Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1967

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0101|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

A 21267
Y, 82

Mathematische Zeitschrift

Herausgegeben von **H. Wielandt,** Tübingen

unter Mitwirkung von **B. Eckmann,** Zürich
E. Heinz, Göttingen
R. Nevanlinna, Helsinki
K. Zeller, Tübingen

Wissenschaftlicher Beirat A. E. Ingham, Cambridge
H. Kneser, Tübingen
W. Magnus, New York
O. Perron, München
G. Pickert, Gießen

Band 101 · Heft 2 · 1967

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Z. 24. August 1967

Niedersächsische Staats- u. Universitätsbibliothek Göttingen
21. Sep. 1967
4186

Die „**Mathematische Zeitschrift**" wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

"**Mathematische Zeitschrift**" was founded in 1918 and edited by *L. Lichtenstein* in cooperation with *K. Knopp*, *E. Schmidt* and *I. Schur*; after Lichtenstein's death, 1933, it was edited by *K. Knopp*. The Editorial Committee was increased to include *E. Kamke* and *F. K. Schmidt* in 1933, *R. Nevanlinna* in 1936 and *H. Wielandt* in 1950. The latter became Managing Editor in 1952.

*

Die Zeitschrift erscheint, um eine rasche Publikation zu ermöglichen, in einzelnen Heften, die zu Bänden vereinigt werden. Ein Band besteht im allgemeinen aus 5 Heften. Der Preis eines Bandes beträgt DM 96,—.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht auch das Recht der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Von jeder Arbeit werden 75 Sonderdrucke kostenlos zur Verfügung gestellt, weitere können zum Selbstkostenpreis bezogen werden.

In the interest of speedy publications, this journal is issued at frequent intervals according to the material received. As a rule five numbers constitute one volume. The price is DM 96.— per volume.

"Mathematische Zeitschrift" is devoted primarily to pure mathematics; papers on theoretical physics and astronomy may be accepted if they present interesting mathematical results. Reviews, problems etc. will not be published.

It is incumbent upon the author to submit no manuscript which has been or will be published elsewhere either at home or abroad. Unless special permission has been granted by the publishers, no photographic reproductions, microfilms, microphotos, or other reproductions of a similar nature may be made of the issues or of individual contributions contained therein or of extracts therefrom.

75 reprints of each paper are provided free of charge; additional copies may be ordered at cost price.

Manuskripte nehmen entgegen / Manuscripts may be sent to:

B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule
E. Heinz, 34 Göttingen, Math. Inst. d. Universität
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Aurorankatu 16-20 C, Inst. f. angew. Math.
H. Wielandt: 74 Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b
K. Zeller, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität

Springer-Verlag

69 Heidelberg 1
Postfach 1780
Fernsprecher 49101
Fernschreibnummer 04-61723

1 Berlin 33
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher 830301
Fernschreibnummer 01-83319

Springer-Verlag
New York Inc.
175 Fifth Avenue
New York, N. Y. 10010

WITTICH, H.
Math. Zeitschr. 101, 83—94 (1967)

Über einen Satz von G. H. Halphen

H. WITTICH

Eingegangen am 30. März 1967

Jede Lösung $w(z)$ der Differentialgleichung

$$(D) \qquad L_n(w)=w^{(n)}+a_{n-1}(z)\,w^{(n-1)}+\cdots+a_1(z)\,w'+a_0(z)\,w=0,\ a_0(z)\not\equiv 0,$$

mit Polynomkoeffizienten $a_j(z)=A_j z^{\alpha_j}+\cdots$ ist eine ganze Funktion von endlicher Ordnung $\lambda(w)$. Ist

$$\lambda_1=\sup_w \lambda(w),$$

dann existiert mindestens eine Lösung $w(z)$ der Ordnung $\lambda(w)=\lambda_1$. Dabei ist $\lambda_1\geqq 1$ und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn die Differentialgleichung $L_n(w)=0$ konstante Koeffizienten hat. Diese Aussage läßt sich, wenn (D) Polynomlösungen hat, verschärfen: Hat (D) $\kappa\leqq n-1$ linear unabhängige Polynomlösungen, dann gilt

$$\lambda_1\geqq\frac{n}{n-\kappa}$$

und im Falle des Gleichheitszeichens ist jede transzendente Lösung von der Ordnung $n/(n-\kappa)$.

In der Differentialgleichung

$$(E) \qquad L_n(w)=a_n(z)\,w^{(n)}+a_{n-1}(z)\,w^{(n-1)}+\cdots+a_0(z)\,w=0, \qquad a_0(z)\not\equiv 0,$$

seien die Koeffizienten $a_j(z)$ Polynome vom Grad α_j und $\alpha_n\geqq 1$. Weiter wird angenommen, daß jede Lösung $w(z)$ von (E) in $|z|<\infty$ bis auf endlich viele Pole holomorph ist. Beispiele zeigen, daß die Klasse dieser Differentialgleichungen (E) nicht leer ist. Wie im Falle $a_n(z)\equiv 1$ gilt $\lambda_1\geqq 1$. Diese Aussage läßt sich aber, anders als bei (D), nicht verschärfen, wenn (E) $\kappa\leqq n-1$ linear unabhängige rationale Lösungen hat. Das zeigt das Beispiel $(z-1)w''-zw'+w=0$ mit den Lösungen $w_1(z)=z$, $w_2(z)=e^z$. Ist $\lambda_1=1$, dann sind alle transzendenten Lösungen von der Ordnung 1 und für die Grade α_j der Polynome $a_j(z)$ gilt $\alpha_j\leqq\alpha_n$, $j=0, 1, \ldots, n-1$. Diese Bedingungen $\alpha_j\leqq\alpha_n$ erscheinen in einem Satz von G. H. HALPHEN, der eine Aussage über die Struktur der Lösungen von (E) macht, als Voraussetzungen. Sie garantieren umgekehrt $\lambda_1=1$. Für den Satz von G. H. HALPHEN ([1]) wird ein neuer Beweis gegeben.

1. Die im Endlichen gelegenen singulären Stellen der Differentialgleichung (E) sollen Stellen der Bestimmtheit sein, $z=\infty$ eine Unbestimmtheitsstelle. Weiter wird noch angenommen, daß jede Lösung von (E) eine in $|z|<\infty$ eindeutige Funktion ist. Daraus folgt, daß jede Lösung $w(z)$ von (E) in $|z|<\infty$ bis auf endlich viele Pole holomorph ist und mindestens eine Lösung $z=\infty$ zur wesentlich singulären Stelle hat. Ein Beispiel ist die Differentialgleichung $zw'''-w''-zw'+w=0$, die die Funktionen z, e^z und e^{-z} zum Fundamentalsystem hat. Die Ordnung $\lambda(w)$ einer Lösung $w(z)$ wird mit der charakteristischen Funktion $T(r, w)$ durch

$$\lambda(w)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log T(r, w)}{\log r}$$

erklärt. Die Ordnungen $\lambda(w)\geqq 0$ sind endliche (rationale) Zahlen und $\lambda(w)=0$ trifft genau dann zu, wenn $w(z)$ eine rationale Funktion ist. Die Menge $\{\lambda(w)\}$ besteht aus $k\leqq n$ Elementen.

Es sei $\omega=(w_1, \ldots, w_n)$ ein Fundamentalsystem von (E) mit μ_j Lösungen der Ordnung λ_j, $j=1, 2, \ldots, \kappa$, $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_\kappa\geqq 0$ und $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\kappa=n$. Die μ_j Lösungen der Ordnung λ_j aus dem Fundamentalsystem ω spannen einen μ_j-dimensionalen Unterraum V_j des n-dimensionalen Vektorraumes V auf, der von den Lösungen $w(z)$ der Differentialgleichung (E) gebildet wird. Da sich jedes $w\in V$ auf genau eine Art in der Form $w=c_1w_1+\cdots+c_nw_n$ darstellen läßt, gilt die eindeutige Darstellung $w=v_1+\cdots+v_\kappa$, $v_j\in V_j$, wobei zwei Unterräume V_i, V_j für $i\neq j$ nur den Nullvektor gemeinsam haben. V ist direkte Summe der Unterräume V_j:

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_\kappa.$$

Einem Fundamentalsystem ω von (E) wird die Größe

$$S(\omega)=\sum_{j=1}^{n}\lambda(w_j)=\sum_{i=1}^{\kappa}\mu_i\lambda_i$$

zugeordnet. $S(\omega)$ hat, wenn alle Fundamentalsysteme von (E) betrachtet werden, ein Maximum $M(L_n)$ und ein Minimum $m(L_n)$, wobei $M(L_n)\leqq n\lambda_1$ gilt. Da Lösungen der maximalen Ordnung λ_1 in jedem Fundamentalsystem vorkommen, läßt sich aus ω ein System ω^* erzeugen mit der Eigenschaft $\lambda(w_j^*)=\lambda_1$ für $j=1, \ldots, n$, also $M(L_n)=n\lambda_1$.

Es sei nun $w_1, \ldots, w_n$ ein Fundamentalsystem, das $S(\omega)$ zum Minimum macht. Dazu gehört die Zerlegung $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_\nu$. U_j wird durch μ_j' Lösungen der Ordnung λ_j' aufgespannt. Diese Zerlegung ist insofern ausgezeichnet, als für jedes $w(z)\not\equiv 0$ aus U_j, $j=1, \ldots, \nu$, stets $\lambda(w)=\lambda_j'$ gilt. Es existiere im Gegensatz zur Behauptung für ein U_i ein $w(z)\not\equiv 0$ aus U_i mit der Eigenschaft $\lambda(w)<\lambda_i'$. Wird dann in der Basis $w_1, \ldots, w_n$ ein passendes $w_\gamma\in U_i$ durch w ersetzt, dann ergibt sich eine neue Basis $\omega^*=(w_1^*, \ldots, w_n^*)$, für welche gilt

$$\lambda(w_i^*)=\lambda(w_i),\quad \text{wenn}\quad i\neq\gamma\quad\text{und}\quad \lambda(w_\gamma^*)=\lambda(w)<\lambda(w_\gamma),$$

also $S(\omega) > S(\omega^*) \geqq m(L_n)$. Das ist nach Wahl von ω nicht möglich. Nach dieser Eigenschaft gilt, wenn $\{\lambda(w)\}$ aus k Elementen besteht, für jedes Fundamentalsystem ω mit $S(\omega) = m(L_n)$ $\nu = k$ und für jede andere Zerlegung $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\kappa$ $\kappa \leqq \nu = k$, wobei aber im Falle $\kappa = \nu$ durchaus $S(\omega) > m(L_n)$ gelten kann.

Zwischen zwei Fundamentalsystemen ω und ω^*, die beide $S(\omega)$ zum Minimum machen, besteht ein einfacher Zusammenhang. Die entsprechenden Zerlegungen seien

$$\omega\colon\ V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_\nu \quad \text{und} \quad \omega^*\colon\ V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\nu .$$

Da in beiden Fundamentalsystemen Funktionen der Ordnungen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ vorkommen müssen, gilt

$$\lambda(u_j) = \lambda(v_j) \qquad \text{für } u_j \in U_j,\ v_j \in V_j \text{ und } j = 1, \ldots, \nu .$$

Für eine Basis $v_{j,1}, \ldots v_{j,\mu''}$ des Raumes V_j gilt die eindeutige Darstellung

$$v_{j,i} = u_{j,i} + u_{j+1,i} + \cdots + u_{\nu,i}, \qquad i = 1, \ldots, \mu_j'', \qquad u_{j,i} \in U_j .$$

Daraus folgt $\mu_j'' \leqq \mu_j'$ und aus einer analogen Darstellung einer Basis des Unterraumes U_j $\mu_j' \leqq \mu_j''$, also $\mu_j' = \mu_j''$. Danach ergibt sich für die Matrix D in $\omega^* = D\omega$

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & & & \\ & \boxed{D_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{D_\nu} \end{pmatrix}, \qquad |D| \neq 0 .$$

Dabei ist D_j ein Block, der aus μ_j Zeilen und $n - \mu_1 - \cdots - \mu_{j-1}$ Spalten besteht. Die Determinante, gebildet mit den μ_j Zeilen und den ersten μ_j Spalten von D_j, muß für $j = 1, \ldots, \nu$ von Null verschieden sein, da sonst V_j nicht die Dimension μ_j haben könnte.

Ist umgekehrt eine Matrix D mit diesen Eigenschaften gegeben und ω ein Fundamentalsystem, das $S(\omega)$ zum Minimum macht, dann ist $\omega^* = D\omega$ ein Fundamentalsystem mit der Minimaleigenschaft $S(\omega^*) = m(L_n)$.

2. Die Methode des Zentralindex von A. WIMAN ([4] und [5]) liefert Aussagen über die Menge $\{\lambda(w)\}$ und obere Schranken für die Dimension μ_j der Unterräume U_j. Wir bilden mit den Größen α_j, die durch (E) gegeben sind, die Zahlen

$$g_j = n - j + \alpha_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n, \qquad g = \max_{j = 0, \ldots, n} g_j$$

und betrachten in einer u, v-Ebene die Punkte P_j mit den Koordinaten $u = j$, $v = g - g_{n-j}$. Zu diesen Punkten wird das nach unten konvexe Newton-Puiseuxsche Polygon konstruiert; man vgl. dazu [5]. Der absteigende Teil $\mathfrak{D}$ dieses Diagrammes verbindet die Punkte $(0, g - g_n)$ und $(n - \sigma, 0)$, $0 \leqq \sigma < n$. Sind

(u, v) und (u', v'), $u<u'$, Endpunkte einer Seite von $\mathfrak{D}$, dann ist

$$\Lambda=\frac{v-v'}{u'-u}$$

eine mögliche Ordnung für Lösungen der Differentialgleichung. Wird diese Ordnung Λ realisiert, d.h. ist $\Lambda=\lambda_j$, dann gilt $\mu_j\leqq v-v'$. Ergibt $\mathfrak{D}$ die rationalen Zahlen $\Lambda_1>\Lambda_2>\cdots>\Lambda_m>0$, dann kommen die positiven Ordnungen $\lambda(w)$ der Lösungen von (E) unter diesen Zahlen Λ_j vor. Dabei ist

$$\lambda_1=\max_w \lambda(w)=\Lambda_1 \quad \text{und} \quad m\leqq n-\sigma.$$

Gehört zu einer Differentialgleichung (E) die Zerlegung $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$, dann sind die λ_j ganze Zahlen, wobei $\lambda_n=0$ möglich ist. Das folgt für $\lambda_n>0$ unmittelbar aus der Konstruktion von $\mathfrak{D}$. Ist $\lambda_n=0$ und $w_0(z)$ eine rationale Lösung von $L_n(w)=0$, dann liefert der Ansatz

$$y(z)=\left(\frac{w(z)}{w_0(z)}\right)'$$

eine Differentialgleichung $L_{n-1}(y)=0$ für $y(z)$ mit $\{\lambda(y)\}=\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}$, also die Behauptung. Werden für die λ_j ganze Zahlen gewählt, die $\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n\geqq 0$ genügen, dann liegt in

$$L_n(w)=\begin{vmatrix} w & w' & \ldots & w^{(n)} \\ w_1 & w_1' & \ldots & w_1^{(n)} \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ w_n & w_n' & \ldots & w_n^{(n)} \end{vmatrix}=0$$

eine Differentialgleichung mit diesen Eigenschaften vor, wenn $w_j(z)=R_j(z)\cdot \exp(z^{\lambda_j})$, $R_j(z)$ eine rationale Funktion, gesetzt wird. Auch in der spezielleren Klasse der Differentialgleichungen (D) existieren stets Differentialgleichungen mit diesen Eigenschaften der Ordnungen $\lambda(w)$. Wir erläutern die Konstruktion nur für den Fall $\lambda_j=n-j$, $j=1, \ldots, n$, $n\geqq 3$. Die Bedingung $n\geqq 3$ ist, wie sich später herausstellen wird, wesentlich.

Die Differentialgleichung $L_3(w)=w'''+(z-2)\,w''-z\,w'+w=0$ hat die Lösungen $w_3=z$, $w_2=e^z$. Das Diagramm $\mathfrak{D}$ zeigt, daß noch eine Lösung $w_1(z)$ der Ordnung 2 vorhanden ist.

Wir bilden nun die Differentialgleichung vierter Ordnung.

$$\begin{aligned} L_4(w)&=\left(\frac{d}{dz}+z^2\right) L_3(w) \\ &=w^{(4)}+(z^2+z-2)\,w'''+(z^3-2z^2-z+1)\,w''-z^3\,w'+z^2\,w=0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung hat neben den Lösungen von $L_3(w)=0$ noch eine Lösung der Ordnung 3, wie aus $\mathfrak{D}$ zu ersehen ist. Im nächsten Schritt wird

$$L_5(w)=\left(\frac{d}{dz}+z^3\right) L_4(w)=0$$

gebildet usw. Schließlich ergibt sich in

$$L_n(w)=\left(\frac{d}{dz}+z^{n-1}\right)L_{n-1}(w)=0$$

eine lineare Differentialgleichung der Form (D) mit den geforderten Eigenschaften. Ist $\lambda_{n-1}\geqq 2$, dann kann die Konstruktion mit einem passenden $L_2(w)$ begonnen werden. Bei diesem Beispiel ist $\mu_j=1$, während das Diagramm nur $\mu_j\leqq n-j$, $j=1, \ldots, n-1$, liefert.

Differentialgleichungen (D) mit $\lambda(w)=\lambda_1$ für alle $w(z)\not\equiv 0$ lassen sich leicht angeben. Werden z.B. die Grade der Polynome $a_j(z)$ so gewählt, daß kein Punkt $P_j=(j, g-g_{n-j})$ unterhalb der Strecke mit den Endpunkten $(0, g)$ und $(n, 0)$ liegt, dann ist jede nichttriviale Lösung $w(z)$ ganz transzendent von der Ordnung

$$\lambda_1=\frac{g}{n}\geqq 1.$$

Für die Differentialgleichung $w''+zw'+czw=0$, $c\neq 0$, sind die Ordnungen $\Lambda_1=2$ und $\Lambda_2=1$ möglich. Da eine Lösung $w(z)$ mit $\lambda(w)=1$ von der Form $w(z)=p(z)e^{\sigma z}$, $p(z)$ ein Polynom, sein muß ([3]), ist zu entscheiden, ob mit $w(z)=e^{\sigma z}y(z)$ die Differentialgleichung $y''+(z+2\sigma)y'+(\sigma^2+\sigma z+cz)y=0$ Polynomlösungen zuläßt. Dazu sind die Bedingungen $\sigma+c=0$ und $m+c^2=0$, $m=1, 2, \ldots$ notwendig. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, dann existiert eine Polynomlösung $y(z)$ vom Grad m. Für die Differentialgleichung $L_2(w)=w''+zw'+czw=0$ gilt danach $m(L_2)=M(L_2)=4$ genau dann, wenn $c^2\neq -m$ ist. Im Falle $c^2=-m$ ist $m(L_2)=3$ und $M(L_2)=4$. Bei Differentialgleichungen $L_n(w)=0$ mit $n\geqq 3$ ist die Frage, welche der durch das Diagramm $\mathfrak{D}$ bestimmten Zahlen Λ tatsächlich zur Menge $\{\lambda(w)\}$ gehören, wesentlich schwieriger. Befriedigende Resultate liegen meines Wissens nicht vor.

3. Wir betrachten nun die spezielleren Differentialgleichungen (D). $\mathfrak{D}$ verbindet die Punkte $(0, g)$, $g\geqq n+\alpha_0\geqq n$, und $(n-\sigma, 0)$. Danach ist λ_1 nicht kleiner als

$$\frac{g}{n-\sigma}\geqq 1.$$

Aus $\lambda_1=1$ folgt, daß $\mathfrak{D}$ mit der Strecke zusammenfällt, die $(0, n)$ mit $(n, 0)$ verbindet. Da keiner der Punkte P_j unterhalb dieser Strecke liegen darf, ergibt sich $\alpha_j=0$ für $j=0, \ldots, n-1$. Umgekehrt folgt aus $\alpha_j=0$ wegen $a_0(z)\not\equiv 0$ $\lambda_1=1$. Danach gilt für Differentialgleichungen (D) mit Polynomlösungen $\lambda_1>1$. Die genaue Aussage lautet: Hat (D) κ linear unabhängige Polynomlösungen, dann ist

$$\lambda_1\geqq\frac{n}{n-\kappa}. \tag{1}$$

Die $\kappa\geqq 1$ Polynomlösungen von (D) seien $w_j(z)=z^{m_j}+\cdots$, $j=1, \ldots, \kappa$. Wegen $a_0(z)\not\equiv 0$ ist $m_j\geqq 1$. Es darf weiter $1\leqq m_1<m_2<\cdots<m_\kappa$ angenommen werden.

Wir setzen eine Polynomlösung $w_\delta(z)$ in (D) ein und vergleichen die höchsten Potenzen von z. Für mindestens zwei Indizes i, j muß dann $\alpha_i+m_\delta-i=\alpha_j+m_\delta-j$ gelten, also $g_i=g_j$. M_δ sei die Menge der Indizes $i, j, \ldots$, für die bei diesem Vergleich $g_i=g_j=\cdots$ gilt. Die größte unter diesen natürlichen Zahlen $\leqq n-1$ sei ν_δ. Zu $w_1(z)=z^{m_1}+\cdots$ gehört M_1 mit $\nu_1\geqq 1$ und $g_i=g_{\nu_1}$ für $i\in M_1$ usw. Nach Definition der Zahlen ν_δ gilt

$$\nu_{\delta+1}\geqq\nu_\delta \quad \text{und} \quad g_{\nu_{\delta+1}}\geqq g_{\nu_\delta}.$$

Im Falle $M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_j$ ist $g_{\nu_1}=g_{\nu_2}=\cdots=g_{\nu_j}$. Mit $a_j(z)=A_jz^{\alpha_j}+\cdots$ betrachten wir die Ausdrücke $A_jz^{\alpha_j}w^{(j)}$ und bilden

$$Q(w)=\sum_{i\in M_j}A_iz^{\alpha_i}w^{(i)}.$$

Die lineare Differentialgleichung $Q(w)=0$ der Ordnung ν_j hat die Lösungen $z^{m_1}, z^{m_2}, \ldots, z^{m_i}$. Dazu kommen, wenn in $Q(w)$ $i\geqq\alpha$ ist (dann ist $m_1>\alpha$), noch die Lösungen $1, z, \ldots, z^{\alpha-1}$, also insgesamt $j+\alpha$ linear unabhängige Lösungen. Daher gilt

$$(*) \qquad \nu_j\geqq j+\alpha\geqq j.$$

Weiter sei $M_i\cap M_{i+1}$ leer und $M_{i+1}\subset M_{i+2}\subset\cdots\subset M_j$. Dann gehört zu $M_{i+1}, \ldots, M_j$ ein linearer Differentialoperator $Q(w)$ der Ordnung ν_j mit $\alpha\geqq\nu_i+1$. Die Differentialgleichung $Q(w)=0$ hat die Lösungen $1, z, \ldots, z^{\alpha-1}$ und $z^{m_{i+1}}, \ldots, z^{m_j}$, $m_{i+1}\geqq\alpha$, also $j-i+\alpha$ linear unabhängige Lösungen. Aus $\nu_j\geqq j-i+\alpha\geqq j-i+\nu_i+1$ folgt

$$(**) \qquad \nu_j-\nu_i\geqq j-i+1.$$

Mehrfache Anwendung von (*) und (**) ergibt

$$\nu_\kappa\geqq\kappa.$$

Daraus folgt wegen $\nu_\kappa\leqq n-1$: Die Differentialgleichung (D) hat höchstens $n-1$ linear unabhängige Polynomlösungen. $\nu_\kappa\neq\kappa$ bedingt zunächst

$$M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_\kappa$$

und wegen (*) weiter $\alpha=0$, also $g_\kappa=g_0=n+\alpha_0$ und $g_j\leqq n+\alpha_0$ für $j=1, \ldots, \kappa-1$. Wegen $n-\sigma\leqq n-\kappa$ und $g\geqq n+\alpha_0$ folgt aus

$$\lambda_1\geqq\frac{g}{n-\sigma}$$

die Behauptung (1).

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn die Punkte P_i nicht unterhalb des Streckenzuges liegen, der durch die Punkte $(0, n)$, $(n-\kappa, 0)$ und $(n, 0)$ bestimmt wird. Das wiederum ist genau dann der Fall, wenn die Grade α_j

der Polynomkoeffizienten $a_j(z)$ den Bedingungen

$$\begin{aligned} &\alpha_j \leqq j && \text{für } j=0,\dots,\kappa-1,\ \alpha_\kappa=\kappa \text{ und} \\ &\alpha_j \leqq \frac{\kappa(n-j)}{n-\kappa} && \text{für } j=\kappa+1,\dots,n-1 \end{aligned} \tag{2}$$

genügen. Ist die maximale Ordnung λ_1 einer Differentialgleichung (D) gleich $n/(n-\kappa)$, dann enthält jedes Fundamentalsystem ω mindestens $n-\kappa$ transzendente Funktionen der Ordnung λ_1, so daß $S(\omega)\geqq n$ und damit auch $m(L_n)\geqq n$ gilt. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn die Differentialgleichung κ linear unabhängige Polynomlösungen hat.

Satz. *Hat eine lineare Differentialgleichung* (D) κ *linear unabhängige Polynomlösungen, dann ist die maximale Ordnung* λ_1 *mindestens gleich* $n/(n-\kappa)$. *Ist*

$$\lambda_1=\frac{n}{n-\kappa},$$

dann gilt $m(L_n)\geqq n$ *und* $m(L_n)=n$ *genau dann, wenn die Differentialgleichung* κ *linear unabhängige Polynomlösungen hat. Im Falle* $\kappa=0$ *gilt für jede Differentialgleichung* (D)

$$\lambda_1\geqq 1 \quad \textit{und} \quad m(L_n)\geqq n.$$

In den beiden letzten Aussagen steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn die Differentialgleichung konstante Koeffizienten hat.

Die für $\kappa=0$ gültige Abschätzung $m(L_n)\geqq n$ wurde früher angegeben ([5]). Die Tatsache, daß bei $\kappa\geqq 1$ Polynomlösungen λ_1 erhöht wird, spricht für die Vermutung, daß für jede Differentialgleichung (D) der Ordnung n $m(L_n)\geqq n$ gilt. Diese Vermutung ist richtig für $n=2$ und 3. Daß aber mit den durch (2) charakterisierten Differentialgleichungen nicht alle Differentialgleichungen $L_3(w)=0$ erfaßt sind, für die $m(L_3)=3$ ist, zeigt das Beispiel $w'''-zw''+zw'-w=0$. $w_3=z$, $w_2=e^z$ und w_1 mit $\lambda(w_1)=2$ bilden ein Fundamentalsystem mit $S'(\omega)=3$. Die Differentialgleichung $w'''+w''+zw'-w=0$ genügt mit $\kappa=1$ (2). Ein Fundamentalsystem ω mit $S(\omega)=3$ besteht aus $w_3=z$ und den ganzen transzendenten Funktionen w_2, w_1 der Ordnung $\frac{3}{2}$.

4. Wir betrachten jetzt Differentialgleichungen (E) und nehmen zunächst an, daß jede Lösung $w(z)\not\equiv 0$ transzendent ist. Zu einem Fundamentalsystem ω mit $S(\omega)=m(L_n)$ gibt es ein Polynom $P(z)$ mit der Eigenschaft, daß für $j=1,\dots,n$ $y_j(z)=P(z)\cdot w_j(z)$ ganz transzendent ist. Die Funktionen $y_j(z)$ bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $p_n(z)y^{(n)}+\cdots+p_0(z)y=0$ mit Polynomkoeffizienten. Nach einem Satz von PERRON ([2]) gilt, wenn dort der Ordnungsbegriff eingeführt wird,

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda(y_j)\geqq n$$

und damit wegen $T(r, w_j)=T(r, y_j)+O(\log r)$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda(w_j)=m(L_n)\geqq n\,.$$

Kommen in ω die $\kappa\geqq 1$ rationalen Lösungen $w_{n-\kappa+1}(z), \ldots, w_n(z)$ vor, dann liefert die Reduktionsmethode für lineare Differentialgleichungen, angesetzt mit den „bekannten Lösungen" $w_{n-\kappa+1}, \ldots, w_n$, eine lineare Differentialgleichung $L_{n-\kappa}(v)=0$ der Ordnung $n-\kappa$ mit Polynomkoeffizienten. Den Lösungen $w_1(z), \ldots, w_{n-\kappa}(z)$ entspricht ein Fundamentalsystem $v_1(z), \ldots, v_{n-\kappa}(z)$ von $L_{n-\kappa}(v)=0$, wobei $\lambda(w_j)=\lambda(v_j)$ gilt, also

$$m(L_n)=\sum_{j=1}^{n} \lambda(w_j)=\sum_{j=1}^{n-\kappa} \lambda(v_j)\geqq n-\kappa\,. \tag{3}$$

Daraus folgt $\lambda_1\geqq 1$. Die Funktionen $w_1=e^z$, $w_2=e^{2z}$, $\ldots$, $w_{n-\kappa}=e^{(n-\kappa)z}$, $w_{n-\kappa+1}=z$, $\ldots$, $w_n=z^\kappa$ sind Fundamentalsystem einer Differentialgleichung (E). Die Schranke $n-\kappa$ in (3) kann also nicht verbessert werden.

Wir nehmen nun an, daß jede Lösung $w(z)\not\equiv 0$ von (E) die Ordnung 1 hat. Dann enthält $\mathfrak{D}$ eine Strecke $A\,B$ mit der Steigung -1. Es sei $A=(u_0, v_0)$ und $B=(u_1, v_1)$, $u_0<u_1$. Dabei muß, da (E) n linear unabhängige Lösungen der Ordnung 1 hat, $v_0-v_1\geqq n$ sein. Wegen $u_1-u_0\leqq n$ folgt $n\geqq u_1-u_0=v_0-v_1\geqq n$. $\mathfrak{D}$ besteht also aus der Strecke, die die Punkte $(0, n)$ und $(n, 0)$ verbindet. Die Punkte $P_j=(j, g-g_{n-j})$ liegen nicht unterhalb dieser Strecke. Danach gilt $n-j\leqq g-g_{n-j}$ und wegen $g-g_n=g-\alpha_n=n$

$$\alpha_{n-j}\leqq\alpha_n \quad \text{und} \quad \alpha_n=\alpha_0\,. \tag{4'}$$

Ist $\lambda_1=1$ und kommen κ linear unabhängige rationale Lösungen vor, dann sind im Fundamentalsystem ω $n-\kappa$ Lösungen vom Mitteltypus der Ordnung 1. Dazu läßt sich eine komplexe Zahl $s\neq 0$ so bestimmen, daß für $j=1, \ldots, n$ die Funktionen $y_j(z)=e^{-sz}w_j(z)$ ebenfalls vom Mitteltypus der Ordnung 1 sind. Diese Funktionen bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$b_n(z)\,y^{(n)}+b_{n-1}(z)\,y^{(n-1)}+\cdots+b_0(z)\,y=0\,, \tag{E'}$$

wobei für die Koeffizienten $b_j(z)=B_j z^{\beta_j}+\cdots$ gilt

$$b_j(z)=\binom{j}{j}\,a_j(z)+\binom{j+1}{j}\,s\,a_{j+1}(z)+\cdots+\binom{n}{j}\,s^{n-j}\,a_n(z)\,.$$

Wegen (4') ist $\beta_i\leqq\beta_n$ und $\beta_n=\alpha_n$. Daraus ergibt sich der Reihe nach $\alpha_{n-1}\leqq\alpha_n$, $\alpha_{n-2}\leqq\alpha_n$, $\ldots$, also

$$\alpha_j\leqq\alpha_n\,, \qquad j=0, 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Umgekehrt seien für eine Differentialgleichung (E) die Bedingungen (4) erfüllt. Die erste Strecke im Diagramm $\mathfrak{D}$ habe die Endpunkte $(0, g-g_n)$ und $(i, g-g_{n-i})$.

Dazu gehört die Steigung

$$\frac{(g-\alpha_n)-(g-g_{n-i})}{i}=\frac{g_{n-i}-\alpha_n}{i}=\frac{i+\alpha_{n-i}-\alpha_n}{i}=1-\frac{\alpha_n-\alpha_{n-i}}{i}\leqq 1.$$

Danach gilt für jede transzendente Lösung $w(z)$ von (E) $\lambda(w)\leqq 1$ und weiter wegen (3) $\lambda(w)=1$.

Die Bedingungen (4) treten in einem Satz von G. H. HALPHEN auf. Er lautet: Jede Lösung der Differentialgleichung (E) sei in $|z|<\infty$ bis auf endlich viele Pole holomorph. Ist der Grad des Polynoms $a_n(z)$ nicht kleiner als der Grad der Polynome $a_0(z), \ldots, a_{n-1}(z)$, dann hat jede Lösung $w(z)$ die Form

$$w(z)=\sum_{j=1}^{n} C_j R_j(z)\, e^{s_j z}$$

mit rationalen Funktionen $R_j(z)$. Danach gilt der

Satz. *Jede Lösung $w(z)$ der Differentialgleichung*

$$a_n(z)\, w^{(n)}+\cdots+a_1(z)\, w'+a_0(z)\, w=0, \quad a_0(z)\not\equiv 0, \quad \alpha_n\geqq 1,$$

mit Polynomkoeffizienten sei in $|z|<\infty$ bis auf endlich viele Pole holomorph. Hat diese Differentialgleichung κ linear unabhängige rationale Lösungen, dann gilt für jedes Fundamentalsystem $w_1(z), \ldots, w_n(z)$

$$n-\kappa\leqq\sum_{j=1}^{n}\lambda(w_j).$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn jede Lösung $w(z)$ von der Form

$$w(z)=\sum_{j=1}^{n} C_j R_j(z)\, e^{s_j z}$$

ist mit rationalen Funktionen $R_j(z)$. Dabei ist $s_j\neq 0$ für $j=1, \ldots, n-\kappa$ und $s_j=0$ für $j=n-\kappa+1, \ldots, n$.

Hat die Differentialgleichung mindestens eine nicht rationale Lösung, dann ist

$$\lambda_1=\max_n \lambda(w)\geqq 1;$$

$\lambda_1=1$ gilt dann und nur dann, wenn jede Lösung $w(z)$ eine Exponentialsumme der angegebenen Form ist.

5. Für den zitierten Satz von G. H. HALPHEN geben wir einen Beweis an, der methodisch den vorstehenden Betrachtungen angepaßt ist. Dazu zeigen wir zunächst, daß (E) im Falle $\lambda_1=1$ mindestens eine Lösung der Form $w(z)=R(z)e^{sz}$ hat. Dabei darf angenommen werden, daß (E) keine rationale Lösung hat. Mit $w(z)=e^{sz}\cdot y(z)$ geht (E) über in (E′) und für jede Lösung $y(z)$ von (E′) ist $\lambda(y)\leqq 1$. Wegen $\alpha_j\leqq\alpha_n$ ist $\beta_j\leqq\alpha_n=\beta_n$. s wird nun so bestimmt, daß der Grad β_0 von $b_0(z)$ höchstens gleich α_n-1 ist. Das ist der Fall, wenn s Wurzel

der Gleichung

$$B_n s^n + B_{n-1} s^{n-1} + \cdots + B_1 s + B_0 = 0, \quad B_n \cdot B_0 \neq 0,$$

ist. Die linke Seite ist der Koeffizient von $z^{\alpha n} = z^{\beta n}$ in $b_0(z)$ aus (E'). s_1 sei eine Wurzel dieser Gleichung. Mit $G_j = n - j + \beta_j$ und $G = \max G_j$ ist dann $G_0 = n + \beta_0 \leqq n - 1 + \alpha_n = n - 1 + \alpha_0 = g - 1$ und für $j = 1, \ldots, n-1$ $G_j \leqq n - j + \alpha_0 \leqq g - 1$, also $G_j \leqq g - 1$ und $G_n = \beta_n$. Für den Eckpunkt $(0, G - G_n)$ des zu (E') gehörigen Newton-Puiseuxschen Polygons $\mathfrak{D}'$ ist $G - G_n \leqq g - 1 - G_n = g - 1 - \alpha_n = n - 1$. Danach hat (E') höchstens $n-1$ linear unabhängige transzendente Lösungen, also (E) mindestens eine Lösung der Form $w(z) = R(z)\, e^{s_1 z}$. Die Behauptung sei richtig für jede Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form (E) mit $\lambda_1 = 1$. Das heißt: Ist für $L_n(v) = 0$ $\lambda_1 = 1$, dann existiert ein Fundamentalsystem $v_j(z) = r_j(z)\, e^{\sigma_j z}$, $j = 1, \ldots, n$. Wir zeigen, daß dann die Behauptung auch für Differentialgleichungen (E) der Ordnung $n+1$ gilt.

Für die Differentialgleichung $L_{n+1}(w) = 0$ sei $\lambda_1 = 1$. Dann existiert mindestens eine Lösung $w_0(z)$ der Form $w_0(z) = r_0(z) e^{s_0 z}$. Wir bilden

$$v(z) = \left(\frac{w(z)}{w_0(z)}\right)'.$$

$v(z)$ ist in $|z| < \infty$ holomorph bis auf endlich viele Pole und genügt einer Differentialgleichung $L_n(v) = 0$ der Ordnung n mit Polynomkoeffizienten. Da ein Fundamentalsystem von $L_{n+1}(w) = 0$ ein Fundamentalsystem von eindeutigen Lösungen der Differentialgleichung $L_n(v) = 0$ erzeugt, ist jede Lösung $v(z)$ von $L_n(v) = 0$ in $|z| < \infty$ holomorph bis auf endlich viele Pole. $L_n(v) = 0$ ist also eine Differentialgleichung (E).

Weiter ist

$$\lambda(v) = \lambda\left(\frac{d}{dz}\frac{w(z)}{w_0(z)}\right) \leqq 1.$$

Daher ist, wenn $L_n(v) = 0$ überhaupt nichtrationale Lösungen hat,

$$\lambda_1 = \max_v \lambda(v) = 1.$$

Nach Induktionsannahme existiert also ein Fundamentalsystem der Form

$$v_1(z) = r_1(z)\, e^{\sigma_1 z}, \ldots, v_n(z) = r_n(z)\, e^{\sigma_n z}.$$

Damit läßt sich, da jede Lösung $v(z)$ eine Lösung von $L_{n+1}(w) = 0$ erzeugt, ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $L_{n+1}(w) = 0$ konstruieren.

Es sei $v = r(z)\, e^{\sigma z}$ eine der Funktionen $v_j(z)$.

Sind $b_1, \ldots, b_m$ die endlichen Polstellen von $r(z)$, dann läßt sich $v(z)$ auf die Form bringen

$$v(z) = r(z)\, e^{\sigma z} = \frac{d}{dz}\rho(z)\, e^{\sigma z} + \sum_{\kappa=1}^{m} \frac{D_\kappa}{z - b_\kappa}, \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{w(z)}{w_0(z)} - \rho(z)\, e^{\sigma z}\right) = \sum_{\kappa=1}^{m} \frac{D_\kappa}{z - b_\kappa}.$$

Da sich nach Voraussetzung jedes reguläre Lösungselement $w(z, z_0)$ von $L_{n+1}(w)=0$ zu einer in $|z|<\infty$ eindeutigen analytischen Lösung $w(z)$ fortsetzen läßt, hat die linke Seite die in $|z|<\infty$ eindeutige Integralfunktion

$$\frac{w(z)}{w_0(z)}-\rho(z)\,e^{\sigma z}.$$

Daraus folgt für die rechte Seite $D_1=D_2=\cdots=D_m=0$, also

$$v(z)=\frac{d}{dz}\,\rho(z)\,e^{\sigma z} \quad \text{und allgemein} \quad v_j(z)=\frac{d}{dz}\,\rho_j(z)\,e^{\sigma_j z}.$$

Die Funktionen

$$W_0(z)=w_0(z), \qquad W_j(z)=w_0(z)\,\rho_j(z)\,e^{\sigma_j z}, \qquad j=1,\ldots,n,$$

bilden ein Fundamentalsystem von $L_{n+1}(w)=0$. Aus

$$\sum_{\kappa=0}^{n} c_\kappa W_\kappa(z)\equiv 0 \quad \text{folgt} \quad c_0+\sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa \frac{W_\kappa(z)}{w_0(z)}\equiv 0$$

und durch Differentiation

$$\sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa \left(\frac{W_\kappa(z)}{w_0(z)}\right)'=\sum_{\kappa=1}^{n} c_\kappa v_\kappa(z)\equiv 0,$$

also $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$ und damit wegen $w_0(z)\not\equiv 0$ auch $c_0=0$. Aus der Induktionsannahme folgt also die Existenz eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung $L_{n+1}(w)=0$ von der Form $w_j(z)=R_j(z)\,e^{s_j z}, j=1,\ldots,n+1$. Da der Satz für $n=1$ richtig ist, ist die Behauptung bewiesen.

Umgekehrt gehört zu n linear unabhängigen Funktionen der Form $w_1(z)=R_1(z)\,e^{s_1 z}$, ... $w_n(z)=R_n(z)\,e^{s_n z}$ eine Differentialgleichung (E), für die $\lambda_1=1$ und

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda(w_j)=n-\kappa$$

gilt.

6. Der zweite Teil des Beweises läßt sich auch so führen. Die lineare Hülle $L(M)$ der Menge M, bestehend aus allen Lösungen $w(z)$ von $L_n(w)=0$ der Form $w(z)=R(z)e^{sz}$, ist ein Unterraum von V der Dimension ν, wobei $1\leqq\nu\leqq n$ gilt. Es ist $\nu=n$ zu zeigen.

Es sei $\nu<n$. Die Funktionen $w_j(z)=R_j(z)e^{s_j z}$, $j=1,\ldots,\nu$, die $L(M)$ aufspannen, werden durch $w_{\nu+1}(z),\ldots,w_n(z)$ zu einer Basis von V ergänzt. Die ν Funktionen $w_1(z),\ldots,w_\nu(z)$ bilden ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung $N_\nu(w)=0$ der Ordnung ν mit Polynomkoeffizienten. Dann gilt für $L_n(w)$ die Zerlegung

$$L_n=M_{n-\nu}N_\nu,$$

wobei $M_{n-\nu}$ ein linearer Differentialoperator $(n-\nu)$-ter Ordnung mit Polynomkoeffizienten ist. Die Funktionen $y_j(z)=N_\nu(w_{j+\nu})\not\equiv 0$, $j=1,\ldots,n-\nu$, sind

Lösungen von $M_{n-\nu}(y)=0$, die in $|z|<\infty$ bis auf endlich viele Pole holomorph sind. Sie bilden ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $M_{n-\nu}(y)=0$.

Wegen $\lambda(y)\leqq 1$ ist, wenn $M_{n-\nu}(y)=0$ eine transzendente Lösung hat, $\lambda_1=1$. Die Differentialgleichung $M_{n-\nu}(y)=0$ hat also mindestens eine Lösung der Form $y(z)=r(z)e^{\sigma z}$, wobei auch $\sigma=0$ möglich ist. Wir betrachten nun die inhomogene Differentialgleichung $N_\nu(w)=r(z)e^{\sigma z}$. Jede Lösung $w(z)$ dieser Differentialgleichung ist Lösung von $L_n(w)=0$ und $w(z)$ ist von den Lösungen $w_1(z), \ldots, w_\nu(z)$ linear unabhängig, kann also, wenn $\nu<n$ ist, nicht von der Form $R(z)e^{sz}$ sein. Für die homogene Gleichung $N_\nu(w)=0$ ist $w_1(z), \ldots, w_\nu(z)$ ein Fundamentalsystem. Damit läßt sich nach der Methode von LAGRANGE eine Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen. Diese Lösung ist, wie die Rechnung zeigt, von der Form $w(z)=R(z)e^{sz}$, was nicht möglich ist. Es gilt also die Behauptung $\nu=n$.

Literatur

[1] HALPHEN, G.: Sur une nouvelle classe d'équations différentielles linéaires intégrables. C. R. Acad. Sci. Paris **101**, 1238–1240 (1885).

[2] PERRON, O.: Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Acta math. **34**, 139–163 (1910).

[3] PÖSCHL, K.: Zur Frage des Maximalbetrages der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Math. Ann. **125**, 344–349 (1953).

[4] WIMAN, A.: Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem größten Glied der zugehörigen Taylorschen Reihe. Acta math. **37**, 305–326 (1914).

[5] WITTICH, H.: Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Ergeb. d. Math. Neue Folge Heft 8. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

Mathematisches Institut der Universität Karlsruhe

FOULSER, D.A.
Math. Zeitschr. 101, 95—102 (1967)

A Class of Translation Planes, $\Pi(Q_g)$

DAVID A. FOULSER*

Received March 4, 1967

1. Introduction

In [2] a class of finite left Veblen-Wedderburn (VW) systems, $\{Q_\lambda\}$, was defined, which generalizes ANDRÉ's construction [1] and includes the non-exceptional nearfields. The systems Q_g were introduced as a specific example of λ-systems, some of which are neither André systems nor nearfields [2; section 3]. In this paper the autotopism groups of the Q_g systems are discussed, enabling us to show that the corresponding class of planes, $\{\Pi(Q_g)\}$ contains planes which are neither André planes nor nearfield planes.

2. The λ-Systems Q_g

Let $q=p^s$, for p a prime, and let $n=q^d$. Let $F=GF(n)$ be the finite field of order n. Let ω be a primitive root of F, and let ρ be the automorphism of F of order d, defined by $\rho: x\to x^q$. Let $\{Q, +\}=\{F, +\}$, a vector space over $GF(q)$.

Let $g\neq 1$ be a divisor of d whose primes divide $q-1$. Let v be the mapping from I_{n-1} into I_g defined by $v(i)\equiv i \pmod g$, where $I_k=\{0, 1, \ldots, k-1\}$ for k a positive integer. Choose integers m and t such that $(m, g)=1$ and $(t, d)=1$. Define the mapping λ from I_{n-1} into I_d as follows:

$$\lambda(i)\equiv t\, v(m\, i) \pmod d, \qquad \text{for } i\in I_{n-1}.$$

Finally, for $a=\omega^i$, $b=\omega^j\in Q^*=Q-\{0\}$, define $a\circ b=a\rho^{\lambda(i)}(b)=\omega^{i+jq^{\lambda(i)}}$.

2.1. Lemma. *The system $\{Q, +, \circ\}$ defined above is a left VW-system.*

Proof. From [2; Lemma 2.1], $Q=Q_\lambda$ is a VW system if and only if:

a) $\lambda(0)=0$,

b) if $i, j\in I_{n-1}$ and $i\equiv j \pmod{q^t-1}$, where $t=(d, \lambda(i)-\lambda(j))$, then $i=j$.

Clearly $\lambda(0)=0$. To show (b), it is sufficient to show that $i\equiv j \pmod g$. Let x be a prime divisor of g, and let $x^a \| i-j$, where $a>0$. If $g\equiv 0 \pmod{x^{a+1}}$, then $t\equiv 0 \pmod{x^a}$ and $i\equiv j \pmod{x^{a+1}}$ contrary to the choice of a, by a number theoretic lemma [3; Theorem 4.5, p. 50] or [2; Lemma 1.2]. Therefore, $i\equiv j \pmod g$ as required. The system Q_λ will be denoted by $Q_g=Q_g(m, t)$.

For an arbitrary λ-system, Q_λ, let J be the set of integers $k\in I_{n-1}$ such that if $k\mid i-j$ for $i, j\in I_{n-1}$, then $\lambda(i)=\lambda(j)$. J is an ideal in I_{n-1} generated by some

* Partially supported by NSF grant GP-6539.

integer v [2; 2.4]. For $Q=Q_g$, clearly $v=g$. Therefore, Q_g is an André system if and only if $g|q-1$ [2; section 3 (1)]. Similarly, Q_g is a nearfield if and only if $g=d$ and $g|q-1$ (see Lemma 3.6 below).

3. The Isotopisms of Q_g

Let $Q=Q_g(t, m)$ and $Q'=Q_g(t', m')$ be two λ-systems defined as in section 2, where the primes of g divide $q-1$, $g|d$, and m, t, m', and t' are integers such that $(mm', g)=1$ and $(tt', d)=1$. Define f, e, and $\hat{m}$ (mod g) by $f=tm$, $emt\equiv m't'$ (mod g) and $-m\hat{m}\equiv 1$ (mod g). Let $a=\omega^i$, $b=\omega^j\in Q^*$, let $\gamma=\alpha^c$ (where α is the automorphism of F, α: $x\to x^p$), and let (R, a, b, γ) be the mapping $x\to R(x)=\gamma\left(x(b\circ a)^{-1}\right)$ from Q onto Q'. Let $r=sd$, so $n=q^d=p^r$.

In order to determine whether (R, a, b, γ) is an isotopism, [2; 5.3], consider the following congruence.

$$k(ep^c-1)+iep^cq^w(q^{fk}-1)\equiv 0 \pmod{g} \tag{3.1}$$

for $k\in I_{n-1}$, where w is some constant still to be determined.

3.2. Lemma. *Let $g=d$. Then (R, a, b, γ) is an isotopism from Q onto Q' if and only if* (3.1) *is satisfied for $w=fj$ and $k\in I_{n-1}$.*

Proof. Since $g=d$, $\lambda(k)\equiv tmk$ (mod d). (3.1) results from rearranging [2; (5.5)] and replacing $k-j$ by k, noting that $d|q^d-1$.

3.3. Lemma. *Let $g<d$. Then (R, a, b, γ) is an isotopism from Q onto Q' if and only if either*

1. *$t\equiv t'$* (mod d), *$j\equiv 0$* (mod g), *and* (3.1) *is satisfied for $w=0$ and $k\in I_{n-1}$; or*

2. *$t\equiv -t'$* (mod d), *$j\equiv\hat{m}$* (mod g), *and* (3.1) *is satisfied for $w=-t$ and $k\in I_{n-1}$.*

Proof. Since $(t, d)=1$, [2; (5.5)] has the form $v(mk)\equiv v(mj)+t^{-1}t'v(m'k')$ (mod d), for some k' which depends on k. Since $g<d$, the next lemma below implies this congruence is satisfied for all k if and only if either $t\equiv t'$ (mod d) and $v(mj)\equiv 0$ (mod d), or $t\equiv -t'$ (mod d) and $v(mj)\equiv g-1$ (mod d). In the first case, the congruence becomes $mk\equiv m'k'$. (mod g), with $j\equiv 0$ (mod g); in the second case, the congruence becomes $mk\equiv -1-m'k'$ (mod g), with $j\equiv\hat{m}$ (mod g).

Lemma. *Let g, d, a, and t be integers such that $g|d$, $0<a$, $t<d$, and $(t, d)=1$. Define the set S by $S\subseteq I_d=\{0, 1, \ldots, d-1\}$, and $S=\{b_i: b_i\equiv a+it$* (mod d), *for $i\in I_g\}$.*

If $S=I_g$ and if $1<g<d$, then either $a=0$ and $t=1$, or $a=g-1$ and $t=d-1$.

Proof. Suppose the mapping $i\to a+it$ maps I_g onto a set congruent to I_g (mod d). Then $0\leqq a<g$. (1) Suppose $0<t<d-g$. Then $0\leqq a+t<d$ implies $0\leqq a+t<g$. By induction, $0\leqq a+(g-1)t<g$. Hence $a=0$ and $t=1$. (2) Suppose $d-g<t<d$. Then $d-g<a+t<d+g$ implies $d\leqq a+t<d+g$. By induction, $(g-1)d\leqq a+(g-1)t$, and hence $t=d-1$ and $a=g-1$.

The following discussion provides a solution for (3.1) and enables the description of the isotopism classes and the autotopism groups of the systems Q and Q'. The key to the existence of solutions for (3.1) is the following lemma. Let $h=LCM[(g, q-1), g/(g, q-1)]$, and note that

$$h=\frac{g(g, q-1)}{(g, (q-1)^2)}, \quad \text{and} \quad h \mid g.$$

3.4. Lemma. *There exists solution pairs (i, c) for (3.1) if and only if there exist solutions for x in*

$$e p^x-1 \equiv 0 \pmod{h}. \tag{3.5}$$

Moreover, the solutions for x in (3.5) are exactly the solutions for c in (3.1).

The proof depends on the following lemma.

3.6. Lemma. *Let q, g, and f be defined as above, where the primes of g divide $q-1$ and $(f, g)=1$. Then*

$$\frac{q^{fk}-1}{q^f-1} \equiv k \pmod{g} \qquad \text{for } k \in I_{n-1}$$

if and only if $q-1 \equiv 0 \pmod{g}$.

Proof. See the proof of [3; Theorem 4.5, p. 50].

Proof of Lemma 3.4. For $k=1$ and fixed c, there exists solutions for i in (3.1) if and only if $ep^c-1 \equiv 0 \pmod{(g, q-1)}$. If solutions exist for $k=1$, they have the form $(\bmod g)$, $i=[i_0(ep^c-1)+z g]/(g, q-1)$, for $0 \leqq z<(g, q-1)$. These values of i are solutions of (3.1) for all k if and only if

$$k+A\left(\frac{q^{fk}-1}{q^f-1}\right) \equiv 0 \pmod{B}, \tag{3.7}$$

$$\text{where} \quad A=i_0 e p^c q^w \frac{(q^f-1)}{(g, q-1)}, \quad \text{and} \quad B=\frac{g}{(g, e p^c-1)}.$$

Since $k=1$ is a solution of (3.7), $A \equiv -1 \pmod{B}$. From Lemma 3.6, (3.7) is satisfied for all k if and only if $q-1 \equiv 0 \pmod{B}$, if and only if

$$e p^c-1 \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{g}{(g, q-1)}\right).$$

Finally, there exists solutions for i in (3.1) if and only if $e p^c-1 \equiv 0 \pmod{h}$.

In order to express the number of solutions of (3.1), it is convenient to introduce the following terms. Define $\operatorname{ord}_g q$ to be the least positive integer y such that $q^y \equiv 1 \pmod{g}$. Let $\delta=(g \operatorname{ord}_h p)/(h \operatorname{ord}_g p)$. Then $\delta=1$, unless $q \equiv 3 \pmod 4$, $g \equiv 0 \pmod 8$, and $q^2 \equiv 1 \pmod{2^S}$ where $2^S \| g$; in this case $\delta=2$. By examining the cases $\delta=1$ and $\delta=2$, it is possible to describe explicitly the set S of solutions for i in (3.1). In particular, the set S is the same for each w. The

description of S will be omitted since this information will not be required subsequently.

The preceding facts about δ can be derived from the following lemma.

3.8. Lemma. *Let the primes of g divide $q-1$. Then*

$$\operatorname{ord}_g q = \frac{g}{(g, q-1)}$$

unless $q \equiv 3 \pmod 4$ and $g \equiv 0 \pmod 8$, in which case

$$\operatorname{ord}_g q = \frac{2g}{(g, q^2-1)}.$$

Proof. See [3; Theorem 4.5, p. 50].

3.9. Lemma. *If there exist solutions (i, c) for (3.1), then there exist exactly*

$$\frac{r(g, (q-1)^2)(n-1)}{\delta g \operatorname{ord}_g p}$$

solutions which satisfy the conditions $0 \leqq i < n-1$ and $0 \leqq c < r$.

Proof. If there exist solutions c for x in (3.5), then there are exactly $r/\operatorname{ord}_h p$ solutions (mod r). For each solution c, there exist $(g, q-1)(n-1)/g$ solutions for $i \pmod{n-1}$ in (3.1), by Lemma 3.4. The lemma follows from the definitions for δ and h.

If is now possible to decide when two systems $Q = Q_g(t, m)$ and $Q' = Q_g(t', m')$ are isotopic.

3.10. Proposition. *Let $g = d$. Then Q is isotopic to Q' if and only if $m't' \equiv mtp^c \pmod h$, for some c.*

3.11. Corollary. *There exist*

$$\frac{\varphi(d)}{\delta \operatorname{ord}_d p}$$

non-isotopic systems Q_d.

3.12. Corollary. *If $\delta = 1$, then Q is isotopic to Q' if and only if Q is isomorphic to Q'.*

Proof. Proposition 3.10 follows from Lemmas 3.2 and 3.4. There exist $\varphi(d)$ distinct Q_d, since $Q = Q'$ if and only if $mt \equiv m't' \pmod d$. Last, the isotopism classes have order $(d/h) \operatorname{ord}_h p = \delta \operatorname{ord}_d p$, and the isomorphisms classes have order $\operatorname{ord}_d p$.

3.13. Proposition. *Let $g < d$. Then Q is isotopic to Q' if and only if $t \equiv \pm t' \pmod d$ and $tm p^c \equiv t' m' \pmod h$, for some c.*

3.14. Corollary. *There exist*

$$\frac{\varphi(d) \cdot \varphi(g)}{2\delta \operatorname{ord}_g p}$$

non-isotopic systems Q_g, for $g < d$.

Proof. Proposition 3.13 follows from Lemmas 3.3 and 3.4. There exist $\varphi(d)\cdot\varphi(g)$ distinct systems Q_g (for $g<d$), since $Q=Q'$ if and only if $t\equiv t'$ (mod d) and $m\equiv m'$ (mod g). Last, the isotopism classes have order $(2g/h)$ $\mathrm{ord}_h p=2\delta$ $\mathrm{ord}_g p$ (note that $1\not\equiv -1$ (mod h) since $1<g<d$).

4. The Autotopism Collineations of $\Pi(Q)$

Let $Q=Q_g(t, m)$ and let $\Pi=\Pi(Q)$ be the affine plane coordinatized by Q. It is possible to apply Lemmas 3.2–3.4 to the autotopism group $A(Q)$ of Q, and to the associated collineation group A of Π (cf. [2; section 4]). Let $A_{(x,y)}$ and $A_{(k)}$ be the subgroups of A fixing the points (x, y) and (k) of Π, respectively.

4.1. Lemma. *Let $g=d$. Then*

$$|A|=\frac{r(n-1)^2(d,(q-1)^2)}{\delta d\,\mathrm{ord}_d p},$$

$$|A_{(0,1)}|=|A_{(1)}|=\frac{|A|}{n-1},$$

$$|A_{(1,0)}|=\frac{r(n-1)}{\mathrm{ord}_d p},$$

and

$$|A_{(1,1)}|=|A_{(0,1),(1,0)}|=\frac{r}{\mathrm{ord}_d p}.$$

Proof. The autotopisms (R, a, b, γ) of Q are described by (3.1), where $a=\omega^i$, $b=\omega^j$, $\gamma=\alpha^c$, $e=1$, and $w=fj$, from Lemma 3.2. The order of A follows from Lemmas 3.4 and 3.9, since for each $j\in I_{n-1}$, $r(d,(q-1)^2)(n-1)/\delta d$ $\mathrm{ord}_d p$ solution pairs (i, c) exist for (3.1). Similarly, $|A_{(1)}|=|A|/(n-1)$ since $A_{(1)}\cong\{(R, a, b, \gamma)\in A(Q)\colon b=1\}$ from [2; section 4]. $A_{(1,1)}\cong\{(R, a, b, \gamma)\in A(Q)\colon a=b=1\}$, and hence $|A_{(1,1)}|=r/\mathrm{ord}_d p$ from Lemma 3.2. $A_{(1,0)}\cong\{(R, a, b, \gamma)\in A(Q)\colon a=1\}$, and hence $|A_{(1,0)}|=(n-1)|A_{(1,1)}|$ since each solution for c in (3.1) with $i=0$ is a solution for all j. Last, the order of $A_{(0,1)}$ follows from Proposition 4.2, below.

4.2. Proposition. *Let $Q=Q_d$, i.e., let $g=d$. Then:*

1. *A and $A_{(1,0)}$ are transitive on the set of points $\neq(0, 0)$ of the line* [0].
2. *A and $A_{(1,0)}$ are transitive on the set of points $\neq(0)$, (∞) of the line L_∞.*
3. *A is transitive on the set of points $\neq(0, 0)$ of the line* [0, 0] *if and only if $(q-1)^2\equiv 0$ (mod d).*
4. *A is transitive on the set of $(q-1)^2$ points (x, y) of Π, with $x\neq 0, y\neq 0$, if and only if $(q-1)^2\equiv 0$ (mod d).*

Proof. 1. $|A_{(1,0)}|/|A_{(1,1)}|=n-1$ implies $A_{(1,0)}$ and A are transitive on the points $\neq(0, 0)$ of [0]; hence also $|A_{(0,1)}|=|A|/(n-1)$. Parts (2)–(4) follow similarly, noting in (3) and (4) that if $d|(q-1)^2$ then $\delta=1$.

4.3. Lemma. *Let $g<d$. Then*

$$|A|=\frac{r(n-1)^2(g,(q-1)^2)}{\delta g^2 \operatorname{ord}_g p},$$

$$|A_{(0,1)}|=|A_{(1,0)}|=\frac{r(n-1)}{g \operatorname{ord}_g p},$$

$$|A_{(1)}|=\frac{g|A|}{(n-1)},$$

and

$$|A_{(1,1)}|=\frac{r}{\operatorname{ord}_g p}.$$

Proof (cf. Lemma 4.1). The order of A follows from Lemmas 3.3, 3.4, and 3.9. The orders of $A_{(1)}$, $A_{(1,1)}$, and $A_{(1,0)}$ are derived as in Lemma 4.1. To compute $|A_{(0,1)}|$, note that $A_{(0,1)}\cong\{(R, a, b, \gamma)\in A(Q)\colon b\circ a=1\}$, where $a=\omega^i$ and $b=\omega^j$. Moreover, $(R, a, b, \gamma)\in A(Q)$ implies $i\equiv 0 \pmod g$ and $i=-j$. Since $e=1$ and $w=0$ in (3.1) from Lemma (3.3), for each $i\equiv 0 \pmod g$ and for $j=-i$ there exist $r/\operatorname{ord}_g p$ solutions for c in (3.1). Hence, $|A_{(0,1)}|=r(n-1)/g \operatorname{ord}_g p$, as required.

4.4. Proposition. *Let $Q=Q_g$, with $g<d$. Then:*

1. *A is transitive on the points $\neq(0, 0)$ of the line $[0]$ of Π if and only if $(q-1)^2\equiv 0 \pmod g$.*

2. *A is transitive on the points $\neq(0, 0)$ of the line $[0, 0]$ of Π if and only if $(q-1)^2\equiv 0 \pmod g$.*

3. *A is never transitive on the set of points $\neq(0)$, (∞) of L_∞, nor on the set of points $\{(x, y)\neq(0, 0)\}$ of Π.*

Proof. The proof follows from Lemma (4.3), as in Proposition 4.2, noting that if $g|(q-1)^2$ then $\delta=1$.

The subgroups of perspectivities of A induced by N_l and N_m can be determined from the following lemmas and [2; Corollary 5.10].

4.5. Lemma. *Let $g=d$. Then $N_l=\{\omega^i\colon i\equiv 0 \pmod{\operatorname{ord}_d q}\}$ and*

$$N_m=\left\{\omega^i\colon i\equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{d}{(d, q-1)}\right)\right\}.$$

Hence $N_l=N_m$ unless $q\equiv 3 \pmod 4$ and $d\equiv 0 \pmod 8$, in which case $N_m\subset N_l$.

Proof. See [2; 5.1] and Lemma 3.8.

4.6. Lemma. *Let $g<d$. Then $N_l=N_m=N_v$, where $v=g$.*

Proof. See [2; 5.1], Lemma 3.8, and the lemma following 3.3.

4.7. Corollary. *If Q_g and $Q_{g'}$ are isotopic or anti-isotopic, then $g=g'$.*

Proof. The corollary follows from Lemmas 4.5 and 4.6 by noting that N_l and N_m are cyclic groups if and only if $g<d$. The corollary also follows from [2; 5.5 and 5.8].

Finally, it is possible to describe the anti-isotopisms of Q.

4.8. Proposition. *Q and Q' are anti-isotopic if and only if Q and Q' are isotopic and* $2(q-1)\equiv 0 \pmod g$.

4.9. Corollary. *There exist anti-autotopisms of Q if and only if* $2(q-1)\equiv 0 \pmod g$.

Proof. Let $a=\omega^i$, $b=\omega^j$, $\gamma=\alpha^c$, and let (R, a, b, γ) be the mapping $x\to R(x)=\gamma(x(b\circ a)^{-1})$ from Q onto Q' defined in [2; Proposition 5.6]. Consider the congruence

$$k(e\,p^c-1)+e\,p^c(k+i\,q^w)(q^{fk}-1)\equiv 0 \pmod g, \qquad \text{for } k\in I_{n-1}, \tag{4.10}$$

where w is some constant. As in the proofs of Lemmas 3.2 and 3.3, it follows from rearranging [2; 5.8] that (R, a, b, γ) is an anti-isotopism of Q onto Q' if and only if either (1) $g=d$ and (4.10) holds for $w=fj$; or (2) $g<d$, $t\equiv t' \pmod d$, $m\,j\equiv -1 \pmod g$, and (4.10) holds for $w=f\hat{m}$; or (3) $g<d$, $t\equiv -t' \pmod d$, $j\equiv 0 \pmod g$, and (4.10) holds for $w=0$. The following lemma together with Propositions 3.10 and 3.13 complete the proof of Proposition 4.8.

4.11. Lemma. *The integer c is a solution of* (4.10) *for some i if and only if* $e\,p^c-1\equiv 0 \pmod h$ *and* $2(q-1)\equiv 0 \pmod g$ *(cf.* (3.5) *and Lemma 3.4).*

Proof. If (c, i) is a solution pair for (4.10), then $k=1$ implies $e\,p^c-1\equiv 0 \pmod{(g, q-1)}$. It is sufficient to prove that $2(q-1)\equiv 0 \pmod g$, for then $h=(g, q-1)$. Adding (4.10) with $k=-1$ to (4.10) with $k=1$ and rearranging, one obtains

$$q^{-f}e\,p^c(q^f-1)\big(q^f+1+i\,q^w(q^f-1)\big)\equiv 0 \pmod g. \tag{4.12}$$

Since the primes of g divide $q-1$, and since $(f, g)=1$, it follows that $(q^f+1+i\,q^w(q^f-1), g)\,|\,2$. Hence $2(q-1)\equiv 0 \pmod g$.

Conversely, let $2(q-1)\equiv 0 \pmod g$ and $e\,p^c-1\equiv 0 \pmod{(g, q-1)}$. If $g\,|\,q-1$, then (i, c) is a solution of (4.10) for any i. If $g\nmid q-1$, then (i, c) is a solution for (4.10) if i is even or odd according as $g\nmid e\,p^c-1$ or $g\,|\,e\,p^c-1$, respectively.

Let $Q=Q_g$, $\Pi=\Pi(Q)$, and let $\mathfrak{T}$, A, and $\mathfrak{G}$ be the translation group, the autotopism collineation group, and the entire collineation group of Π, respectively. It is possible to show that some of the planes $\Pi(Q)$ are not isomorphic to André planes.

4.13. Proposition. *Let $g=d$. Then:*

1. *If Π is coordinatized by a λ-system Q', then Q and Q' are isotopic or anti-isotopic.*

2. *If* $2(q-1)\not\equiv 0 \pmod d$, *then* $\mathfrak{G}=\mathfrak{T}A$.

4.14. Corollary. 1. *Π is an André plane if and only if* $q-1\equiv 0 \pmod d$. *Π is not coordinatized by any system Q_g, for $g<d$.*

2. *There exist*

$$\frac{\varphi(d)}{\delta \operatorname{ord}_d p}$$

non-isomorphic planes $\Pi = \Pi(Q)$, *for* $Q = Q_d(m, t)$.

Proof. Let Π be coordinatized by Q' with respect to axes l_1 and l_2. If $\{l_1, l_2\} = \{[0], [0, 0]\}$, then Q and Q' are isotopic or anti-isotopic [2; section 4]. Otherwise, there exists an l_1-homology of Π moving (0) to some point (k), $k \neq \infty$, $k \neq 0$ [2; 2.4, section 4, 5.1 (4)]. From part (2) of Proposition (4.2), $\mathfrak{G}$ is transitive on the points of L_∞, so there exist collineations moving [0] to l_1 and [0, 0] to l_2 [2; 6.1]. Therefore, Q and Q' are isotopic. In this latter case, Q is anti-isotopic to itself, so $2(q-1) \equiv 0 \pmod{d}$ from Lemma (4.8). Therefore, if $2(q-1) \not\equiv 0 \pmod{d}$, then $\mathfrak{G} = \mathfrak{T} \cdot A$. Part (1) of the Corollary follows from part (1) above and the fact that every λ-system isotopic or anti-isotopic to an André system, is itself an André system [2; 7.3, 7.4]. Similarly, from Corollary 4.7, if two systems Q_g and $Q_{g'}$ are isotopic or anti-isotopic, then $g = g'$. To complete the proof of the Corollary, refer to 3.11 and 4.8.

References

[1] ANDRÉ, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit Transitiver Translationsgruppe. Math. Zeitschr. **60**, 156–186 (1954).

[2] FOULSER, D. A.: A generalization of André's systems. Math. Zeitschr. **100**, 380–395 (1967).

[3] LEVEQUE, W.: Topics in number theory, vol. 1. Reading, Mass.: Addison-Wesley 1956.

Dept. of Math., University of Illinois, Chicago, Illinois 60680, U.S.A.

BORRELLI, R.L.
Math. Zeitschr. 101, 103—122 (1967)

The $\mathfrak{Z}$-Fredholm Property for Oblique Derivative Problems

ROBERT L. BORRELLI*

Received March 3, 1967

1. Introduction

In this paper we shall give a characterization of second order oblique derivative problems which in some ways generalizes the results derived in [1]. The principal tool used in our analysis will be the theory of $\mathfrak{Z}$-Fredholm operators which was developed by CORDES in the fundamental papers [2–4]. It is expedient to give here a brief summary of some results from these papers which suit our present purpose; however, for complete details the above mentioned papers should be consulted.

Let the second order operator

$$P(x, D)=\sum_{|\alpha|\leqq 2} a_\alpha D^{(\alpha)}$$

be elliptic in the closure of a domain $G\subset E_n$, $n\geqq 3$, and let $\Gamma=\partial G$ be of class C^3. As in [1] we shall be concerned here with the boundary operator

$$B(x, D)=\frac{1}{\varphi(x)}\sum_{k=1}^{n} b_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}$$

where the coefficients b_k and the function φ are suitably restricted. To describe the results of [1] let $V(x)$ be the vector field on Γ whose components are given by $(b_1(x), b_2(x), \ldots, b_n(x))$. It is assumed that V is non-vanishing and continuous on Γ, and that V is tangent to Γ along certain, finitely many, $(n-2)$-dimensional submanifolds $\mathscr{C}_i$, $i=1, 2, \ldots, m$, such that $V(x)$ is not tangent to $\mathscr{C}_i$ for $x\in\mathscr{C}_i$. The manifold $\mathscr{C}$ was called a submergent or emergent cycle for V according as the field V submerges into or emerges out of the region G when following V across $\mathscr{C}$ in the direction induced by the tangential component of V on Γ. It was shown in [1] that the following apriori estimate using the $\mathscr{L}_2$ norm could be derived in the case where the vector field V gives rise only to submergent cycles:

$$\|u\|_2\leqq C\{\|f\|_0+\|\dot{\psi}\|_1+\|u\|_0\} \tag{E_1}$$

where u is a solution of the problem

$$\text{(G)}\qquad \begin{aligned} P(x, D)u&=f\in C^\infty(G) && \text{in } G\\ \frac{1}{\varphi(x)}B(x, D)u&=\psi\in C^\infty(\Gamma) && \text{on } \Gamma \end{aligned}$$

* This work was partially supported by the National Science Foundation under contract GP-4029.

and where φ vanishes sufficiently strongly on the cycles and is nonvanishing elsewhere on Γ, and finally where $\| \ \|_2$ and $\| \ \|_0$ are the usual $\mathfrak{H}_p$ norms, and the boundary norm $\dot{\| \ \|}_1$ is defined as follows:

$$\dot{\| \varphi \|}_1 = \inf \{ \| v \|_1 : v \in C^\infty(G),\ v = \varphi \text{ on } \Gamma \}.$$

An example in [1] shows that the estimate (E_1) cannot in general hold for (G) if emergent cycles are present. An attempt in [1] to generalize the estimate (E_1) to admit emergent cycles failed to achieve satisfactory results. Recently CORDES has defined and has extensively studied a generalization of the concept of a Fredholm operator which can successsfully be applied to the oblique derivative problem. The principal interest in studying such operators stems from the fact that an index theorem can be proved for them which generalizes the well-known index theorem for Fredholm operators (see [3, 8, and 9]).

Our object in this paper will be to set the stage for proving that problem (G) induces a bounded mapping of a suitable Hilbert space of functions over Γ into itself which is a generalized Fredholm operator in the sense of Cordes whether the boundary operator $B(x, D)$ gives rise to submergent or to emergent cycles. Therefore our principal interest in this paper will be to show that the local boundary problem has this property, leaving the global problem for a later paper. More precisely, let us consider the boundary problem

$$\text{(L)} \qquad \begin{aligned} (\nabla^2 - 1)\, u &= f && \text{in } H \\ Q u = \frac{1}{x_2} \left\{ x_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} + b \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\} &= \varphi && \text{on } E \end{aligned}$$

where H is the semi-space $\{x : x \in E_3,\ x_3 > 0\}$ and E its boundary, and b is some non-zero constant. The fact that we have chosen E_3 instead of E_n, $n \geqq 3$, for the local problem will not involve any loss of generality; the choice of E_3 will result, however, in some simplification of notation. From [1] we observe that the manifold $\mathscr{C} = \{x : x \in E_3,\ x_3 = x_2 = 0\}$ is an emergent or submergent cycle for the boundary operator $x_2\, \partial/\partial x_3 + b\, \partial/\partial x_2$ according as $b < 0$ or $b > 0$. Now we define the operator A in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}(E)$ as follows: $Aw = \varphi$ if and only if there exists a function u over H such that 1) u is a solution of (L), and 2) $u = L_0^{-\frac{1}{2}} w$ on E where

$$L_0 = 1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

The domain of A is given by

$$\mathscr{D}(A) = \left\{ u : u \in \mathfrak{H}_{\frac{1}{2}},\ v = \sigma^{\frac{1}{2}} \mathscr{F} u = O\big(p^{-1}(\sigma)\big) \quad \text{as } \sigma \to \infty, \right.$$

$$\left. \text{for each polynomial } p \text{ in a single variable, and } v \text{ satisfies} \right.$$

$$\left. \text{the condition } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{2}}(t)}\, v(\xi_1, t)\, dt = 0 \text{ for a. a. } \xi_1 \in E_1 \right\}$$

where $\sigma^2=1+\xi_1^2+\xi_2^2$, $\sigma^2(t)=1+\xi_1^2+t^2$, and $\mathscr{F}$ is the Fourier transform operator. It is shown in the first part of section 3 below that A is densely defined, preclosed, and that $\bar{A}$ has closed range in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$. By a well-known result for closed linear operators (see Lemma 2.2 below) the fact that $\bar{A}$ has closed range is equivalent to the existence of a positive constant c such that the estimate

$$[\bar{A}u]_{\frac{1}{2}} \geqq c[u]_{\frac{1}{2}} \tag{E_2}$$

holds for all $u\in\mathscr{D}(\bar{A})\cap\mathscr{N}(\bar{A})^{\perp}$, where $[\,]_{\frac{1}{2}}$ is the norm in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$. The estimate (E_2) is therefore shown to hold regardless of whether $\mathscr{C}$ is submergent or emergent. It is easy to see that in the submergent case the estimate (E_1) leads to the estimate (E_2), with $\mathscr{N}(\bar{A})$ being trivial in that case. In the emergent case however $\mathscr{N}(\bar{A})$ is infinite dimensional and so the estimate (E_2) generalizes the results of [1] in the sense indicated.

Consider the set M of all closed subspaces of $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ which are generated by finite subcollections $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^N\}$ of elements of $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ as follows:

$$\{u\colon u\in\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}},\ (\varphi^j, U_t u)_{\frac{1}{2}}=0 \text{ for a.a. } t\in E_1,\ j=1, 2, \ldots, N\}$$

where $(\ ,\ )_{\frac{1}{2}}$ is the scalar product in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ and $\{U_t\}$ is the group of translations along the cycle $\mathscr{C}$; i.e., $U_t u(x_1, x_2)=u(x_1-t, x_2)$. It is shown in the last part of section 3 that M is an R-set and that the operator $\bar{A}(1+A^*\bar{A})^{-\frac{1}{2}}$ is $\mathfrak{I}_{\mathsf{M}}$-Fredholm, where $\mathfrak{I}_{\mathsf{M}}$ is the R-algebra generated by M. The definitions of the terms R-set and R-algebra are given in section 2.

The author is deeply indebted to Professor CORDES for making available preprints of his forthcoming papers [2–4] on $\mathfrak{I}$-Fredholm operators, and especially for several meetings in which the principal ideas in this paper were evolved.

2. $\mathfrak{I}$-Fredholm Operators

Let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space and denote by A the set of all closed subspaces of $\mathfrak{H}$, and by $\mathfrak{C}$ the set of all compact operators on $\mathfrak{H}$, and by $\mathfrak{B}$ the set of all bounded operators on $\mathfrak{H}$. It is well-known that $\mathfrak{C}$ is a proper, closed, two-sided, $*$-ideal of the C^*-algebra $\mathfrak{B}$, and that the bounded Fredholm operators on $\mathfrak{H}$ can be characterized as follows: An operator $A\in\mathfrak{B}$ is Fredholm if and only if its residue class mod $\mathfrak{C}$ is a regular element of the quotient algebra $\mathfrak{B}/\mathfrak{C}$ (ATKINSON's criterion). Generalizing this criterion, CORDES in [3] defines the class of $\mathfrak{I}$-Fredholm operators in $\mathfrak{B}$ as follows: Let $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{B}$ be a C^*-algebra with unit and $\mathfrak{I}$ a proper, closed, two-sided, $*$-ideal of $\mathfrak{A}$. Then $A\in\mathfrak{A}$ is called $\mathfrak{I}$-Fredholm if and only if its residue class mod $\mathfrak{I}$ is a regular element of the quotient algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.

For $\mathscr{S}\in\mathsf{A}$ denote by $P_{\mathscr{S}}$ the orthogonal projection onto $\mathscr{S}$, and by $\mathscr{S}^{\perp}$ the orthogonal complement of $\mathscr{S}$ in $\mathfrak{H}$. For any pair $\mathscr{S}, \mathscr{T}\in\mathsf{A}$ put

$$\delta(\mathscr{S}, \mathscr{T})=\|P_{\mathscr{T}^{\perp}}P_{\mathscr{S}}\|, \qquad g(\mathscr{S}, \mathscr{T})=\|P_{\mathscr{S}}-P_{\mathscr{T}}\|.$$

It can be shown that the functions δ and g are related as follows: $g(\mathscr{S}, \mathscr{T})=\max\{\delta(\mathscr{S}, \mathscr{T}), \delta(\mathscr{T}, \mathscr{S})\}$. Moreover, it can be shown that g is a metric on A, and that the metric space (A, g) is complete.

Let $0 \neq \mathsf{M} \subset \mathsf{A}$, and $0 < \rho \leqq 1$, and $\mathscr{S}_0 \in \mathsf{M}$, then the set

$$\mathsf{M}(\mathscr{S}_0, \rho) = \{\mathscr{S}: \mathscr{S} \in \mathsf{M}, \delta(\mathscr{S}, \mathscr{S}_0) < \rho\}$$

is called the left-δ sphere in M with center at $\mathscr{S}_0$ and radius ρ. A subset $\mathsf{M} \subset \mathsf{A}$ is called an R-set if and only if the intersection of finitely many left-δ spheres in M is not empty. The left-δ spheres in A are a basis for a topology and the corresponding topology is called the left-δ topology in A. An R-set N is called maximal if and only if N is closed in A under the left-δ topology.

For any R-set M let $\mathfrak{I}_{\mathsf{M}}$ be the following subset of $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{I}_{\mathsf{M}} = \{A: A \in \mathfrak{B}, \text{ and for each } \varepsilon > 0 \text{ there exists a } \mathscr{S} \in \mathsf{M} \text{ such that}$$
$$\|A P_{\mathscr{S}}\| \leqq \varepsilon \text{ and } \|A^* P_{\mathscr{S}}\| \leqq \varepsilon\}.$$

It can be shown that $\mathfrak{I}_{\mathsf{M}}$ is a C^*-algebra, and any C^*-algebra in $\mathfrak{B}$ which can be generated from an R-set in this way is called an R-algebra. For any C^*-algebra, $\mathfrak{A}$, in $\mathfrak{B}$ let $\mathsf{N}_{\mathfrak{A}}$ be the following subset of A:

$$\mathsf{N}_{\mathfrak{A}} = \{\mathscr{S}: \mathscr{S} \in \mathsf{A}, \text{ and } P_{\mathscr{S}^\perp} \in \mathfrak{A}\}.$$

A fundamental result concerning R-algebras is given by the following

Theorem 2.1. *Let $\mathfrak{I}$ be an R-algebra, then $\mathsf{N}_{\mathfrak{I}}$ is a maximal R-set which generates $\mathfrak{I}$, i.e., $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathsf{N}_{\mathfrak{I}}}$, and moreover, if M is any other R-set which generates $\mathfrak{I}$, then $\mathsf{M} \subset \mathsf{N}_{\mathfrak{I}}$, and furthermore, the closure of M in the left-δ topology is equal to $\mathsf{N}_{\mathfrak{I}}$. Moreover, if $\hat{\mathsf{M}} = \{\mathscr{S}: \mathscr{S} \in \mathsf{A}$, and there exists a $\mathscr{T} \in \mathsf{M}$ with $\mathscr{S} \supset \mathscr{T}\}$, then the closure of $\hat{\mathsf{M}}$ in the metric topology generated by g is also equal to $\mathsf{N}_{\mathfrak{I}}$.*

It follows from this theorem that there is a one-to-one correspondence between R-algebras and maximal R-sets. Two R-sets are called equivalent if and only if they generate the same R-algebra; i.e., if and only if their closures in either of the two senses described in theorem 2.1 coincide.

For any R-set M define the subset $\mathfrak{B}_{\mathsf{M}}$ of $\mathfrak{B}$ as follows:

$$\mathfrak{B}_{\mathsf{M}} = \{A: A \in \mathfrak{B}, \text{ and for each } \mathscr{S} \in \mathsf{M} \text{ and each } \varepsilon > 0,$$
$$\text{there exists a } \mathscr{T} \in \mathsf{M} \text{ with } \|P_{\mathscr{S}^\perp} A P_{\mathscr{T}}\| \leqq \varepsilon, \text{ and } \|P_{\mathscr{S}^\perp} A^* P_{\mathscr{T}}\| \leqq \varepsilon\}.$$

The following result is proven in CORDES [3]:

Theorem 2.2. *Let M be an R-set, then $\mathfrak{B}_{\mathsf{M}}$ is a C^*-algebra with unit and has the R-algebra $\mathfrak{I}_{\mathsf{M}}$ as a closed, 2-sided, $*$-ideal. Moreover, if the R-sets M and M' are equivalent, then $\mathfrak{B}_{\mathsf{M}} = \mathfrak{B}_{\mathsf{M}'}$.*

A C^*-algebra $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$ which has the form $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_{\mathsf{M}}$ for some R-set M is called an *RI-algebra*, and M *is said to generate* $\mathfrak{A}$. In view of theorem 2.2 it is clear that $\mathfrak{A}$ depends only on the R-algebra $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathsf{M}}$ and not on the particular R-set M. Hence we may employ the notation $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ for $\mathfrak{B}_{\mathsf{M}}$, and speak of $\mathfrak{A}(\mathfrak{I})$ as the C^*-algebra generated by the R-algebra $\mathfrak{I}$.

Let $A \in \mathfrak{B}$ then a mapping γ_A, defined in A with image in A, can be associated with A in the following way: Let

$$\mathscr{D}_A = \{\mathscr{S}: \mathscr{S}, A\mathscr{S} \in \mathsf{A}, \text{ and } \mathscr{S} \cap \mathscr{N}(A) = \{0\}\}$$

and put

$$\gamma_A(\mathscr{S}) = A\mathscr{S} \quad \text{for } \mathscr{S} \in \mathscr{D}_A.$$

A property of γ_A which we need later on is given by

Lemma 2.1. *The mapping γ_A is continuous in the metric topology for A generated by g.*

In CORDES [4] a characterization of $\mathfrak{I}$-Fredholm operators is given which is suitable for our purposes. Towards this end we define the concept of an N-$*$-operator following Cordes. Let N be a maximal R-set in A, then an operator $A \in \mathfrak{B}$ is called an N-operator if $\mathscr{D}_A \cap \mathsf{N} \neq \emptyset$ and γ_A maps the elements of $\mathscr{D}_A \cap \mathsf{N}$ into N. If A^* satisfies these conditions also, then A is called an N-$*$-operator. Then we have the basic

Theorem 2.3. *Let N be a maximal R-set in A, then an operator $A \in \mathfrak{B}$ is $\mathfrak{I}_{\mathsf{N}}$-Fredholm if and only if A is an N-$*$-operator.*

We shall use theorem 2.3 to show that certain operators which appear in section 3 are $\mathfrak{I}$-Fredholm.

Let $\langle , \rangle$, and $\| \ \|$ be the scalar product and its associated norm symbols over $\mathfrak{H}$ respectively; and, as usual, let $\mathscr{D}(A)$, $\mathscr{R}(A)$ and $\mathscr{N}(A)$ denote the domain, range and null spaces respectively of the operator A in $\mathfrak{H}$. The following results for closed operators will be needed in section 3:

Lemma 2.2. *A closed operator A has closed range if and only if there exists a positive constant c such that the estimate*

$$\|Au\| \geqq c\|u\|$$

holds for all $u \in \mathscr{N}(A)^{\perp} \cap \mathscr{D}(A)$.

Lemma 2.3. *A closed operator A has closed range if and only if its adjoint A^* has closed range.*

In view of lemma 2.2 it is of interest to define the constant $c(A)$ for all closed operators with closed range as follows: let

$$c(A) = \inf\{\|Au\|: \|u\| = 1, u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{N}(A)^{\perp}\}.$$

Then for such operators it can be shown that $c(A) = c(A^*) < \infty$.

Lemma 2.4. *Let A be a closed operator in $\mathfrak{H}$, then the operator $R_A = (1 + A^*A)^{-1}$ exists as a bounded, self-adjoint, and positive definite operator with $\mathscr{D}(R_A) = \mathfrak{H}$ and $\mathscr{R}(R_A) \subset \mathscr{D}(A)$. Moreover the operator AR_A is also bounded over $\mathfrak{H}$ and $\|R_A\| \leqq 1$, $\|AR_A\| \leqq 1$.*

Lemma 2.5. *Let A be a closed operator in $\mathfrak{H}$ then we have that*

$$AR_A u = R_{A^*} Au, \qquad \text{all } u \in \mathscr{D}(A)$$

and,

$$(A R_A)^* = A^* R_{A^*}.$$

Since R_A is bounded, self-adjoint and positive definite it is well-known that it has an unique bounded, self-adjoint and positive definite square root which we shall denote by S_A.

Lemma 2.6. *Let A be a closed operator in $\mathfrak{H}$, and further assume that A has closed range. Then the operator AS_A is also closed and has closed range, and*

$$c(A S_A) \geqq c(A)\left(1+c^2(A)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Moreover we have that

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A S_A), \qquad \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}\left((A S_A)^*\right).$$

3. The Local Problem

As in [1] we shall consider the local problem

$$(L) \qquad \begin{aligned} (\nabla^2 - 1)\, u &= 0 && \text{in } H \\ Q u = \frac{1}{x_2}\left\{x_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} + b \frac{\partial u}{\partial x_2}\right\} &= \varphi && \text{on } E \end{aligned}$$

where $H=\{x \in E_3,\ x_3>0\}$ and E is the boundary of H, and b is a constant different from zero. Let $\mathcal{F}$ be the Fourier Transform operator on E then we shall denote by $\mathfrak{H}_s$, $s>0$, the Hilbert space of functions over E under the norm

$$[v]_s^2 = \int_E \sigma^{2s} |\mathcal{F} v|^2$$

where $\sigma^2 = 1+\xi_1^2+\xi_2^2$. It is well-known that when s is a non-negative integer the norm $[\ ]_s$ is equivalent to the norm on $\mathfrak{H}_s$ which for $C_0^\infty(E)$-functions has the form

$$\| u \|_s^2 = \sum_{|\alpha| \leqq s} \int_E |D^{(\alpha)} u|^2.$$

Of course this latter norm can also be defined for functions on H, and we shall employ the same symbol in that case, the precise meaning being determined from usage. For convenience we shall denote the norms in $\mathcal{L}_2(E, \sigma^{2s})$ by $\langle w \rangle_s$, i.e.,

$$\langle w \rangle_s^2 = \int_E \sigma^{2s} |w|^2.$$

For operators A defined in some $\mathfrak{H}_s$ we shall denote by $\hat{A}$ the operator such that

$$\mathcal{F}(A u) = \hat{A} \mathcal{F} u$$

for all $u \in \mathcal{D}(A)$. Hence it follows immediately that $\hat{A} = \mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1}$, and that $\widehat{AB} = \hat{A}\hat{B}$.

Proceeding formally now let us consider the elliptic operator on E

$$L_0 = 1 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

and define the operator A as follows: $Aw = \varphi$ if and only if there exists a function u over H such that (1) u is a solution of (L), and (2) $u = L_0^{-\frac{1}{4}} w$ on E. We shall then write $A = QL_0^{-\frac{1}{4}}$ which is to be understood in the above sense. Let us compute A: From the above remarks it is clear that $Aw = \varphi$ implies that

$$\hat{A}(\mathscr{F}w) = \hat{Q}\,\hat{L}_0^{-\frac{1}{4}}\,\mathscr{F}w = \hat{Q}\,\mathscr{F}(L_0^{-\frac{1}{4}} w) = \hat{Q}\left(\frac{1}{\sigma}\,\mathscr{F}w\right) = \mathscr{F}\varphi\,.$$

If we put $v = \mathscr{F}w$, and $\psi = \mathscr{F}\varphi$, then we observe as in [*1*] that the last relation above can be written as

$$v_{\xi_2} - \frac{b\,\xi_2}{\sigma}\,v = -\psi_{\xi_2}\,.$$

Assuming that both $v(\xi_1, \xi_2)$ and $\psi(\xi_1, \xi_2)$ vanish at $\xi_2 = -\infty$ for each (or almost all) ξ_1 such that $-\infty < \xi_1 < \infty$, then integration of the above relation yields

$$-v + b \int_{-\infty}^{\xi_2} \frac{t}{\sigma(t)}\, v(\xi_1, t)\, dt = \psi\,.$$

Hence we see that $\hat{A}v = (-1 + bZ)v$ where Z is the singular integral operator

$$Zw = \int_{-\infty}^{\xi_2} \frac{t}{\sigma(t)}\, w(t)\, dt\,.$$

Now it can be seen as in [*1*] that when $b > 0$, the cycle $\mathscr{C} = \{x\colon x \in E,\ x_2 = 0\}$ is submergent, and that any (suitably restricted) solution of the local problem (L) must satisfy an estimate of the type

$$\| u \|_2 \leqq K[Qu]_{\frac{1}{4}}$$

where the constant K is independent of u and $\| \ \|_2$ is the usual norm in $\mathfrak{H}_2(H)$. Let $v(\xi_1, \xi_2) = (\mathscr{F}u)(\xi_1, \xi_2, 0)$, then the norm $\|u\|_2$ on H can be shown to be equivalent to the norm $\langle v \rangle_{\frac{1}{4}}$ on E, and the above estimate can be written as

$$\langle v \rangle_{\frac{1}{4}} \leqq k[Q\,L_0^{-\frac{1}{4}}(L_0^{\frac{1}{4}} u)]_{\frac{1}{4}}$$

or if we put $w = (L_0^{\frac{1}{4}} u)(x_1, x_2, 0)$ then $\mathscr{F}w = \sigma v$, and hence this estimate becomes

$$[w]_{\frac{1}{4}} \leqq k[Q\,L_0^{-\frac{1}{4}} w]_{\frac{1}{4}} = k[Aw]_{\frac{1}{4}} \tag{1}$$

which holds for all $w \in \mathscr{D}(A)$, and since the null space of A is evidently trivial, the estimate (1) holds for all $w \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{N}(A)^{\perp}$. The first objective of this section is to show that the estimate (1) also holds when $b < 0$, i.e., when the cycle $\mathscr{C}$ is emergent; but in this case $\mathscr{N}(A)$ is not trivial, as will be seen shortly. In view

of lemma 2.2, this will mean that $\bar{A}$ has closed range in the $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ norm regardless of whether $\mathscr{C}$ is submergent or emergent.

The estimate (1) can also be written as

$$\langle v\rangle_{\frac{1}{2}} \leqq k\langle \hat{A} v\rangle_{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

where $v=\mathscr{F} w$. Hence, in order to facilitate our computations it seems desirable to eliminate the weight factor σ which occurs in the norm $\langle\ \rangle_{\frac{1}{2}}$ above; toward this end we note that $z\in\mathscr{L}_2(E, 1)$ if and only if $\sigma^{-\frac{1}{2}} z\in\mathscr{L}_2(E, \sigma)$, and since $\langle\ \rangle_0=\|\ \|_0$ the estimate (2) becomes

$$\| z\| \leqq k\, \|(\sigma^{\frac{1}{2}}\hat{A}\sigma^{-\frac{1}{2}}) z\| \tag{3}$$

where the zero will henceforth be dropped from the norm symbol $\|\ \|_0$. Let us put

$$\sigma^{\frac{1}{2}}\hat{A}\sigma^{-\frac{1}{2}}=B, \qquad \sigma^{\frac{1}{2}} Z\sigma^{-\frac{1}{2}}=Y$$

then we have that $B=-1+bY$ and that the estimate (1) assumes the form

$$\| z\| \leqq k\, \| B z\| \tag{4}$$

for all $z\in\mathscr{D}(B)$.

We shall now give precise definitions of the domains of the operators Z, and $\hat{A}$, and hence also of Y and B as well. Let us put

$$\mathscr{D}(Z)=\Bigg\{w\colon w \text{ is Lebesgue measurable in } E, \text{ and } w=O\big(p^{-1}(\sigma)\big),\ \sigma\to\infty,$$

for each polynomial p in a single variable. and w is such that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sigma(t)}\, w(\xi_1, t)\, dt=0 \text{ for a.a. } \xi_1\in E_1\Bigg\}.$$

It is clear that $\mathscr{D}(\hat{A})$ should be taken to be equal to $\mathscr{D}(Z)$, and from the above formal definition of the operator Y, it is clear that we should put

$$\mathscr{D}(Y)=\Bigg\{v\colon v \text{ is Lebesgue measurable over } E,\ v=O\big(p^{-1}(\sigma)\big),\ \sigma\to\infty,$$

for each polynomial p in a single variable, and moreover v

satisfies the condition $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{2}}(t)}\, v(\xi_1, t)\, dt=0$, for a.a. $\xi_1\in E_1\Bigg\}$

and

$$Yv=\sigma^{\frac{1}{2}}(\xi_2) \int_{-\infty}^{\xi_2} \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{2}}(t)}\, v(\xi_1, t)\, dt$$

and of course we have that $\mathscr{D}(B)=\mathscr{D}(Y)$. That $\mathscr{D}(Y)$ is dense in $\mathscr{L}_2(E)$, or alternatively, that $\mathscr{D}(Z)$ is dense in $\mathscr{L}_2(E, \sigma)$, is an immediate consequence of the following lemma:

Lemma 3.1. *Let $\mathfrak{H}=\mathscr{L}_2(E_2)$ and suppose that φ is a complex-valued function on E_2 such that* 1) $\varphi\notin\mathfrak{H}$, *but* 2) φ *is locally square-integrable in E_2, and* 3) *that*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^2\,d\xi_2=\infty \qquad \text{for a.a. } \xi_1\in E_1.$$

Then the set of functions

$$\mathscr{D}_\varphi=\left\{u\colon u\in\mathfrak{H},\ u \text{ has comp. supp. in } E_2, \text{ and } \int_{-\infty}^{\infty}u\,\bar{\varphi}\,d\xi_2=0 \text{ for a.a. } \xi_1\in E_1\right\}$$

is dense in $\mathfrak{H}$.

For later reference we shall record here the following simple consequence of the above result.

Lemma 3.2. *Let $\varphi\in\mathfrak{H}=\mathscr{L}_2(E_2)$ be such that*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^2\,d\xi_2>0,$$

for a.a. ξ_1 *and put*

$$\mathscr{S}(\varphi)=\left\{v\colon v=\alpha(\xi_1)\varphi, \text{ where } \alpha \text{ is such that } \int_{-\infty}^{\infty}|\alpha|^2\rho(\xi_1)\,d\xi_1<\infty \right.$$
$$\left. \text{where } \rho(\xi_1)=\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi|^2\,d\xi_2\right\}.$$

Then $\mathscr{S}(\varphi)$ is a closed subspace of $\mathfrak{H}$.

Since Y is densely defined in $\mathscr{L}_2(E)$, its Hilbert space adjoint, Y^*, exists. Consider the operator $\tilde{Y}$ defined as follows:

$$\tilde{Y}w=\frac{\xi_2}{\sigma^{\frac{1}{2}}(\xi_2)}\int_{\xi_2}^{\infty}\sigma^{\frac{1}{2}}(t)\,w(\xi_1,t)\,dt,$$

$$\mathscr{D}(\tilde{Y})=\left\{w\colon w \text{ is Lebesgue measurable over } E, \text{ and } w=O\big(p^{-1}(\sigma)\big),\right.$$
$$\sigma\to\infty, \text{ for each polynomial } p \text{ in a single variable,}$$
$$\text{and } w \text{ is such that the condition}$$
$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^{\frac{1}{2}}(t)\,w(\xi_1,t)\,dt=0 \text{ holds for almost all } \xi_1\in E_1\right\}.$$

Since all the integrals involved converge absolutely under the stated conditions, FUBINI's theorem can be applied, and we have that $\langle u, Yv\rangle=\langle\tilde{Y}u, v\rangle$ for all $v\in\mathscr{D}(Y)$ and all $u\in\mathscr{D}(\tilde{Y})$, where $\langle\ ,\ \rangle$ denotes the usual scalar product in $\mathscr{L}_2(E)$; i.e.,

$$\langle u, v\rangle=\int_E u\,\bar{v}.$$

As before, the effect of the integral condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^{\frac{1}{2}}(t)\, w(\xi_1, t)\, dt = 0$$

for almost all $\xi_1 \in E_1$ is to ensure that $\tilde{Y} w \in \mathscr{L}_2(E)$. It follows from the above remarks that

$$\tilde{Y} \subset Y^*.$$

Again by lemma 3.1, it is clear that $\mathscr{D}(\tilde{Y})$ is dense in $\mathscr{L}_2(E)$, and hence the same must be true of $\mathscr{D}(Y^*)$. Thus, by a well-known result, it follows that Y is preclosed, and moreover that

$$\bar{Y} = Y^{**}$$

where $\bar{Y}$ denotes the closure of Y. Moreover, since $\tilde{Y}^* \supset Y^{**} \supset Y$, it follows that $\mathscr{D}(\tilde{Y}^*)$ is also dense in $\mathscr{L}_2(E)$ and hence $\tilde{Y}$ is preclosed, and

$$\bar{\tilde{Y}} = \tilde{Y}^{**}.$$

Similar results hold for the operator Z in $\mathscr{L}_2(E, \sigma)$. Now we consider the question of the invertibility of the operators $\bar{Y}$ and $\bar{\tilde{Y}}$. Towards this end we first observe that Y and $\tilde{Y}$ are invertible and define the operators K and $\tilde{K}$ as follows:

$$K w = \frac{\sigma^{\frac{1}{2}}(\xi_2)}{\xi_2} \left(\sigma^{-\frac{1}{2}}(\xi_2)\, w\right)_{\xi_2},$$

$\mathscr{D}(K) = \{w : w$ has compact support in E, $w \in \mathfrak{H} = \mathscr{L}_2(E)$, w is absolutely continuous in ξ_2 for almost all $\xi_1 \in E_1$, and $Kw \in \mathfrak{H}\}$,

$$\tilde{K} w = -\sigma^{-\frac{1}{2}}(\xi_2) \left(\frac{\sigma^{\frac{1}{2}}(\xi_2)}{\xi_2}\, w\right)_{\xi_2},$$

$\mathscr{D}(\tilde{K}) = \{w : w$ has compact support in E, $w \in \mathscr{L}_2(E) = \mathfrak{H}$, w is absolutely continuous in ξ_2 for almost all $\xi_1 \in E_1$, and $\tilde{K} w \in \mathfrak{H}\}$,

It is easy to show the following

Lemma 3.3. *$\mathscr{D}(K)$ and $\mathscr{D}(\tilde{K})$ are dense in $\mathscr{L}_2(E)$, K and $\tilde{K}$ are preclosed, $\tilde{K} \subset K^*$, $K \subset Y^{-1}$ and $\tilde{K} \subset \tilde{Y}^{-1}$.*

As a further preparation for the proof that the operators $\bar{Y}$ and $\bar{\tilde{Y}}$ are invertible the following well-known Lemma is needed.

Lemma 3.4. *Let T be a linear operator on a Hilbert space, $\mathfrak{H}$, such that T^{-1} exists and along with T is densely defined in $\mathfrak{H}$, then the adjoint T^* of T is invertible, and moreover*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Now the proof of the next result follows immediately from Lemmas 3.1 – 3.4.

Lemma 3.5. *The operators $\overline{Y}$ and $\tilde{\overline{Y}}$ are invertible and moreover we have that*

$$(\overline{Y})^{-1}=\overline{(Y^{-1})}, \quad (\tilde{\overline{Y}})^{-1}=\overline{(\tilde{Y}^{-1})}.$$

After presenting a series of preparatory lemmata we shall prove that $\overline{K}$ is invertible, and moreover that $\overline{K}=(\overline{Y})^{-1}$. The proof of this fact is facilitated by first showing that "weak=strong" for K, i.e. that $\tilde{\overline{K}}=K^*$, and this result in turn will be seen to follow from the following Lemma on operators in an abstract Hilbert space.

Lemma 3.6. *Let the closed, and densely defined operators A and B in a Hilbert space $\mathfrak{H}$, satisfy the following conditions:* 1) $\mathscr{R}(A)$ *and* $\mathscr{R}(B)$ *are closed in* $\mathfrak{H}$, 2) $B\subset A^*$, 3) $\mathscr{N}(A)=(\mathscr{R}(B))^{\perp}$, *and* 4) $\mathscr{N}(B)=\mathscr{N}(A^*)$. *Then* $B=A^*$.

Now let us consider the two equations

$$(K-\lambda)\,w=f, \quad (\tilde{K}-\lambda)\,w=f$$

where λ is some negative constant, and define the two operators P and $\tilde{P}$ as follows:

$$Pf=\int_0^{\xi_2}\sigma^{\frac{1}{2}}(\xi_2)\,e^{\lambda\sigma(\xi_2)}\,\sigma^{-\lambda\sigma(t)}\frac{t}{\sigma^{\frac{1}{2}}(t)}\,f(\xi_1,t)\,dt,$$

$$\mathscr{D}(P)=\Bigg\{f\colon f \text{ has comp. supp in } E,\ f\in\mathfrak{H} \text{ and satisfies the two integral conditions } \int_0^{\infty}e^{-\lambda\sigma(t)}\frac{t}{\sigma^{\frac{1}{2}}(t)}\,f(\xi_1,t)\,dt=0 \text{ a.a. } \xi_1\in E_1, \text{ and } \int_{-\infty}^{0}e^{-\lambda\sigma(t)}\frac{t}{\sigma^{\frac{1}{2}}(t)}\,f(\xi_1,t)\,dt=0 \text{ for a.a. } \xi_1\in E_1\Bigg\},$$

$$\tilde{P}f=\int_{-\infty}^{\xi_2}\frac{-\xi_2}{\sigma^{\frac{1}{2}}(\xi_2)}\,e^{-\lambda\sigma(\xi_2)}\,e^{\lambda\sigma(t)}\,\sigma^{\frac{1}{2}}(t)\,f(\xi_1,t)\,dt,$$

$$\mathscr{D}(\tilde{P})=\Bigg\{f\colon f\in\mathfrak{H},\ f \text{ has comp. supp. in } E, \text{ and satisfies the integral condition: } \int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda\sigma(t)}\,\sigma^{\frac{1}{2}}(t)\,f(\xi_1,t)\,dt=0 \text{ a.a. } \xi_1\in E_1\Bigg\}.$$

Moreover, let us define the subspace $\mathscr{S}_\lambda$ of $\mathfrak{H}$ in the following manner: Let

$$\rho(\xi_1)=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi_2\,|e^{\lambda\sigma}\sigma^{\frac{1}{2}}|^2, \qquad \lambda<0$$

and put

$$\mathscr{S}_\lambda=\Bigg\{f\colon f(\xi_1,\xi_2)=\alpha(\xi_1)\,e^{\lambda\sigma}\sigma^{\frac{1}{2}}, \text{ with } \alpha \text{ such that } \int_{-\infty}^{\infty}d\xi_1\,|\alpha|^2\rho<\infty\Bigg\}.$$

It is clear from lemma 3.2 that $\mathscr{S}_\lambda$ is a closed subspace of $\mathfrak{H}$. A somewhat lengthy calculation provides the following result.

Lemma 3.7. *$\mathscr{D}(P)$ is dense in $\mathfrak{H}$, and $\mathscr{D}(\tilde{P})$ is dense in $\mathscr{S}_\lambda^\perp$. The operators P and $\tilde{P}$ are well-defined and bounded over their respective domains.*

Now we are prepared to show

Lemma 3.8. *We have that*

$$\mathscr{N}(\overline{K}-\lambda)=\mathscr{S}_\lambda, \quad \mathscr{R}(\overline{K}-\lambda)=\mathfrak{H}, \quad \mathscr{N}(\bar{\tilde{K}}-\lambda)=\{0\}, \quad \mathscr{R}(\bar{\tilde{K}}-\lambda)=\mathscr{S}_\lambda^\perp$$

provided $\lambda<0$, and

$$\mathscr{N}(\overline{K}-\lambda)=\{0\}, \quad \mathscr{R}(\overline{K}-\lambda)=\mathscr{T}_\lambda^\perp, \quad \mathscr{N}(\bar{\tilde{K}}-\lambda)=\mathscr{T}_\lambda, \quad \mathscr{R}(\bar{\tilde{K}}-\lambda)=\mathfrak{H}$$

provided $\lambda>0$, where

$$\mathscr{T}_\lambda=\left\{f: f(\xi_1,\xi_2)=\alpha(\xi_1)\frac{\xi_2}{\sigma^{\frac{1}{2}}}e^{-\lambda\sigma}, \text{ and where } \alpha \text{ is such that } \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 |\alpha|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \left|\frac{\xi_2}{\sigma^{\frac{1}{2}}}e^{-\lambda\sigma}\right|^2 <\infty\right\}.$$

Proof. We remark first of all that the subspace $\mathscr{T}_\lambda$ is closed in $\mathfrak{H}$ as can easily be verified from lemma 3.2. We shall only establish the lemma in case $\lambda<0$, the proof for $\lambda>0$ being completely analogous. First we show that the statement about the ranges of $\overline{K}-\lambda$ and $\bar{\tilde{K}}-\lambda$ are true. Indeed, from the definitions of the operators P and $\tilde{P}$, it is clear that

$$\begin{aligned}
&(K-\lambda)Pf=f, && \text{for all } f\in\mathscr{D}(P),\\
&(\tilde{K}-\lambda)\tilde{P}f=f, && \text{for all } f\in\mathscr{D}(\tilde{P}),\\
&\tilde{P}(\tilde{K}-\lambda)u=u, && \text{for all } u\in\mathscr{D}(\tilde{K}).
\end{aligned}$$

Now from lemma 3.5 we know that both K and $\tilde{K}$ are preclosed, and since both P and $\tilde{P}$ are bounded the desired result follows.

Now for the result about the null spaces we first observe that $\tilde{K}-\lambda\subset K^*-\lambda$, and hence $\bar{\tilde{K}}-\lambda\subset K^*-\lambda$ also, and thus we have that

$$\mathscr{N}(\overline{K}-\lambda)=\{\mathscr{R}(K^*-\lambda)\}^\perp\subset\{\mathscr{R}(\bar{\tilde{K}}-\lambda)\}^\perp=(\mathscr{S}_\lambda^\perp)^\perp=\mathscr{S}_\lambda,$$

$$\mathscr{N}(\bar{\tilde{K}}-\lambda)\subset\mathscr{N}(K^*-\lambda)=\{\mathscr{R}(\overline{K}-\lambda)\}^\perp=\mathfrak{H}^\perp=\{0\}$$

and hence we conclude that

$$\mathscr{N}(\overline{K}-\lambda)\subset\mathscr{S}_\lambda, \quad \text{and} \quad \mathscr{N}(\bar{\tilde{K}}-\lambda)=\{0\}$$

and it remains to be shown that in fact we have equality in the first case. This is accomplished in the following manner: Let $\gamma=\gamma(t)$ be such that 1) $\gamma\in C^\infty[0,\infty)$, 2) $\gamma(t)=1$ whenever $0\leqq t\leqq 1$, 3) $\gamma(t)=0$ whenever $2\leqq t$, and $0\leqq\gamma(t)\leqq 1$ for all $t\in[0,\infty)$. Let $\varphi\in\mathscr{S}_\lambda$, i.e. let $\varphi(\xi_1,\xi_2)=\alpha(\xi_1)\,\sigma^{\frac{1}{2}}\,e^{\lambda\sigma}$,

where $\lambda<0$, and α is a suitable function of ξ_1, and put

$$\varphi_\varepsilon=\gamma\left(\frac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\varepsilon}\right)\varphi, \qquad \varepsilon>0.$$

Clearly $\varphi_\varepsilon\to\varphi$ as $\varepsilon\to\infty$. If we let $r^2=\xi_1^2+\xi_2^2$ and put

$$f_\varepsilon=(K-\lambda)\,\varphi_\varepsilon=\frac{2}{\varepsilon}\,\alpha(\xi_1)\,\sigma^{\frac{3}{2}}\,e^{\lambda\sigma}\,\gamma'\left(\frac{r^2}{\varepsilon}\right)$$

then since $\|f_\varepsilon\|<\infty$ we observe that $\varphi_\varepsilon\in\mathscr{D}(K-\lambda)$, and moreover we have that

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|^2&=\frac{4}{\varepsilon^2}\int\limits_{\varepsilon<r^2<2\varepsilon}\alpha^2\,\sigma^3\,e^{2\lambda\sigma}\left|\gamma'\left(\frac{r^2}{\varepsilon}\right)\right|^2\\&\leqq\frac{4}{\varepsilon^2}\,\|\alpha\,\sigma^{\frac{3}{2}}\,e^{\lambda\sigma}\|\left[\int\limits_{\varepsilon<r^2<2\varepsilon}\left|\gamma'\left(\frac{r^2}{\varepsilon}\right)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leqq\frac{4}{\varepsilon^2}\,\|\sigma\,\varphi\|\left[\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{2\varepsilon}}dr\left|\gamma'\left(\frac{r^2}{\varepsilon}\right)\right|^2 r\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leqq\frac{4\sqrt{2\pi}}{\varepsilon^2}\,\|\sigma\,\varphi\|\left[\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{2\varepsilon}}\left|\gamma'\left(\frac{r^2}{\varepsilon}\right)\right|^2 r\,dr\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

or putting $r=\sqrt{\varepsilon}(r')^{\frac{1}{2}}$ we have

$$\|f_\varepsilon\|^2\leqq\frac{4\sqrt{2\pi}}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}\,\|\sigma\,\varphi\|\left[\int_1^2|\gamma'(r')|^2\,dr'\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Hence $\|f_\varepsilon\|\to 0$ as $\varepsilon\to\infty$, and therefore $\varphi\in\mathscr{D}(\overline{K}-\lambda)$ and $(\overline{K}-\lambda)\varphi=0$, and the desired result follows.

Theorem 3.1. *We have that* $\tilde{\overline{K}}=K^*$, $\overline{K}=(\overline{Y})^{-1}$, $\tilde{Y}^*=\overline{Y}$, $\tilde{\overline{Y}}=Y^*$, $\tilde{\overline{K}}=\tilde{\overline{Y}}^{-1}$.

Proof. We shall show that the hypotheses of lemma 3.6 are satisfied where the roles of A and B are played by the operators $\overline{K}-\lambda$ and $\tilde{\overline{K}}-\lambda$ respectively, where λ is a negative constant. (This same proof would also work if λ were a positive constant.) Certainly the operators $\tilde{\overline{K}}-\lambda$ and $\overline{K}-\lambda$ are closed, and $\tilde{\overline{K}}-\lambda\subset K^*-\lambda$. Moreover, it follows from lemma 3.8 that they both have closed ranges, and that $\mathscr{N}(\overline{K}-\lambda)=\{\mathscr{R}(\tilde{\overline{K}}-\lambda)\}^\perp$. Finally we note that $\mathscr{N}(K^*-\lambda)$ is trivial inasmuch as

$$\mathscr{N}(K^*-\lambda)=\{\mathscr{R}(\overline{K}-\lambda)\}^\perp=\mathfrak{H}^\perp=\{0\},$$

but from lemma 3.8 $\mathscr{N}(\tilde{\overline{K}}-\lambda)$ is also trivial, hence $\mathscr{N}(\tilde{\overline{K}}-\lambda)=\mathscr{N}(K^*-\lambda)$. Hence it follows from lemma 3.6 that $\tilde{\overline{K}}=K^*$, as was to be shown. The other results follow immediately from the inclusion $\tilde{K}\subset\tilde{Y}^{-1}\subset Y^{*-1}$ and the "weak = strong" property for K.

Recall that the operator B was defined earlier as follows: $B=-1+bY$. Let us put $\tilde{B}=-1+b\tilde{Y}$, then we have the

Theorem 3.2. *Let $b \neq 0$, then we have that $\bar{B} = B^*$, and that B has closed range. Moreover, if $b < 0$ then*

$$\mathcal{N}(\bar{B}) = \mathcal{N}(\bar{K} - b) = \mathcal{S}_b, \quad \mathcal{R}(\bar{B}) = \mathcal{R}(\bar{K} - b) = \mathfrak{H}$$

and if $b > 0$ then

$$\mathcal{N}(\bar{B}) = \{0\}, \quad \mathcal{R}(\bar{B}) = \mathcal{T}_b^{\perp}.$$

Proof. Clearly $\bar{\bar{B}} = B^*$ follows from theorem 3.2. Since $\mathcal{D}(\bar{B}) = \mathcal{D}(\bar{Y})$ we may write $\bar{B} = -(\bar{K} - b)\,\bar{Y}$. Assume first that $b < 0$ and observe that $w \in \mathcal{N}(\bar{B})$ if and only if $\bar{Y}w \in \mathcal{N}(\bar{K} - b) = \mathcal{S}_b$, and this in turn is the case if and only if $w \in \bar{K}\,\mathcal{S}_b$. But since $\bar{K}\,\mathcal{S}_b = ((\bar{K} - b) + b)\,\mathcal{S}_b = b\,\mathcal{S}_b = \mathcal{S}_b$ it follows that $\mathcal{N}(\bar{B}) = \mathcal{N}(\bar{K} - b) = \mathcal{S}_b$. Since $\bar{B} = -(\bar{K} - b)\,\bar{Y}$, it is clear that $\mathcal{R}(\bar{B}) \subset \mathcal{R}(\bar{K} - b)$. Conversely, let $f \in \mathcal{R}(\bar{K} - b)$, then there exists a $v \in \mathcal{D}(\bar{K} - b) = \mathcal{D}(\bar{K})$ such that $(\bar{K} - b)v = f$. But since $v \in \mathcal{D}(\bar{K} - b) = \mathcal{D}(\bar{K}) = \mathcal{R}(\bar{Y})$, there exists a $w \in \mathcal{D}(\bar{Y})$ such that $\bar{Y}w = v$. Hence $w \in \mathcal{D}(\bar{B})$ and $\bar{B}w = -(\bar{K} - b)\,\bar{Y}w = -f$, and thus $\mathcal{R}(\bar{K} - b) \subset \mathcal{R}(\bar{B})$ and the desired result follows. The result when $b > 0$ follows in a similar fashion.

Theorem 3.3. *We have the estimate*

$$\| \bar{B}u \| \geqq c \| u \|$$

for all $u \in \mathcal{D}(\bar{B}) \cap \mathcal{N}(\bar{B})^{\perp}$, where c is a positive constant independent of u.

Proof. This theorem follows immediately from lemma 2.1 and theorem 3.2 above.

Transplanting the operator B back to $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ we observe that $\mathcal{D}(A)$ should be taken to be just the transplant of $\mathcal{D}(B)$; i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ u : u \in \mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}, \text{ with } v = \sigma^{\frac{1}{2}} \mathcal{F} u = O\big(p^{-1}(\sigma)\big),\ \sigma \to \infty, \text{ and } v \text{ satisfies the condition } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{\sigma^{\frac{1}{2}}(t)} v(\xi_1, t)\, dt = 0 \text{ for a.a. } \xi_1 \in E_1 \right\}.$$

Moreover, due to the character of the transplanting we should expect the closure of A in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ to be just the transplant of the closure of B in $\mathfrak{H}$. Now we can state the

Theorem 3.4. *There exists a positive constant c such that the estimate*

$$[\bar{A}u]_{\frac{1}{2}} \geqq c [u]_{\frac{1}{2}}$$

holds for all $u \in \mathcal{D}(\bar{A}) \cap \mathcal{N}(\bar{A})^{\perp}$.

Proof. Clearly $\mathcal{R}(\bar{A})$ in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ is just the transplant of $\mathcal{R}(\bar{B})$ in $\mathfrak{H}$. But by theorem 3.2 we have that $\mathcal{R}(\bar{B}) = \mathfrak{H}$; hence, due to the character of the transplanting, it follows that $\mathcal{R}(\bar{A}) = \mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$. The desired result now follows from lemma 2.2.

Lemma 3.9. *Let $C \equiv \bar{B}\, S_{\bar{B}} \equiv \bar{B}(1 + B^*\bar{B})^{-\frac{1}{2}}$. Then C is a bounded operator defined on all of $\mathfrak{H}$ and moreover,*

1) *C has closed range*

2) $\mathcal{N}(C)=\mathcal{N}(\bar{B})$, $\mathcal{N}(C^*)=\mathcal{N}(B^*)$.

3) *there exists a positive constant k such that the estimate* $\|Cu\| \geqq k\|u\|$ *holds for all* $u \in \mathcal{N}(C)^{\perp}$.

4) *there exists a positive constant* k^* *such that the estimate* $\|C^*u\| \geqq k^*\|u\|$ *holds for all* $u \in \mathcal{N}(C^*)^{\perp}$.

Proof. Evident in view of theorem 3.3, and lemmas 2.2–2.6.

Because of the similarity of the arguments when $b>0$ we will assume henceforth that the constant b appearing in problem (L) is negative; i.e., that the cycle is emergent.

Referring back to lemma 3.2 we recall that the subset

$$\mathcal{S}(\varphi)=\left\{\alpha(\xi_1)\,\varphi(\xi)\colon \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha|^2\,\rho(\xi_1)\,d\xi_1<\infty\right\}$$

is a closed subspace of $\mathfrak{H}$ if φ is any element of $\mathfrak{H}$ and

$$\rho(\xi_1)=\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2\,d\xi_2\,.$$

It is clear from the proof of lemma 3.2 that the set $\{\alpha(\xi_1)\varphi(\xi)\colon \alpha\in C_0^{\infty}(E_1)\}$ is dense in $\mathcal{S}(\varphi)$ and hence has the same orthogonal complement as $\mathcal{S}(\varphi)$. Indeed, it is easy to see that $\mathcal{S}(\varphi)^{\perp}$ can be characterized as follows:

Lemma 3.10. *Let* $\varphi\in\mathfrak{H}$ *and put*

$$\mathcal{M}(\varphi)=\left\{u\colon u\in\mathfrak{H} \text{ and } \int_{-\infty}^{\infty} u\,\bar{\varphi}\,d\xi_2=0 \text{ for almost all } \xi_1\in E_1\right\}.$$

Then we have that $\mathcal{M}(\varphi)=\mathcal{S}^{\perp}(\varphi)$.

It is well-known that the operator $R_{\bar{B}}=(1+B^*\bar{B})^{-1}$ is bounded, positive definite and self-adjoint, and thus we can denote by $S_{\bar{B}}$ the unique bounded, positive definite, self-adjoint square root of $R_{\bar{B}}$ and by C the operator $\bar{B}S_{\bar{B}}$. Recall that we had earlier put $-1+bY=B$. In what follows it is important to note that all these operators have the property described in the lemma below; the proofs are straight-forward and follow directly from the definitions of these operators and hence will be omitted.

Lemma 3.11. *The operators* $Y, B, \bar{B}, B^*, R_{\bar{B}}, S_{\bar{B}}$ *and* C *each commute with the family of operators* $\{\alpha(\xi_1)I\colon \alpha\in C_0^{\infty}(E_1)\}$.

Now let us put, for $\varphi^n\in\mathfrak{H}$, $n=1, 2, \ldots, N$,

$$\mathcal{M}(\varphi^1, \ldots, \varphi^N)=\bigcap_{n=1}^{N} \mathcal{M}(\varphi^n)$$

where the closed subspaces $\mathscr{M}(\varphi^n)$ of $\mathfrak{H}$ are as defined in lemma 3.10. It is clear that the subspaces $\mathscr{M}(\varphi^1, \ldots, \varphi^N)$ are closed in $\mathfrak{H}$. Furthermore, let us set

$$\mathsf{M}=\{\mathscr{M}(\varphi^1, \ldots, \varphi^N)\text{: all finite subcollections } \{\varphi^1, \ldots, \varphi^N\}\subset\mathfrak{H}\}.$$

It is clear that M is an R-set in $\mathfrak{H}$ and if we put

$$\varphi(\xi_1, \xi_2)=\sigma^{\frac{1}{2}} e^{b\sigma}, \qquad b<0$$

then certainly $\varphi\in\mathfrak{H}$ and moreover the subset

$$\mathsf{M}(\varphi)=\{\mathscr{M}(\varphi)\cap\mathscr{M}\colon \mathscr{M}\in\mathsf{M}\}$$

of M is an R-set which is equivalent to M since supersetting of elements of $\mathsf{M}(\varphi)$ generates M.

If $b<0$ and $C=\overline{B}\, S_{\overline{B}}$, it is clear from theorem 3.2 and lemma 2.6 that

$$\mathscr{N}(C)=\mathscr{S}(\varphi)=\mathscr{M}^{\perp}(\varphi),$$
$$\mathscr{R}(C)^{\perp}=\mathscr{N}(C^*)=\mathscr{N}(B^*)=\mathscr{R}(B)^{\perp}=\mathfrak{H}^{\perp}$$

and from lemma 3.9 it is clear that there exists a positive constant k such that

$$\|Cu\|\geqq k\|u\|, \qquad \text{all } u\in\mathscr{M}(\varphi).$$

Hence the domain $\mathscr{D}_C$ of the mapping γ_C associated with C is simply the collection of all closed subspaces of $\mathscr{M}(\varphi)$. Clearly, $\mathscr{D}_C\cap\mathsf{M}=\mathsf{M}(\varphi)$. Similarly we obtain that $\mathscr{D}_{C^*}\cap\mathsf{M}=\mathsf{M}$. It is moreover clear from the above estimate that C is invertible on $\mathscr{M}(\varphi)$, hence if we denote the restriction of C to $\mathscr{M}(\varphi)$ by $\hat{C}$ we have that

$$\hat{C}^{-1}Cu=u, \qquad \text{all } u\in\mathscr{M}(\varphi),$$
$$C\hat{C}^{-1}u=u, \qquad \text{all } u\in\mathfrak{H}.$$

Theorem 3.5. *The operator $C=\overline{B}\, S_{\overline{B}}$ is $\mathfrak{I}_{\mathsf{M}}$-Fredholm, provided $b\neq 0$.*

Proof. In view of theorem 2.3, we need only show that C is a $\overline{\mathsf{M}}$-$*$-operator, where $\overline{\mathsf{M}}$ is the left-δ closure of the R-set M in $\cdot A$. We give a proof only for $b<0$; the proof for $b>0$ proceeds in a similar fashion. Assuming now that $b<0$ let us first show that

$$\gamma_C\colon \mathscr{D}_C\cap\mathsf{M}\to\mathsf{M}, \quad \gamma_{C^*}\colon \mathscr{D}_{C^*}\cap\mathsf{M}\to\mathsf{M}.$$

Let $\mathscr{M}(\varphi, \psi^1, \ldots, \psi^N)\in\mathscr{D}_C\cap\mathsf{M}=\mathsf{M}(\varphi)$, then $\mathfrak{H}\ni u\in\mathscr{M}(\varphi, \psi^1, \ldots, \psi^N)$ only if $u\in\mathscr{M}(\varphi)=\mathscr{S}^{\perp}(\varphi)$. Hence from the above remarks we must have that

$$\hat{C}^{-1}Cu=u, \qquad \text{all } u\in\mathscr{M}(\varphi, \psi^1, \ldots, \psi^N).$$

Hence we must have that

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{C}^{-1}Cu\cdot\bar{\psi}^j\, d\xi_2=0$$

for each $j=1, 2, \ldots, N$, and a.a. $\xi_1 \in E_1$. Moreover, from lemma 3.11 the above implies that for each $j=1, 2, \ldots, N$ and all $\alpha \in C_0^\infty(E_1)$ we must have that

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \alpha(\xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \hat{C}^{-1} C u \cdot \bar{\psi}^j \\ &= \int_E \alpha(\xi_1) \hat{C}^{-1} C u \cdot \bar{\psi}^j = \int_E \hat{C}^{-1} C(\alpha(\xi_1) u) \cdot \bar{\psi}^j \\ &= \int_E C(\alpha(\xi_1) u) \hat{C}^{-1*} \bar{\psi}^j = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \alpha(\xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 C u \hat{C}^{-1*} \bar{\psi}^j. \end{aligned}$$

Thus, if we put $\hat{C}^{-1*} \bar{\psi}^j = \bar{\omega}^j$, $j=1, 2, \ldots, N$, then it follows that

$$\int_{-\infty}^{\infty} C u \cdot \bar{\omega}^j d\xi_2 = 0$$

for a.a. $\xi_1 \in E_1$ and each $j=1, 2, \ldots, N$, and hence

$$C u \in \mathcal{M}(\omega^1, \ldots, \omega^N) \in \mathsf{M}.$$

Therefore we have shown so far that

$$\gamma_C \mathcal{M}(\varphi, \psi^1, \ldots, \psi^N) \subset \mathcal{M}(\omega^1, \ldots, \omega^N).$$

However, the above argument is clearly reversible and hence we must have equality; i.e.,

$$\gamma_C \mathcal{M}(\varphi, \psi^1, \ldots, \psi^N) = \mathcal{M}(\omega^1, \ldots, \omega^N).$$

In a similar fashion now let us assume that $\mathcal{M}(w^1, \ldots, w^j) \in \mathsf{M}$. We know that $u \in \mathcal{M}(w^1, \ldots, w^j)$ if and only if

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}^j u \, d\xi_2 = 0$$

for almost all $\xi_1 \in E_1$, and all $j=1, 2, \ldots, N$. Hence for $u \in \mathcal{M}(w^1, \ldots, w^N)$ it follows that for each $j=1, 2, \ldots, N$ and all $\alpha \in C_0^\infty(E_1)$ we must have

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \alpha(\xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \bar{w}^j u \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \alpha(\xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 C \hat{C}^{-1} \bar{w}^j \cdot u = \int_E C \hat{C}^{-1}(\alpha(\xi_1) \bar{w}^j) \cdot u \\ &= \int_E \hat{C}^{-1}(\alpha(\xi_1) \bar{w}^j) C^* u = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \alpha(\xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 C^{-1} \bar{w}^j C^* u \end{aligned}$$

and hence we conclude that

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{C}^{-1} \bar{w}^j C^* u \, d\xi_2 = 0$$

for each $j=1, \ldots, N$ and a.a. $\xi_1 \in E_1$. If we put $\hat{C}^{-1} \bar{w}^j = \bar{v}^j$, $j=1, 2, \ldots, N$, then we have just shown that

$$\gamma_{C^*} \mathcal{M}(w^1, \ldots, w^N) \subset \mathcal{M}(v^1, \ldots, v^N).$$

Again noting that the above argument is reversible we may conclude that

$$\gamma_{C^*}\mathscr{M}(w^1, \ldots, w^N)=\mathscr{M}(v^1, \ldots, v^N).$$

Now we take from lemma 3.9 that C^{-1} is bounded, hence it follows that the operator C takes any closed subspace of $\mathscr{M}(\varphi)$ into a closed subspace. In particular, any $\mathscr{M}$ such that $\mathsf{A}\ni\mathscr{M}\subset\mathscr{M}(\varphi)$ and $\mathscr{M}$ is a superset of an element in M is taken by C into a closed subspace which is again a superset of some element of M. Using the notation introduced in theorem 2.1, the above remarks imply that γ_C: $\mathscr{D}_C\cap\hat{\mathsf{M}}\to\hat{\mathsf{M}}$. Now it follows immediately from lemma 2.1 and the last portion of theorem 2.1 that γ_C: $\mathscr{D}_C\cap\overline{\mathsf{M}}\to\overline{\mathsf{M}}$. In an entirely similar fashion it can also be shown that γ_{C^*}: $\mathscr{D}_C\cap\mathsf{M}\to\mathsf{M}$. Hence it follows that the operator C is $\mathfrak{I}_{\mathsf{M}}=\mathfrak{I}_{\overline{\mathsf{M}}}$-Fredholm.

We shall now transplant the operator $C=\bar{B}S_{\bar{B}}$ and the R-set M over to $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ and draw some conclusions about the Fredholmness of the transplanted operator with respect to the transplanted R-set. Since it will be of some importance in characterizing the transplanted R-set, we shall carry out the transplanting in some detail. The transplanting will proceed in two stages: first we go from $\mathfrak{H}$ to $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}=\mathscr{L}_2(E,\sigma)$; and then we go from $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ to $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$. Consider for $u\in\mathfrak{H}$ the map $u\to\sigma^{-\frac{1}{2}}u=\tilde{u}$. Clearly $\tilde{u}\in\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$, and indeed $\sigma^{-\frac{1}{2}}\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ and the map $u\to\tilde{u}$ is normpreserving and is even a homeomorphism. We shall speak of $\tilde{u}$ as the transplant into $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ of the element $u\in\mathfrak{H}$. Let R be an operator on $\mathfrak{H}$, then we shall transplant R over to the operator $\tilde{R}$ in $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ in the natural way induced by the map $u\to\tilde{u}$, i.e., $\tilde{R}\tilde{u}=\widetilde{Ru}$, $\tilde{u}\in\mathscr{D}(\tilde{R})$, and for the particular case at hand we have $\tilde{R}=\sigma^{-\frac{1}{2}}R\sigma^{\frac{1}{2}}$. Thus transplanting B and $\bar{B}$ over to $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ we obtain $\tilde{B}=\sigma^{-\frac{1}{2}}B\sigma^{\frac{1}{2}}$ and $\tilde{\bar{B}}=\sigma^{-\frac{1}{2}}\bar{B}\sigma^{\frac{1}{2}}$. Recalling the definition of the operator $\hat{A}$ and the remarks about this operator at the beginning of this section it is clear that we should take $\tilde{B}=\hat{A}$. Moreover since $\tilde{\bar{B}}=\bar{\tilde{B}}$ where the closures are taken the correct spaces we even have that $\tilde{\bar{B}}=\hat{\bar{A}}$. A simple calculation shows that $\tilde{B}^*=\sigma^{-\frac{1}{2}}B^*\sigma^{\frac{1}{2}}=\hat{A}^*$ where $\hat{A}^*$ is the adjoint of $\hat{A}$ in $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$. Similarly it is easily shown that

$$\widetilde{\bar{B}S_{\bar{B}}}=\sigma^{-\frac{1}{2}}\bar{B}S_{\bar{B}}\sigma^{\frac{1}{2}}=\hat{\bar{A}}S_{\hat{\bar{A}}}.$$

Let $\tilde{\mathsf{M}}$ be the transplant into $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ of the R-set M in $\mathfrak{H}$. It is obvious that $\tilde{\mathsf{M}}$ is again an R-set. Moreover we evidently have the following

Theorem 3.6. *The operator $\hat{\bar{A}}S_{\hat{\bar{A}}}$ is $\mathfrak{I}_{\tilde{\mathsf{M}}}$-Fredholm.*

The next result is a more precise characterization of the R-set $\tilde{\mathsf{M}}$.

Lemma 3.12. *$\tilde{\mathscr{M}}\in\tilde{\mathsf{M}}$ if and only if there exists a finite collection of elements $\tilde{\varphi}^1, \ldots, \tilde{\varphi}^N$ in $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ such that $\tilde{\mathscr{M}}$ has the form*

$$\tilde{\mathscr{M}}=\left\{\tilde{u}\colon \tilde{u}\in\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle},\ \int_{-\infty}^{\infty}\sigma\tilde{u}\,\tilde{\varphi}^j=0 \text{ for a.a. } \xi_1\in E_1,\ j=1,2,\ldots,N\right\}.$$

Now we shall transplant the operator $\hat{A}$ in $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ over to the space $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$. Consider for $u\in\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ the map $\tilde{u}\to\mathscr{F}^{-1}\tilde{u}=\check{u}$. Clearly, $\check{u}\in\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ and indeed $\mathscr{F}^{-1}\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}=\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$. Moreover, the map $\tilde{u}\to u$ is normpreserving and is even a homeomorphism. As noted above, the transplant $\check{R}$ of the operator R on $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ is given by $\check{R}=\mathscr{F}^{-1}R\mathscr{F}$. Now at the beginning of this section we gave a formal definition of an operator A without specifying precisely its domain, and we noted there that the transplant of A on $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ to $\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle}$ agreed formally with the operator $\hat{A}$ and we have just given a precise definition of the domain of this operator. Hence, transplanting $\hat{A}$ back to $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ determines the operator A uniquely. Hence we have that $\check{\hat{A}}=\mathscr{F}^{-1}\hat{A}\mathscr{F}=A$. Just as before now we obtain the relations $\bar{A}=\mathscr{F}^{-1}\hat{\bar{A}}\mathscr{F}$, $A^*=\mathscr{F}^{-1}\hat{A}^*\mathscr{F}$, and $\bar{A}S_{\bar{A}}=\mathscr{F}^{-1}\hat{\bar{A}}S_{\bar{A}}^{\wedge}\mathscr{F}$. Now if the R-set $\tilde{\mathsf{M}}$ is transplanted over to $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$, we obtain again an R-set which we will denote by $\check{\mathsf{M}}$, and we evidently have the following

Theorem 3.7. *The operator $\bar{A}S_{\bar{A}}$ is $\mathfrak{I}_{\check{\mathsf{M}}}$-Fredholm.*

Now we shall give a precise description of the R-set M in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$.

Lemma 3.13. *$\check{\mathscr{M}}\in\check{\mathsf{M}}$ if and only if there exists a finite collection of elements $\check{\varphi}^1,\ldots,\check{\varphi}^N$ in $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$ such that $\check{\mathscr{M}}$ has the form*

$$\check{\mathscr{M}}=\{\check{u}\colon \check{u}\in\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}},\ (\check{\varphi}^j, U_t\check{u})_{\frac{1}{2}}=0 \text{ for a.a. } t\in E_1,\ j=1,\ldots,N\}$$

where U_t is the translation operator which takes $\check{u}(x_1,x_2)$ into $\check{u}(x_1-t,x_2)$.

Proof. First we observe that the space $\tilde{\mathscr{M}}(\tilde{\varphi}^1,\ldots,\tilde{\varphi}^N)\in\tilde{\mathsf{M}}$ can be written as follows:

$$\tilde{\mathscr{M}}(\tilde{\varphi}^1,\ldots,\tilde{\varphi}^N)=\{\tilde{u}\colon \tilde{u}\in\mathfrak{H}_{\langle\frac{1}{2}\rangle},\ (\tilde{u},\alpha(\xi_1)\tilde{\varphi}^j)_{\langle\frac{1}{2}\rangle}=0 \text{ for all } \alpha\in C_0^\infty(E_1) \text{ and each } j=1,2,\ldots,N\}.$$

Moreover, we shall need the well-known fact that for $u,v\in\mathfrak{H}$ the product uv is in $\mathscr{L}_1(E)$ and

$$\mathscr{F}^{-1}(uv)=(\check{u}\check{v})=\int_E \check{u}(\eta)\check{v}(\xi-\eta)\,d\eta.$$

Now we shall transplant $\tilde{\mathscr{M}}(\tilde{\varphi}^1,\ldots,\tilde{\varphi}^N)$ over to $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$; this is clearly equivalent to transplanting the condition $(\tilde{u},\alpha(\xi_1)\tilde{\varphi}^j)_{\langle\frac{1}{2}\rangle}=0$ over to $\mathfrak{H}_{\frac{1}{2}}$. Indeed we have that

$$\begin{aligned}
0&=(\tilde{u},\alpha(\xi_1)\tilde{\varphi}^j)_{\langle\frac{1}{2}\rangle}=(\sigma^{\frac{1}{2}}\tilde{u},\sigma^{\frac{1}{2}}\alpha\tilde{\varphi}^j)\\
&=\int_E \sigma(\bar{\alpha}\check{\tilde{u}})\,\overline{\check{\varphi}}^j=\int_E \sigma\mathscr{F}(\bar{\alpha}\check{\tilde{u}})\,\mathscr{F}(\check{\varphi}^j)\\
&=\int_E \sigma\mathscr{F}(\check{\varphi}^j)\,\mathscr{F}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\check{\bar{\alpha}}(t)\check{u}(x_1-t,x_2)\right)\\
&=\int_E \sigma\mathscr{F}(\check{\varphi}^j)\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\check{\bar{\alpha}}(t)\,\mathscr{F}(\check{u}(x_1-t,x_2))
\end{aligned}$$

where the change of order of integration is easily justified. Now making another change of order of integration we obtain that

$$0=\int_{-\infty}^{\infty} dt\,\check{\bar{\alpha}}(t)\int_E \sigma\,\mathscr{F}(\check{\bar{\varphi}}^j)\,\mathscr{F}\big(\check{u}(x_1-t,x_2)\big).$$

But since $\{\check{\bar{\alpha}}(t)\colon \alpha\in C_0^\infty(E_1)\}$ is dense in $\mathscr{L}_2(-\infty,\infty)$ it follows that

$$\int_E \sigma\,\mathscr{F}(\check{\bar{\varphi}}^j)\,\mathscr{F}\big(\check{u}(x_1-t,x_2)\big)=0$$

for a.a. $t\in E_1$. But since $\check{\varphi}^j$ and $\check{u}\in\mathfrak{H}_+$ we can clearly write the above condition as

$$(U_t\check{u},\check{\varphi}^j)_+=0, \qquad \text{a.a. } t\in E_1,$$

where $\{U_t\}$ is the group of translations along the cycle; i.e.,

$$U_t\check{u}(x_1,x_2)=\check{u}(x_1-t,x_2).$$

The argument above is clearly reversible and hence the desired result follows.

Bibliography

[1] BORRELLI, R.L.: The singular second-order oblique derivative problem. J. Math. Mech. **16**, 51–82 (1966).

[2] CORDES, H.O.: On a class of C^*-algebras. Math. Annalen. **170**, 283–313 (1967).

[3] — On a generalized Fredholm theory. To appear in J. Reine Angew. Math.

[4] — Über eine nichtalgebraische Charakterisierung von $\mathfrak{I}$-Fredholm Operatoren. To appear in Math. Annalen.

[5] —, and J.P. LABROUSSE: The invariance of the index in the metric space of closed operators. J. Math. Mech. **12**, 693–720 (1963).

[6] HÖRMANDER, L.: Pseudo-differential operators. Comm. Pure App. Math. **18**, 501–517 (1965).

[7] — Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems. Ann. Math. **83**, 129–209 (1966).

[8] LUFT, E.: Maximal R-sets, Grassmann spaces, and Stiefel spaces of a Hilbert space. To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[9] — On the structure of maximal R-sets of a Hilbert space. To appear in Math. Ann.

[10] RICKART, E.E.: Banach algebras. New York: V. Nostrand Co. 1960.

[11] RIESZ, F., and B. SZ.-NAGY: Functional analysis. New York: Unger Pub. Co. 1955.

Harvey Mudd College, Claremont, California 91711

BYRD, R. D., and J. T. LLOYD
Math. Zeitschr. 101, 123—130 (1967)

Closed Subgroups and Complete Distributivity in Lattice-Ordered Groups

RICHARD D. BYRD and JUSTIN T. LLOYD

Received February 14, 1967

1. Introduction

Throughout this paper G will denote a lattice-ordered group (l-group). An l-group is a distributive lattice. The property of complete distributivity, which is a generalization of the finite distributive law, is not necessarily satisfied in an l-group. CONRAD [5] has investigated the property of complete distributivity and its relation to the radical $R(G)$ and the ideal radical $L(G)$ of the l-group G. Both $R(G)$ and $L(G)$ are l-ideals of G and $L(G)\subseteq R(G)$. CONRAD shows that a completely distributive l-group has a zero ideal radical, and remarks that an l-group with a zero radical is completely distributive. He gives an example to show that a group may be completely distributive and yet have a nontrivial radical. In [10] an example is given of an l-group that has a zero ideal radical and fails to be completely distributive. Because of these results, it is natural to ask if there is an l-ideal between $L(G)$ and $R(G)$ that will be zero if and only if G is completely distributive. In Section 3 we define a distributive radical $D(G)$ as the intersection of the closures of the minimal prime subgroups of G. We prove that $D(G)$ is an l-ideal that lies between $L(G)$ and $R(G)$ (Corollary 3.5, Corollary 3.9), and show that $D(G)$ is the intersection of the collection of closed prime subgroups of G (Theorem 3.4). Our main result (Theorem 3.10) asserts that $D(G)=\{0\}$ if and only if G is completely distributive. Corollary 3.7 provides an elementwise characterization of $D(G)$; and Corollary 3.9 shows that, for a representable l-group G, $L(G)=D(G)=R(G)$. In Theorem 3.11 it is shown that a closed regular subgroup, which is normal in the convex l-subgroup that covers it, is essential. This leads to an interesting sufficient condition for the equality of $D(G)$ and $R(G)$ (Corollary 3.13).

2. Preliminaries

For the standard results and definitions concerning l-groups, the reader is referred to [1] and [7].

An l-group G is said to be *completely distributive* provided the relation

$$\bigwedge_{i\in I}\Big(\bigvee_{j\in J} g_{ij}\Big)=\bigvee_{f\in J^I}\Big(\bigwedge_{i\in I} g_{if(i)}\Big)$$

holds whenever $\{g_{ij}\,|\,i\in I, j\in J\}$ is a doubly-indexed subset of G for which all the indicated joins and meets exist.

Let M be a convex l-subgroup of G. M is called a *closed subgroup* if whenever

$$\{g_\alpha | \alpha \in A\} \subseteq M \quad \text{and} \quad \bigvee_{\alpha \in A} g_\alpha$$

exists, then

$$\bigvee_{\alpha \in A} g_\alpha \in M .$$

M is said to be a *prime subgroup* provided $a \wedge b > 0$ for any pair of positive elements a, b which are not in M. In [6, Theorem 3.2] CONRAD has established six equivalent definitions of a prime subgroup. It is easy to see that G has minimal prime subgroups and that each prime subgroup of G contains at least one of these. A convex l-subgroup (l-ideal) that is maximal with respect to not containing some $g \in G$ is called a *regular subgroup (regular l-ideal)*. It follows from Theorem 3.2 of [6] that each regular subgroup is prime. Let $\{G_\gamma | \gamma \in \Gamma(G)\}$ ($\{I_\lambda | \lambda \in \Lambda(G)\}$) be the collection of all regular subgroups (regular l-ideals) of G. For each $\gamma \in \Gamma(G)$ ($\lambda \in \Lambda(G)$) there exist a unique convex l-subgroup G^γ (l-ideal I^λ) of G that covers G_γ (I_λ). If g is an element of $G^\gamma \setminus G_\gamma$ ($I^\lambda \setminus I_\lambda$), then G_γ (I_λ) is said to be a *value (ideal value)* of g.

For $g \in G$ ($g \neq 0$) let R_g (L_g) be the subgroup of G that is generated be the set of all values (ideal values) of g. The *radical* $R(G)$ and the *ideal radical* $L(G)$ are defined as follows:

$$R(G) = \bigcap R_g \qquad (g \in G,\ g \neq 0)$$

$$L(G) = \bigcap L_g \qquad (g \in G,\ g \neq 0) .$$

A regular subgroup G_γ (regular l-ideal I_λ) is said to be an *essential subgroup (essential l-ideal)* if there exists $h \in G$ ($h \neq 0$) such that $R_h \subseteq G_\gamma$ ($L_h \subseteq I_\lambda$). CONRAD [5] has shown that $L(G)$ is the intersection of all essential l-ideals of G and a similar proof shows that $R(G)$ is the intersection of all essential subgroups of G. In [5] the ideal radical was denoted by $R(G)$ and was called the radical of G.

If M is a convex l-subgroup of G, then $r(M)$ denotes the collection of right cosets of M. This collection is partially ordered by the relation $M+x \leqq M+y$ if and only if $m+x \leqq y$ for some $m \in M$; and, with respect to this order relation, $r(M)$ is a distributive lattice in which $M+x \vee M+y = M+(x \vee y)$ and dually. The natural mapping of G onto $r(M)$ is a lattice homomorphism. If M is a prime subgroup of G, then $r(M)$ is totally ordered.

G is said to be *representable* if there exists an l-isomorphism of G into an unrestricted cardinal sum of totally ordered groups. If X is a subset of G, then $[X]$ denotes the subgroup of G generated by X.

3. The Distributive Radical

We begin this section by establishing some properties of closed subgroups. In [2, Lemma 4.4] it was shown that a convex l-subgroup M of G is closed if and only if the natural mapping π of G onto $r(M)$ is a complete lattice homomorphism, i.e. π preserves all joins and meets that exist in G.

Lemma 3.1. *Let M be a convex l-subgroup of an l-group G. Then M is closed if and only if for each coset $M+g(M+g>M)$, the set of positive elements in $M+g$ has a strictly positive lower bound.*

Proof. Suppose that M is closed and let $M+g$ be such that $M+g>M$. Let $\{x_\beta|\beta\in B\}$ be the collection of positive elements of $M+g$. We may suppose, by way of contradiction, that

$$\bigwedge_{\beta\in B} x_\beta$$

exists and equals zero.

Using the fact that the natural mapping of G upon $r(M)$ is a complete lattice homomorphism, we have that

$$M=M+\bigwedge_{\beta\in B} x_\beta=\bigwedge_{\beta\in B}(M+x_\beta)=M+g$$

and this is a contradiction. Hence there exists $a\in G(a>0)$ such that $a\leqq x_\beta$ for all $\beta\in B$.

Conversely, suppose that each coset $M+g(M+g>M)$ satisfies the condition. Let $\{g_\alpha|\alpha\in A\}$ be a subset of M^+ and suppose that

$$g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha$$

exists. If $g\notin M$, then $-g_\alpha+g>0$, and $M<M+g=M-g_\alpha+g$ for all $\alpha\in A$. Therefore, there exists $a\in G(a>0)$ such that $-g_\alpha+g\geqq a$ for all $\alpha\in A$. Thus

$$g>g-a\geqq\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha=g,$$

and this is a contradiction. It follows that $g\in M$ and that M is closed.

Lemma 3.2. *If M is a convex l-subgroup of G and if*

$$J=\{g\in G|\,g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha \text{ for some subset } \{g_\alpha|\alpha\in A\}\subseteq M^+\},$$

then J is a convex subsemigroup of G^+ that contains 0. Hence $[J]$ is a convex l-subgroup of G and $[J]^+=J$. $[J]$ is closed and $M\subseteq[J]$. If M is an l-ideal of G, then so is $[J]$.

Proof. Clearly $0\in J$ and $J\subseteq G^+$. If $g, h\in J$, then

$$g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha \quad\text{and}\quad h=\bigvee_{\beta\in B} h_\beta$$

where

$$\{g_\alpha|\alpha\in A\},\quad \{h_\beta|\beta\in B\}\subseteq M^+.$$

Thus

$$g+h=g+\bigvee_{\beta\in B} h_\beta=\bigvee_{\beta\in B}(g+h_\beta)=\bigvee_{\beta\in B}\Big(\big(\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha\big)+h_\beta\Big)=\bigvee_{\beta\in B}\bigvee_{\alpha\in A}(g_\alpha+h_\beta)\in J.$$

If $0\leqq z\leqq g$ where $z\in G$ and $g\in J$, then

$$g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha$$

where

$$\{g_\alpha | \alpha \in A\} \subseteq M^+ \quad \text{and so} \quad z = z \wedge g = z \wedge (\bigvee_{\alpha \in A} g_\alpha) = \bigvee_{\alpha \in A} (z \wedge g_\alpha) \in J.$$

This equality and its dual hold in any l-group. It follows from [4, Theorem 2.1] that $[J]$ is a convex l-subgroup of G and $[J]^+ = J$. Clearly $[J]$ is closed. Since

$$x + (\bigvee_{\alpha \in A} g_\alpha) - x = \bigvee_{\alpha \in A} (x + g_\alpha - x)$$

holds for each $x \in G$, it follows that $[J]$ is an l-ideal of G provided that M is an l-ideal.

We shall denote the subgroup $[J]$ of Lemma 3.2 by M^* and call M^* the *closure* of M. Clearly, if M and N are convex l-subgroups of G such that $M \subseteq N$, then $M^* \subseteq N^*$. By the Lemma $M \subseteq M^*$ and $M^{**} = M^*$. It is easy to verify that $x + M^* - x = (x + M - x)^*$ for each $x \in G$.

Let $\{M_\delta | \delta \in \Delta\}$ be the collection of all minimal prime subgroups of G. Let

$$D(G) = \bigcap \{M_\delta^* | \delta \in \Delta\}.$$

$D(G)$ will be called the *distributive radical* of G. This radical has the following properties:

(i) $D(G)$ is a closed l-ideal of G.

(ii) If C is a convex l-subgroup of G, then $C \cap D(G) = D(C)$.

(iii) $D(D(G)) = D(G)$.

(iv) If $\{C_\alpha | \alpha \in A\}$ is a collection of convex l-subgroups of G, then $D([\bigcup C_\alpha]) = [\bigcup D(C_\alpha)]$ and $D(\bigcap C_\alpha) = \bigcap D(C_\alpha)$.

(v) $D(G) = \{0\}$ if and only if $D(G(g)) = \{0\}$ for all $g \in G$, where $G(g)$denotes the convex l-subgroup of G generated by g.

(vi) $D(\prod G_\alpha) = \prod D(G_\alpha)$ and $D(\Sigma G_\alpha) = \Sigma D(G_\alpha)$ where $\prod G_\alpha (\Sigma G_\alpha)$ denotes the unrestricted (restricted) cardinal sum of the l-groups $G_\alpha (\alpha \in A)$.

Property (i) is clear. Properties (ii) and (vi) follow easily from Corollary 3.7 and (iii), (iv), and (v) are consequences of (ii).

Lemma 3.3. *If M is a prime subgroup of G and if M contains a closed prime subgroup of G, then M is closed.*

Proof. Let N be a closed prime subgroup of G such that $N \subseteq M$. We may assume $N \neq M$. Let

$$g = \bigvee_{\alpha \in A} g_\alpha \quad \text{where} \quad \{g_\alpha | \alpha \in A\} \subseteq M^+.$$

Suppose, by way of contradiction, that $g \notin M$. Then there exists $m \in M$ such that $N - g < N + m < N$. Hence $N < N + m + g < N + g$. Since N is closed,

$$N + g = \bigvee_{\alpha \in A} (N + g_\alpha)$$

and since $r(N)$ is totally ordered, there exists $\alpha \in A$ such that $N + m + g < N + g_\alpha$. It follows that $n_1 < m + g$ and $n_2 + m + g < g_\alpha$ for some pair $n_1, n_2 \in N$. Therefore

$n_2+n_1<n_2+m+g<g_\alpha$ and so $g\in M$ as n_2+n_1, n_2+m, $g_\alpha\in M$. This is a contradiction and so M is closed.

Theorem 3.4. *$D(G)$ is the intersection of all closed prime subgroups of G. Equivalently $D(G)$ is the intersection of all closed regular subgroups of G.*

Proof. Let $\mathscr{C}$ denote the collection of closed regular subgroups, $\mathscr{D}$ the collection of closed prime subgroups, and $\mathscr{M}=\{M_\delta^* \mid M_\delta$ is a minimal prime subgroup$\}$. Then $\mathscr{M}\subseteq\mathscr{D}$ and $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{D}$. Therefore $\bigcap\mathscr{D}\subseteq\bigcap\mathscr{M}=D(G)$ and $\bigcap\mathscr{D}\subseteq\bigcap\mathscr{C}$. Suppose that $x\in D(G)$ and let $M\in\mathscr{D}$. Let M_δ be a minimal prime subgroup such that $M_\delta\subseteq M$. Then $x\in M_\delta^*\subseteq M^*=M$. It follows that $D(G)=\bigcap\mathscr{D}$. Suppose that $x\notin\bigcap\mathscr{D}$. Then there exists $M\in\mathscr{D}$ such that $x\notin M$. Let N be a value of x such that $M\subseteq N$. By Lemma 3.3, N is a closed regular subgroup of G. Thus $N\in\mathscr{C}$ and $x\notin N$, so that $x\notin\bigcap\mathscr{C}$. It then follows that $\bigcap\mathscr{D}=\bigcap\mathscr{C}$.

Corollary 3.5. *For an l-group G, $D(G)\subseteq R(G)$.*

Proof. $R(G)$ is the intersection of all essential subgroups of G and each essential subgroup is closed [2, Proposition 4.1].

WEINBERG [*11*, Proposition 1.6] has shown that an l-group is completely distributive if and only if for each $g\in G(g>0)$ there exist $g^*\in G(g^*>0)$ so that whenever

$$g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha \quad (\{g_\alpha\mid\alpha\in A\}\subseteq G^+)$$

then $g^*\leqq g_\alpha$ for some $\alpha\in A$. A pair (g, g^*) of elements of G that satisfy this condition will be called a *distributive pair.*

Theorem 3.6. *If g is the first member of a distributive pair, then there exists a closed prime subgroup M of G such that $g\notin M$. Conversely, if $g\in G(g>0)$ does not belong to some closed prime subgroup of G, then g is the first member of a distributive pair.*

Proof. Suppose that (g, g^*) is a distributive pair and let M be a value of g^*. If $g\in M^*$, then there exists $\{g_\alpha\mid\alpha\in A\}\subseteq M^+$ such that

$$g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha.$$

It follows that $0<g^*\leqq g_\alpha$ for some α in A. But this implies $g^*\in M$, a contradiction. Therefore $g\notin M^*$.

Conversely suppose that $g\in G\,(g>0)$ does not belong to some closed prime subgroup M of G.

Case 1. $M+g$ covers M. By Lemma 3.1 there exists $a\in G\,(a>0)$ such that a is a lower bound for the set of positive elements in $M+g$. Let

$$g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha, \quad \{g_\alpha\mid\alpha\in A\}\subseteq G^+.$$

Since M is closed, there exists α in A such that $g_\alpha\notin M$. Thus $M+g=M+g_\alpha$ and hence $a\leqq g_\alpha$. Therefore (g, a) is a distributive pair.

Case 2. There exists $h\in G(h>0)$ such that $M<M+h<M+g$. Let $a\in G(a>0)$ be such that a is a lower bound for the positive elements in $M+h$. Suppose that

$$g=\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha, \quad \{g_\alpha|\alpha\in A\}\subseteq G^+.$$

Then

$$M+g=M+\bigvee_{\alpha\in A} g_\alpha=\bigvee_{\alpha\in A}(M+g_\alpha).$$

Since M is prime, $M+g_\alpha>M+h$ for some α in A. Thus $M+h=M+h\wedge g_\alpha$ and so $a\leqq h\wedge g_\alpha\leqq g_\alpha$. It follows that (g, a) is a distributive pair.

Corollary 3.7. *For an l-group G,* $D(G)=\{g\in G| \, |g| \text{ is not the first member of a distributive pair}\}$.

Corollary 3.8. *For an l-group G, these are equivalent*:

(1) *G is completely distributive.*

(2) *Each nonzero element of G has a closed value.*

(3) $D(G)=\{0\}$.

Corollary 3.9. *For an l-group G,* $L(G)\subseteq D(G)$. *If G is representable, then* $L(G)=D(G)=R(G)$.

Proof. If $g\notin D(G)$ $(g>0)$, then by the preceeding corollary there exists $g^*\in G(g^*>0)$ such that (g, g^*) is a distributive pair. Suppose that $g\in L(G)$. Then $g\in L_{g^*}$ and so $g=g_1\vee\cdots\vee g_n$ where $g_i\in I_{\lambda_i}(g_i>0)$ and each I_{λ_i} is an ideal value of g^* [5, Lemma 4]. But then $g_i\geqq g^*>0$ for some i and so $g^*\in I_{\lambda_i}$, a contradiction. It has been shown [2, Corollary 3.4] that for a representable l-group, $L(G)=R(G)$.

For each $\lambda\in\Lambda$ let T_λ be a totally ordered set and let $P(T_\lambda)$ be the group of order-preserving permutations of T_λ. It is well known that $P(T_\lambda)$ is an l-group and in [10, Theorem 1] it was shown that $P(T_\lambda)$ is completely distributive. Let $H=\prod P(T_\lambda)$ $(\lambda\in\Lambda)$ be the large cardinal sum of the $P(T_\lambda)$ and let σ_λ denote the projection map of H onto $P(T_\lambda)$. The pair (σ, H) is an *H-representation* of an l-group G if σ is an l-isomorphism of G into H such that $G\sigma\sigma_\lambda$ acts transitively on T_λ for all λ in Λ. The main result of [8] is that each l-group has an H-representation. An H-representation (σ, H) of G is called *complete* if σ preserves all joins and meets that exist in G. A set $\{M_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ of prime subgroups of G is an *H-kernel* if $\bigcap\{M_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ contains no nonzero l-ideal of G.

Theorem 3.10. *For an l-group G, these are equivalent:*

(1) *G is completely distributive.*

(2) $D(G)=\{0\}$.

(3) *G has an H-kernel consisting of closed prime subgroups.*

(4) *G has a complete H-representation.*

Proof. That (1) implies (2) is part of the content of Corollary 3.8. Trivially (2) implies (3). It has been shown [2, Theorem 4.6, Corollary 4.7] that (3) implies (4) and that (4) implies (1).

Theorem 3.10 generalizes a result obtained for representable l-groups by WEINBERG [11] and CONRAD [5]. In Theorems 3.11 and 3.14 below, we obtain additional results concerning closed subgroups and give a condition under which $D(G)=R(G)$. Theorem 3.11 provides an affirmative answer to a question raised by CLIFFORD in a seminar at Tulane University.

Theorem 3.11. *If G_γ is a closed regular subgroup of G such that G_γ is normal in G^γ, then G_γ is an essential subgroup.*

Proof. Let $g\in G^\gamma\setminus G_\gamma (g>0)$ and let $a\in G$ $(a>0)$ be such that a is a lower bound for the set of positive elements in $G_\gamma+g$. We show that $R_a\subseteq G_\gamma$. Suppose, by way of contradiction, that G_λ is a value of a such that $G_\lambda\nsubseteq G_\gamma$. Then there exists $x\in G_\lambda\setminus G_\gamma$ $(x>0)$. If $x\notin G^\gamma$, then $G_\gamma+x>G_\gamma+g$. If $x\in G^\gamma$, then, since G^γ/G_γ is an Archimedean totally-ordered group, there exists an integer m such that $G_\gamma+mx>G_\gamma+g$. Thus, in either case, there exists an integer n such that $G_\gamma+nx\geqq G_\gamma+g$. Therefore $G_\gamma+g=G_\gamma+(nx\wedge g)$ and so $nx\geqq nx\wedge g\geqq a>0$. But this implies that $a\in G_\lambda$, which is a contradiction.

Corollary 3.12. *A closed regular subgroup of a representable l-group is essential.*

Proof. If G is representable, then G_γ is normal in G^γ for all $\gamma\in\Gamma(G)$ [2, Corollary 3.2].

Remark. It is not difficult to show that a closed regular l-ideal of a representable l-group is an essential l-ideal.

Corollary 3.13. *If G_γ is normal in G^γ for all $\gamma\in\Gamma(G)$, then $R(G)=D(G)$.*

Proof. By Theorem 3.4 $D(G)$ is the intersection of the collection $\mathscr{C}$ of closed regular subgroups. As remarked earlier, $R(G)$ is the intersection of the collection $\mathscr{E}$ of essential subgroups of G. By [2, Proposition 4.1], $\mathscr{E}\subseteq\mathscr{C}$. By the theorem and the hypothesis of this corollary, $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{E}$. Therefore $D(G)=R(G)$.

Theorem 3.14. *If there exists $g\in G$ with exactly n closed values $G_{\gamma_1}, \ldots, G_{\gamma_n}$, then G_{γ_i} is normal in G^{γ_i} for $i=1, \ldots, n$. Thus each G_{γ_i} is an essential subgroup of G.*

Proof. If G_γ is a regular subgroup of G and if $g\in G^\gamma\setminus G_\gamma$, then G_γ is normal in G^γ if and only if $G_\gamma\cap G(g)$ is normal in $G(g)$ [3, Theorem 3.6]. Hence it suffices to take $G=G(g)$. If $n=1$, then G_{γ_1} is the only closed value of g, therefore normal in $G(g)$. Suppose that $n>1$. Without loss of generality, we show that G_{γ_1} is normal in $G^{\gamma_1}=G(g)$. Let $x_i\in G_{\gamma_1}\setminus G_{\gamma_i}$ $(x_i>0, 2\leqq i\leqq n)$. Then

$$x=x_2\vee\cdots\vee x_n\in G_{\gamma_1}\setminus\bigcup_{i=2}^{n} G_{\gamma_i}.$$

Let $y_i\in G_{\gamma_i}\setminus G_{\gamma_1}$ $(y_i>0, 2\leqq i\leqq n)$. Since G_{γ_1} is prime,

$$y=y_2\wedge\cdots\wedge y_n\in\left(\bigcap_{i=2}^{n} G_{\gamma_i}\right)\setminus G_{\gamma_1}.$$

Then

$$x\wedge y\in\bigcap_{i=1}^{n}G_{\gamma_i},\qquad x-x\wedge y\in G_{\gamma_1}\setminus\bigcup_{i=2}^{n}G_{\gamma_i},\qquad y-x\wedge y\in\left(\bigcap_{i=2}^{n}G_{\gamma_i}\right)\setminus G_{\gamma_1}$$

and $(x-x\wedge y)\wedge(y-x\wedge y)=0$. Note that G_{γ_1} is a closed value of $y-x\wedge y$. Let G_δ be any closed value of $y-x\wedge y$. Since $g\notin G_\delta$, it follows by Lemma 3.3 that $G_\delta\subseteq G_{\gamma_i}$ for some i. If $i>1$, then $x-x\wedge y\notin G_{\gamma_i}\supseteq G_\delta$ and since $(x-x\wedge y)\wedge(y-x\wedge y)=0$, it follows that $y-x\wedge y\in G_\delta$, a contradiction. Hence $i=1$ and $y-x\wedge y$ has exactly one closed value. Therefore G_{γ_1} is normal in $G(g)$. It follows by Theorem 3.11 that each G_{γ_i} is essential.

In conclusion, we list the following questions which have arisen during the course of this work.

1. *Is an essential subgroup normal in the convex l-subgroup that covers it?* An affirmative answer to this question would yield the converse of Theorem 3.11.

2. *Is $D(G)$ an invariant of the lattice of convex l-subgroups of G?* It is known that $R(G)$ is an invariant of the lattice of convex l-subgroups and that $L(G)$ is an invariant of the lattice of l-ideals. In [*10*] an example is given of an l-simple (no proper l-ideals) l-group that is not completely distributive. The last example in [*9*] is an example of a completely distributive l-simple l-group. Therefore $D(G)$ is not an invariant of the lattice of l- ideals of G.

References

[*1*] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. Rev. Ed. Amer. Math. Soc. Colloquium 1948, Pub. 25.

[*2*] BYRD, R. D.: Complete distributivity in lattice-ordered groups. Pacific J. Math. (to appear).

[*3*] — M-Polars in lattice-ordered groups. Czech. Math. J. (to appear).

[*4*] CONRAD, P.: Some structure theorems for lattice-ordered groups. Trans. Amer. Math. Soc. **99**, 212—240 (1961).

[*5*] — The relationship between the radical of a lattice-ordered group and complete distributivity. Pacific. J. Math. **14**, 494—499 (1964).

[*6*] — The lattice of all convex l-subgroups of a lattice-ordered group. Czech. Math. J. **15**, 101—123 (1965).

[*7*] FUCHS, L.: Partially ordered algebraic systems. New York: Pergamon Press 1963.

[*8*] HOLLAND, C.: The lattice-ordered group of automorphisms of an ordered set. Michigan Math. J. **10**, 399—408 (1963).

[*9*] — A class of simple lattice-ordered groups. Proc. Amer. Math. Soc. **16**, 326—329 (1965).

[*10*] LLOYD, J. T.: Complete distributivity in certain infinite permutation groups. Michigan Math. J. (to appear).

[*11*] WEINBERG, E. C.: Completely distributive lattice-ordered groups. Pacific. J. Math. **12**, 1131—1137 (1963).

Department of Mathematics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania (U.S.A.)

NOGA, D.
Math. Zeitschr. 101, 131–141 (1967)

Über den Außenraum von Produktknoten und die Bedeutung der Fixgruppen

DIETER NOGA

Eingegangen am 12. April 1967

Ergebnisse

Die ersten Abschnitte dieser Arbeit sind geometrischer, die weiteren mehr gruppentheoretischer Natur. Genauer dient **0.** der Einführung von Terminologie und allgemeinen Voraussetzungen. In **1.** wird auf einem von SCHUBERT vorgeschlagenen Wege gezeigt, daß Produktknoten im wesentlichen durch ihren Außenraum bestimmt sind (Satz 1, Kor.); daraus ergibt sich in **2.** mit den Sätzen 2a, 2b eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von [*5*] hinsichtlich *granny* und *square knot*. In **3.** wird eine etwas schwächere algebraische Aussage bewiesen. Unter der *Fixgruppe eines Elements g der Knotengruppe* $\mathfrak{G}$ verstehen wir die Fixgruppe des durch g bestimmten, auf $\mathfrak{G}'$ eingeschränkten inneren Automorphismus von $\mathfrak{G}$. Satz 3 besagt, daß die Meridiane eines Produktknotens in den peripheren Untergruppen durch den Rang ihrer Fixgruppe bis auf Inversion bestimmt sind. In **4.** folgen allgemeinere Betrachtungen über Fixgruppen. Sofern $g\mathfrak{G}'$ die Kommutatorfaktorgruppe erzeugt, ist die Fixgruppe von g nach Satz 4 Untergruppe von $\mathfrak{G}''$. Nach Satz 5 besitzt, hübsche geometrische Verhältnisse vorausgesetzt, jedes Element der Fixgruppe des Meridians einen Repräsentanten auf der in die Knotenlinie eingespannten Fläche minimalen Geschlechts. Als Korollar folgt, daß die Fixgruppe eines Meridians frei ist, und zwar von einem Range, der mindestens gleich der Anzahl der Faktoren in der Primfaktorzerlegung des Knotens ist. Für neuwirthsche Knoten besteht nach Satz 6 Gleichheit; wir verzichten auf eine Wiedergabe des in [*10*] geführten Beweises, da die erforderliche Rekapitulation der Nielsenschen Flächentheorie den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würde. In **5.** wird schließlich mit Hilfe von Satz 5 und einem allgemeinen Maximalitätskriterium für gewisse abelsche Untergruppen von Knotengruppen (Satz 7) die Maximalität der peripheren Untergruppen gezeigt.

Auch an dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. H. SCHUBERT herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit und die vielen wertvollen Gespräche danken.

0. Bezeichnungen

(i) Ein *Knoten* $\boldsymbol{K}$ ist eine Äquivalenzklasse doppelpunktfreier, orientierter, geschlossener Kurven in der S^3 hinsichtlich orientierungserhaltender Autohomöomorphismen der S^3. Wir betrachten ausschließlich *zahme* Knoten. Die von einem Repräsentanten eines Knotens dargestellte Punktmenge ist eine *Knotenlinie*.

(ii) Seien Knoten $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$ und eine semilinear in die S^3 eingebettete 2-Sphäre S^2 gegeben. Die abgeschlossenen Komplemente von S^2 in S^3 sind bekanntlich Vollkugeln E_1, E_2. Ein Repräsentant K von $\boldsymbol{K}$ sei so gewählt, daß $K \cap S^2$ aus genau zwei Punkten P_1, P_2 besteht. Man verbinde P_1, P_2 durch einen Bogen B, $B \subset S^2$, und versehe die Knotenlinien $(K \cap E_1) \cup B$ und $(K \cap E_2) \cup B$ mit der von K herrührenden Orientierung. Entstehen so bei geeigneter Wahl von K Repräsentanten von $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$, dann ist $\boldsymbol{K}$ das *Produkt* von $\boldsymbol{K}_1$ und $\boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 \# \boldsymbol{K}_2$. Nach [*13*] macht $\#$ die Menge der Knoten zu einem kommutativen Monoid mit eindeutiger Primfaktorzerlegung (vgl. auch [*14*]).

(iii) Sei K eine Knotenlinie, $U \subset S^3$ eine reguläre Umgebung von K und $\mathring{U}$ deren Inneres. Als *Außenraum* eines durch K repräsentierbaren Knotens bezeichnen wir den Homöomorphietyp von $S^3 - \mathring{U}$.

(iv) Ein geometrischer *Meridian* auf einem Vollring U ist wie in [*14*], § 3 eine einfach geschlossene Kurve auf $\dot{U}$, dem Rand von U, die auf U, nicht aber auf $\dot{U}$ nullhomolog ist.

(v) In der *Gruppe* eines Knotens $\boldsymbol{K}$, d.h. in der Fundamentalgruppe seines Außenraums, wird per Inklusion $\dot{U} \subset S^2 - \mathring{U}$ die Konjugationsklasse der *peripheren Untergruppen* von $\pi_1(S^3 - \mathring{U})$ bestimmt. Sei T ein Meridian von U und L ein zu T konjugierter, auf $S^3 - \mathring{U}$ nullhomologer Rückkehrschnitt von $\dot{U}$; man parametrisiere T, L so, daß sie eine Rechtsschraubung in Richtung des Repräsentanten von $\boldsymbol{K}$ definieren, und gehe zu den Klassen t, l der Wege T, L in $\pi_1(S^3 - \mathring{U}, T \cap L)$ über. Die *Meridiane* bzw. *Longituden von* $\pi_1(S^3 - \mathring{U}, T \cap L)$ *als Gruppe von* $\boldsymbol{K}$ sind die Konjugierten von t bzw. l. Ein *Meridian-Longituden-Paar von* $\pi_1(S^3 - \mathring{U}, T \cap L)$ *als Gruppe von* $\boldsymbol{K}$ ist ein zu t, l konjugiertes Paar.

(vi) Für jede Knotengruppe $\mathcal{G}$ ist $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$ frei zyklisch. Wenn für $t \in \mathcal{G}$ die Restklasse $t\mathcal{G}'$ die Kommutatorfaktorgruppe erzeugt, dann ist $\mathcal{G}$ ein *semidirektes Produkt* von $\mathcal{G}'$ und der von t erzeugten freien zyklischen Gruppe $(t:)$; wir schreiben

$$\mathcal{G} = (t:) \ast) \mathcal{G}'.$$

Die Darstellung der Elemente von $\mathcal{G}$ in der Form $t^n x$, n ganz, $x \in \mathcal{G}'$, ist eindeutig; es gelten evidente Rechenregeln. Speziell kann für t ein Meridian gewählt werden.

(vii) Nach [*7*] und Theorem 4.5.3 aus [*9*] ist $\mathcal{G}'$ für eine Knotengruppe $\mathcal{G}$ genau dann frei, wenn $\mathcal{G}'$ endlich erzeugt ist. In diesem Falle heißen die Knoten mit Gruppe $\mathcal{G}$ *neuwirthsch.*

1. Der Außenraum von Produktknoten

Sei $S^3 - \mathring{U}$ Repräsentant des Außenraums eines Knotens $\boldsymbol{K}$, V ein Vollring und $\varphi: \dot{V} \to \dot{U}$ ein Homöomorphismus. Nach Theorem 5 aus [*1*] ist φ simplizial bezüglich einer Unterteilung der auf $S^3 - U$ vorgegebenen Triangulation und

einer geeigneten Triangulation von V. Bildet φ die Meridiane von V auf die Meridiane von U ab, so setzt sich φ nach [*14*], § 3, Hilfssatz 4 zu einem Homöomorphismus von V auf U fort, d.h. es ist in diesem Falle

$$S^3=(S^3-\mathring{U})\cup U\approx(S^3-\mathring{U})\bigcup_{\varphi} V,$$

durch Verheftung von $S^3-\mathring{U}$ und V vermöge φ entsteht eine 3-Sphäre. Wir sagen, *φ verheftet V falsch mit $S^3-\mathring{U}$*, wenn bei φ nicht Meridiane in Meridiane übergehen.

Satz 1. *Sei $\mathbf{K}$ ein Produkt nichttrivialer Knoten und $S^3-\mathring{U}$ ein Repräsentant des Außenraums von $\mathbf{K}$. Verheftet $\varphi\colon \dot{V}\to\dot{U}$ den Vollring V falsch mit $S^3-\mathring{U}$, dann ist*

$$(S^3-\mathring{U})\bigcup_{\varphi} V$$

keine 3-Sphäre.

Beweis. Wir setzen die geometrischen Verhältnisse von (ii) und (iii) aus **0.** voraus. OEdA ist alles hübsch simplizial, und $S^2\cap U$ besteht aus zwei Meridianflächen von U (vgl. [*14*], § 3). $R=S^2-(S^2\cap\mathring{U})$ ist ein Kreisring. Der Torus $T_1=R\cup(E_1\cap\dot{U})$ berandet in der S^3 den Vollring $U_2=E_2\cup U$, entsprechend der Torus $T_2=R\cup(E_2\cap\dot{U})$ den Vollring $U_1=E_1\cup U$. Da die Produktzerlegung nicht trivial ist, sind U_1, U_2 verknotet; nach [*14*], § 7, Satz 2 können ihre abgeschlossenen Komplemente bezüglich S^3, nämlich $E_2-(E_2\cap\mathring{U})$, $E_1-(E_1\cap\mathring{U})$, mithin keine Vollringe sein. Man beachte, daß diese Komplemente in $S^3-\mathring{U}$ liegen.

Verhefte nun $\varphi\colon\dot{V}\to\dot{U}$ den Vollring V falsch mit $S^3-\mathring{U}$. Angenommen, die 3-Mannigfaltigkeit

$$M=(S^3-\mathring{U})\bigcup_{\varphi} V$$

wäre eine 3-Sphäre. Nach der zu Beginn dieser Nummer gemachten Bemerkung setzt sich eine Unterteilung der auf $S^3-\mathring{U}$ gegebenen Triangulation mit einer geeigneten Triangulation von V zu einer Triangulation von M zusammen. Nach Annahme ist M, versehen mit einer Unterteilung dieser Triangulation, bis auf simpliziale Isomorphie eine gradlinig triangulierte S^3; denn für 3-Mannigfaltigkeiten gilt die Hauptvermutung (vgl. u.a. Kor. 1 von Theorem 4 aus [*1*]). Modulo der Inklusion $S^3-\mathring{U}\subset M$ sind T_1, T_2 simpliziale Tori in M, die nach einem Satz von ALEXANDER (vgl. [*14*], § 4) in M jeweils mindestens einen Vollring beranden. Für $i=1, 2$ ist $E_i-(E_i\cap\mathring{U})$ auch in M ein abgeschlossenes Komplement von T_i, aber nach obigem kein Vollring; demnach muß jeweils das V enthaltende abgeschlossene Komplement V_i von T_i ein Vollring sein.

Nun ist die abgeschlossene Hülle K von $\dot{V}-(T_1\cap\dot{V})$ ein Kreisring auf V_1, der $T_1=\dot{V}_1$ genau in zwei disjunkten Kreisen schneidet. Weil V durch φ falsch mit $S^3-\mathring{U}$ verheftet wird, sind diese Kreise auf V nicht nullhomolog. Wenn sie

auch auf V_1 nicht nullhomolog sind, dann erfüllen sie die Voraussetzungen von Satz 1 aus [*14*], § 16; d.h. K zerlegt nach eben diesem Satze V_1 in zwei Vollringe. Das aber ist ein Widerspruch; denn eines der Komplemente von K auf V_1 ist gerade $E_2-(E_2\cap\mathring{U})$. Die betrachteten Kreise müssen also auf V_1 nullhomolog sein; sie sind aber auf $\dot{V}_1$ ersichtlich nicht nullhomolog, d.h. es handelt sich um Meridiane von V_1. Da $E_2-(E_2\cap\mathring{U})$ kein Vollring ist, müßten sie nach Satz 2 aus § 16 von [*14*] ebenfalls Meridiane von V sein, was wegen unserer Voraussetzung über φ ausgeschlossen ist. ∎

Durch Spiegelung bzw. Umorientierung der Repräsentanten eines Knotens $\boldsymbol{K}$ erhält man Repräsentanten des *gespiegelten* Knotens $\boldsymbol{K}^*$ bzw. des *umorientierten* Knotens $\boldsymbol{K}'$. Der soeben bewiesene Satz liefert:

Korollar. *Ist der Knoten $\boldsymbol{K}$ ein nichttriviales Produkt, so wird $\boldsymbol{K}$ durch den Außenraum bis auf Spiegelung und Umorientierung bestimmt.*

2. Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Fox

In [*5*] zeigte Fox mit Hilfe von Gruppendarstellungen, daß für die (Rechts-) Kleeblattschlinge $\boldsymbol{K}$ die Außenräume von $\boldsymbol{K}\#\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}\#\boldsymbol{K}^*$ verschieden sind. **1.** gestattet es, diese Aussage erheblich zu präzisieren. $\boldsymbol{K}$ heißt bekanntlich $+$*amphicheiral* bzw. $-$*amphicheiral*, wenn $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}^*$ bzw. $\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{K}^*$ ist, *amphicheiral*, wenn eine dieser Gleichungen gilt, und schließlich *invertierbar*, wenn $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}'$ ist.

Satz 2a. *Sind $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$ nichtamphicheirale Primknoten, so besitzen $\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2$ und $\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2^*$ verschiedene Außenräume.*

Beweis. Hätten die genannten Produkte dieselben Außenräume, so müßte nach dem Korollar der vorangehenden Nummer eine der folgenden Situationen vorliegen:

$$\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2^*=\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2$$

$$\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2^*=(\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2)^*=\boldsymbol{K}_1^*\#\boldsymbol{K}_2^*$$

$$\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2^*=(\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2)'=\boldsymbol{K}_1'\#\boldsymbol{K}_2'$$

$$\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2^*=(\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2)'^*=\boldsymbol{K}_1'^*\#\boldsymbol{K}_2'^*.$$

In jedem Falle ergibt sich ein Widerspruch zu der unter (ii) in **0.** zitierten Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. ∎

Der soeben bewiesene Satz läßt sich in einem gewissen Sinne „dualisieren".

Satz 2b. *Sind $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$ nichtinvertierbare, nicht$(-)$amphicheirale Primknoten, so besitzen $\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2$ und $\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2'$ verschiedene Außenräume.*

Diese Aussage geht aus Satz 2a dadurch hervor, daß * und ′ ihre Rollen vertauschen; entsprechendes gilt für den Beweis.

Formal zeigt Fox a.a.O. für die Kleeblattschlinge mehr, nämlich daß es keinen Automorphismus der gemeinsamen Gruppe von *square* und *granny*

knot gibt, der die peripheren Untergruppen des einen dieser Knoten auf die des anderen abbildet. Diese Aussage folgt im Spezialfall neuwirthscher Knoten aus Satz 2a mit Hilfe von [*8*].

3. Die Meridiane in den peripheren Gruppen von Produktknoten

Sei $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2$ ein Produktknoten mit nichttrivialen Faktoren $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$. Sei ferner t ein Meridian in $\mathscr{G}$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}$. Aus der in **0.** (ii) skizzierten geometrischen Situation ergibt sich für $\mathscr{G}$ bei Anwendung des Satzes von VAN KAMPEN-SEIFERT ([*2*], (5.1) sowie [*15*], S. 211) die u. a. in [*9*], VIII, § 2 angegebene Darstellung als amalganiertes Produkt

$$\mathscr{G}=\mathscr{G}_1 \underset{(t:)}{*} \mathscr{G}_2 . \tag{3.1}$$

Dabei ist für $i=1, 2$ die Untergruppe $\mathscr{G}_i$ Gruppe von $\boldsymbol{K}_i$ und t Meridian in $\mathscr{G}_i$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}_i$. Indem man $\mathscr{G}_1$, $\mathscr{G}_2$ gemäß (vi) aus **0.** über $(t:)$ semidirekt aufspaltet, erhält man

$$\mathscr{G}=(t:)*)(\mathscr{G}_1'*\mathscr{G}_2'), \tag{3.2}$$

also eine freie Aufspaltung

$$\mathscr{G}'=\mathscr{G}_1'*\mathscr{G}_2' \quad \text{mit} \quad t^{-1}\mathscr{G}_i' t=\mathscr{G}_i'. \tag{3.3}$$

Jedes Element w, $w\in\mathscr{G}'$, besitzt nach (3.3) eine eindeutige *Zerlegung*

$$w=w_1^{(1)} w_2^{(1)} \ldots w_1^{(n)} w_2^{(n)}, \qquad w_i^{(k)}\in\mathscr{G}_i', \tag{3.4}$$

wobei $w_i^{(k)}\neq 1$ ist für $(i, k)\neq(1, 1), \neq(2, n)$. Die Anzahl der von 1 verschiedenen *Silben* $w_i^{(k)}$ bezeichnet man üblicherweise als *Länge von* w, $\lambda(w)$. Nach (3.3) haben w und $t^{-1}wt$ dieselbe Länge und entsprechende Silben ihrer Zerlegung liegen im selben freien Faktor von $\mathscr{G}'$. Speziell kann angenommen werden, daß die zu dem Meridian t von $\mathscr{G}$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}$ gehörende Longitude l die Zerlegung

$$l=l_1 l_2 \quad \text{mit} \quad t^{-1} l_i t=l_i\in\mathscr{G}_i' \tag{3.5}$$

besitzt, wobei t, l_i für $i=1, 2$ im Sinne von (3.1) ein Meridian-Longituden-Paar von $\mathscr{G}_i$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}_i$ ist. Da l_1, l_2 in verschiedenen Faktoren liegen, also nicht kommutieren, gibt es ferner keine zyklische Untergruppe von $\mathscr{G}'$, die sowohl l_1 als auch l_2 enthielte. Die Fixgruppe des Meridians eines Produktknotens ist also nicht zyklisch. Diese Eigenschaft zusammen mit (vi) aus **0.** charakterisiert die Meridiane von Produktknoten in den peripheren Untergruppen bis auf Inversion.

Satz 3. *Sei t, l ein Meridian-Longituden-Paar von $\mathscr{G}$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2$. Sei ferner weder $\boldsymbol{K}_1$ noch $\boldsymbol{K}_2$ trivial. Dann besitzen unter den Elementen $t^e l^q$ mit* e, q *ganz und* $e^2=1$ *genau t und t^{-1} eine nichtzyklische Fixgruppe.*

Beweis. Wir müssen noch zeigen, daß die Fixgruppe von $t^e l^q$ für $q \neq 0$ zyklisch ist. Für den Beweis kann $e=1$ und $q>0$ angenommen werden. Sei unter diesen Voraussetzungen für $w \in \mathscr{G}'$

$$1 \neq w = (t l^q)^{-1} w (t l^q),$$

d.h. $t^{-1} w t = l^q w l^{-q}$, also nach (3.4), (3.5), wenn $\bar{w}_i^{(k)}$ für $t^{-1} w_i^{(k)} t$ geschrieben wird,

$$\begin{aligned} &\bar{w}_1^{(1)} \bar{w}_2^{(1)} \dots \bar{w}_1^{(n)} \bar{w}_2^{(n)} \\ &\quad = l_1 l_2 \dots l_1 l_2 w_1^{(1)} w_2^{(1)} \dots w_1^{(n)} w_2^{(n)} l_2^{-1} l_1^{-1} \dots l_2^{-1} l_1^{-1}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Wir lassen alle Silben weg, die 1 sind. Die verbleibenden $\lambda(w)+4q$ Silben auf der rechten Seite von (3.6) müssen sich durch *Streichungen* – $a_i a_i^{-1}$ entfällt – und *Verschmelzungen* – statt $a_i b_i \neq 1$ mit $a_i, b_i \in \mathscr{G}_i'$ wird $c_i = a_i b_i$ gesetzt – in die auf der linken Seite stehende Zerlegung von $t^{-1} w t$ überführen lassen. Wir unterscheiden nach den möglichen Zerlegungstypen.

Der Fall $w_1^{(1)} \neq 1 = w_2^{(n)}$ kann nicht auftreten, da sonst $t^{-1} w t$ Zerlegungen verschiedener Länge besäße. Im Falle $w_1^{(1)} = 1 \neq w_2^{(n)}$ würde die linke (rechte) Seite von (3.6) mit einer Silbe aus $\mathscr{G}_2'(\mathscr{G}_1')$ beginnen und auf eine eben solche enden; d.h. es müßten rechts mindestens die $4q$ Silben von l^q und l^{-q} per Streichung eliminiert werden, was eine Verminderung der Silbenanzahl um $8q$ zur Folge hätte und insofern unmöglich ist. Sei also

$$w_1^{(1)} \neq 1 \neq w_2^{(n)}. \tag{3.7}$$

Die Kürzprozedur beginnt auf der rechten Seite von w und endet spätestens mit der ersten auftretenden Verschmelzung. Da k Streichungen und eine Verschmelzung die Anzahl der Silben um $2k+1$ verringert, aber eine Verminderung um $4q$ erforderlich ist, sind Verschmelzungen ausgeschlossen. Für $\lambda(w)>2q$ muß $w = u l^q$ sein, wobei u wie w mit $w_1^{(1)} \neq 1$ beginnt und auf eine Silbe aus $\mathscr{G}_2'$ endet, also nicht partiell gegen l^q kürzt. Mithin ist $t^{-1} w t = t^{-1} u t l^q$, also, da wir $t^{-1} w t = l^q w l^{-q}$ vorausgesetzt haben, $t^{-1} u t = l^q u l^{-q}$. Bis auf eine positive Potenz von l kann also u anstelle von w betrachtet werden. Da $\lambda(u) < \lambda(w)$ ist, gilt nach endlich vielen Reduktionen dieser Art $\lambda(w) \leqq 2q$ für das neue Fixelement w. Für $\lambda(w)=2q$ hat man offensichtlich $w = l^q$. Sei also $\lambda(w)<2q$. Dann kürzt w ganz gegen l^{-q}; d.h. es ist $l^{-q} = w^{-1} x$, wobei x auf l_1^{-1} endet und, weil genau $2q$ Streichungen erfolgen müssen, mit l_2^{-1} beginnt und in $l^q x$ ganz gegen l^q kürzt. Wegen der Struktur von x ist die letzte Silbe von l^q, die wir dabei eliminieren, ein l_1. Demzufolge hat man $l^q x = l^p$, $0<p<q$, und damit $w = x l^q = l^p$. Der Fall (3.7) liefert also nur positive Potenzen von l.

Da der noch ausstehende Fall

$$w_1^{(1)} = 1 = w_2^{(n)} \tag{3.8}$$

entsprechend nur negative Potenzen von l liefert und $t^e l^q$ mit 1 kommutiert, ist unter unseren Voraussetzungen die Fixgruppe von $t^e l^q$ genau (1:) und insofern zyklisch. ∎

Bildet ein Isomorphismus $\varphi\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ die peripheren Untergruppen von $\mathcal{G}_1$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}_1$ auf diejenigen von $\mathcal{G}_2$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}_2$ ab, so überführt φ bekanntlich Longituden in Longituden bzw. deren Inverses. Sind $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2$ Produktknoten, so gilt nach dem soeben bewiesenen Satz die entsprechende Aussage auch für die Meridiane.

4. Die Fixgruppen der Meridiane

Sei

$$\mathcal{G} = (t:) \ast) \mathcal{G}'$$

eine beliebige semidirekte Aufspaltung der Knotengruppe $\mathcal{G}$. Die Fixgruppe von t liegt in $\mathcal{G}''$, denn es gilt genauer

Satz 4. *Für $x \in \mathcal{G}'$, $x \notin \mathcal{G}''$, liegen x und $t^{-1}xt$ in verschiedenen Restklassen nach $\mathcal{G}''$.*

Beweis. Auf $\mathcal{G}'/\mathcal{G}''$ induziert die Konjugation mit t den bis auf Inversion eindeutigen, also in diesem Sinne von der speziellen Aufspaltung von $\mathcal{G}$ unabhängigen Automorphismus τ. Wie bereits SEIFERT in [*12*] gezeigt hat, gilt für das Alexander-Polynom $\Delta_{\mathcal{G}}(\tau)$ die Koeffizientengleichung $\Delta_{\mathcal{G}}(1) = \pm 1$. Gäbe es ein x mit $x \in \mathcal{G}'$, $x \notin \mathcal{G}''$ und $[x] = [t^{-1}xt]$, also $[x] = \tau([x])$, so müßte ersichtlich $\Delta_{\mathcal{G}}(\tau)([x]) = \pm [x]$ sein. Das aber ist unmöglich, denn es war $x \notin \mathcal{G}''$ und nach CROWELL wird ganz $\mathcal{G}'/\mathcal{G}''$ von $\Delta_{\mathcal{G}}(\tau)$ annulliert (vgl. [*9*], Prop. 4.7.1). ∎

Ist der Knoten nicht neuwirthsch, also $\mathcal{G}'$ nicht frei, so läßt sich Satz 4 präzisieren, wenn t ein Meridian ist.

Satz 5. *Sei K, $K \subset S^3$, eine Knotenlinie mit regulärer Schlauchumgebung U und F' eine in K eingespannte Fläche minimalen Geschlechts, so daß $F' \cap U$ ein Kreisring ist. Sei ferner $F = F' \cap (S^3 - \mathring{U})$, P ein Punkt aus $\dot{U} \cap F$,*

$$\Sigma\colon F, P \subset S^3 - \mathring{U}, P$$

die Inklusion und schließlich t ein Meridian von K in $\mathcal{G} = \pi_1(S^3 - \mathring{U}, P)$ mit Repräsentanten auf $\dot{U}$. Dann ist die Fixgruppe von t Untergruppe von $\mathrm{Im}(\Sigma_*) \cap \mathcal{G}''$.

Beweis. In [7] berechnet NEUWIRTH die Kommutatoruntergruppe mit Hilfe der über der Knotenlinie verzweigten zyklischen Überlagerung X der S^3 und erhält in seinem Struktursatz

$$(\pi_1(S^3 - \mathring{U}, P))' = \cdots \underset{\mathcal{F}_{-1}}{\mathcal{G}_{-1} \ast} \underset{\mathcal{F}_0}{\mathcal{G}_0 \ast} \underset{\mathcal{F}_1}{\mathcal{G}_1 \ast} \cdots . \tag{4.1}$$

Genauer induziert die Abbildung

$$X \supset X - K \twoheadrightarrow S^3 - K \supset S^3 - \mathring{U}$$

den Isomorphismus von $\pi_1(X, Q)$, $Q \in K$, und der Kommutatorgruppe; indem man ihn geeignet wählt, hat man nach [*9*], S. 33 bzw. [*10*], S. 13

$$t^{-1}\mathcal{G}_j t = \mathcal{G}_{j+1}, \quad t^{-1}\mathcal{F}_j t = \mathcal{F}_{j+1} \tag{4.2}$$

und für die Inklusion Σ

$$\mathscr{F}_0=\Sigma_*(\pi_1(F,P)), \tag{4.3}$$

wobei Σ_* nach [7] monomorph ist.

Für jedes Element c, $c\in\mathscr{G}'$, gibt es mithin ganze Zahlen m, n, so daß

$$t^{-m}ct^m\in\mathscr{G}_1\underset{\mathscr{F}_1}{*}\cdots,\qquad t^{-n}ct^n\in\cdots\underset{\mathscr{F}_{-1}}{*}\mathscr{G}_0.$$

Jedes mit t kommutierende Element von $\mathscr{G}'$ muß deshalb im Schnitt dieser beiden Untergruppen von $\mathscr{G}'$ liegen; der aber ist $\mathscr{F}_0$, d.h. nach (4.3) gilt die Behauptung. ∎

Die Aussage des soeben bewiesenen Satzes gilt entsprechend für alle Elemente der Form $x^{-1}tx$ mit $x\in\mathscr{F}_0$ sowie th mit $th=ht$. Relevanter scheint

Korollar. *Sei t ein Meridian für $\mathscr{G}$ als Gruppe des Knotens $\boldsymbol{K}$. Ist $\boldsymbol{K}$ ein Produkt von n nichttrivialen Primknoten, so ist die Fixgruppe von t frei vom Range mindestens n.*

Beweis. Wir können die geometrischen Verhältnisse von Satz 5 voraussetzen. Nach Satz 5 ist die Fixgruppe $\mathscr{F}$ von t frei als Untergruppe einer freien Gruppe. Da $l\in\mathscr{F}$ und $l=1$ genau für den trivialen Knoten, gilt unsere Aussage für $p\leqq 1$. Sei sie für $p=n-1$ bewiesen. Ist dann $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}_1\#\boldsymbol{K}_2$, wobei $\boldsymbol{K}_1$ nichttrivial sowie prim und $\boldsymbol{K}_2$ Produkt von $n-1$ nichttrivialen Primknoten ist, so spalte man $\mathscr{G}$ gemäß (3.1) bis (3.2) auf. Nach dem im Anschluß an (3.4) Gesagten ist $\mathscr{F}$ das freie Produkt der Fixgruppen von t in $\mathscr{G}_1$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}_1$ und von t in $\mathscr{G}_2$ als Gruppe von $\boldsymbol{K}_2$. Damit folgt unsere Behauptung allgemein nach vollständiger Induktion. ∎

Für neuwirthsche Knoten läßt sich das Kor. verschärfen. Indem man die in [16] bewiesene Faserbarkeit des Außenraumes, den auf gelochte Flächen übertragbaren Satz 8 aus [6], 8., unseren Satz 4 sowie Generalita der Flächentheorie benutzt, erhält man

Satz 6. *Ist $\boldsymbol{K}$ im Korollar neuwirthsch, so ist die Fixgruppe von t genauer im Sinne von* (3.1), (3.5) *das Erzeugnis der Longituden der Primfaktoren von $\boldsymbol{K}$, also frei vom Range n.*

Sofern t eine nichtzyklische Fixgruppe $\mathscr{F}$ aufweist, existiert mit den Bezeichnungen von Satz 5 genauer eine mehrfach gelochte Kreisscheibe H, $\dot{F}\subset H\subset F$, und $\mathscr{F}$ ist das Bild von $\pi_1(H)$ bei dem von $H\subset F\subset S^3-\mathring{U}$ induzierten Monomorphismus. Für den Homöomorphismus $\Psi\colon F\times 0\to F\times 1$, vermöge dessen im Sinne von [16] $F\times[0,1]$ zu einem Repräsentanten des Knotenaußenraumes verklebt wird, hat man o.E.d.A. $\Psi\,|\,H=\mathrm{id}$.

Auf die Wiedergabe des in [10], 3. geführten Beweises wird aus den eingangs erläuterten Gründen verzichtet.

5. Gewisse abelsche Untergruppen

Jede abelsche Untergruppe $\mathscr{A}$, $\mathscr{A} \subset \mathscr{G}$, ist nach Theorem 2 aus [3] bzw. nach Theorem 5.42 aus [9] isomorph zur freien zyklischen Gruppe $\boldsymbol{Z}$ oder zu $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$. Wir zeigen

Satz 7. *Sei $\mathscr{G} = (t:) \ast) \mathscr{G}'$ eine Knotengruppe und $\mathscr{A}$ eine abelsche Untergruppe von $\mathscr{G}$. Ist $t \in \mathscr{A}$, so gibt es a, $a \in \mathscr{G}''$, so daß $\mathscr{A} = (t:) \times (a:)$. Für $a \neq 1$ ist $\mathscr{A}$ genau dann eine maximale abelsche Untergruppe von $\mathscr{G}$, wenn die Fixgruppe von t kein Element x enthält mit $a = x^n$ und $|n| > 1$. Ferner ist $\mathscr{A}$ stets in einer maximalen abelschen Untergruppe vom selben Typ enthalten.*

Beweis. Für $\mathscr{A} = (t:)$ ist hinsichtlich der ersten beiden Aussagen nichts zu zeigen. Sei also $g \in \mathscr{A}$, aber $g \notin (t:)$. Da nach (vi) aus **0**. $g = t^n z$ mit $z \in \mathscr{G}'$, muß $1 \neq z \in \mathscr{A}$ sein und damit nach Satz 4 schärfer $z \in \mathscr{G}''$. Wegen $tz = zt$ ist die von t, z erzeugte Untergruppe $\mathscr{Z}$ das direkte Produkt der Erzeugnisse von t und z, also $\mathscr{Z} = (t:) \times (z:)$, weil $\mathscr{G}$ nach [11], Kor. 31.9 keine Elemente endlicher Ordnung enthält. Wir betrachten zunächst $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Z} \subset \mathscr{A}$.

Wenn $\mathscr{Z}$ eine maximale abelsche Untergruppe von $\mathscr{G}$ und $z = x^n$ mit $tx = xt$ ist, dann muß $x \in \mathscr{Z} \cap \mathscr{G}''$ sein, mithin $x = z^m$ und schließlich $z = z^{mn}$, $z^{mn-1} = 1$. Aus dem erwähnten Korollar von [11] folgt $mn = 1$, also $|n| = 1$, was zu zeigen war. Besitze nun umgekehrt z in der Fixgruppe von t keine nichttriviale Darstellung als Potenz. Kommutiere ferner $t^k y$ mit t und z, also auch y mit t und z. Wie NEUWIRTH in [7] beim Beweis des dortigen Theorem 2 betrachten wir die von t, z, y erzeugte abelsche Untergruppe $\mathscr{Y}$ von $\mathscr{G}$. Da Rang $(\mathscr{Y}) \geqq 2$ ist, muß es b, $c \in \mathscr{G}''$ geben, so daß für geeignetes m, n

$$\mathscr{Y} = (t^m b:) \times (t^n c:).$$

Wegen der eindeutigen Darstellung der Elemente freier abelscher Gruppen durch deren Erzeugende hat man mit eindeutigen Exponenten

$$y = (t^m b)^{m'} (t^n c)^{n'}, \qquad z = (t^m b)^{m''} (t^n c)^{n''},$$

also nach den Rechenregeln für das semidirekte Produkt

$$y = t^{m\,m' + n\,n'} y', \qquad z = t^{m\,m'' + n\,n''} z'.$$

Aus der Eindeutigkeit der Elemente von $\mathscr{G}$ in der benutzen Form folgt $y = y'$, $z = z'$ und

$$m\,m' + n\,n' = m\,m'' + n\,n'' = 0.$$

Da $t \in \mathscr{Y}$ ist, muß $m^2 + n^2 \geqq 1$ sein; alle ganzzahligen Lösungen der homogenen linearen Gleichung mit Koeffizienten m, n sind mithin ganzzahlige Vielfache einer ganzzahligen Lösung (p, q). Für

$$x = (t^m b)^p (t^n c)^q$$

und geeignetes k, h haben wir $y = x^k$ sowie $z = x^h$, wobei $x \in \mathscr{Y}$ und damit $tx = xt$ ist. Nach Voraussetzung über z folgt $h^2 = 1$ und damit $y = z^{hk}$, also $y \in \mathscr{Z}$, d.h. $\mathscr{Z}$ ist maximal.

Wir müssen noch zeigen, daß $\mathscr{A}$ von derselben Form wie $\mathscr{Z}$ ist. Sei also $\mathscr{A} \not\subset \mathscr{Z}$. Dann existiert wegen $t \in \mathscr{A} \cap \mathscr{Z}$ ein Element y, $y \in \mathscr{A} \cap \mathscr{G}''$ und $y \notin \mathscr{Z}$, also nach obigem Schluß ein Element z_1, $z_1 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{G}''$, mit $y = z_1^k$ und $z = z_1^l$, d.h.

$$\mathscr{Z} \subset \mathscr{Z}_1 = (t:) \times (z_1:) \subset \mathscr{A}.$$

z_1 läßt sich so wählen, daß $\mathscr{Z}_1 = \mathscr{A}$ ist, denn andernfalls könnte man eine Folge z_i mit $z_i = z_{i+1}^{n_{i+1}}$ und $|n_{i+1}| > 1$ für alle i konstruieren; das Erzeugnis aller z_i wäre ersichtlich eine weder zu $\boldsymbol{Z}$ noch zu $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ isomorphe abelsche Untergruppe von $\mathscr{G}$.

Eine abelsche Untergruppe der zuletzt genannten Art erhielte man auch dann, wenn eine Untergruppe $(t:) \times (a:)$ von $\mathscr{G}$ nicht in einer maximalen abelschen Untergruppe desselben Typs enthalten wäre. ▮

Es folgt hier die Antwort auf die Frage D. in [9], XI, § 2 als

Korollar. *Die peripheren Untergruppen sind maximale abelsche Untergruppen.*

Beweis. Wir setzen die geometrischen Verhältnisse von Satz 5 voraus. Die zu t gehörende Longitude wird durch geeignet orientiertes $\dot{F}$ repräsentiert. Wie bereits beim Beweis des Korollars zu Satz 5 benutzt wurde, gilt $l = 1$ genau dann, wenn der Knoten trivial ist. In diesem Falle ist die periphere Untergruppe die ganze Knotengruppe. Sei also $l \neq 1$. Die peripheren Untergruppen sind die Konjugierten von $(t:) \times (l:)$. Wie beim Beweis von Satz 5 erwähnt wurde, ist Σ_* monomorph, also $\mathrm{Im}(\Sigma_*)$ eine freie Untergruppe von $\mathscr{G}'$. Wählt man für diese freie Erzeugende, die auf der gelochten Fläche F vom Geschlecht g durch geeignete Rückkehrschnitte repräsentiert werden, etwa

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2g},$$

so hat man bekanntlich

$$l = \prod_{i=1}^{g} (a_i a_{i+g} a_i^{-1} a_{i+g}^{-1}).$$

l ist offenbar in $\mathrm{Im}(\Sigma_*)$ keine nichttriviale Potenz, also nach Satz 5 erst recht nicht in der Fixgruppe von t, d.h. Satz 7 liefert unsere Behauptung. ▮

Literatur

[1] BING, R. H.: Locally tame sets are tame. Ann. of Math. **59**, 145–158 (1954).

[2] CROWELL, R. H., and R. H. FOX: Introduction to knot theorie. Boston: Ginn 1963.

[3] CONNER, P. E.: On the action of a finite group on $S^n \times S^n$. Ann. of Math. **66**, 586–588 (1957).

[4] DEHN, M.: Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. Math. Ann. **69**, 137–168 (1910).

[5] FOX, R. H.: On the complementary domain of a certain pair of inequivalent knots. Indagat. Math. **14**, 37–40 (1952).

[6] NIELSEN, J.: Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen II. Acta Math. **53**, 1–76 (1929).

[7] NEUWIRTH, L.: The algebraic determination of the genus of knots. Am. J. of Math. **82**, 791—798 (1960).
[8] — The algebraic determination of the topological type of the complement of a knot. Proc. A.M.S. **12**, 904—906 (1961).
[9] — Knot groups. Princeton: Princeton University Press 1965.
[10] NOGA, D.: Zur Auszeichnung peripherer Strukturen in Knotengruppen. Dissertation Kiel 1966.
[11] PAPAKYRIAKOPOULOS, C. D.: On DEHN's lemma and the asphericity of knots. Ann. of Math. **66**, 1—26 (1957).
[12] SEIFERT, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. **110**, 571—592 (1935).
[13] SCHUBERT, H.: Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Heidelberg 1949, math.-nat. Klasse, 3. Abh
[14] — Knoten und Vollringe. Acta Math. **90**, 132—286 (1953).
[15] — Topologie. Stuttgart: J. B. Teubner 1964.
[16] STALLINGS, J.: On fibring certain 3-manifolds. In: M. K. FORT (ed.): Topology of 3-manifolds and related topics. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1962.

2300 Kiel, Mathematisches Seminar der Universität, Ohlshausenstr. 40—60

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. 101, 142 (1967)

Endliche k-homogene Permutationsgruppen*

HELMUT WIELANDT

Eingegangen am 27. April 1967

Sei Ω eine Menge von n Elementen („Punkten") und Ω_k $(1 \leqq k \leqq n)$ die Menge ihrer k-punktigen Teilmengen, der $\binom{n}{k}$ „k-Ecke". Eine auf Ω wirkende Permutationsgruppe G heißt k-homogen, wenn G auf Ω_k transitiv wirkt. k-Homogenität ist gleichbedeutend mit $(n-k)$-Homogenität und folgt aus k-facher Transitivität. In der umgekehrten Richtung gilt: Ist G k-homogen und $5 \leqq k \leqq n/2$, so wirkt G auf Ω k-fach transitiv[1]. Beim Beweis liegt die Hauptschwierigkeit in der Einleitung des Induktionsschlusses: Ist G k-homogen und $2 \leqq k \leqq n/2$, so ist G auch $(k-1)$-homogen. Dies (und mehr) gewinnen LIVINGSTONE und WAGNER aus der Theorie der Charaktere symmetrischer Gruppen. Hier wird es elementar in etwas schärferer Form bewiesen.

Satz. *Sei G k-homogen und $k \geqq 2$; für jede Primzahlpotenz p^α, die in k aufgeht, sei $k+p^\alpha-1 \leqq n$. Dann ist G $(k-1)$-homogen.*

Hiernach ist beispielsweise jede 2-homogene Gruppe des Grades $n=8$, da sie 6-homogen ist, auch 5-homogen und damit 3-homogen.

Beweis. Wir wählen eine Bahn Ω'_{k-1} von G auf Ω_{k-1}. Da G k-homogen ist, enthalten alle k-Ecke dieselbe Anzahl, etwa k', von $(k-1)$-Ecken aus Ω'_{k-1}. Es ist $1 \leqq k' \leqq k$, und es genügt zu zeigen, daß $k'=k$ ist.

Wir wählen eine Zahl s, $k \leqq s \leqq n$, und dazu ein s-Eck Σ. Wir betrachten die Paare (Γ, Δ), wobei $\Gamma \in \Omega'_{k-1}$ und $\Delta \in \Omega_k$ der Bedingung $\Gamma \subset \Delta \subseteq \Sigma$ unterworfen werden; ihre Anzahl ist $\binom{s}{k} \cdot k'$. Jedes Γ ist in genau $s-k+1$ k-Ecken Δ von Σ enthalten, also ist

$$s-k+1 \Big| \binom{s}{k} \cdot k' \qquad (s=k, k+1, \ldots, n).$$

Hieraus folgt $k \mid k'$. Sei nämlich p eine Primzahl, $\alpha \geqq 1$ und $p^\alpha \mid k$. Dann können wir $s=k+p^\alpha-1$ wählen und erhalten

$$p^\alpha \Big| \binom{p^\alpha r-1}{p^\alpha-1} \cdot k' \qquad \left(r=\frac{k}{p^\alpha}+1\right).$$

Der Binomialkoeffizient ist nicht durch p teilbar[2], daher ist $p^\alpha \mid k'$. Damit haben wir $k \mid k'$. Wegen $1 \leqq k' \leqq k$ ist $k=k'$.

* Gefördert durch National Science Foundation, Grant GP-3993.

[1] LIVINGSTONE, D., and A. WAGNER: Transitivity of finite permutation groups on unordered sets. Math. Zeitschr. **90**, 393–403 (1965).

[2] WIELANDT, H.: Ein Beweis für die Existenz der Sylowgruppen. Arch. Math. **10**, 401–402 (1959).

74 Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

J. WINKLER
Math. Zeitschr. 101, 143–151 (1967)

Zur Verteilung der a-Stellen spezieller ganzer Funktionen

JÖRG WINKLER

Eingegangen am 20. Juni 1966

Einleitung

Mittels der sphärischen Derivierten meromorpher Funktionen gab LEHTO in [2] ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz von Ausfüllungskreisen. Dabei zeigte LEHTO unter anderem, daß für ganze Funktionen

$$\text{(I)} \qquad w(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-z/a_\nu) \qquad \text{mit } |a_{\nu+1}/a_\nu|\geqq q>1$$

die Kreise $|z-a_\nu|\leqq\varepsilon|a_\nu|^{-q}$ für jedes reelle $\varepsilon>0$ und jede natürliche Zahl q Ausfüllungskreise sind: $w(z)$ erfüllt den Satz von PICARD in jeder unendlichen Teilmenge dieser Kreisscheiben. Die Funktionen (I) betrachtete LEHTO in [2], weil ihre sphärische Derivierte an den Stellen a_ν mit ν stark anwächst, und sich damit kleine Ausfüllungskreise ergeben, während ihre charakteristische Funktion ein schwaches Wachstum aufweist; die Ordnung dieser Funktionen ergibt sich als Null.

Nachfolgend wird die Funktionsklasse (I) erweitert, und wird für diese erweiterte Funktionsklasse das Ergebnis von LEHTO in gewisser Hinsicht verschärft. Es wird gezeigt, daß die ganzen Funktionen

$$\text{(II)} \qquad w(z)=\prod_{\mu=1}^{k}\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-z/a_{\nu,\mu}) \qquad \text{mit } |a_{\nu+1,\mu}/a_{\nu,\mu}|\geqq(1+1/\nu)^{2+\delta}$$

($k<\infty$, $\delta>0$) in der Gesamtheit der Kreisscheiben $|z-a_{\nu,\mu}|\leqq\varepsilon|a_{\nu,\mu}|^{-q}$ für jedes reelle $\varepsilon>0$ und jede natürliche Zahl q alle Werte a mit $|a|<\infty$ unendlich oft annehmen. Dies entspricht dem Ergebnis von LEHTO. Darüber hinausgehend wird gezeigt, daß die betrachteten Funktionen außerhalb dieser Kreisscheiben jeden Wert höchstens endlich oft annehmen. Außerdem ergibt sich, daß die Anzahlfunktionen der a-Stellen von $w(z)$ für jedes a mit $|a|<\infty$ in strengem Sinn ein gleiches Wachstum haben. Es wird die Existenz einer Folge reeller Zahlen $\rho_\nu>0$ ($\nu=1, 2, 3, \ldots$) mit $\lim_\nu \rho_\nu=\infty$ nachgewiesen, so daß für jedes a mit $|a|<\infty$

$$\sup_\nu\{|n(\rho_\nu, a)-n(\rho_\nu, 0)|\}<\infty$$

gilt. ($n(\rho, a)$ bezeichnet die ihrer Vielfachheit nach gezählten a-Stellen von $w(z)$ in $|z|\leqq\rho$).

Es zeigt sich auch, daß für die Funktionen (II) auf überabzählbar vielen Wegen

$$\lim_{|z|\to\infty} |w(z)| = \infty$$

gilt, und $w(z)$ keinen endlichen asymptotischen Wert hat. Letzteres folgt für die betrachteten Funktionen auch aus einem Satz von WIMAN, weil die Ordnung ρ dieser Funktionen der Bedingung $0 \leqq \rho < \frac{1}{2}$ genügt. Hier wird auch deutlich, daß sich für die Funktionen (II) nicht grundsätzlich ein so schwaches Wachstum der charakteristischen Funktion ergibt wie für die Funktionen (I). Dies führt etwas von dem Gesichtspunkt weg, unter dem LEHTO die Funktionen (I) in [2] betrachtete (kleine Ausfüllungskreise bei schwach wachsender Charakteristik), wird jedoch von einem anderen Blickpunkt her interessant. Zur Erläuterung sei hier ohne Beweis angeführt: Es läßt sich zeigen, daß ganze Funktionen der Gestalt (II) mit

$$\left|\frac{a_{\nu+1,\mu}}{a_{\nu,\mu}}\right| \leqq \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^2$$

die Ordnung $\rho \geqq \frac{1}{2}$ haben und die nachfolgend für die Funktionen (II) nachgewiesenen Eigenschaften nicht besitzen.

Die Beweise werden auf der Grundlage der Betrachtungen in [3] durchgeführt. In **1** werden zwei sich aus [3] ergebende Hilfssätze aufgeführt. Zwei weitere Hilfssätze werden in **2** und **3** bereitgestellt. Aus diesen vier Hilfssätzen folgt dann in **4** das angekündigte Ergebnis.

1. In [3] wurde die folgende Voraussetzung V zugrundegelegt: Sei G ein Gebiet mit rektifizierbarem Rand, z_0 ein Punkt aus G und $w(z)$ eine in $G^- \setminus \{z_0\}$ meromorphe Funktion mit unendlich vielen Polstellen b_ν. Sei ferner $w(z)$ in $G^- \setminus \{z_0\}$ darstellbar als

$$w(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} A_{\nu,\mu} (z-b_\nu)^{-\mu} \right) w_\nu(z) + w_0(z)$$

mit in G^- regulären, gleichmäßig beschränkten Funktionen $w_\kappa(z)$, gelte

$$\operatorname{Sup}\{m_\nu \mid \nu = 1, 2, 3, \ldots\} < \infty,$$

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \left(\sum_{\mu=1}^{m_\nu} |A_{\nu,\mu}|^{\frac{1}{\mu+2}} \right)^{\frac{1}{\nu}} = q < 1,$$

und gelte für ein r mit $q < r < 1$ und ein δ mit $0 < \delta < 1$

$$\operatorname{Sup}\{r^{\delta^\nu} \mid z_0 - b_\nu|^{-1} \mid \nu = 1, 2, 3, \ldots\} < \infty.$$

Für die dieser Voraussetzung genügenden Funktionen wurde in [3] der Satz A bewiesen: *Genügt $w(z)$ der Voraussetzung V, so gilt:*

1. $w(z)$ besitzt an der Stelle z_0 genau einen asymptotischen Wert a_0, der auf überabzählbar vielen Wegen s_α mit $\bigcap s_\alpha = \{z_0\}$ erreicht wird.

2. $w(z)$ nimmt für jedes natürliche p jeden Wert $a \neq a_0$ in G außerhalb der Kreisscheiben $S_{\nu,p} = \{z \mid |z-b_\nu| < 2^{-p} r^\nu\}$ höchstens endlich oft an.

3. Ist $n(\rho, a)$ die Anzahl der ihrer Vielfachheit nach gezählten a-Stellen von $w(z)$ in $G\setminus\{z \mid |z-z_0| \leqq \rho\}$, so existiert eine Folge reeller Zahlen $\rho_\nu > 0$ mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho_\nu = 0, \qquad \rho_{\nu+1} \geqq \frac{\rho_\nu}{4}$$

und der Eigenschaft: Für alle $a \neq a_0$ gilt $\operatorname{Sup}\{|n(\rho_\nu, a) - n(\rho_\nu, \infty)|\} < \infty$.

Im folgenden wird die Voraussetzung V ersetzt.

Sei G ein Gebiet mit rektifizierbarem Rand, z_0 ein Punkt aus G, r eine reelle Zahl mit $0<r<1$, und bezeichne b_ν ($\nu=1, 2, 3, \ldots$) eine Folge von Punkten aus $G\setminus\{z_0\}$ mit

$$\lim_{\nu\to\infty} b_\nu = z_0 .$$

Gelte für ein reelles δ mit $0<\delta<1$

$$\operatorname{Sup}\{r^{\delta^\nu} |z_0 - b_\nu|^{-1} \mid \nu = 1, 2, 3, \ldots\} < \infty ,$$

und sei für jede natürliche Zahl p

$$G_p = G \setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \{z \mid |z - b_\nu| < r^\nu 2^{-p}\} .$$

Eine in $G^-\setminus\{z_0\}$ meromorphe Funktion $w(z)$ mit den Polstellen b_ν hat dann (bezüglich G, z_0, r und b_ν) die Eigenschaft V^*, wenn $w(z)$ für jedes p in G_p^- differenzierbar und gleichmäßig beschränkt ist, und wenn außerdem die in G_p^- gebildete Ableitung von $w(z)$ in G_p^- gleichmäßig stetig und gleichmäßig beschränkt ist.

Mit dieser Bezeichnung können dem Beweis des Satzes A in [3] unmittelbar die folgenden beiden Hilfssätze entnommen werden:

Hilfssatz 1. *Sei G ein Gebiet mit rektifizierbarem Rand, z_0 ein Punkt aus G und $w(z)$ eine in $G\setminus\{z_0\}$ meromorphe Funktion. Erfüllt dann $w(z)$ bezüglich G, z_0, r und den Polstellen b_ν die Voraussetzung V, so besitzt $w(z)$ bezüglich G, z_0, r und b_ν die Eigenschaft V^*.*

Hilfssatz 2. *Hat die meromorphe Funktion $w(z)$ bezüglich G, z_0, r und b_ν die Eigenschaft V^*, so erfüllt $g(z)\,w(z)$ die Behauptungen 1, 2 und 3 des Satzes A für jede in G^- regulär analytische Funktion $g(z)$.*

2. Bereitgestellt wird weiterhin der

Hilfssatz 3. *Seien k meromorphe Funktionen $w_i(z)$ ($i=1, 2, 3, \ldots, k$) gegeben, die bezüglich G, z_0, r_i und $b_{\nu,i}$ die Eigenschaft V^* haben. Dann können die Folgen der $b_{\nu,i}$ zu einer Folge b_n derart angeordnet werden, daß mit*

$$r = \left(\operatorname{Max}\{r_i \mid i = 1, 2, 3, \ldots, k\}\right)^{1/k}$$

$$r^n \leqq r_i^{\nu-1} \quad \text{für } b_n = b_{\nu,i} \tag{1}$$

gilt, und sowohl

$$w(z)=\sum_{i=1}^{k} w_i(z) \quad \textit{als auch} \quad w(z)=\prod_{i=1}^{k} w_i(z)$$

bezüglich G, z_0, r *und* b_n *die Eigenschaft* V^* *hat.*

Zum Beweis des Hilfssatzes 3 wird gezeigt: Die Paare (ν, i) können vermittels einer Abbildung $h(\nu, i)$ so in die Menge der natürlichen Zahlen abgebildet werden, daß

$$r_i^{\nu+1} \leqq r^n \leqq r_i^{\nu-1} \qquad \text{für } n=h(\nu, i) \tag{2}$$

gilt.

Ist dies bewiesen, so ergibt sich der Hilfssatz 3 sofort. Mit

$$b_n=\begin{cases} b_{\nu,i} & \text{für } n=h(\nu,i) \\ b_{\mu,1} & \text{mit } \mu=\operatorname{Max}\{\nu \mid n \geqq h(\nu,1) \vee \nu=1\} \text{ sonst} \end{cases}$$

gilt für jedes natürliche p mit von p unabhängigem, natürlichem l

$$G_p=G\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\{z \mid |z-b_n|<r^n 2^{-p}\} \subset \bigcap_{i=1}^{k}\left(G\setminus \bigcup_{\nu=1}^{\infty}\{z \mid |z-b_{\nu,i}|<r_i^{\nu} 2^{-p-l}\}\right).$$

Deshalb sind die Funktionen $w_i(z)$ für jedes p auch in G_p^- differenzierbar und gleichmäßig beschränkt, und sind außerdem die in G_p^- gebildeten Ableitungen der Funktionen $w_i(z)$ in G_p^- gleichmäßig stetig und beschränkt. Das gilt damit auch für $w(z)$. Wegen (2) und

$$\operatorname{Sup}\{r_i^{\delta_i \nu} \mid z_0-b_{\nu,i}|^{-1} \mid \nu=1,2,3,\ldots; i=1,2,3,\ldots,k\}<\infty$$

folgt auch

$$\operatorname{Sup}\{r^{\delta n} \mid z_0-b_n|^{-1} \mid n=1,2,3,\ldots\}<\infty$$

mit $0<\delta<1$. Also hat $w(z)$ bezüglich G, z_0, r und b_n die Eigenschaft V^*. Mit (2) aber gilt auch (1). Die Existenz der Abbildung $h(\nu, i)$ mit (2) ergibt sich infolge der Konstruktion von r, weil zu jedem natürlichen j und jedem $i=1,2,3,\ldots,k$ höchstens ein ν mit

$$r^{k(j+1)} \leqq r_i^{\nu} \leqq r^{kj} \quad .$$

existiert. Also gilt der Hilfssatz 3.

3. Für den Beweis des angekündigten Ergebnisses ist jetzt noch von zentraler Bedeutung der

Hilfssatz 4. *Sei*

$$w(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-z/a_\nu)$$

eine ganze Funktion und gelte für jedes $\nu=1,2,3,\ldots$

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right| \geqq \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{2+\varepsilon} \qquad \textit{mit } \varepsilon>0. \tag{3}$$

Ist dann G ein den Punkt $z_0=0$ enthaltendes Gebiet mit rektifizierbarem Rand, so existiert ein reelles r derart, daß für jede natürliche Zahl q

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,|r^\nu a_\nu^q|=0 \tag{4}$$

gilt, und $1/w(1/z)$ bezüglich G, $z_0=0$, r und $b_\nu=1/a_\nu$ die Eigenschaft V^* hat.

Zum Beweis des Hilfssatzes 4 wird gezeigt, daß $1/w(1/z)$ der Voraussetzung V genügt.

Zunächst wird gezeigt, daß

$$\frac{1}{w(z)}=w_1(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{(1-z/a_\nu)} \tag{5}$$

mit

$$A_\nu=\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{\infty}\left(1-\frac{a_\nu}{a_\mu}\right)^{-1} \tag{6}$$

und

$$|A_\nu|\leqq 2\prod_{\mu=1}^{[\nu/2]}\left|\frac{a_\mu}{a_\nu}\right|^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\leqq c_0\,2^{-\frac{\varepsilon}{2}\nu} \tag{7}$$

gilt $(0<c_0<\infty)$.

Aus (6) folgt wegen (3)

$$|A_\nu|^{-1}\geqq\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{\infty}\left|1-\left|\frac{a_\nu}{a_\mu}\right|\right|\geqq\prod_{\mu=1}^{[\nu/2]}\left|\frac{a_\nu}{a_\mu}\right|^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{\infty}\left|1-\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^2\right|. \tag{8}$$

Aus (3) ergibt sich mit von ν unabhängigem $c>0$

$$\prod_{\mu=1}^{[\nu/2]}\left|\frac{a_\nu}{a_\mu}\right|^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\geqq\prod_{\mu=1}^{[\nu/2]}\left|\frac{\nu}{\mu}\right|^{\varepsilon}\geqq c\,2^{\frac{\varepsilon}{2}\nu}. \tag{9}$$

Ist für $m=\nu+1,\ \nu+2,\ \nu+3,\ \ldots$

$$\alpha_\nu(m)=\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{m}|1-(\nu/\mu)^2|,$$

so gilt

$$\alpha_\nu(m)=\left(\frac{\nu}{m!}\right)^2\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{m}|\mu^2-\nu^2|=\left(\frac{\nu}{m!}\right)^2\prod_{\mu=1}^{\nu-1}(\nu-\mu)\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{m}(\mu+\nu)\prod_{\mu=\nu+1}^{m}(\mu-\nu)$$

$$=\left(\frac{\nu}{m!}\right)^2\frac{\nu!}{\nu}\,\frac{(m+\nu)!}{\nu!\,2\nu}(m-\nu)!=\frac{(m+\nu)!\,(m-\nu)!}{2(m!)^2}.$$

Mittels der Stirlingschen Formel ergibt sich damit

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_\nu(m)=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\left\{\left(\frac{m+\nu}{m-\nu}\right)^\nu\frac{(m^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{m}\left(1+\frac{\nu}{m}\right)^m\left(1-\frac{\nu}{m}\right)^m\right\}=\frac{1}{2}.$$

In Verbindung mit (8) und (9) folgt hieraus (7). Also ist

$$w_1(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu}{(1-z/a_\nu)}$$

eine in der komplexen Ebene meromorphe Funktion.

Um $1/w(z)=w_1(z)$ und damit (5) zu beweisen, wird für $\nu=1, 2, 3, \ldots$ eine Abschätzung für

$$\left|w_1\left(\frac{|a_\nu|+|a_{\nu+1}|}{2}e^{i\varphi}\right)\right| \qquad (\varphi \text{ reell})$$

ermittelt. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|w_1\left(\frac{|a_\nu|+|a_{\nu+1}|}{2}e^{i\varphi}\right)\right| &\leqq \sum_{\mu=1}^{\infty}|A_\mu|\left|1-\frac{|a_\nu|+|a_{\nu+1}|}{2a_\mu}\right|^{-1}\\ &\leqq 2\sum_{\mu=1}^{\nu}|A_\mu|\left(\left|\frac{a_{\mu+1}}{a_\mu}\right|-1\right)^{-1}+2\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}|A_\mu|\left(1-\left|\frac{a_{\mu-1}}{a_\mu}\right|\right)^{-1}\\ &\leqq 2\sum_{\mu=1}^{\infty}|A_\mu|\,\mu.\end{aligned}$$

Wegen (7) folgt damit für alle ν.

$$\left|w_1\left(\frac{|a_\nu|+|a_{\nu+1}|}{2}e^{i\varphi}\right)\right|\leqq c_1<\infty \tag{10}$$

mit von ν unabhängigem c_1.

Entsprechend ergibt sich eine Abschätzung für $|w((|a_\nu|+|a_{\nu+1}|)e^{i\varphi}/2)|^{-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\left|w\left(\frac{|a_\nu|+|a_{\nu+1}|}{2}e^{i\varphi}\right)\right| &= \prod_{\mu=1}^{\infty}\left|1-\frac{|a_\nu|+|a_{\nu+1}|}{2|a_\mu|}\right|\\ &\geqq \frac{1}{4}\left|\left(1-\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|\right)\left(1-\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|\right)\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{\infty}\left|1-\frac{a_\nu^*}{a_\mu^*}\right|\end{aligned} \tag{11}$$

mit

$$a_\mu^*=\begin{cases}2^{-2-\varepsilon}|a_1| & \text{für } \mu=1\\ |a_{\mu-1}| & \text{für } 1<\mu\leqq\nu\\ \frac{1}{2}(|a_\nu|+|a_{\nu+1}|) & \text{für } \mu=\nu+1\\ |a_\mu| & \text{für } \mu>\nu+1.\end{cases}$$

Wegen (3) folgt nun auch

$$\left|\frac{a_{\nu+1}^*}{a_\nu^*}\right|\geqq\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{2+\varepsilon}.$$

Analog zu (7) ergibt sich daher auch mit von ν unabhängigem $c_2>0$

$$\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq\nu}}^{\infty}\left|1-\frac{a_\nu^*}{a_\mu^*}\right|\geqq 2^{\frac{\varepsilon}{2}\nu}. \tag{12}$$

Ferner gilt wegen (3)

$$\left|1-\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|\right| \geqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^2-1 \geqq \frac{1}{\nu}$$

und

$$\left|1-\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|\right| \geqq 1-\left(\frac{\nu}{\nu+1}\right)^2 \geqq \frac{1}{\nu+1}.$$

Damit ergibt sich aus (11) und (12) für jedes ν mit von ν unabhängigem $c_3<\infty$

$$\left|w\left(\frac{|a_\nu|+|a_{\nu+1}|}{2}e^{i\varphi}\right)\right|^{-1} \leqq c_3. \tag{13}$$

Da nun $w_1(z)$ der Hauptteil von $1/w(z)$ ist, so ergibt sich wie beim Satz von LIOUVILLE (5) aus (10) und (13). Mit $b_\nu=1/a_\nu$ gilt also

$$w^*(z)=\frac{1}{w(1/z)}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_\nu z}{z-b_\nu}.$$

Um zu zeigen, daß $w^*(z)$ die Voraussetzung V erfüllt, muß (7) noch genauer ausgewertet werden. Wegen (3) existiert zu jeder natürlichen Zahl m ein $\nu_0(m)\geqq m$, so daß

$$\prod_{\mu=1}^{m}|a_\mu| \leqq |a_\nu| \qquad \text{für } \nu \geqq \nu_0(m)$$

gilt. Aus (7) folgt damit für $\nu\geqq\nu_0(m)$

$$\rho_\nu=2(|a_\nu|^{-m+1})^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\prod_{\mu=m+1}^{[\nu/2]}\left|\frac{a_\mu}{a_\nu}\right|^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}} \geqq |A_\nu|. \tag{14}$$

Für $\nu=1, 2, 3, \ldots$ ergibt sich

$$\rho_{\nu+1} \leqq \left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}\right)^{\left[\frac{\nu}{2}\right]-2}\rho_\nu \leqq \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{-\varepsilon\left(\frac{\nu}{2}-2\right)}\rho_\nu.$$

Für alle hinreichend großen ν gilt daher

$$\rho_{\nu+1} \leqq 2^{-\frac{\varepsilon}{2}}\rho_\nu.$$

Also existiert eine Folge natürlicher Zahlen $n_\nu(\nu=1, 2, 3, \ldots)$ mit $n_\nu<n_{\nu+1}$, so daß für alle hinreichend großen ν

$$2^{-\frac{\varepsilon}{2}(n_\nu+1)} \leqq \rho_\nu \leqq 2^{-\frac{\varepsilon}{2}n_\nu} < 2^{-\frac{\varepsilon}{3}n_\nu} \tag{15}$$

gilt. Mit (3), (14) und (15) ergibt sich auch

$$2^{-\frac{\varepsilon}{2}(n_\nu+1)} \leqq 2(|a_\nu|^{-m+1})^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}}$$

und damit

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,(|a_\nu|^{\frac{m-1}{2n_\nu}})^{\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}} \leqq 2^{\frac{\varepsilon}{4}}.$$

Wird m hinreichend groß gewählt, so ergibt sich für jede natürliche Zahl q

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\,|a_\nu|^{\frac{q}{n_\nu}} \leqq 2^{\frac{\varepsilon}{4}} < 2^{\frac{\varepsilon}{10}}. \tag{16}$$

Setzt man

$$A_n = \begin{cases} A_n & \text{für } n \in \{n_\nu \mid \nu = 1, 2, 3, \ldots\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$b_n = \begin{cases} b_\nu & \text{für } n \in \{n_\nu \mid \nu = 1, 2, 3, \ldots\} \\ b_\kappa & \text{mit } \kappa = \operatorname{Max}\{\nu \mid n_\nu < n \vee \nu = 1\} \text{ sonst,} \end{cases}$$

so gilt

$$w^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{z - b_n} z$$

und erfüllt $w^*(z)$ wegen (14), (15) und (16) die Voraussetzung V mit $r = 2^{-(\varepsilon/9)}$ und $\delta = \frac{9}{10}$. Mittels des Hilfssatzes 1 folgt damit aber auch, daß $w^*(z)$ die Eigenschaft V^* hat. Insbesondere folgt aus (16) für jedes ganze $q > 0$ auch (4). Damit aber gilt der Hilfssatz 4.

4. Mit den Hilfssätzen 2, 3 und 4 ergibt sich nun leicht der

Satz 1. *Sei $w(z)$ eine ganze Funktion, sei $w(z)$ darstellbar als*

$$w(z) = z^\lambda \prod_{\mu=1}^{k} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_{\mu,\nu}}\right)$$

mit $0 \leqq \lambda < \infty$ und $k < \infty$, und gelte für $\mu = 1, 2, 3, \ldots, k$ mit einem $\varepsilon_\mu > 0$

$$\left|\frac{a_{\mu,\nu+1}}{a_{\mu,\nu}}\right| \geqq \left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)^{2+\varepsilon_\mu} \qquad \text{für } \nu = 1, 2, 3, \ldots.$$

Dann gilt:

1. $w(z)$ besitzt an der Stelle $z_0 = \infty$ genau den asymptotischen Wert $a_0 = \infty$, gegen den $w(z)$ auf überabzählbar vielen, im Endlichen disjunkten Wegen strebt.

2. $w(z)$ nimmt für beliebige natürliche Zahlen p und q jeden Wert a mit $|a| < \infty$ außerhalb der Gesamtheit der Kreisscheiben

$$S_{\mu,\nu} = \{z \mid |z - a_{\mu,\nu}| \leqq 2^{-p} |a_{\mu,\nu}|^{-q}\}$$

(d.h. außerhalb der Punktmenge $\bigcup_\mu \bigcup_\nu S_{\mu,\nu}$) höchstens endlich oft an.

3. Bezeichnet $n(\rho, a)$ die Anzahl der ihrer Vielfachheit nach gezählten a-Stellen von $w(z)$ in $|z| < \rho$, so existiert eine Folge reeller Zahlen ρ_ν mit

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho_\nu = \infty, \qquad \rho_{\nu+1} \leqq 4\rho_\nu$$

und der Eigenschaft: Für alle a mit $|a| < \infty$ gilt

$$\operatorname{Sup}\{|n(\rho_\nu, a) - n(\rho_\nu, 0)|\} < \infty.$$

Insbesondere gilt für alle a mit $|a|<\infty$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{n(\rho_\nu, a)}{n(\rho_\nu, 0)}=1.$$

Der Beweis dieses Satzes ist mit den Hilfssätzen 2, 3, und 4 schon erbracht: Ist G irgendein den Punkt $z_0=0$ enthaltendes Gebiet mit rektifizierbarem Rand, so können aufgrund der Hilfssätze 4 und 3 die $a_{\mu,\nu}$ so zu einer Folge a_n angeordnet werden, daß

$$w^*(z)=\prod_{\mu=1}^{k}\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{z\,a_{\mu,\nu}}\right)^{-1}$$

bezüglich G, $z_0=0$, r und $1/a_n$ die Eigenschaft V^* hat. Aus (4) und (1) folgt ferner für jede natürliche Zahl q

$$r^n=o(a_n^{-q}). \tag{17}$$

Wird nun auf $1/w(1/z)=z^\lambda w^*(z)$ der Hilfssatz 2 angewendet und anschließend zu $w(z)$ übergegangen, so ergibt sich wegen (17) unmittelbar der Satz 1, da $w(z)$ im Endlichen keine Pole hat. (Da $w^*(z)$ keine Nullstellen hat, folgt aus dem Hilfssatz 2 auch, daß für den asymptotischen Wert a^* von $1/w(1/z)$ gelten muß $a^*=0$.)

Literatur

[1] Gavrilov, V. I.: The behavior of a holomorphic function near an essential singularity. Soviet Math. Dokl. **6**, 693–696 (1965).

[2] Lehto, O.: The spherical derivative of meromorphic functions in the neighbourhood of an isolated singularity. Comment. Math. Helv. **33**, 196–205 (1959).

[3] Winkler, J.: Bemerkungen zur Werteverteilung spezieller meromorpher Funktionen an singulären Stellen. Math. Z. **93**, 48–59 (1966).

1 Berlin 39, Glienicker Str. 100, Hahn-Meitner-Institut

McAllister, B. L., and L. F. McAuley
Math. Zeitschr. 101, 152–164 (1967)

A New "Cyclic" Element Theory*

B. L. McAllister and L. F. McAuley

Received October 11, 1965

1. Introduction

The cyclic element theory was originated by Whyburn in order to study the structure of Peano continua. Because of its great utility in other disciplines (e.g. theory of graphs, theory of area) it has often been the subject of refinements and generalizations. For a fairly detailed history of the subject, see [3].

In Whyburn's original theory, the crucial concepts proved to be those of *cut point* and *cyclic connectedness*. (Point p is a *cut point* of connected set X if $X-p$ is disconnected. A set X is *cyclicly connected* iff every two points of x lie on a simple closed curve in X.) According to the Whyburn cyclic connectivity theorem, a Peano continuum is cyclicly connected if and only if it has no cut point. Whyburn's *true cyclic elements* were first defined for a Peano continuum X as subsets of X maximal with respect to being cyclicly connected Peano continua. They are thus also maximal with respect to being Peano continua without cut points. [The cut points and end points of X are also counted as (degenerate) cyclic elements.]

Both *cut point* and *cyclic connectedness* were localized, the former by Whyburn [7], the latter by Zippin [8]. In this paper we introduce a theory roughly parallel to the cyclic element theory, but based on local cut points and local cyclic connectedness. (The idea was first noted in [4].) Our *subelements* may be used to "refine" Whyburn's cyclic elements. Several other refinements are contained as special cases.

Since most of our theorems require a space that is connected, locally connected and T_1, we adopt the convention throughout the paper that X will denote such a space, subject to further restriction in particular theorems as required.

2. Local Cut Points and Local Non-Cut Points

A point p of X will be called a *local cut point* of X provided that p is a cut point of some connected neighborhood of itself. Otherwise p will be called a *local non-cut point* of X. The following theorem shows that these names are

* Part of the first author's work on this paper was done at an N.S.F. Research Participation for College Teachers Program at the University of Oklahoma, Summer, 1963, and part was supported by N.S.F. Grant GE-2687.

Much of this paper was used as part of the first author's Ph. D. thesis at the University of Wisconsin.

justifiable in the terminology introduced by JONGMANS and HEUCHENNE in their general theory of local properties [*1*].

2.1. Theorem. *Point p is a local cut point of X if and only if every neighborhood of p contains a connected open neighborhood R of p such that $R-p$ is disconnected. Contrariwise, p is a local non-cut point of X if and only if every neighborhood of p contains a connected open neighborhood R of p such that $R-p$ is connected.*

Proof. Both necessity and sufficiency of the condition that p be a local cut point are trivial because of our blanket assumption that X is T_1 and locally connected. Now let p be a local non-cut point of X. Then some neighborhood S of p is such that for each subset R of S, if R is a connected open neighborhood of p, then $R-p$ is connected. Then if T be any neighborhood of p, $T\cap S$ contains a connected open neighborhood R of p such that $R-p$ is connected. Since $R\subset T$ also, we have established the necessity of the second condition. For sufficiency, suppose p to be a point of X such that every neighborhood of p contains a connected neighborhood R of p such that $R-p$ is connected, and suppose that p is not a local non-cut point of X. Then p is a local cut point of X. Let S be a connected open neighborhood of p such that $S-p$ is not connected. Then $S-p=A\cup B$ for some two separated sets A and B. But S has, by hypothesis, a subset R that is a connected open neighborhood of p such that $R-p$ is connected. Yet, since X is T_1 and R is open, $R-p=(R\cap A)\cup(R\cap B)$ gives a separation of $R-p$. This contradiction shows that p cannot fail to be a local non-cut point of X.

2.2. We denote the set of all local cut points of X by L and the interior of L by L^0, the set of all local noncut points of X by M and the interior of M by M^0, and the set $X-(L^0\cup M^0)$ by N. The sets L^0, M^0, and N are disjoint and cover X. Also L and M themselves are disjoint and cover X.

3. Local Cyclic Connectivity and Non-Connectivity

A subset S of X will be said to be *locally cyclicly connected* at a point p of S provided that every neighborhood of p contains a neighborhood U of p such that $U\cap S$ is cyclicly connected. If S is locally cyclicly connected at every point, we say briefly that S is *locally cyclicly connected.* Since simple closed curves only exist in fairly special spaces, we shall postpone the moment of reduced generality by using the following substitute notion: A subset S of X will be said to be *locally free of cut points* (lfcp) at a point p of S provided that every neighborhood of p contains a neighborhood U of p such that $U\cap S$ is connected and has no cut point. If S is lfcp at every point of S, we say briefly that S is *lfcp.* We say that S is *locally free of non-cut points* (lfncp) at a point p of S provided that each neighborhood of p contains a neighborhood U of p such that $U\cap S$ is connected and every point of $U\cap S$ is a cut point of $U\cap S$. If S is lfncp at every point of S, we say briefly that S is *lfncp.*

3.1. Theorem. *The set of all points of X at which X is locally free of cut points is exactly M^0, the interior of the set M of all local non-cut points of X.*

Proof. That every point of X at which X is lfcp belongs to M^0 is obvious. Now let $p \in M^0$, and suppose that X is not lfcp at p. Some open neighborhood R of p is such that every open subset of R that is a neighborhood of p contains a cut point of itself. Then $M^0 \cap R$ has a cut point q, and $(M^0 \cap R) - q = A \cup B$ where A and B are separated. Since X is T_1, every connected open subset S of $M^0 \cap R$ that contains q meets A and B, so that $S - q$ is separated. But, by 2.1, this violates the condition that $q \in M$.

3.2. It might be supposed that the set F of all the points of X at which X is locally free of non-cut points is exactly L^0, the interior of the set of all local cut points of X, and, indeed, it is obvious that $F \subset L^0$. That L^0 need not be contained in F is shown by the following example:

Let Q_0 be the interval $[-1, 1]$ of the x-axis in the xy plane, and for each positive integer n, let Q_n be the circle of radius $1/n$ with center at $(0, 1/n)$.

Let

$$Q = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q_n .$$

Then the origin 0 is in L^0, but Q is not lfncp at 0.

In the Whyburn theory, cut points and endpoints play a special role. (An *endpoint* of X is a point p such that every neighborhood of p contains a connected neighborhood of p whose boundary contains exactly one point.) Since each cut point of X is also a local cut point of X, all cut points are in L. Easy examples show that cut points may be in either N or L^0. The following theorem helps to place endpoints.

3.3. Theorem. *If X is Hausdorff, then no endpoint of X is a limit point of any connected lfcp subset of X.*

Proof. Suppose that p is an endpoint of X and also a limit point of a connected lfcp subset S of X. Choose $x \in S$, and let G and G' be disjoint open sets that contain p and x respectively. Let R be an open subset of G such that $p \in R$ and $\bar{R} - R$ is a single point q. But R and its complement both meet S, so that since S is connected, $q \in S$. Now S is lfcp, so that some open set U that has no cut point contains q, and is such that $U - q$ meets both R and its complement. But then q cuts R, a contradiction.

3.4. Theorem. *If X is Hausdorff, then each endpoint p of X is a member of N. That is, $p \in [X - (L^0 \cup M^0)]$.*

Proof. Obviously no endpoint is a local cut point, so that if p is an endpoint of X, then $p \in M$. If p were in M^0, then p would belong to some component Q of M^0, and, since X is locally connected, Q would be open, hence lfcp. But since X is T_1, p is a limit point of Q, violating theorem 3.3. Hence, $p \in M - M^0$, a subset of N.

4. Subelements

Though we wish to emphasize decompositions obtained using the sets L, M, and N of parts 2 and 3, the method by which we generate our decomposition is actually quite general. Therefore, we first define a decomposition with respect to an arbitrary (fixed) subset K of X, and then note certain interesting specializations of K.

4.1. The components of the complement of K will be called *pre-subelements*, and their closures *subelements*.

Obviously each pre-subelement C determines the unique subelement $\bar{C}$ that is the closure of C. It is not always possible to determine C from $\bar{C}$. However, the following theorem and its corollary are usually helpful.

4.2. Theorem. *If C and D are different (hence disjoint) pre-subelements, at least one of which has nonempty interior, then $\bar{C} \neq \bar{D}$.*

Proof. Let p be an interior point of C and suppose that $\bar{C} = \bar{D}$. Since $C \cap D = \emptyset$, $C \subset \bar{D} - D$. But $p \notin \bar{D}$, contradiction.

4.3. Corollary. *If K is closed and subelements $\bar{C}$ and $\bar{D}$ are equal, then $C = D$.*

Proof. X is locally connected, so C and D are open.

In general, therefore, when K is closed, we may indicate subelements by barred letters, deleting the bar to refer to the corresponding pre-subelement.

4.4. Our principal interest lies in the particular sub-elements obtained when the set N of 2.2 is used as K in 4.1. Pre-subelements based on N are of two types, viz. components of M^0, and components of L^0. We call the former *open M-subelements* and the latter *open L-subelements* and their respective closures *M-subelements* and *L-subelements*. (Note that M-subelements may also be described as subelements based on $N \cup L$, and L-subelements as subelements based on $N \cup M$.)

5. Properties of Subelements when K is Closed

In this section, subelements will be, as in 4.1, based on an arbitrary fixed set K, except that we suppose that K is closed.

5.1. Theorem. *Let $\bar{C}$ be a subelement, and let Q be a component of $X - \bar{C}$. Then there is a closed subset B of K such that Q is a component of $X - B$. In particular, $B = \bar{C} - C$.*

Proof. If Q is not a component of $X - B$, then, since Q is connected, Q is properly contained in some component R of $X - B$. For R to contain no point of $\bar{C}$ would contradict the maximality of Q. But since $R \subset X - B$, R contains, in particular, a point of C. Then since C is connected and does not meet B, $C \subset R$. Now all the limit points of C are in $C \cup B$, so that no limit point of C is in $R - C$. Hence, since R is connected, C contains a limit point of $R - C$. But, since C is open, this is impossible. Hence Q is, after all, a component of $X - B$.

5.2. Theorem. *Let R_n be any sequence of distinct subelements. Then* lim sup $R_n \subset K$. (lim sup *is to be taken in the sense of* Whyburn [6] p. 10.)

Proof. Let $x \in \limsup R_n$. Suppose $x \in X - K$. Then x is in some unique pre-subelement C which cannot meet any subelement but $\bar{C}$. Since C is open, this is a contradiction.

5.3. Theorem. *Let Q_n be a sequence of distinct components of the complement of a given subelement $\bar{C}$. Then* lim sup $Q_n \subset K$.

Proof. Suppose $x \in (\limsup Q_n) - K$. Then x is in some unique pre-subelement $D \neq C$ and D is contained in at least one of the connected open sets Q_n, so that D can't meet any of the others. Since D is open, this is a contradiction.

5.4. Theorem. *If X is separable, then X has at most a countable number of subelements and, for each subelement $\bar{C}$ of X, $X - \bar{C}$ has at most a countable number of components.*

Proof. There exists no uncountable collection of pairwise disjoint open sets of X.

6. Characterizations of Open M- and L-Subelements

6.1. Theorem. *A subset C of X is an open M-subelement if and only if C is maximal with respect to containing no local cut point of itself and being open and connected.*

Proof. That each open M-subelement C is open and connected is clear. C has no local cut point because such a point would be in L. Now suppose that C is a proper subset of a connected open set D. Then, since C is a component of M, D contains a point q of L. But D is a neighborhood of q, whence for some connected open subset R of D, $R - q$ is disconnected. But then q is a local cut point of D. Hence C is maximal. To complete the proof, let E be a set maximal with respect to containing no local cut point of itself and being open and connected. By the first two properties, $E \subset M^0$, and by the third E is in some open M-subelement C. By maximality, $E = C$.

6.2. Theorem. *A subset C of X is an open L-subelement if and only if C is maximal with respect to containing no local non-cut point of itself and being open and connected.*

Proof. The proof exactly parallels that of Theorem 6.1.

6.3. Theorem. *A subset C of X is an open M-subelement if and only if C is maximal with respect to being open, connected, and locally free of cut points.*

Proof. That each open M-subelement is open, connected, and lfcp is easy to see. Maximality follows from 3.1.

Now let E be a set maximal with respect to being lfcp at every point, open, and connected. The first two properties imply that $E \subset M^0$, and the third that E is in an open M-element C, whence by maximality $E = C$.

6.4. Theorem. *A subset C of X is an open L-subelement if and only if C is maximal with respect to being open, connected, and locally free of non-cut points.*

Proof. That C is open, connected, and lfncp is easy to see. We lack an analogue of 3.1 to give maximality. Hence suppose that C is a proper subset of an open connected set D. Since C is a component of L, D contains an element q of M. Suppose that D is locally free of non-cut points at q. It would follow that for some connected open neighborhood U of q, $U-q=A\cup B$ where A and B are separated. But since X is T_1, every connected open subset V of U that contains q is such that $V=(A\cap V)\cup(B\cap V)$ is a separation. Thus q is a local cut point of X. But this is false since $q\in M$. Hence D is not locally cut point free at q. So we see that C is maximal.

Now let E be a set maximal with respect to being lfncp, open, and connected. Since E is open, X is also lfncp at each point of E, whence, as noted in 3.2, $E\subset L^0$. Then connectedness and maximality make E an open L-element.

7. Properties of M-Subelements

For terminology used in this section see [6]. *Throughout this section we shall assume that X is a Peano continuum.*

7.1. Theorem. *If $\bar{C}$ is an M-subelement and x and y are distinct points of $\bar{C}$, then x and y are conjugate.*

Proof. Suppose that x and y are not conjugate. Then some point p cuts X between x and y, i.e. $X-p=A\cup B$ with A and B separated, where $x\in A$ and $y\in B$. Since $\bar{C}$ is connected, $p\in\bar{C}$. Now C is connected; hence if $p\notin C$, then C lies wholly within A or B. But then, y or x (respectively) fails to be in $\bar{C}$. Thus $p\in C$. But then p is a cut point of C, violating 6.1. So the assumption that x and y are not conjugate is false.

In WHYBURN'S development of cyclic element theory he showed (see, e.g. [6], chapter IV) that two points that are conjugate belong to a common true cyclic element. Thus the following corollary is justified:

7.2. Corollary. *For each M-subelement $\bar{C}$ of X, there exists a (Whyburn) true cyclic element of X that contains $\bar{C}$.*

This corollary in turn permits us to regard M-subelements as "refining" cyclic elements. (The L-subelements do not refine in the same sense. They are included here principally because their definition localizes (roughly) that of WALLACE'S *acyclic elements* [5], and because, in certain contexts, they are "dual" to M-subelements, just as acyclic elements are, in may respects, "dual" to cyclic elements.)

With reference to the use of conjugacy above, it may be worth observing that if we let Z be the set of cut points of X, two points belong to a true cyclic element if and only if no component of Z separates them. Two points belong to an open M-subelement if and only if $\bar{L}$ fails to separate them. (And $\bar{L}\supset Z$.) Two points belong to an open L-subelement if and only if $\bar{M}$ fails to separate them.

7.3. Theorem. *All save possibly a null sequence of the M-subelements of X lie in the union of some finite collection of (Whyburn) cyclic elements of X.*

Proof. WHYBURN has shown (see e.g. [6], p. 71) that the cyclic elements of X form (at most) a null sequence. The conclusion then follows from 7.2.

7.4. Theorem. *If x is a point of an M-subelement $\bar{C}$, then the order of x in $\bar{C}$ is infinite.*

Proof. We show that if the order of x in $\bar{C}$ were finite, then C would contain a point of L. Let y be any point of C other than x, and let U be any neighborhood of x such that $y \notin U$. Then if the order of x in $\bar{C}$ is finite, U contains an open set V that contains x such that $(\bar{V}-V)\cap\bar{C}$ is finite. Since $y \notin V$ and since $V\cap C \neq \emptyset$, some point q_0 of the connected set C is in $(\bar{V}-V)\cap\bar{C}$. Let the other points of $(\bar{V}-V)\cap\bar{C}$ be $q_1, q_2, \ldots, q_n$. For each i from 1 to n, let R_i be an open set that contains q_0, but not q_i, and let R be a connected open neighborhood of q_0 such that

$$R \subset U \cap C \cap \bigcap_{i=1}^{n} R_i .$$

Then $R\cap(\bar{V}-V)\cap\bar{C}=q_0$. Now q_0 is a limit point of both $C\cap U$ and $C-V$. Thus $R=(R\cap C\cap U)\cup(R\cap(C-U))$ where $(R\cap C\cap U)-q_0$ and $(R\cap(C-U))-q_0$ are separated. Hence $q_0 \in L$.

7.5. Theorem. *No M-subelement contains more than a countable number of local cut points of X.*

Proof. Let $\bar{C}$ be an M-subelement. Then C contains no local cut point of X, so that all such points are in $\bar{C}-C$. Now, by the Whyburn local separating point order theorem ([6] p. 61) if our theorem were not true, some point x of $\bar{C}-C$ would be of order two in X. We show that this forces us to the conclusion that some point of C belongs to L, contradicting the fact that $C \subset M$. Since $x \notin M$, x is a local cut point of X, so that x is a cut point of some neighborhood V of x, and hence of every connected open subneighborhood, in particular of at least one such subneighborhood U that has exactly two points p and q in its boundary. Now U contains a point r in C. Without loss of generality, we may insist that U misses at least one point of C, so that since C is connected, either $p \in C$ or $q \in C$. Let $p \in C$. Let W be a neighborhood of p such that $q \notin W$. Then $W\cap U \neq \emptyset$, but also $W\cap(C-U)=\emptyset$, so that p is a cut point of W. Then p is a local cut point of X. This is the desired contradiction.

7.6. Theorem. *If an M-subelement is locally connected, then it is cyclicly connected.*

Proof. Let $\bar{C}$ be a locally connected M-subelement. Then C, and hence $\bar{C}$, has no cut point. But $\bar{C}$ is a Peano continuum. Then, by the Whyburn cyclic connectedness theorem ([6] p. 79) $\bar{C}$ is cyclicly connected.

7.7. Corollary. *If $\bar{C}$ is an M-subelement such that $\bar{C}-C$ is totally disconnected, then $\bar{C}$ is cyclicly connected.*

Proof. Since C is open and locally connected, if $\bar{C}$ were not cyclicly connected, $\bar{C}$ would fail to be locally connected at some point of $\bar{C}-C$. But by [6] p. 19, then $\bar{C}-C$ would contain a nondegenerate continuum.

7.8. Theorem. *If $\bar{C}$ is an M-subelement, then every cutting of C contains a perfect set.*

Proof. C is a generalized continuum and contains no local separating point of X. Hence, by a theorem of WHYBURN ([6] 9.4 p. 62) every cutting of C contains a perfect set.

7.9. Corollary. *If X is a generalized continuum and $\bar{C}$ is an M-subelement of X, then C has no countable cutting.*

Proof. [6] 9.41 p. 62.

8. Applications to Mappings of X

In this section, again, X will be a Peano continuum. For terminology, see [6] *or* [2].

8.1. Theorem. *If Y is the upper semicontinuous decomposition space obtained by identifying $\bar{C}-C$ to a point, where $\bar{C}$ is an M-subelement of X, and if f is the canonical mapping of X into Y, then $f(\bar{C})$ has no cut point.*

Proof. Note first that since C is connected, $\bar{C}-C$ does not cut $\bar{C}$. Hence, $f(\bar{C}-C)$ does not cut $f(\bar{C})$. Also, the restriction of f to C is a homeomorphism, so that no point of $f(C)$ can cut $f(C)$, nor, it follows, $f(\bar{C})$. But $f(\bar{C})=f(C)\cup f(\bar{C}-C)$. Hence no point of $f(\bar{C})$ cuts $f(\bar{C})$.

8.2. The appealing conjecture that under the hypotheses of 8.1 $f(\bar{C})$ has no local cut point is smashed by letting X be the set of points of the plane on and between two internally tangent circles. Here, $\bar{C}-C$ is the point of tangency, so that f is the identity map.

8.3. Corollary. *Under any upper semicontinuous decomposition in which N is reduced to a point, the images (under the canonical map) of the M-subelements are free of cut points.*

8.4. Corollary. *If X is a Peano continuum, then there exists a topological space Y and a mapping f from X onto Y such that* (i) *f is a homeomorphism on the open M-subelements of X, and* (ii) *the images under f of the M-subelements of X are the (Whyburn) true cyclic elements of Y.*

Proof. Take the upper semicontinuous decomposition of X that identifies $L\cup N$ to a point, and let f be the canonical map.

The classical theorems of cyclic element theory now apply to Y. However, it should be remembered that f is not usually monotone, weakening the possibility of direct application to area theory, and that Y has only one cut point, weakening the possibility of direct application to continuum structure.

8.5. Corollary. *If X is a Peano continuum, then for each subelement $\bar{C}$, there exist a Peano continuum Y and a mapping $f: X \to Y$ such that*

(a) *the restriction of f to C is a homeomorphism*

(b) *$f(X-C)$ is degenerate*

(c) *Y is cyclicly connected.*

Proof. Apply the standard cyclic element retraction theorem to the $f(\bar{C})$ of 8.1.

8.6. Theorem. *If Y is the hyperspace of the upper semi-continuous decomposition that identifies each component of $L \cup N$ to a point, and if f is the canonical mapping, then*

(i) *the image under f of each M-subelement is contained in a cyclic element of Y,*

(ii) *f is a homeomorphism on each open M-subelement, and*

(iii) f is monotone.

Proof. (ii) and (iii) are immediate. If (i) were false, then for some subelement $\bar{C}$, $f(\bar{C})$ would meet two cyclic elements of Y, and hence would have a cut point p. But then $f^{-1}(p)$ would cut $\bar{C}$, which is impossible since C is connected and $C \subset \bar{C} - f^{-1}(p) \subset \bar{C}$.

8.7. Theorem. *If X is a Peano continuum, then for each subelement $\bar{C}$ of X, there is a monotone map from X onto a Peano continuum Y such that $f(\bar{C})$ is cyclicly connected.*

Proof. Since for each M-subelement $\bar{C}$, $\bar{C}-C$ is closed, we note that if X is a Peano continuum, components of $\bar{C}-C$ may also be identified to points in an upper semicontinuous decomposition. Let this be done, and let f be the canonical map. Then $f(\bar{C})$ has totally disconnected boundary, and hence is cyclicly connected.

8.8. Theorem. *If X is a Peano continuum, then for each subelement $\bar{C}$ of X, there exists a monotone map f of X onto a topological space Y such that*

(i) *f is monotone,*

(ii) *the restriction of f to C is a homeomorphism,*

(iii) *Y is cyclicly connected,*

(iv) *the image under f of each component of $X-C$ is a single point.*

Proof. $X-C$ is closed. Take its components as an upper semicontinuous decomposition

9. Connected Unions of Subelements

In the Whyburn theory, an important role is played by certain connected sets that are unions of cyclic elements. A completely arbitrary connected union of cyclic elements is called an H-set. Using the nomenclature of section 4,

we call each connected union of subelements and points of K an *H-analogue*. When compact, H-sets are also called A-sets. We call compact H-analogues *A-analogues*. (Because the "relative structure" is acyclic in the Whyburn theory but not in the present theory, we are not able to perfect the analogies between H-sets and H-analogue and between A-set and A-analogue without further restricting the sets in question.)

WHYBURN calls an A-set A a *simple cyclic chain* from point a to point b provided A is minimal with respect to being an A-set that contains a and b. Our analogue is a *thin chain* from a to b, viz. a set minimal with respect to being an A-analogue that contains a and b. The union of all thin chains from a to b will be called the *thick chain* from a to b. Note that since the simple cyclic chain from a to b is unique in the Whyburn theory, thin and thick chains are both analogues of simple cyclic chains. Very roughly, we may say that thin chains have some of the properties of simple cyclic chains while thick chains have the rest.

9.1. Theorem. *If $\mathscr{C}$ is a collection of H-analogues and if $\cap\mathscr{C}$ is connected, then $\cap\mathscr{C}$ is an H-analogue.*

Proof. For $x\in\cap\mathscr{C}$, we must show that unless $x\in K$, x is in some subelement contained in $\cap\mathscr{C}$. But if $x\notin K$, then certainly x is in some unique pre-subelement C, and each member of $\mathscr{C}$ that contains x must contain $\bar{C}$. Hence, since $x\in\cap\mathscr{C}$, $\bar{C}\subset\cap\mathscr{C}$.

9.2. Corollary. *If the intersection A of a collection of A-analogues is connected, then A is an A-analogue.*

9.3. Corollary. *The intersection of any nest of A-analogues is an A-analogue.*

A set S is called *thin chain-wise connected* iff for $a\in S$ and $b\in S$, there is a thin chain from a to b that is contained in S. Thin chain-wise connectedness is patterned after WHYBURN's cyclic chain-wise connectedness.

9.4. Theorem. *Every A-analogue is thin chain-wise connected.*

Proof. The relation $\subset$ partially orders the set of all A-analogues that include a and b. Apply the minimal principle and 9.3.

9.5. Corollary. *Every thin chain is thin chain-wise connected.*

Proof. Each thin chain is an A-analogue.

9.6. Corollary. *If X is compact then X is thin chainwise connected.*

Proof. X is an A-analogue.

9.7. Corollary. *If a and b lie in at least one A-analogue, then the thick chain from a to b is nonempty.*

9.8. Corollary. *If X is compact then no thick chain is empty.*

9.9. Theorem. *Each thick chain is thin chain-wise connected.*

Proof. Let T be the thick chain from a to b, and let c and d be points of T. Then c is on a thin chain C_1 from a to b, and d is on a thin chain C_2 from a to b. The union $C_1 \cup C_2$ is an A-analogue contained in T, hence is thin chainwise connected.

9.10. Conjecture. *Every thick chain is an A-analogue.*

It is known that 9.10 is false if we permit X to fail to be locally connected, but we have as yet neither a proof nor a counterexample for locally connected X. Should the conjecture prove false in general, then the following specializations of K might cause the question to arise again: (i) K closed. (ii) $K=N$. (iii) $K=N\cup L$. Primary interest attaches to the case when X is a Peano continuum.

9.11. Theorem. *If H is an H-analogue, then $\overline{H}-H\subset K$.*

Proof. Let $x\in\overline{H}-H$. Then x belongs to no subelement that is contained in H (else $x\in H$). But then x belongs to no open subelement at all, so that $x\in K$.

9.12. Theorem. *If X is compact, then the closure of each H-analogue is an A-analogue.*

Proof. $\overline{H}$ is a continuum by well known theorems. But H is a union of subelements and points of K, so that, by 9.11, so is $\overline{H}$.

9.13. Thin chains have many arc-like properties. In order to pursue this analogy, we follow WHYBURN in distinguishing certain subsets of thin chains as endelements, and others as interior elements. Specifically, if t is a thin chain from a to b, then a set S is called the *a-endelement* of t provided that either

(i) S is the closure of a pre-subelement that contains a, or

(ii) a is in no pre-subelement and S is the component of $t\cap K$ that contains a.

Clearly the a-endelement of t exists and is unique. The a-endelement of t and the b-endelement of t are also simply called *endelements* of t.

The definition of *interior element* is more complex. A set Z is said to *cut* a connected set Y *between* two subsets A and B provided that $Y-Z$ is the union of two separated sets one containing A and the other B. Then Z is said to be a $\mathscr{C}$-irreducible cutting of Y between A and B provided that Z cuts Y between A and B, $Z\in\mathscr{C}$, and no subset of Z is in $\mathscr{C}$ and cuts Y between A and B. Now let $\mathscr{C}$ be the collection of all subsets Z of X such that Z is a union of components of $K\cap t$. The *interior elements* of t are the subelements that are contained in t but are not endelements of t and the $\mathscr{C}$-irreducible cuttings of t between a and b. Note that an interior element that is a subelement may contain a or b, though not as an interior point.

9.14. Theorem. *If $\overline{C}$ is the a-endelement of a thin chain t from a to b, then $t-\overline{C}$ is connected.*

Proof. Let E be the component of $t-\overline{C}$ that contains b. Then $E\cup\overline{C}$ is compact and connected and contains both a and b. If a point $x\in E$ belongs to

a pre-subelement D, then $D \subset E$, whence $\bar{D} \subset E \cup \bar{C}$. Thus $E \cup \bar{C}$ is an A-analogue. By the minimality of t, $E \cup \bar{C} = t$, whence $t - \bar{C}$ has no other component. Thus $t - \bar{C}$ is connected.

9.15. Theorem. *If t is a thin chain from a to b, $\bar{C}$ is an interior element of t, $\bar{C}$ has at least one interior point, and $\bar{C}$ contains neither a nor b, then $t - \bar{C}$ is the union of two components, one containing a and the other b.*

Proof. We first show that $t - \bar{C}$ is disconnected. This is obvious if $\bar{C}$ is not a subelement, so let $\bar{C}$ be a subelement, and suppose that $t - \bar{C}$ is connected. Then the closure E of $t - \bar{C}$ is an A-analogue containing a and b. Since t is minimal, $t = E$, which is impossible when $\bar{C}$ has an interior point.

Now let $t - \bar{C} = A \cup B$ where A and B are mutually separated. But $A \cup \bar{C}$ and $B \cup \bar{C}$ are A-analogues, whence, by the minimality of t, a and b are not both in A nor both in B. We may take $a \in A$ and $b \in B$. If A were disconnected, say $A = R \cup S$ with R and S separated and $a \in R$, then $R \cup \bar{C} \cup B$ would be an A-analogue that violates the minimality of t. Hence A is connected. Similarly for B.

9.16. Theorem. *If K is closed, t is a thin chain from a to b, and $\bar{C}$ is a subelement that is an interior element of t, then $t - C$ is disconnected.*

Proof. If $t - C$ were connected, then $t - C$ would be a closed, hence compact, H-analogue, hence an A-analogue. This violates minimality of t.

9.17. Theorem. *If K is closed and $\bar{C}$ is the a-endelement of a thin chain t from a to b, then at most one subelement (besides $\bar{C}$) is contained in t and meets $\bar{C}$.*

Proof. Suppose $\bar{C}$ meets distinct subelements $\bar{D}$ and $\bar{E}$. If $\bar{D}$ is an endelement, then $\bar{C} \cup \bar{D}$ is an A-analogue that contains a and b, contradicting minimality of t. If $\bar{D}$ is an interior element, then $t - D$ is, by 9.16, the union of two separated sets A and B. We may suppose that $\bar{C} \cup \bar{E} \subset A$. Now, $B \cup \bar{D}$ is easily seen to be an A-analogue, whence so is $B \cup \bar{C} \cup \bar{D}$. If b were in B, this would violate the minimality of t, so we must suppose that $b \in A$. But $A \cup \bar{D}$ is also an A-analogue, again violating minimality. Thus minimality of t is violated in any case, and the supposition that C meets two subelements is false.

(A thin chain may consist of a single subelement, yet have distinct endelements. A simple example for the case $K = L \cup N$ is given by the set $t = X$ of points in E^2 satisfying the simultaneous inequalities $x^2 + y^2 \leqq 9$, $(x-2)^2 + y^2 \geqq 1$, $(x+2)^2 + y^2 \geqq 1$. As a thin chain from $(-1, 0)$ to $(1, 1)$, t has only one end-element. However, as a thin chain from $(-3, 0)$ to $(3, 0)$, t has two endelements and an interior element. More complex examples exist with non-degenerate endelements.)

Bibliography

[1] Jongmans, F., and C. Heuchenne: Localisation des attributs topologiques. Bull. Soc. Royale Sci. Liège **31**, 22–50 (1962).

[2] Kelley, J. L.: General topology. New York: D. Van Nostrand Co., Inc. 1955

[3] McAllister, B. L.: Cyclic elements in topology — a history. Amer. Math. Monthly **73**, 337–350 (1966).

[4] McAULEY, L. F.: Local cyclic connectedness. I. Cyclic subelements of cyclic elements. Notices Amer. Math. Soc. **5**, 698 (1958) (abstract.).
[5] WALLACE, A. D.: The acyclic elements of a Peano space. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 778—780 (1941).
[6] WHYBURN, G. T.: Analytic topology. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. 28. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. 1942.
[7] — Local separating points of continua. Monatsh. für Math. u. Phys. **36**, 305—314 (1929).
[8] ZIPPIN, L.: Note on locally cyclicly connected continua. Bull. Amer. Math. Soc. **36**, 805 (1930) (abstract.).

South Dakota School of Mines and Technology, Rapid City, S. D., U.S.A.

Rutgers, The State University, New Brunswick, N.I., U.S.A.