S est sous-module *essentiel* de M, puisque M est riche en co-irréductibles (cf. la preuve de b) $\Rightarrow$ c), au théorème 3 du § IV).

M est alors extension essentielle de E (transitivité des extensions essentielles).

V. Dimension d'un module injectif

1. Cas d'un module injectif riche en co-irréductibles

Tout module Q contient des sommes directes maximales

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i$$

de sous-modules co-irréductibles C_i; Si Q est injectif, chacun des C_i peut être remplacé par une de ses enveloppes injectives dans Q (cf. Proposition 4 du § II); les C_i sont alors des sous-modules injectifs indécomposables de Q (cf. § I). Si, de plus, Q est riche en co-irréductibles, S est alors sous-module essentiel de Q (cf. Théorème 3, preuve de b) $\Rightarrow$ c)).

Proposition 6. *Soient deux sommes directes* maximales *de sous-modules* injectifs indécomposables *du module injectif* Q riche *en co-irréductibles:*

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i, \qquad T = \bigoplus_{j \in J} K_j .$$

Dans ces conditions:

a) Pour tout $\alpha \in I$ *il existe* $\beta \in J$ *tel que* K_β *soit appliqué* isomorphiquement *sur* C_α *par un projecteur* $\bar{p}_\alpha$ *de* Q *prolongeant le projecteur* p_α *de* S *relatif au composant* C_α. *La somme*

$$S' = K_\beta + \Big(\bigoplus_{i \neq \alpha} C_i\Big)$$

est alors directe *et est sous-module* essentiel *de* Q.

b) Il existe un automorphisme φ *de* Q, *et une* bijection σ *de* I *sur* J, *tels que:*

$$\forall\, i \in I, \qquad \varphi(C_i) = K_{\sigma(i)} .$$

Preuve de a). Si le cardinal de I est 1, alors $S = C_\alpha$ est injectif; n'ayant pas d'extension essentielle propre, S est égal à Q; Q est alors injectif indécomposable, et les assertions a) et b) sont trivialement valables dans ce cas.

Nous supposerons donc, dans toute la suite, que card $I \geqq 2$, et que card $J \geqq 2$. Posons

$$\bar{C}_\alpha = \bigoplus_{i \in I-\{\alpha\}} C_i .$$

Comme $C_\alpha \cap \bar{C}_\alpha = 0$, le sous-module $\bar{C}_\alpha$ n'est pas essentiel dans Q; le théorème 4 du § 4 permet d'affirmer que $\bar{C}_\alpha$ ne coupe pas tous les composants de

$$T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

selon un sous-module non nul; il existe donc $\beta \in J$ tel que:

$$\bar{C}_\alpha \cap K_\beta = 0 .$$

Posons $S' = K_\beta \oplus \bar{C}_\alpha$; et soit $\bar{p}_\alpha$ un projecteur de Q, d'image C_α, prolongeant le projecteur p_α de S d'image C_α et de noyau $\bar{C}_\alpha$; ce projecteur $\bar{p}_\alpha$ s'obtient en prolongenant

$$S \xrightarrow{p_\alpha} C_\alpha \quad \text{en} \quad Q \xrightarrow{u_\alpha} C_\alpha$$

(possible, car C_α est injectif), puis en composant u_α et l'injection canonique $C_\alpha \xrightarrow{q_\alpha} Q$:

$$\bar{p}_\alpha = q_\alpha \circ u_\alpha .$$

Comme $\bar{p}_\alpha$ prolonge p_α:

$$\bar{C}_\alpha \subseteq \operatorname{Ker} \bar{p}_\alpha ;$$

montrons que:

$$\operatorname{Ker} \bar{p}_\alpha \cap K_\beta = 0 ;$$

en effet:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ker} \bar{p}_\alpha \cap K_\beta) \cap S &= K_\beta \cap [(\bar{C}_\alpha \oplus C_\alpha) \cap \operatorname{Ker} \bar{p}_\alpha] \\ &= K_\beta \cap [\bar{C}_\alpha \oplus (C_\alpha \cap \operatorname{Ker} \bar{p}_\alpha)] = K_\beta \cap \bar{C}_\alpha = 0 , \end{aligned}$$

d'après le choix de β, (observer aussi que $C_\alpha \cap \operatorname{Ker} \bar{p}_\alpha = 0$); Q étant extension essentielle de S, il en résulte que:

$$\operatorname{Ker} \bar{p}_\alpha \cap K_\beta = 0 .$$

La restriction de $\bar{p}_\alpha$ à K_β est ainsi un homomorphisme *injectif*, et $\bar{p}_\alpha(K_\beta)$ est un sous-module injectif indécomposable de $\bar{p}_\alpha(Q) = C_\alpha$, donc nécessairement *identique* à C_α ($\bar{p}_\alpha(K_\beta)$ injectif est facteur direct dans C_α indécomposable):

$$\bar{p}_\alpha(K_\beta) = C_\alpha .$$

Montrons que le sous-module $S' = K_\beta \oplus \bar{C}_\alpha$ est *essentiel* dans Q; Si $S' \cap C_\alpha = 0$, la somme $C_\alpha + K_\beta + \bar{C}_\alpha$ serait directe

$$\left(\text{contraire au caractère maximal de } S = \bigoplus_{i \in I} C_i = C_\alpha \oplus \bar{C}_\alpha\right);$$

donc:

$$S' \cap C_\alpha \neq 0 .$$

D'autre part, comme $S' \cap C_i = C_i$ pour tout $i \in I - \{\alpha\}$ (puisque $C_i \subseteq \bar{C}_\alpha \subseteq S'$), S' coupe donc toutes les composantes de S suivant des sous-modules non nuls; et S' est bien essentiel (cf. le théorème 4 du § 4).

Preuve de b). Nous nous inspirerons de la méthode utilisée par AZUMAYA dans son remarquable théorème 1 de [1].

D'après le a) précédent, tout C_i est isomorphe à un K_j (au moins un); de même tout K_j est isomorphe à un C_i (au moins un).

Pour $\alpha \in I$, posons $I(\alpha) = \{i / i \in I,\ C_i$ est isomorphe à $C_\alpha\}$; et pour $\beta \in J$, posons $J(\beta) = \{j / j \in J,\ K_j$ est isomorphe à $K_\beta\}$.

La correspondance entre classes d'équivalences:

$$I(\alpha) \leftrightarrow J(\beta)$$

définie par la propriété: il existe $i \in I(\alpha)$ et $j \in J(\beta)$ tels que C_i et K_j soit isomorphes, est visiblement *biunivoque*.

Si nous prouvons que deux telles classes correspondantes $I(\alpha)$ et $J(\beta)$ ont *même cardinal*, il en résultera que les sommes directes

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i \quad \text{et} \quad T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

seront isomorphes composantes par composantes.

Soit donc un ensemble *fini* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ d'indices de $I(\alpha)$; par applications successives du a), nous pouvons trouver $\beta_1, \ldots, \beta_n$, dans J tels que:

$$S^* = K_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus K_{\beta_n} \oplus \Big(\bigoplus_{i \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}} C_i \Big)$$

soit un sous-module essentiel de Q, et que K_{β_h} soit isomorphe à C_{α_h} $(h = 1, \ldots, n)$; cela entraîne que les β_h sont dans $J(\beta)$ et que si card $J(\beta)$ est *fini*, alors card $I(\alpha)$ est *fini* et:

$$\operatorname{card} I(\alpha) \leqq \operatorname{card} J(\beta).$$

Si card $J(\beta)$ est *infini*, à chaque $j \in J(\beta)$ associons l'ensemble (éventuellement vide):

$F(j) = \{i \mid i \in I,\ \bar{p}_i$ applique isomorphiquement K_j sur $C_i\}$, $\{\bar{p}_i\}_{i \in I}$ étant une famille (orthogonale) de projecteurs de Q telle que, pour chaque i, $\bar{p}_i$ prolonge le projecteur p_i de

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i$$

d'image C_i et de noyau

$$\bar{C}_i = \bigoplus_{\lambda \neq i} C_\lambda,$$

et que:

$$\text{Image } \bar{p}_i = C_i.$$

Tout d'abord $F(j) \subseteq I(\alpha)$; d'autre part card $F(j)$ est *fini*, en effet:

Soit $x_j \in K_j - \{0\}$;

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i$$

étant *essentiel* dans Q, il existe $a \in A$ tel que $ax_j \in K_j \cap S$; $ax_j \neq 0$. Soit $\{i_1, \ldots, i_s\}$ l'ensemble (fini) des indices $i \in I$ tels que $\bar{p}_i(ax_j) = p_i(ax_j) \neq 0$; on a bien:

$$F(j) \subseteq \{i_1, \ldots, i_s\},$$

car, pour $i \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$, la restriction de $\bar{p}_i$ à K_j a un noyau non nul.

Les $F(j)$ recouvrent $I(\alpha)$ lorsque j décrit $J(\beta)$, puisque pour chaque $i \in I(\alpha)$ il existe $j \in K_j$ tel que K_j soit appliqué isomorphiquement sur C_i par $\bar{p}_i$ (d'après a)):

$$I(\alpha) = \bigcup_{j \in J(\beta)} F(j)$$

$J(\beta)$ étant de cardinal infini, il en résulte: $\operatorname{card} I(\alpha) \leqq \operatorname{card} J(\beta)$.

Dans tous les cas, $\operatorname{card} I(\alpha) \leqq \operatorname{card} J(\beta)$; et en échangeant les rôles de $I(\alpha)$ et $J(\beta)$, il vient:

$$\operatorname{card} I(\alpha) = \operatorname{card} J(\beta).$$

Il existe donc une bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ qui applique chaque classe $I(\alpha)$ sur son associée $J(\beta)$, et pour chaque $i \in I(\alpha)$ il existe un isomorphisme $C_i \xrightarrow{\psi_i} K_{\sigma(i)}$; définissons alors l'isomorphisme:

$$S \xrightarrow{\psi} T \quad \text{par} \quad \psi = \bigoplus_{i \in I} \psi_i.$$

Q étant injectif, ψ se *prolonge* en un endomorphisme φ de Q; $0 = \operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi \cap S$ entraîne $\operatorname{Ker} \varphi = 0$, car S est essentiel. φ est injectif et $\varphi(Q)$ est sous-module injectif extension essentielle de $\varphi(S) = \psi(S) = T$; Q est donc extension essentielle de $\varphi(Q)$ injectif, et: $Q = \varphi(Q)$.

La bijection σ et l'automorphisme φ ainsi construits ont bien les propriétés voulues.

Remarque 1. Il existe des modules injectifs Q riches en co-irréductibles pour lesquels les sommes directes maximales de sous-modules co-irréductibles sont *distinctes* de Q. Par exemple, soit

$$A = \prod_{i \in I} A_i$$

l'anneau produit d'une famille *infinie* de corps A_i tous isomorphes à un corps commutatif K; désignons par q_i les injections canoniques attachées au produit A.

Il est aisé de contrôler que chacun des $q_i(A_i)$ est un A-module *simple* injectif (donc indécomposable), et que

$$S = \bigoplus_{i \in I} q_i(A_i)$$

est un sous-module *essentiel* du A-module A. A est d'autre part un A-module isomorphe au produit des A-modules injectifs $q_i(A_i)$; A est donc A-module *injectif* (enveloppe injective du A-module S).

Remarque 2. Dans les conditions de la proposition 6, Q est *enveloppe injective* de S et de T (puisque S et T sont essentiels dans Q d'après le théorème 4 du § 4).

2. Cas d'un module injectif quelconque

Soient:

$$S=\bigoplus_{i\in I} C_i \quad \text{et} \quad T=\bigoplus_{j\in J} K_j$$

deux sommes directes *maximales* de sous-modules co-irréductibles d'un module *injectif* Q (nulles si Q est privé de co-irréductibles). Introduisons un sous-module K de Q maximal parmi ceux qui sont privés de co-irréductibles; le corollaire du théorème 1 du § II donne alors:

$$Q=E(S)\oplus K=E(T)\oplus K,$$

$E(S)$ et $E(T)$ désignant des enveloppes injectives de E et T dans Q. Soit θ l'isomorphisme composé:

$$E(S)\longrightarrow Q\,|\,K\longrightarrow E(T);$$

$E(S)$ étant extension essentielle de S, $\theta(E(S))=E(T)$ est extension essentielle de

$$\theta(S)=\bigoplus_{i\in I}\theta(C_i);$$

$E(T)$ est riche en co-irréductibles (la condition c) du théorème 3, § IV, est réalisée); la proposition 6 s'applique aux sommes $\theta(S)$ et T:

Il existe une bijection $I\xrightarrow{\sigma} J$ et un automorphisme ψ de $E(T)$ tels que: $\forall i\in I$, $\psi(\theta(C_i))=K_{\sigma(i)}$.

Définissons l'automorphisme φ de Q, comme étant la somme de $\psi\circ\theta$ sur $E(S)$ et de l'identité sur K, nous obtenons ainsi le théorème:

Théorème 5. *Soient deux sommes directes* maximales *de sous-modules* injectifs indécomposables *d'un module injectif* Q:

$$S=\bigoplus_{i\in I} C_i, \qquad T=\bigoplus_{j\in J} K_j;$$

il existe alors un automorphisme φ *de* Q *et une* bijection $I\xrightarrow{\sigma} J$ *tels que;*

$$\forall i\in I, \quad \varphi(C_i)=K_{\sigma(i)}.$$

Rappelons qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-modules non nuls d'un module est *indépendante* si, par définition, la somme

$$\sum_{i\in I} X_i$$

est directe.

Les familles $(C_i)_{i\in I}$ et $(K_j)_{j\in J}$ étudiées en ce théorème 5 sont indépendantes et visiblement maximales en tant que familles indépendantes de co-irréductibles; le théorème indique en particulier que les cardinaux de ces 2 familles (supposées définies par des *bijections* $i\leftrightarrow C_i$ et $j\leftrightarrow K_j$) sont égaux. Ce cardinal ne dépend pas de la famille considérée.

Comme toute somme directe maximale de sous-modules co-irréductibles de Q peut être étendue en une somme directe maximale d'injectifs indécomposables (cf. proposition 4 du § 1), nous pouvons donner la définition,

Définition. On appelle *dimension* d'un module *injectif* Q, le cardinal d'une famille indépendante maximale de sous-modules co-irréductibles de Q; ce cardinal qui se note dim Q ne dépend pas du choix d'une telle famille.

VI. Dimension d'un module quelconque

La notion précédente de dimension s'étend à un module quelconque au moyen du théorème:

Théorème 6[3]. *Soient deux sommes directes* maximales *de sous-modules* co-irréductibles *du module* M:

$$S=\bigoplus_{i\in I} C_i, \qquad T=\bigoplus_{j\in J} K_j.$$

$E(C_i)$ *et* $E(K_j)$ *des enveloppes injectives des* C_i *et des* K_j.

Dans ces conditions, il existe une bijection $I\xrightarrow{\sigma} J$, *et un* isomorphisme φ de

$$\bigoplus_{i\in I} E(C_i) \quad \text{sur} \quad \bigoplus_{j\in J} E(K_j),$$

tels que:

$$\forall\, i\in I, \qquad \varphi\big(E(C_i)\big)=E(K_{\sigma(i)}).$$

Preuve. Soit $E(M)$ une enveloppe injective de M; choisissons pour chaque i, une enveloppe injective $E(C_i)$ de C_i dans $E(M)$; alors

$$S'=\sum_{i\in I} E(C_i)$$

est directe (cf. Proposition 1, § I) et formée de composantes $E(C_i)$ injectifs indécomposables. Pour cet ensemble de propriétés, S' est *maximale* dans $E(M)$, car $E(M)$ est extension essentielle de E:

S'il existait un injectif indécomposable Γ de $E(M)$ indépendant des $E(C_i)$:

$$S'\cap\Gamma=0.$$

$C=M\cap\Gamma\neq 0$ serait alors un co-irréductible de M tel que

$$S\cap C=0,$$

donc indépendant des C_i.

[3] Un résultat analogue a été obtenu par MIYASHITA dans le cas des treilles modulaires, par des méthodes différentes — cf. [20] —; cet article et la note [13] ont été élaborés indépendamment l'un de l'autre, et publiés sensiblement à la même époque.

De même on peut étendre

$$T = \bigoplus_{j \in J} K_j$$

en une somme directe maximale dans $E(M)$ d'injectifs indécomposables,

$$T' = \bigoplus_{j \in J} E(K_j).$$

Le théorème 5 appliqué aux sommes S' et T' de l'injectif $E(M)$, donne alors la bijection σ et l'isomorphisme φ cherchés.

Remarque. Dans les conditions de ce théorème 6, on peut aussi énoncer, en ne «sortant» pas du module M:

Corollaire. *Il existe une* bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ *telle que:* $\forall i \in I$, *il existe un sous-module* non nul C_i^* *de* C_i, *qui soit* isomorphe *à un sous-module* $K^*_{\sigma(i)}$ *de* $K_{\sigma(i)}$.

Définition. On appelle *dimension* d'un module M, le cardinal d'une famille indépendante maximale de sous-modules co-irréductibles de M; ce cardinal qui se note $\dim M$ ne dépend pas du choix d'une telle famille.

Lorsque $\dim M$ est *finie*, on retrouve bien entendu la dimension définie par GOLDIE dans [7].

Si M est un espace vectoriel sur le corps k, les k-sous-modules co-irréductibles de M coïncident avec les sous-espaces de dimension 1, et $\dim M$ est bien la dimension habituelle de l'espace vectoriel M.

Les modules M *privés* de co-irréductibles sont caractérisés par:

$$\dim M = 0.$$

La dimension d'un module a les propriétés additives que l'on est en droit d'attendre:

Proposition 7. *Si* $M = M_1 \oplus M_2$, *alors:*

$$\dim M = \dim M_1 + \dim M_2.$$

Preuve. La preuve du théorème 6 montre que la dimension d'un module est égale à celle de son enveloppe injective; il suffit donc d'établir la proposition 7 pour des modules injectifs:

$$Q = Q_1 \oplus Q_2.$$

En utilisant les décompositions de Q_1 et Q_2 données par le corollaire du théorème 1, et avec les notations correspondantes:

$$Q_1 = E(S_1) \oplus K_1, \quad Q_2 = E(S_2) \oplus K_2;$$

$Q = (E(S_1) \oplus E(S_2)) \oplus (K_1 \oplus K_2)$ est alors une décomposition de Q du même type que celles de Q_1 et Q_2, car $K_1 \oplus K_2$ est privé de co-irréductibles alors que $E(S_1) \oplus E(S_2)$ est riche en co-irréductibles (cf. Proposition 1), et ces 2 compo-

santes $K_1 \oplus K_2$ et $E(S_1) \oplus E(S_2)$ sont maximales vis à vis de ces deux propriétés. Il suit alors:

$$\begin{aligned}\dim Q &= \dim\big(E(S_1) \oplus E(S_2)\big) = \dim(S_1 \oplus S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 \\ &= \dim E(S_1) + \dim E(S_2) = \dim Q_1 + \dim Q_2 .\end{aligned}$$

Nous terminerons par quelques observations sur les $\cap$-décompositions de 0 (ou de tout autre sous-module, par passage aux quotients).

Au cours de l'étude du théorème 3 du § 4 il a été établi que, dans un module M riche en co-irréductibles, il était possible de trouver une $\cap$-décomposition irréductible réduite de 0:

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i$$

sur toute somme directe maximale de co-irréductibles

$$S = \bigoplus_{i \in I} C_i$$

donnée dans M, c'est-à-dire telle que:

$$\forall\, i \in I, \quad X_i \text{ contienne } \overline{C}_i = \bigoplus_{j \neq i} C_j, \quad \overline{X}_i = \bigcap_{j \neq i} X_i \text{ contienne } C_i;$$

et dans ce cas:

$$\operatorname{card} I = \dim M .$$

De telles $\cap$-décomposition sont caractérisées par le fait que la famille indépendante de co-irréductibles associés $(\overline{X}_i)_{i \in I}$ est *maximale*.

Problème. Dans un module quelconque (pas nécessairement riche en co-irréductibles, mais *non privé* de co-irréductibles) est-il possible de trouver une $\cap$-décomposition irréductible réduite de 0? (nous pensons que c'est probablement impossible).

Par passage aux enveloppes injectives, il suffit d'étudier ce problème pour les seuls modules *injectifs*.

Les théorèmes 3 et 6 permettent, touchant cette question, d'énoncer:

Proposition 8. *Soient M un module* riche *en co-irréductibles et:*

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i, \quad 0 = \bigcap_{j \in J} Y_j$$

deux $\cap$-décompositions irréductibles réduites *de* 0 *sur des familles indépendantes* maximales *de co-irréductibles; il existe alors une* bijection $I \xrightarrow{\sigma} J$ *et un* isomorphisme φ *de*

$$\bigoplus_{i \in I} E(M \mid X_i) \quad \text{sur} \quad \bigoplus_{j \in J} E(M \mid Y_j)$$

tels que:

$$\forall\, i \in I, \quad \varphi\big(E(M \mid X_i)\big) = E(M \mid Y_{\sigma(i)}) .$$

En effet, le théorème 6 montre que les sommes directes:

$$\bigoplus_{i \in I} E(\overline{X}_i) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{j \in J} E(\overline{Y}_j)$$

sont isomorphes, $E(\overline{X}_i)$ et $E(\overline{Y}_j)$ étant des enveloppes injectives de

$$\overline{X}_i = \bigcap_{\lambda \neq i} X_\lambda \quad \text{et de} \quad \overline{Y}_j = \bigcap_{\mu \neq j} Y_\mu .$$

D'autre part $\overline{X}_i \cap X_i = 0$ entraîne que $\overline{X}_i \approx (X_i \oplus \overline{X}_i)\,|\,X_i$ (sous-module non nul du module co-irréductible $M\,|\,X_i$); ce qui signifie que les enveloppes injectives de $\overline{X}_i$ et de $M\,|\,X_i$ sont isomorphes.

Remarque 1. Lorsque les $\cap$-décompositions irréductibles réduites de 0,

$$0 = \bigcap_{i \in I} X_i, \qquad 0 = \bigcap_{j \in J} Y_j ,$$

définissent des familles indépendantes *non maximales* de co-irréductibles

$$\left(\bigcap_{\lambda \neq i} X_\lambda\right)_{i \in I}, \qquad \left(\bigcap_{\mu \neq j} Y_\mu\right)_{j \in J},$$

le problème de l'égalité des cardinaux de I et de J se pose.

Observons à ce sujet que, dans son fascicule d'algèbre linéaire (cf. [2]), BOURBAKI propose, au § e) de l'exercice 23 p. 271 et sans condition explicite de finitude, d'établir l'égalité de ces cardinaux en utilisant l'exercice 21 d); ce dernier exercice suppose (explicitement) que les familles d'injectifs indécomposables considérées sont *finies*. D'ailleurs, la preuve de l'exercice 21 d) utilise à son tour l'exercice 16 b) qui donne l'intéressante caractérisation suivante:

«Une famille de sous-modules $\cap$-irréductibles $(E_\lambda)_{\lambda \in L}$ d'un module F, est une décomposition irréductible réduite de 0 dans F si, et seulement si, l'homomorphisme canonique

$$F \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{\lambda \in L} (F\,|\,E_\lambda)$$

est essentiel»; aucune condition supplémentaire n'apparaît dans le libellé de cet exercice; or, φ n'est défini que sous l'une hypothèses suivantes:

a) φ est *restreint* au sous-module F_0 de F constitué des éléments x de F pour lesquels il n'existe qu'un nombre *fini* d'indices λ pour lesquels $x \notin E_\lambda$. Dans ce cas l'assertion annoncée est vraie.

b) La somme directe

$$\bigoplus_{\lambda \in L} (F\,|\,E_\lambda)$$

est remplacée par le *produit*

$$\prod_{\lambda \in L} (F\,|\,E_\lambda);$$

mais alors φ n'est pas essentiel pour toutes les $\cap$-décompositions réduites de 0: soit

$$F = \bigoplus_{\lambda \in L} G_\lambda ,$$

où G_λ est, pour tout λ, un Z-module isomorphe au p-groupe abélien de type p^∞ (indécomposable et divisible); posons

$$E_\lambda = \bigoplus_{\mu \neq \lambda} G_\mu .$$

$(E_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une $\cap$-décomposition réduite de 0;

$$F \xrightarrow{\varphi} \prod_{\lambda \in L} (F \mid E_\lambda) \approx \prod_{\lambda \in L} G_\lambda$$

est le plongement canonique de F dans

$$\prod_{\lambda \in L} G_\lambda ,$$

et le Z-module injectif

$$\prod_{\lambda \in L} G_\lambda$$

n'est pas extension essentielle du Z-module *injectif* F, si $\operatorname{card} L = \infty$.

Remarque 2. Nous n'avons pas abordé, dans ce travail, l'étude particulière des anneaux riches en idéaux (à gauche) co-irréductibles; signalons, à ce sujet, que RENAULT a établi tout récemment le résultat suivant: dans un anneau réduit A et riche en idéaux à gauche co-irréductibles, la relation $Ax \cap Ay = (0)$ implique $xy = yx = 0$ (cf. [15]).

VII. Résultats récents

Nous présentons, dans ce dernier paragraphe, les récents travaux de CHAMARD et CAILLEAU portant sur les modules riches en co-irréductibles. Nous ne proposons ici que les principaux résultats, et nous prions le lecteur de bien vouloir se reporter aux mémoires originaux pour les démonstrations et les dévéloppements complets (cf. [17] et [18]).

1. Compléments et modules riches en co-irréductibles, CHAMARD [18]

Les modules riches en co-irréductibles sont caractérisés par des propriétés portant sur leurs sous-modules compléments, au moyen de chaines croissantes bien ordonnées de sous-modules compléments.

Soit $(K_i)_{i \in I}$ un ensemble totalement ordonné de sous-modules compléments deux à deux distincts d'un A-module à gauche M; on définit sur I une relation d'ordre total en convenant de prendre $j \leqq i$ si K_j est inclus dans K_i; on dit que $(K_i)_{i \in I}$ est une *chaîne croissante bien ordonnée de sous-modules compléments de* M si cet ordre est un bon ordre.

La caractérisation obtenue est la suivante:

Théorème 4.1 de [18]. *Soit un A-module à gauche M; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) M est riche en co-irréductibles.

2) Il existe une chaîne croissante bien ordonnée maximale *de compléments dans M.*

Dans ces conditions, la *dimension de M* (au sens donné au paragraphe VI) est égale à la *longueur* de cette chaîne.

Ces chaînes croissantes bien ordonnées maximales de compléments (lorsqu'elles existent) possèdent des propriétés analogues à celles exprimées par les théorèmes de SCHREIER et de JORDAN-HÖLDER pour les suites de composition d'un module.

Les résultats se précisent lorsque le module M considéré est *bien complémenté*, c'est-à-dire est tel que l'intersection de deux sous-modules compléments est un sous-module complément (pour de tels modules cf. RENAULT dans [16]).

Corollaire 6.1 de [18]. *Soit M un A-module bien complémenté, tel qu'il existe une somme (non nécessairement directe!) de sous-modules co-irréductibles $(C_i)_{i\in I}$ essentielle dans M; alors M est riche en co-irréductibles.*

En particulier, si M est bien complémenté et est engendré par ses sous-modules co-irréductibles, alors M est riche en co-irréductibles.

Un module riche en co-irréductibles est dit *π-isotypique* si tous ses sous-modules co-irréductibles sont de type π (i.e. les enveloppes injectives de ces sous-modules sont des modules injectifs indécomposables tous isomorphes, et de type π).

Théorème 6.2 de [18]. *Soient M un A-module bien complémenté et π un type de A-module injectif indécomposable. Alors M possède un plus grand sous-module π-isotypique.*

Théorème 6.3 de [18]. *Soient M un A-module bien complémenté et σ l'ensemble des types de A-module injectifs indécomposables. Alors la somme*

$$\sum_{\pi\in\sigma} M_\pi$$

est directe (certains des M_π pouvant être nuls).

Théorème 6.5 de [18]. *Soit M un A-module bien complémenté somme directe de sous-modules injectifs indécomposables. Pour tout sous-module K de M, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1) K est un complément dans M.

2) K est somme directe d'injectifs indécomposables.

3) K est facteur direct de M.

2. Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles, CAILLEAU [17]

Soient M un A-module et $\mathscr{A}$ l'anneau des endomorphismes de M; le sous-ensemble $J(M)$ de $\mathscr{A}$ constitué des endomorphismes φ tels que $\ker\varphi$ soit essentiel dans M est un idéal bilatère de $\mathscr{A}$; *l'anneau associé à* M est, par définition, l'anneau quotient $S(M)=\mathscr{A}\,|\,J(M)$. Rappelons que si M est un module quasi injectif, $J(M)$ coïncide avec le radical de Jacobson de $\mathscr{A}$, et $S(M)$ est un anneau régulier (au sens de VON NEUMANN); et que si M est injectif indécomposable, $S(M)$ est un corps — dit *corps associé* au type d'injectif indécomposable considéré —.

LESIEUR et CROISOT (cf. [9]) ont décrit la structure de l'anneau $S(M)$ lorsque M est un A-module injectif de dimension *finie*; CAILLEAU donne la structure de $S(M)$, lorsque M est injectif et riche en co-irréductibles, plus précisément:

Théorème 2.3 de [17]. *Soit M un A-module riche en co-irréductibles et soit $(\pi_\lambda,\ \lambda\in\Lambda)$ l'ensemble des types de sous-modules injectifs indécomposables de M; l'anneau $S(M)$ associé à M est un anneau régulier au sens de* VON NEUMANN, *self-injectif à droite, isomorphe à l'anneau produit*

$$\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{L}_\lambda,$$

où, pour tout λ appartenant à Λ, $\mathscr{L}_\lambda$ est l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel sur le corps associé au type π_λ, dont la dimension (non nécessairement finie) est égale à $\dim_{\pi_\lambda}E$.

Ce théorème donne en particulier la structure de l'anneau associé à un *module injectif* quelconque sur un *anneau noethérien*, puisque tout module sur un anneau noethérien est riche en co-irréductibles (cf. plus haut, § IV).

Théorème 3.1 de [17]. *Le socle gauche de l'anneau $S(M)$ associé à un A-module injectif M riche en co-irréductibles, est essentiel dans le $S(M)$-module à gauche $S(M)_s$.*

D'où il résulte en particulier que $S(M)_s$ est un $S(M)$-module à gauche riche en co-irréductibles. Des propriétés analogues sont obtenues «à droite», car les socles gauche et droite de $S(M)$ coïncident ici ($S(M)$ étant un anneau régulier).

De très intéressantes correspondances biunivoques sont établies entre les *types* de sous-modules injectifs indécomposables d'un module injectif riche en co-irréductibles et les types d'idéaux à gauche (respectivement à droite) *simples* de son anneau associé.

Bibliographie

1. AZUMAYA, G.: Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem. Nagoya Math. J. **1**, 117—124 (1950).
2. BOURBAKI, N.: Eléments de mathématique, livre II, chap. 2, algèbre linéaire, 3e éd. Actualités Scientifiques et Industrielles. Paris: Hermann 1962.
3. ECKMANN, B., u. A. SCHOPF: Über injektive Moduln. Arch. der Math. **4**, 75—78 (1953).

4. FORT, J.: Contribution à l'étude des éléments tertiaires et isotypiques dans les modules et les ($\mathscr{T}$)-algèbres. Bull. Soc. math. France, mémoire 1, 1964; thèse.
5. JACOBSON, N.: Structure of rings. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 37, 2e éd., 1964.
6. GOLDIE, A. W.: The structure of prime rings under ascending chain conditions. Proc. London Math. Soc. **8**, 589—608 (1958).
7. — Semi-prime rings with maximum condition. Proc. London Math. Soc. **10**, 201—220 (1960).
8. LESIEUR, L., et R. CROISOT: Algèbre noetherienne non commutative. Mémor. Sc. math. Fasc. 154. Paris: Gauthier-Villars 1963.
9. — — Coeur d'un module. J. de math. pures et appl. **42**, 367—407 (1963).
10. MATLIS, E.: Injective modules over noetherian rings. Pacif. J. of Math. **8**, 511—528 (1958).
11. RENAULT, G.: Sous-modules compléments dans un A-module M. C. R. Acad. Sc. **256**, 3222—3225 (1963).
12. — Etude des sous-modules compléments dans un A-module. Sém. P. DUBREIL, M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, C. PISOT, 11 avril 1963, Paris.
13. FORT, J.: Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. C. R. Acad. Sc. Paris **262**, 1239—1242 (1966).
14. — Sommes directes de sous-modules co-irréductibles d'un module. Séminaire DUBREIL-PISOT; 20e année, 1966/67, n° 3, Paris.
15. RENAULT, G.: Anneau sans nilpotents. Séminaire DUBREIL-PISOT, 20e année, 1966/67, n° 1, Paris.
16. — Etude des sous-modules compléments dans un module. Thèse, Paris 1966, à paraître au Bull. Soc. Math. F., série «mémoires».
17. CAILLEAU, A.: Anneau associé à un module injectif riche en co-irréductibles. Thèse doct. 3e cycle, Poitiers, Juin 1967 — note au C. R. Acad. Sc. Paris, à paraître en Juin 1967 — exposé Sém. DUBREIL-PISOT, Paris, mai 1967.
18. CHAMARD, J. Y.: Compléments et modules riches en co-irréductibles. Thèse Doct. 3e cycle, Poitiers, Juin 1967 — note au C. R. Acad. Sc. Paris à paraître en Juin 1967.
19. NASTASESCU, C., et N. POPESCU: Sur la structure des objects de certaines catégories abéliennes. Note C. R. Acad. Sc. Paris **262**, 1295—1297 (1966).
20. MIYASHITA, Y.: Quasi projective modules, Perfect modules and a theorem for modular lattices. Journal Fac. Sci. Hokkaido University — Math. **12**, 86—110 (1966).

Prof. Dr. J. FORT
7 rue Léon Edoux
86 Poitiers (France)

Math. Zeitschr. 103, 389—398 (1968)

Zur Theorie der Deformationen komplexer Räume

HANS KERNER

Eingegangen am 17. Juli 1967

Einleitung

In den letzten zehn Jahren entstand in zahlreichen Arbeiten eine umfangreiche Theorie der Deformationen kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. Die dabei verwendeten Methoden stützen sich wesentlich auf die Existenz lokaler Koordinatensysteme in komplexen Mannigfaltigkeiten. Sie sind daher nicht ohne weiteres auf komplexe Räume übertragbar. Vor einigen Jahren entwickelte GRAUERT [2, 3] garbentheoretische Methoden, mit denen auch Deformationen von Singularitäten behandelt werden können. In dieser Note sollen einige Untersuchungen von [3] weitergeführt werden.

Ist $\pi\colon X \to M$ eine holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X auf eine komplexe Mannigfaltigkeit M, so kann man jede Faser

$$X_t := \overset{-1}{\pi}(t), \qquad t \in M,$$

in natürlicher Weise mit einer komplexen Struktur versehen. Durch $\pi\colon X \to M$ wird also eine Familie komplexer Räume X_t, $t \in M$, gegeben. Sie heißt reduziert, wenn alle Fasern X_t reduziert sind. In der Theorie der Deformationen komplexer Räume betrachtet man vor allem platte reduzierte Familien.

Es wird gezeigt, daß eine reduzierte Familie $\pi\colon X \to M$ genau dann platt ist, wenn π eine offene Abbildung ist (vgl. dazu auch KIEHL [4], S. 4).

Ein reduzierter komplexer Raum X_0 heißt in einem Punkt $x \in X_0$ starr, wenn jede platte reduzierte Familie $\pi\colon X \to M$, die X_0 als Faser über einem Punkt $0 \in M$ enthält, in einer Umgebung von x lokal-trivial ist. Das bedeutet, daß in einer Umgebung von x alle benachbarten Fasern X_t zu X_0 biholomorph äquivalent sind. In [3] wurde die Garbe $\mathscr{T}_1(X_0)$ der infinitesimalen Deformationen eines komplexen Raumes X_0 eingeführt und bewiesen: Läßt man nur eindimensionale Parametermannigfaltigkeiten M zu, so folgt aus dem Verschwinden der Garbe $\mathscr{T}_1(X_0)$ die Starrheit des komplexen Raumes X_0. In dieser Note wird gezeigt, daß diese Aussage auch für Mannigfaltigkeiten M beliebiger Dimension richtig ist.

Ist $\pi\colon X \to M$ eine platte reduzierte Familie und X_0 die Faser über einem Punkt $0 \in M$, so gibt es nach [3], S. 255, einen natürlichen Homomorphismus der Garbe $\mathscr{T}^*(M)$ der nach X gelifteten holomorphen Vektorfelder von M in die Garbe $\mathscr{T}_1(X_0)$ der infinitesimalen Deformationen von X_0. Man sagt, eine infinitesimale Deformation $\zeta \in \mathscr{T}_1(X_0)$ kommt in der Familie $\pi\colon X \to M$ vor,

wenn ζ im Bild von $\mathscr{T}^*(M)$ liegt. Die Familie heißt in einem Punkt $x \in X_0$ vollständig, wenn der Homomorphismus $\mathscr{T}^*(M)_x \to \mathscr{T}_1(X_0)_x$ surjektiv ist. Es wird gezeigt, daß eine platte reduzierte Familie $\pi: X \to M$ in jedem gewöhnlichen Punkt von X vollständig ist.

§ 1. Die Plattheit von Familien

Wir erläutern zunächst einige Begriffe (vgl. dazu [3]). Im folgenden sei immer mit $(X, \mathscr{H})$ ein komplexer Raum im Sinne von GRAUERT [2] sowie mit $(M, \mathscr{O})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit bezeichnet. Es sei $\mathfrak{m}_t$ die maximale Idealgarbe aller in einem Punkt $t \in M$ verschwindenden Elemente von $\mathscr{O}$. Ist $\pi: X \to M$ eine holomorphe Abbildung und $t \in M$, so wird die Faser $X_t := \pi^{-1}(t)$ folgendermaßen mit einer komplexen Struktur versehen: Bedeutet $(\mathfrak{m}_t \circ \pi)$ die durch die Elemente $g \circ \pi$, $g \in \mathfrak{m}_t$, in $\mathscr{H}$ erzeugte Untergarbe, so setzt man $\mathscr{H}^t := \mathscr{H}/(\mathfrak{m}_t \circ \pi)|X_t$. Dann ist $(X_t, \mathscr{H}^t)$ ein komplexer Raum. Wir denken uns X_t immer mit dieser komplexen Struktur versehen und schreiben an Stelle von $(X_t, \mathscr{H}^t)$ meist nur X_t.

Die Familie $\pi: X \to M$ heißt *reduziert*, wenn alle X_t reduziert sind.

Die Garbe $\mathscr{H}$ kann als $\mathscr{O}$-Garbe aufgefaßt werden. Eine Familie $\pi: X \to M$ heißt in einem Punkt $x \in X$ *platt*, wenn $\operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_t}(\mathscr{H}_x, \mathscr{O}_t/\mathfrak{m}_t) = 0$ ist, wobei $t := \pi(x)$ gesetzt wurde. Die Familie heißt platt, wenn sie in jedem Punkt $x \in X$ platt ist.

Zunächst sei M ein Gebiet in der komplexen Zahlenebene $C^1(t)$. Ist dann $\pi: X \to M$ eine holomorphe Abbildung und $t_0 \in M$, so ist für $h \in \mathscr{H}_{x_0}$, $\pi(x_0) = t_0$, eine Multiplikation $(t - t_0)h := (\pi - t_0)h$ definiert. Den Homomorphismus $h \mapsto (t - t_0)h$ bezeichnen wir mit $t - t_0: \mathscr{H}_{x_0} \to \mathscr{H}_{x_0}$. Wir notieren der Vollständigkeit halber (s. [3], Hilfssatz 2.2):

Hilfssatz 1. *Eine Familie $\pi: X \to M$ mit $\dim M = 1$ ist in einem Punkt $x_0 \in X$ genau dann platt, wenn der Homomorphismus $t - t_0: \mathscr{H}_{x_0} \to \mathscr{H}_{x_0}$ injektiv ist.*

Beweis. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathscr{O} \xrightarrow{t - t_0} \mathscr{O} \to \mathscr{O}/\mathfrak{m}_{t_0} \to 0$$

folgt die exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^{\mathscr{O}_{t_0}}(\mathscr{H}_{x_0}, \mathscr{O}_{t_0}/\mathfrak{m}_{t_0}) \to \mathscr{H}_{x_0} \xrightarrow{t - t_0} \mathscr{H}_{x_0}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Eine Familie $\pi: X \to M$ mit $\dim M = 1$ und reduzierter Faser X_0 ist in einem Punkt $x_0 \in X_0$ genau dann platt, wenn die Abbildung π in einer Umgebung von x_0 offen ist.*

Beweis. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, dürfen wir wieder annehmen, M sei ein Gebiet in der komplexen Ebene $C^1(t)$. Ist π in keiner Umgebung von x_0 offen, so ist die Funktion π auf einer durch x_0 gehenden irreduziblen Komponente von X konstant. Dann gibt es einen Funktionskeim $h \neq 0$ aus $\mathscr{H}_{x_0}$, der auf den anderen irreduziblen Komponenten verschwindet.

Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz existiert eine natürliche Zahl r, so daß $t^r \cdot h = 0$ ist. Wählt man r minimal, so ist $t^{r-1} \cdot h \neq 0$ und daraus folgt, daß $t: \mathscr{H}_{x_0} \to \mathscr{H}_{x_0}$ nicht injektiv ist. Dann ist $\pi: X \to M$ wegen Hilfssatz 1 in x_0 nicht platt.

Wir nehmen nun umgekehrt an, π sei in einer Umgebung von x_0 offen und es gelte $t \cdot h_{x_0} = 0$ für ein $h_{x_0} \in \mathscr{H}_{x_0}$. Der Funktionskeim h_{x_0} werde durch eine in einer Umgebung $U(x_0)$ holomorphe Funktion h repräsentiert. Wir dürfen annehmen, daß $\pi | U$ offen ist und alle irreduziblen Komponenten von U durch x_0 gehen. Wäre $h(x) \neq 0$ für ein $x \in X_0 \cap U$, so würde π in einer Umgebung von x den Wert 0 annehmen, wäre also auf einer irreduziblen Komponente von U konstant. Dann wäre aber $\pi | U$ nicht offen. Daher ist $h(x) = 0$ für alle $x \in X_0 \cap U$. Weil X_0 reduziert ist, folgt daraus $h_{x_0} = t \cdot h_1$ mit einem $h_1 \in \mathscr{H}_{x_0}$. Entsprechend zeigt man $h_1 = t \cdot h_2$ mit $h_2 \in \mathscr{H}_{x_0}$. Zu jeder natürlichen Zahl r existiert ein $h_r \in \mathscr{H}_{x_0}$, so daß $h_{x_0} = t^r \cdot h_r$ ist. Aus dem Krullschen Lemma folgt dann $h_{x_0} = 0$. Daher ist $t: \mathscr{H}_{x_0} \to \mathscr{H}_{x_0}$ injektiv, also $\pi: X \to M$ wegen Hilfssatz 1 in x_0 platt. Damit ist Hilfssatz 2 bewiesen.

Zusammen mit [3], Satz 2.5, erhält man als

Folgerung. *Ist die Familie $\pi: X \to M$ mit $\dim M = 1$ in einem Punkt $x \in X$ platt und reduziert, so ist sie in einer ganzen Umgebung von x platt und reduziert.*

Diese Aussage ist ein Spezialfall eines von FRISCH [1] bewiesenen Satzes.

Wir behandeln nun den Fall $\dim M > 1$.

Ist M' eine Untermannigfaltigkeit von M, und $\pi: X \to M$ eine Familie, so bezeichnet man die Familie

$$\pi | \overset{-1}{\pi}(M') \to M' \quad \text{mit} \quad X | M'.$$

Es gilt:

Hilfssatz 3. *Ist $M \subset C^n$ ein Polyzylinder, $n \geqq 2$, und $\pi: X \to M$ eine reduzierte Familie, so ist $\pi: X \to M$ genau dann platt, wenn für alle 1-codimensionalen Untermannigfaltigkeiten $M' \subset M$ die Familie $X | M'$ platt ist.*

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ ein beliebiger Punkt. Wir dürfen $\pi(x_0) = (0, \ldots, 0)$ annehmen und setzen $M' := \{t_1 = 0\}$, wobei $t_1, \ldots, t_n$ das Koordinatensystem in C^n sei. In [3], Satz 2.1, wurde gezeigt: $\pi: X \to M$ ist in

$$x_0 \in \overset{-1}{\pi}(M')$$

genau dann platt, wenn $X | M'$ in x_0 platt und die Multiplikation $t_1: \mathscr{H}_{x_0} \to \mathscr{H}_{x_0}$ injektiv ist. Zum Beweis unseres Hilfssatzes ist daher nur noch zu zeigen: Ist für jede 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit $M'' \subset M$ die Familie $X | M''$ platt, so ist $t_1: \mathscr{H}_{x_0} \to \mathscr{H}_{x_0}$ injektiv. Nun gelte $t_1 \cdot h = 0$ für eine in einer Umgebung $U(x_0)$ holomorphe Funktion h. Wir setzen

$$X' := \overset{-1}{\pi}(M').$$

Wäre $h(x)\neq 0$ für ein $x\in X'\cap U$, so seien $(0, t_2', \ldots, t_n')$ die Koordinaten von $\pi(x)$ und es werde $M'':=\{t_2-t_2'=0\}$ gesetzt. Dann ist

$$h|\overset{-1}{\pi}(M'')\cap U\neq 0 \quad \text{und} \quad t_1\cdot h|\overset{-1}{\pi}(M'')\cap U=0,$$

also wäre $X|M''$ nach [3], Hilfssatz 2.2, nicht platt. Daher gilt $h(x)=0$ für alle $x\in X'\cap U$. Weil die Familie $X|M'$ platt und reduziert ist, folgt aus [3], Satz 2.4, daß X' ein reduzierter komplexer Raum ist. Somit existiert ein $h_1\in\mathscr{H}_{x_0}$, so daß $(h)_{x_0}=t_1\cdot h_1$ ist. Analog zeigt man, daß es zu jeder natürlichen Zahl r ein $h_r\in\mathscr{H}_{x_0}$ gibt mit $(h)_{x_0}=t_1^r\cdot h_r$. Daraus folgt $(h)_{x_0}=0$, also ist $t_1\colon \mathscr{H}_{x_0}\to\mathscr{H}_{x_0}$ injektiv.

Nach einem Satz von KIEHL [4] ist jeder platte Morphismus offen. Für den hier behandelten Spezialfall einer reduzierten Familie gilt auch die Umkehrung:

Satz 1. *Eine reduzierte Familie $\pi\colon X\to M$ ist genau dann platt, wenn π eine offene Abbildung ist.*

Beweis. Es sei $\pi\colon X\to M$ eine reduzierte Familie und π eine offene Abbildung. Zu zeigen ist die Plattheit von $\pi\colon X\to M$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach $n=\dim M$. Man darf annehmen, daß M ein Polyzylinder ist. Für $n=1$ folgt die Behauptung aus Hilfssatz 2. Es sei nun $n\geqq 2$ und der Satz sei für die Dimension $n-1$ richtig. Für jede 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit M' von M ist die Abbildung

$$\pi|\overset{-1}{\pi}(M')\longrightarrow M'$$

offen und die Familie $X|M'$ reduziert. Nach Induktionsannahme ist dann die Familie $X|M'$ platt. Daraus folgt wegen Hilfssatz 3, daß auch $\pi\colon X\to M$ platt ist.

Die Umkehrung ergibt sich aus dem oben zitierten Satz von KIEHL. In dem uns interessierenden Fall erhält man die Aussage auch folgendermaßen: Ist x ein gewöhnlicher Punkt einer Faser X_t, so folgt aus [3], Satz 2.3, daß die Codimension von X_t in x gleich der Dimension von M ist. Die Menge der gewöhnlichen Punkte von X_t liegt dicht im reduzierten komplexen Raum X_t; daher ist in jedem Punkt von X der Rang der Abbildung π gleich der Dimension von M. Nach REMMERT [5], Satz 28, ist dann π eine offene Abbildung.

§ 2. Lokal-triviale Familien

Es sei G ein Gebiet im C^n mit der Strukturgarbe $\mathcal{O}$; mit $\Omega(G)$ bezeichnen wir die Garbe der Keime holomorpher Pfaffscher Formen auf G. Ist X eine analytische Menge in G und $\mathscr{I}\subset\mathcal{O}$ eine kohärente Idealgarbe, deren Nullstellengebilde gleich X ist, so wird durch $\mathscr{H}:=\mathcal{O}/\mathscr{I}|X$ eine Strukturgarbe auf X definiert. Es sei

$$(\Omega_{\mathscr{I}})_x:=\left\{\sum_{\rho=1}^{r} h_\rho\, df_\rho+\sum_{\sigma=1}^{s} g_\sigma\varphi_\sigma\in(\Omega(G))_x\colon f_\rho, g_\sigma\in\mathscr{I}_x,\ h_\rho\in\mathcal{O}_x,\ \varphi_\sigma\in(\Omega(G))_x\right\}$$

für $x \in G$. Dann heißt $\Omega(X) := \Omega(G)/\Omega_{\mathscr{J}} | X$ die Garbe der Keime holomorpher Pfaffscher Formen auf $(X, \mathscr{H})$. Ist $(X', \mathscr{H}')$ ein komplexer Unterraum von $(X, \mathscr{H})$ und $\mathscr{J}' \subset \mathscr{H}$ die Idealgarbe von X' bezüglich X, so sei für $x \in X$ analog definiert:

$$(\Omega_{\mathscr{J}'})_x := \{\sum_\rho h_\rho \, df_\rho + \sum_\sigma g_\sigma \, \varphi_\sigma \in (\Omega(X))_x : f_\rho, g_\sigma \in \mathscr{J}'_x, h_\rho \in \mathscr{H}_x, \varphi_\sigma \in (\Omega(X))_x\}.$$

Wir zeigen zunächst:

Hilfssatz 4. $\Omega(X') \cong \Omega(X)/\Omega_{\mathscr{J}'} | X'$.

Beweis. Ist $\mathscr{J}' \subset \mathscr{O}$ die Idealgarbe von X' bezüglich G, so gilt nach Definition: $\Omega(X) = \Omega(G)/\Omega_{\mathscr{J}} | X$ und $\Omega(X') = \Omega(G)/\Omega_{\mathscr{J}'} | X'$. Wegen $\Omega_{\mathscr{J}} \subset \Omega_{\mathscr{J}'}$ hat man einen Epimorphismus $\Omega(X) \to \Omega(X')$, dessen Kern aus dem Bild von $\Omega_{\mathscr{J}'}$ bei $\Omega(G) \to \Omega(X)$ besteht. Dieses Bild ist aber gleich $\Omega_{\mathscr{J}'}$. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Nun sei $(X, \mathscr{H})$ ein komplexer Raum, $(M, \mathscr{O})$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, $\pi : X \to M$ eine holomorphe Abbildung und M' eine Untermannigfaltigkeit von M. Wir setzen

$$X' := \overset{-1}{\pi}(M')$$

und bezeichnen die Familie $\pi | X' \to M'$ wieder mit $X | M'$. Dabei ist X' mit der induzierten Struktur $\mathscr{H}'$ zu versehen.

Ist $\Omega^*(M)$ die analytische Urbildgarbe von $\Omega(M)$ bezüglich $\pi : X \to M$, so hat man nach [3], Satz 3.1, eine Injektion $\Omega^*(M) \to \Omega(X)$. Die Quotientengarbe $\Omega(X)/\Omega^*(M)$ bezeichnet man mit $\Omega(X/M)$; die analytische Beschränkung von $\Omega(X/M)$ auf X' mit $\Omega(X/M) |_a X'$. Analog zu [3], Satz 3.2, gilt:

Hilfssatz 5. $\Omega(X/M) |_a X' \cong \Omega(X'/M')$.

Beweis. Bezeichnet man wieder mit $\mathscr{J}'$ die Idealgarbe von $X' \subset X$, so ist wegen Hilfssatz 4

$$0 \to \Omega^*(M') \to \Omega(X)/\Omega_{\mathscr{J}'} \to \Omega(X'/M') \to 0$$

exakt. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \Omega^*(M) \to \Omega(X) \to \Omega(X/M) \to 0$$

erhält man durch analytische Beschränkung auf X' die Exaktheit von

$$\Omega(M) \otimes \mathscr{H}' \to \Omega(X)/(\mathscr{J}' \cdot \Omega(X)) \to \Omega(X/M) |_a X' \to 0.$$

Ist $\hat{\mathscr{J}}$ die Idealgarbe von $M' \subset M$, so ergibt sich aus

$$0 \to \Omega_{\hat{\mathscr{J}}} \to \Omega(M) \to \Omega(M') \to 0$$

folgendes exakte kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega_{\hat{\mathscr{J}}} \otimes \mathscr{H}' & = & \Omega_{\hat{\mathscr{J}}} \otimes \mathscr{H}' & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}' & \to & \Omega(X)/(\mathscr{J}' \cdot \Omega(X)) & \to & \Omega(X/M)\,|_a X' & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
\Omega^*(M') & \to & \Omega(X)/\Omega_{\mathscr{J}'} & \to & \Omega(X'/M') & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Man definiert:

Definition. *Eine Familie* $\pi\colon X \to M$ *heißt in einem Punkt* $x \in X_t \subset X$ *lokal-trivial, wenn es Umgebungen* $U(x)$ *in* X *und* $V(t)$ *in* M *und eine biholomorphe Abbildung* $\varphi\colon U \to V \times (X_t \cap U)$ *gibt mit* $\mathrm{pr}_V \circ \varphi = \pi$. *Dabei bedeutet* $\mathrm{pr}_V\colon V \times (X_t \cap U) \to V$ *die Projektion.*

Ist $\pi\colon X \to M$ eine platte reduzierte Familie, so setzt man

$$\Theta_1 := \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\Omega(X/M), \mathscr{H}).$$

Dann gilt (vgl. [3], Satz 3.3):

Satz 2. *Es sei* $\pi\colon X \to M$ *eine platte reduzierte Familie und es gelte* $(\Theta_1)_x = 0$ *für ein* $x \in X$. *Ist dann* $\tilde{\pi}\colon \tilde{X} \to \tilde{M}$ *eine platte reduzierte Familie,* M *eine Untermannigfaltigkeit von* $\tilde{M}$ *und gilt* $X = \tilde{X}\,|\,M$, *so ist die Familie* $\tilde{\pi}\colon \tilde{X} \to \tilde{M}$ *in* x *lokal-trivial.*

Beweis. Es sei $\tilde{\mathscr{H}}$ die Strukturgarbe von $\tilde{X}$ und $\tilde{\Theta}_1 := \mathrm{Ext}^1_{\tilde{\mathscr{H}}}(\Omega(\tilde{X}/\tilde{M}), \tilde{\mathscr{H}})$. Wir zeigen zuerst: Ist M eine 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit von $\tilde{M}$, so gibt es einen injektiven Homomorphismus

$$\gamma\colon \tilde{\Theta}_1\,|_a X \to \Theta_1.$$

In einer Umgebung des Punktes $x \in \tilde{X}$ gibt es eine exakte Sequenz $0 \to \tilde{\mathscr{M}} \to \tilde{\mathscr{F}} \to \Omega(\tilde{X}/\tilde{M}) \to 0$, wobei $\tilde{\mathscr{F}}$ eine freie $\tilde{\mathscr{H}}$-Garbe ist. Wir setzen $\mathscr{F} := \tilde{\mathscr{F}}\,|_a X$ und $\mathscr{M} := \tilde{\mathscr{M}}\,|_a X$, sowie $\mathscr{K} := \mathrm{Ker}(\mathscr{M} \to \mathscr{F})$ und $\mathscr{M}^* := \mathrm{Im}(\mathscr{M} \to \mathscr{F})$. Dann ist $\mathscr{F}$ eine freie $\mathscr{H}$-Garbe und die Sequenzen $0 \to \mathscr{K} \to \mathscr{M} \to \mathscr{M}^* \to 0$ und $\mathrm{Tor}_1^{\tilde{\mathscr{H}}}(\Omega(\tilde{X}/\tilde{M}), \mathscr{H}) \to \mathscr{M} \to \mathscr{F}$ sind exakt. Ist y ein gewöhnlicher Punkt einer Faser X_t, so ist die Familie $\tilde{\pi}\colon \tilde{X} \to \tilde{M}$ nach [3], Satz 2.3, in y lokal-trivial. Wegen [3], Hilfssatz 3.1, ist dann in y die Garbe $\Omega(\tilde{X}/\tilde{M})$ frei, also

$$\mathrm{Tor}_1^{\tilde{\mathscr{H}}}(\Omega(\tilde{X}/\tilde{M}), \mathscr{H})_y = 0;$$

daher ist auch $\mathscr{K}_y = 0$. Der Träger $|\mathscr{K}|$ von $\mathscr{K}$ ist eine analytische Menge in X. Weil die gewöhnlichen Punkte der Fasern X_t in X überall dicht liegen, ist $|\mathscr{K}|$ nirgends dicht. $\mathscr{K}$ ist also eine Torsionsgarbe und daher gilt $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{K}, \mathscr{H}) = 0$. Somit folgt aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{M}^*, \mathscr{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{M}, \mathscr{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{K}, \mathscr{H}),$$

daß $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{M}^*, \mathscr{H}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{M}, \mathscr{H})$ ist. Dann erhält man aus den exakten Sequenzen

$$0 \to \tilde{\mathscr{M}} \to \tilde{\mathscr{F}} \to \Omega(X/\tilde{M}) \to 0$$

$$0 \to \mathscr{M}^* \to \mathscr{F} \to \Omega(X/M)\,|_a X \to 0$$

wegen Hilfssatz 5 das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{H}}}(\tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathscr{H}}) & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{H}}}(\tilde{\mathscr{M}}, {}^{!}\tilde{\mathscr{H}}) & \xrightarrow{\varphi_2} & \tilde{\Theta}_1 \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{F}, \mathscr{H}) & \xrightarrow{\psi_1} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{M}, {}^{!}\mathscr{H}) & \xrightarrow{\psi_2} & \Theta_1 \to 0, \end{array}$$

wobei die Homomorphismen α und β durch den Übergang zur analytischen Beschränkung definiert sind. Daraus ergibt sich ein Homomorphismus $\tilde{\gamma}\colon \tilde{\Theta}_1 \to \Theta_1$. Ist $\mathscr{I}$ die Idealgarbe von $X \subset \tilde{X}$, so gilt $\tilde{\Theta}_1|_a X = \tilde{\Theta}_1/(\mathscr{I} \cdot \tilde{\Theta}_1)$. Der Homomorphismus $\tilde{\gamma}$ verschwindet auf $\mathscr{I} \cdot \tilde{\Theta}_1$ und man erhält einen Homomorphismus $\gamma\colon \tilde{\Theta}_1|_a X \to \Theta_1$. Ist $\tilde{\gamma}(a) = 0$ für ein $a \in \tilde{\Theta}_1$, so gibt es zu jedem Urbild

$$b \in \bar{\varphi}_2^{-1}(a)$$

ein $c \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\mathscr{F}, \mathscr{H})$ mit $\psi_1(c) = \beta(b)$. Da α surjektiv ist, existiert ein $d \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{H}}}(\tilde{\mathscr{F}}, \tilde{\mathscr{H}})$ mit $\alpha(d) = c$. Es ist $\varphi_2(b - \varphi_1(d)) = a$ und $\beta(b - \varphi_1(d)) = 0$. Somit wird $b - \varphi_1(d)$ durch ein Element $f \in \mathrm{Hom}_{\tilde{\mathscr{H}}}(\tilde{\mathscr{M}}, \mathscr{I})$ repräsentiert. Es sei $t_1, \ldots, t_n$ ein lokales Koordinatensystem in einer Umgebung von $\tilde{\pi}(x) \in \tilde{M}$, so daß M in dieser Umgebung durch $\{t_1 = 0\}$ gegeben wird. Dann ist $\mathscr{I} = t_1 \cdot \tilde{\mathscr{H}}$ und f läßt sich in der Gestalt $f = t_1 \cdot (t_1^{-1} \cdot f)$ schreiben, weil nach Hilfssatz 2.2 aus [3] der Homomorphismus $t_1\colon \tilde{\mathscr{H}} \to \tilde{\mathscr{H}}$ injektiv ist. Also gilt $b - \varphi_1(d) \in \mathscr{I} \cdot \tilde{\Theta}_1$ und daraus folgt, daß $\gamma\colon \tilde{\Theta}_1|_a X \to \Theta_1$ injektiv ist.

Daher ergibt sich aus $(\Theta_1)_x = 0$, daß $(\tilde{\Theta}_1)_x = (\mathscr{I} \cdot \tilde{\Theta}_1)_x$ ist; nach dem Krullschen Lemma gilt dann $(\tilde{\Theta}_1)_x = 0$. Für den Fall einer 1-codimensionalen Untermannigfaltigkeit $M \subset \tilde{M}$ ist damit gezeigt: Aus $(\Theta_1)_x = 0$ folgt $(\tilde{\Theta}_1)_x = 0$.

Nun sei diese Aussage richtig für $(r-1)$-codimensionale Untermannigfaltigkeiten von $\tilde{M}$, $r > 1$. Ist dann M eine r-codimensionale Untermannigfaltigkeit von $\tilde{M}$, so kann man in einer Umgebung von $\tilde{\pi}(x)$ eine $(r-1)$-codimensionale Untermannigfaltigkeit M' von $\tilde{M}$ wählen mit $M \subset M' \subset \tilde{M}$. Ist dann Θ_1' die zu der Familie $X|M'$ gehörende Garbe, so ergibt sich aus $(\Theta_1)_x = 0$ auch $(\Theta_1')_x = 0$, weil M eine 1-codimensionale Untermannigfaltigkeit von M' ist. Nach Induktionsannahme folgt aber aus $(\Theta_1')_x = 0$, daß $(\tilde{\Theta}_1)_x = 0$ ist. Wegen [3], Satz 3.3, ist dann die Familie $\tilde{\pi}\colon \tilde{X} \to \tilde{M}$ in x lokal-trivial. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Besteht die Untermannigfaltigkeit M aus einem Punkt $0 \in \tilde{M}$, so ist

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\Omega(X/M), \mathscr{H}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\Omega(X), \mathscr{H}) =: \mathscr{T}_1(X).$$

Daher ergibt sich aus Satz 2 folgende Aussage, die für Familien $\pi\colon X \to M$, bei denen M eindimensional ist, bereits in [3], Satz 4.1, bewiesen wurde:

Satz 3. *Es sei X_0 ein reduzierter komplexer Raum und in einem Punkt $x \in X_0$ gelte $\mathcal{T}_1(X_0)_x = 0$. Dann ist jede platte reduzierte Familie $\pi: X \to M$ mit*

$$X_0 = \pi^{-1}(0), \qquad 0 \in M,$$

in x lokal-trivial.

§ 3. Vollständige Familien

Es sei $\pi: X \to M$ eine platte reduzierte Familie, $\Omega^*(M)$ das analytische Urbild von $\Omega(M)$ und $\Omega(X/M) = \Omega(X)/\Omega^*(M)$ (vgl. § 2). Man setzt

$$\mathcal{T}(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\Omega(X), \mathcal{H})$$

$$\mathcal{T}^*(M) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\Omega^*(M), \mathcal{H})$$

$$\Theta := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\Omega(X/M), \mathcal{H})$$

$$\Theta_1 := \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(\Omega(X/M), \mathcal{H}).$$

Dann folgt aus der Exaktheit von

$$0 \to \Omega^*(M) \to \Omega(X) \to \Omega(X/M) \to 0$$

die exakte Sequenz der Garben

$$0 \to \Theta \to \mathcal{T}(X) \to \mathcal{T}^*(M) \to \Theta_1.$$

Ist $(X_0, \mathcal{H}^0)$ die Faser über einem Punkt $0 \in M$ und $\mathcal{T}_1(X_0) := \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}^0}(\Omega(X_0), \mathcal{H}^0)$ die Garbe der infinitesimalen Deformationen von X_0, so erhält man wie in § 2 durch Übergang zur analytischen Beschränkung auf X_0 einen Homomorphismus $\vartheta: \Theta_1 \to \mathcal{T}_1(X_0)$. Daraus ergibt sich ein Homomorphismus $\vartheta^*: \mathcal{T}^*(M) \to \mathcal{T}_1(X_0)$. Es ist noch unbekannt, ob jedes Element von $\mathcal{T}_1(X_0)$ im Bild einer Garbe $\mathcal{T}^*(M)$ liegt, ob es also zu jeder infinitesimalen Deformation von X_0 eine platte reduzierte Familie mit X_0 als Faser über einem Punkt 0 gibt, in der diese infinitesimale Deformation wirklich vorkommt.

Wir definieren:

Definition. *Eine platte reduzierte Familie $\pi: X \to M$ heißt im Punkt $x \in X_0 \subset X$ vollständig, wenn der Homomorphismus $\vartheta^*: \mathcal{T}^*(M)_x \to \mathcal{T}_1(X_0)_x$ surjektiv ist.*

Es gilt:

Satz 4. *Ist $\pi: X \to M$ eine platte reduzierte Familie und x ein gewöhnlicher Punkt von X, so ist die Familie $\pi: X \to M$ im Punkt x vollständig.*

Wir beweisen dazu:

Hilfssatz 6. *Ist $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}^0}(\Omega(X)|_a X_0, \mathcal{H}^0)_x = 0$ für einen Punkt $x \in X_0 \subset X$, so ist die platte reduzierte Familie $\pi: X \to M$ in x vollständig.*

Beweis. Die Garbe $\Omega(M)$ ist frei, weil M eine komplexe Mannigfaltigkeit ist. Daher ist der Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(\Omega^*(M), \mathcal{H}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^0}(\Omega^*(M) \otimes \mathcal{H}^0, \mathcal{H}^0)$$

surjektiv. Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \Omega^*(M) \to \Omega(X) \to \Omega(X/M) \to 0$$

folgt wegen Hilfssatz 5 die exakte Sequenz

$$\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0 \to \Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0 \to \Omega(X_0) \to 0.$$

Ist y ein gewöhnlicher Punkt der Faser X_0, so ist die Familie $\pi\colon X \to M$ wegen [3], Satz 2.3, in einer Umgebung von y lokal-trivial. Daher ist $\mathrm{Tor}_1^{\mathscr{H}}(\Omega(X_0), \mathscr{H}^0)_y = 0$, also $(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0)_y \to (\Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0)_y$ injektiv. Setzt man $\mathscr{K} := \mathrm{Ker}(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0 \to \Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0)$, so ist der Träger von $\mathscr{K}$ in X_0 eine mindestens 1-codimensionale analytische Menge, weil die Menge der gewöhnlichen Punkte von X_0 dicht liegt. Daher ist $\mathscr{K}$ eine Torsionsgarbe und somit $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\mathscr{K}, \mathscr{H}^0) = 0$.

Setzt man $\mathscr{B} := \mathrm{Im}(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0 \to \Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0)$, so sind

$$0 \to \mathscr{K} \to \Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0 \to \mathscr{B} \to 0$$

und

$$0 \to \mathscr{B} \to \Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0 \to \Omega(X_0) \to 0$$

exakt. Wegen $\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\mathscr{K}, \mathscr{H}_0) = 0$ erhält man die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\mathscr{B}, \mathscr{H}^0) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0) \to 0.$$

Setzt man dies in die exakte Sequenz

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\mathscr{B}, \mathscr{H}^0) \to \cdots$$
$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X_0), \mathscr{H}^0) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0)$$

ein, so erhält man folgendes exakte kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\Omega(X), \mathscr{H}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}}(\Omega^*(M), \mathscr{H}) & \to \cdots & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0) & \to \cdots & \\
 & & \cdots \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}}(\Omega(X/M), \mathscr{H}) & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \cdots \to \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X_0), \mathscr{H}^0) & \to & \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0).
\end{array}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X)|_a X_0, \mathscr{H}^0)_x = 0$, also folgt das exakte kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathscr{T}(X)_x & \longrightarrow & \mathscr{T}^*(M)_x & \longrightarrow & (\Theta_1)_x \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0)_x & \to & \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0)_x & \to & \mathscr{T}_1(X_0)_x \to 0.
\end{array}$$

Der Homomorphismus $\mathscr{T}^*(M) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}^0}(\Omega^*(M) \otimes \mathscr{H}^0, \mathscr{H}^0)$ ist surjektiv, also ergibt sich aus dem Diagramm, daß auch $\mathscr{T}^*(M)_x \to \mathscr{T}_1(X_0)_x$ surjektiv ist. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Der Beweis von Satz 4 ergibt sich nun unmittelbar: Ist x ein gewöhnlicher Punkt von X, so ist $\Omega(X)$ in einer Umgebung von x eine freie $\mathscr{H}$-Garbe und daher $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{H}^0}(\Omega(X)\otimes\mathscr{H}^0,\mathscr{H}^0)_x=0$. Aus Hilfssatz 6 folgt dann die Behauptung.

Wir geben dazu noch folgendes Beispiel an:

Es sei X ein Gebiet im C^n und f eine in X holomorphe Funktion, die auf jeder irreduziblen Komponente ihres Nullstellengebildes X_0 von erster Ordnung verschwindet. Dann ist die Familie $f\colon X\to C^1$ wegen Satz 1 und [3], Satz 2.5, in einer Umgebung von X_0 platt und reduziert. In jedem Punkt x von X_0 ist die Familie $f\colon X\to C^1$ vollständig.

Literatur

1. FRISCH, J.: Points plats d'un morphisme d'espaces analytiques. C. R. Acad. Sci. (Paris) **263**, 69–71 (1966).
2. GRAUERT, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. Math. I. H. S. Paris **3** (1960).
3. –, u. H. KERNER: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. **153**, 236–260 (1964).
4. KIEHL, R.: Äquivalenzrelationen in analytischen Räumen. Diss. Heidelberg 1965.
5. REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328–370 (1957).

Dr. HANS KERNER
Mathematisches Institut der Universität
8 München 13
Schellingstraße 2–8