Werk

Titel: Zu einem Problem von Shephard über die Projektionen konvexer Körper.

Autor: Schneider, Rolf

Jahr: 1967

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0101|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

SCHNEIDER, R.
Math. Zeitschr. 101, 71—82 (1967)

Zu einem Problem von Shephard über die Projektionen konvexer Körper

ROLF SCHNEIDER

Eingegangen am 20. März 1967

1. Einleitung

Für einen konvexen Körper K (nicht leere, kompakte, konvexe Punktmenge) im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n ($n \geqq 2$) bezeichne $V_n(K)$ das Volumen und $v_{n-1}(K, u)$, wo u ein Einheitsvektor ist, das $(n-1)$-dimensionale Volumen der Orthogonalprojektion von K auf eine zu u senkrechte Hyperebene.

Ausgangspunkt ist folgende anschaulich naheliegende Fragestellung: Seien K und $\bar{K}$ konvexe Körper. Folgt aus

$$v_{n-1}(K, u) > v_{n-1}(\bar{K}, u) \qquad \text{für alle } u, \tag{1.1}$$

daß

$$V_n(K) > V_n(\bar{K}) \tag{1.2}$$

ist? Ein von der Kugel verschiedener Körper konstanter Helligkeit und eine geeignete Kugel zeigen, daß dies i.a. nicht zutrifft. Hierauf hat SHEPHARD [8] hingewiesen, und er hat die Frage gestellt, ob dieser Schluß wenigstens bei zentralsymmetrischen Körpern (für die das Gegenbeispiel hinfällig wird) richtig ist. Im folgenden wird gezeigt, daß auch für konvexe Körper mit Zentralsymmetrie aus (1.1) i.a. nicht (1.2) folgt. Der Schluß von (1.1) auf (1.2) ist aber richtig, wenn K (der Körper mit den größeren Projektionen) einer gewissen Teilmenge der zentralsymmetrischen konvexen Körper angehört: Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}_n$ *die Menge aller konvexen Körper des* R^n, *die sich* (im Sinne der üblichen Hausdorff-Metrik) *durch endliche Vektorsummen von Strecken approximieren lassen*[1]. Es gilt nun:

Ist $K \in \mathfrak{S}_n$ *und* $\bar{K}$ *ein beliebiger* (nicht notwendig zentralsymmetrischer) *konvexer Körper, so folgt aus* (1.1) *die Ungleichung* (1.2). Von diesem Satz wird unten eine Verallgemeinerung bewiesen, in der neben den Volumina auch andere Funktionale von konvexen Körpern und ihren Projektionen auftreten. — Andererseits gilt aber:

Zu jedem zentralsymmetrischen konvexen Körper $\bar{K}$ *im* R^n *mit* $\bar{K} \notin \mathfrak{S}_n$ *existiert* (unter einer später angegebenen zusätzlichen Voraussetzung an $\bar{K}$) *ein zentral-*

[1] Auf derartige konvexe Körper hat wohl zuerst BLASCHKE [1], S. 157, die Aufmerksamkeit gelenkt.

symmetrischer konvexer Körper K, der (1.1) *erfüllt, für den aber* $V_n(K) < V_n(\bar{K})$ *ist.* Für $n \geqq 3$ gibt es Körper $\bar{K}$, die den Voraussetzungen dieses Satzes genügen.

Die angegebenen Aussagen werden im 4. bzw. im 5. Abschnitt bewiesen. Im nächsten Abschnitt stellen wir einige Bezeichnungen und die benötigten Hilfsmittel zusammen; der 3. Abschnitt enthält noch eine Bemerkung über konvexe Körper ohne Mittelpunkt.

2. Hilfsmittel

Mit $\mathfrak{K}_n$ bezeichnen wir die Menge der konvexen Körper im R^n und mit E stets eine Einheitskugel aus $\mathfrak{K}_n$. $\mathfrak{K}_n$ sei mit der üblichen Metrik versehen. Von den konvexen Körpern $K, \bar{K}, E \in \mathfrak{K}_n$ werden wir die folgendermaßen bezeichneten gemischten Volumina zu benutzen haben:

$$V(\underbrace{K, \dots, K}_{r}, \underbrace{E, \dots, E}_{n-r}) = V_r(K), \qquad 0 \leqq r \leqq n,$$

$$V(K, \underbrace{\bar{K}, \dots, \bar{K}}_{r}, \underbrace{E, \dots, E}_{n-r-1}) = V_{1r}(K, \bar{K}), \qquad 0 \leqq r \leqq n-1.$$

Für sie gilt als Folgerung aus den Fenchel-Aleksandrovschen Ungleichungen (s. BUSEMANN [3], S. 50, (7.8))

$$V_{1r}^{r+1}(K, \bar{K}) \geqq V_{r+1}(K)\, V_{r+1}^{r}(\bar{K}), \qquad 1 \leqq r \leqq n-1. \tag{2.1}$$

Ist $K \in \mathfrak{K}_n$ und u ein Einheitsvektor, so bezeichnen wir den konvexen Körper, der durch Orthogonalprojektion des konvexen Körpers K auf die zu u senkrechte Hyperebene durch den Koordinatenursprung entsteht, mit K_u. Für die $(n-1)$-dimensionalen gemischten Volumina von K_u und E_u schreiben wir

$$v(\underbrace{K_u, \dots, K_u}_{r}, \underbrace{E_u, \dots, E_u}_{n-r-1}) = v_r(K, u), \qquad 0 \leqq r \leqq n-1.$$

Bekanntlich ist (s. BONNESEN-FENCHEL [2], S. 45)

$$v_r(K, u) = n\, V_{1r}(U, K), \tag{2.2}$$

wenn U eine Strecke der Richtung u und der Länge 1 ist.

Ω_n sei die euklidische Einheitssphäre im R^n mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Punkte auf Ω_n und die sie darstellenden Einheitsvektoren werden mit denselben Buchstaben bezeichnet. Die gemischten Volumina lassen sich bekanntlich darstellen als Integrale mit Bezug auf nicht negative, totaladditive Mengenfunktionen, die für alle Borelmengen von Ω_n erklärt sind (FENCHEL-JESSEN [5], BUSEMANN [3], S. 60ff.): Für $K_1 \in \mathfrak{K}_n$ sei $p(K_1, u)$ mit $u \in \Omega_n$ die Stützfunktion (bezüglich des Koordinatenursprungs), aufgefaßt als Funktion auf Ω_n;

und für $K_2, \ldots, K_n \in \mathfrak{K}_n$ sei $S(K_2, \ldots, K_n; \omega)$ für Borelmengen $\omega \subset \Omega_n$ die gemischte Oberflächenfunktion der Körper $K_2, \ldots, K_n$. Dann gilt

$$V(K_1, K_2, \ldots, K_n) = \frac{1}{n} \int p(K_1, u)\, S(K_2, \ldots, K_n; d\Omega_u). \tag{2.3}$$

Integrationen sind hier und im folgenden, wenn nichts anderes gesagt ist, stets über die ganze Sphäre Ω_n erstreckt; die Integrationsvariable wird durch einen Index am Oberflächenelement $d\Omega$ der Sphäre angezeigt. Mit der Bezeichnung

$$S(\underbrace{K, \ldots, K}_{r}, \underbrace{E, \ldots, E}_{n-r-1}; \omega) = S_r(K; \omega), \qquad 0 \leqq r \leqq n-1,$$

für die r-te Oberflächenfunktion des Körpers K gilt also speziell

$$V_{r+1}(K) = \frac{1}{n} \int p(K, u)\, S_r(K; d\Omega_u), \qquad 0 \leqq r \leqq n-1, \tag{2.4}$$

$$V_{1r}(K, \overline{K}) = \frac{1}{n} \int p(K, u)\, S_r(\overline{K}; d\Omega_u), \qquad 0 \leqq r \leqq n-1. \tag{2.5}$$

Als Spezialfall von (2.5) hat man wegen (2.2) die Gleichung

$$v_r(K, u) = \tfrac{1}{2} \int |u \cdot w|\, S_r(K; d\Omega_w), \qquad 0 \leqq r \leqq n-1. \tag{2.6}$$

Darin ist $u \cdot w$ das Skalarprodukt der Einheitsvektoren u und w.

3. Körper ohne Mittelpunkt

Ehe wir uns zentralsymmetrischen konvexen Körpern zuwenden, soll noch das in der Einleitung genannte Gegenbeispiel, das die Unzulässigkeit des Schlusses von (1.1) auf (1.2) für beliebige konvexe Körper belegt, verallgemeinert werden:

Satz 1. *Zu jedem nicht zentralsymmetrischen konvexen Körper $K \in \mathfrak{K}_n$ mit inneren Punkten existiert ein zentralsymmetrischer Körper $\overline{K} \in \mathfrak{K}_n$ mit*

$$v_{n-1}(K, u) > v_{n-1}(\overline{K}, u) \qquad \textit{für alle } u \in \Omega_n,$$

aber

$$V_n(K) < V_n(\overline{K}).$$

Beweis. Sei K^* der durch Spiegelung von K am Koordinatenursprung entstehende Körper. Die Mengenfunktion

$$F(\omega) = \tfrac{1}{2} [S_{n-1}(K; \omega) + S_{n-1}(K^*; \omega)]$$

erfüllt, da K innere Punkte hat, die Voraussetzungen dafür, daß nach einer Verallgemeinerung eines Satzes von MINKOWSKI (z. B. BUSEMANN [3], S. 64) ein konvexer Körper $\bar{K} \in \mathfrak{K}_n$ existiert mit

$$F(\omega) = S_{n-1}(\bar{K}; \omega).$$

Aus dem zugehörigen Eindeutigkeitssatz folgt, daß $\bar{K}$ zentralsymmetrisch ist. Nach (2.6) ist

$$\begin{aligned} 2v_{n-1}(\bar{K}, u) &= \int |u \cdot w| \, S_{n-1}(\bar{K}; d\Omega_w) \\ &= \tfrac{1}{2} \int |u \cdot w| \, S_{n-1}(K; d\Omega_w) + \tfrac{1}{2} \int |u \cdot w| \, S_{n-1}(K^*; d\Omega_w) \\ &= v_{n-1}(K, u) + v_{n-1}(K^*, u) \\ &= 2v_{n-1}(K, u). \end{aligned}$$

Aus einer der Ungleichungen (2.1) und der Tatsache, daß K nicht zentralsymmetrisch ist, läßt sich folgern, daß $\bar{K}$ größeres Volumen als K hat (vgl. BONNESEN-FENCHEL [2], S. 124; zur Bequemlichkeit des Lesers führen wir den Beweis kurz aus): Nach (2.4) ist

$$\begin{aligned} n V_n(\bar{K}) &= \int p(\bar{K}, u) \, S_{n-1}(\bar{K}; d\Omega_u) \\ &= \tfrac{1}{2} \int p(\bar{K}, u) \, S_{n-1}(K; d\Omega_u) + \tfrac{1}{2} \int p(\bar{K}, u) \, S_{n-1}(K^*; d\Omega_u) \\ &= \frac{n}{2} V_{1,n-1}(\bar{K}, K) + \frac{n}{2} V_{1,n-1}(\bar{K}, K^*), \end{aligned}$$

wobei (2.5) benutzt wurde. Nach (2.1) ist

$$V_{1,n-1}^n(\bar{K}, K) \geqq V_n(\bar{K}) \, V_n^{n-1}(K),$$

$$V_{1,n-1}^n(\bar{K}, K^*) \geqq V_n(\bar{K}) \, V_n^{n-1}(K^*) = V_n(\bar{K}) \, V_n^{n-1}(K),$$

also

$$V_n(\bar{K}) \geqq V_n(K).$$

Das Gleichheitszeichen kann hier nicht stehen, da sonst sowohl $\bar{K}$ und K als auch $\bar{K}$ und K^* homothetisch wären, der Körper K also ein Symmetriezentrum hätte.

Den in Satz 1 verlangten Körper erhält man durch Streckung von $\bar{K}$ mit einem genügend großen Faktor < 1.

4. Körper, die durch endliche Summen von Strecken approximierbar sind

Die eine der in der Einleitung genannten Aussagen über die Zulässigkeit des Schlusses von (1.1) auf (1.2) ist ein Spezialfall des folgenden Satzes:

Satz 2. *Sei* $K \in \mathfrak{S}_n$ *und* $\bar{K} \in \mathfrak{K}_n$. *Für ein* r *mit* $1 \leqq r \leqq n-1$ *gelte*

$$v_r(K, u) > v_r(\bar{K}, u) \qquad \text{für alle } u \in \Omega_n. \tag{4.1}$$

Dann ist

$$V_{r+1}(K) > V_{r+1}(\bar{K}). \tag{4.2}$$

Beweis. Zunächst nehmen wir an, daß K selbst eine Summe von endlich vielen Strecken ist. Es bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, den Koordinatenursprung als gemeinsamen Mittelpunkt der genannten Strecken anzunehmen. Dann gibt es also Einheitsvektoren $w_1, \ldots, w_k$ und positive reelle Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ mit

$$p(K, u) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, |u \cdot w_i| \, .$$

Nach (2.4), (2.5) und (2.6) gilt dann

$$\begin{aligned}
&n[V_{r+1}(K) - V_{1r}(K, \bar{K})] \\
&\quad = \int p(K, u) \, S_r(K; d\Omega_u) - \int p(K, u) \, S_r(\bar{K}; d\Omega_u) \\
&\quad = \int \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, |u \cdot w_i| \, [S_r(K; d\Omega_u) - S_r(\bar{K}; d\Omega_u)] \\
&\quad = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int |u \cdot w_i| \, [S_r(K; d\Omega_u) - S_r(\bar{K}; d\Omega_u)] \\
&\quad = 2 \sum_{i=1}^{k} \lambda_i [v_r(K, w_i) - v_r(\bar{K}, w_i)] \\
&\quad > 0
\end{aligned}$$

wegen $\lambda_i > 0$ und (4.1).

Ist nun $K \in \mathfrak{S}_n$ und gilt (4.1), so gilt auch $v_r(K, u) > v_r(\lambda \bar{K}, u)$ für alle $u \in \Omega_n$ mit einer geeigneten reellen Zahl $\lambda > 1$. Man approximiere K durch eine Folge $K_1, K_2, \ldots$, konvexer Körper, deren jeder eine Summe endlich vieler Strecken ist. Für fast alle i gilt dann, wie man unschwer einsieht, auch $v_r(K_i, u) > v_r(\lambda \bar{K}, u)$ für alle $u \in \Omega_n$, also nach dem oben Bewiesenen $V_{r+1}(K_i) > V_{1r}(K_i, \lambda \bar{K})$. Wegen der Stetigkeit und der Homogenität der beteiligten Funktionale folgt $V_{r+1}(K) \geqq V_{1r}(K, \lambda \bar{K}) = \lambda^r V_{1r}(K, \bar{K}) > V_{1r}(K, \bar{K})$. Aus (2.1) ergibt sich nun die behauptete Ungleichung (4.2).

Man sieht übrigens, daß man auch von der schwächeren Ungleichung

$$v_r(K, u) \geqq v_r(\bar{K}, u) \qquad \text{für alle } u \in \omega_n$$

auf die echte Ungleichung (4.2) schließen kann, falls $\bar{K}$ nicht durch eine Translation aus K hervorgeht und falls keiner der Körper in einer r-dimensionalen Hyperebene liegt. Sind die Körper K, $\bar{K}$ nämlich mindestens $(r+1)$-dimensional, so gilt das Gleichheitszeichen in (2.1) nur, wenn K und $\bar{K}$ homothetisch sind.

Mit der zum Beweis von Satz 2 benutzten Methode lassen sich auch allgemeinere Aussagen herleiten: So folgert man analog, daß für $K \in \mathfrak{S}_n$ und beliebige konvexe Körper $K^1, \ldots, K^{n-1}, \bar{K}^1, \ldots, \bar{K}^{n-1} \in \mathfrak{K}_n$ aus

$$v(K_u^1, \ldots, K_u^{n-1}) > v(\bar{K}_u^1, \ldots, \bar{K}_u^{n-1}) \qquad \text{für alle } u \in \Omega_n$$

die Ungleichung

$$V(K, K^1, \ldots, K^{n-1}) > V(K, \bar{K}^1, \ldots, \bar{K}^{n-1})$$

folgt. Insbesondere ergibt sich für $K \in \mathfrak{S}_n$ und $\bar{K}, K^1, \ldots, K^{n-r-s-1} \in \mathfrak{K}_n$ aus der für zwei Zahlen r, s mit $s \geqq 0$, $r+s \leqq n-1$, $r \geqq s+1$ vorausgesetzten Ungleichung

$$v(\underbrace{K_u, \ldots, K_u}_{r}, \underbrace{\bar{K}_u, \ldots, \bar{K}_u}_{s}, K_u^1, \ldots, K_u^{n-r-s-1})$$

$$> v(\underbrace{K_u, \ldots, K_u}_{s}, \underbrace{\bar{K}_u, \ldots, \bar{K}_u}_{r}, K_u^1, \ldots, K_u^{n-r-s-1}) \qquad \text{für alle } u \in \Omega_n,$$

also zunächst

$$V_{r+1,s} > V_{s+1,r},$$

wo für $i+j=r+s+1$

$$V_{ij} = V(\underbrace{K, \ldots, K}_{i}, \underbrace{\bar{K}, \ldots, \bar{K}}_{j}, K^1, \ldots, K^{n-r-s-1})$$

gesetzt ist. Mit der Ungleichung

$$V_{s+1,r}^{r-s+1} \geqq V_{s,r+1}^{r-s} V_{r+1,s},$$

die (2.1) verallgemeinert, ergibt sich also

$$V_{r+1,s} > V_{s,r+1}.$$

Um eine weitere Verallgemeinerung von Satz 2 anzudeuten, bemerken wir, daß mit $K \in \mathfrak{S}_n$ auch jede Orthogonalprojektion von K auf eine p-dimensionale Ebene $E^p \subset R^n (1 \leqq p \leqq n-1)$ durch endliche Linearkombinationen von Strecken aus E^p approximierbar ist; die Projektion auf E^p einer endlichen Summe von Strecken ist ja gleich der Summe der auf E^p projizierten Strecken. Diese einfache Bemerkung kann man folgendermaßen ausnutzen: Sei $K \in \mathfrak{S}_n$ und $\bar{K} \in \mathfrak{K}_n$. Für jede p-dimensionale Ebene E^p (p fest, $1 \leqq p \leqq n-2$) gelte, daß die Projektion von

K auf E^p größeres p-dimensionales Volumen hat als die entsprechende Projektion von $\bar{K}$. Man kann dann Satz 2 anwenden auf die Projektionen auf jede $(p+1)$-dimensionale Ebene E^{p+1} und erhält, daß die Projektion von K auf E^{p+1} größeres $(p+1)$-dimensionales Volumen hat als die entsprechende Projektion von $\bar{K}$. So weiter schließend, erhält man, daß K größeres Volumen als $\bar{K}$ hat. Schließlich kann man natürlich auch diese Verallgemeinerung von Satz 2 mit der oben angedeuteten kombinieren.

5. Zentralsymmetrische Körper, die nicht durch endliche Summen von Strecken approximierbar sind

Um zu zeigen, daß es zentralsymmetrische konvexe Körper gibt, für die der Schluß von (1.1) auf (1.2) falsch ist, benötigen wir die folgende Aussage über die Lösbarkeit (durch stetige Funktionen) einer linearen Integralgleichung erster Art für Funktionen auf der Sphäre Ω_n. Eine auf Ω_n erklärte Funktion $G(u)$ heißt dabei gerade, wenn $G(u)=G(-u)$ für alle $u\in\Omega_n$ gilt.

Hilfssatz. *Zu jeder geraden Funktion $G(u)$ der Klasse C^k auf Ω_n, wo k eine gerade Zahl $\geqq n+2$ ist, existiert eine gerade stetige Funktion $g(u)$ auf Ω_n mit*

$$G(u)=\int |u\cdot w|\, g(w)\, d\Omega_w \tag{5.1}$$

für alle $u\in\Omega_n$.

Beweis. Für $n=3$ hat BLASCHKE [*1*], S. 154f., einen Beweis gegeben und einen weiteren angedeutet, allerdings ohne Angabe von (gewiß nicht entbehrlichen) Differenzierbarkeitsvoraussetzungen. Der eine Beweis läßt sich auf beliebiges $n\geqq 2$ verallgemeinern: Er macht Gebrauch von der Tatsache, daß die Eigenfunktionen des Kerns $|u\cdot w|$ bezüglich Ω_n durch die geraden Kugelflächenfunktionen der Dimension n gegeben werden; nach dem Funk-Hecke-Theorem (s. z. B. MÜLLER [*6*], S. 20) gilt nämlich für jede Kugelflächenfunktion Y_m der Ordnung m

$$\int |u\cdot w|\, Y_m(w)\, d\Omega_w=\lambda_m\, Y_m(u) \tag{5.2}$$

mit

$$\lambda_m=\frac{(-1)^m\,\pi^{(n-1)/2}}{2^{m-1}\,\Gamma(m+(n-1)/2)}\int_{-1}^{1}|t|\,\frac{d^m}{dt^m}(1-t^2)^{m+(n-3)/2}\,dt,$$

wobei zur Umformung des a.a.O. angegebenen Ausdrucks die Formel von RODRIGUES ([*6*], S. 17 [2]) benutzt wurde. Nach Berechnung des Integrals erhält man für gerade $m\geqq 2$

$$\lambda_m=\frac{(-1)^{(m-2)/2}\,\pi^{(n-1)/2}\,\Gamma(m-1)}{2^{m-2}\,\Gamma(m/2)\,\Gamma((m+n+1)/2)} \tag{5.3}$$

(für ungerade m folgt aus (5.2) sofort $\lambda_m=0$).

[2] Die dort angegebene Formel enthält einen Druckfehler: statt $(1-t^2)^{(n+q-3)/2}$ lies $1-t^2)^{n+(q-3)/2}$.

Für $m=0, 1, 2, \ldots$ sei $\{Y_{mj}\}, j=1, \ldots, N(n, m)$, ein orthonormiertes System von linear unabhängigen Kugelflächenfunktionen der Dimension n und der Ordnung m, wobei $N(n, m)$ deren Maximalzahl ist; es ist ([6], S. 4) $N(n, 0)=1$ und für $m \geqq 1$

$$N(n, m)=\frac{(2m+n-2)\,\Gamma(m+n-2)}{(m+1)\,\Gamma(n-1)}. \tag{5.4}$$

Setze

$$a_{mj}=\int G(u)\, Y_{mj}(u)\, d\Omega_u$$

und

$$Y_m(u)=\sum_{j=1}^{N(n,m)} a_{mj}\, Y_{mj}(u).$$

Wir wollen zeigen (vgl. COURANT-HILBERT [4], S. 160), daß die Reihe

$$\sum_{\substack{m=0\\ 2\mid m}}^{\infty} \lambda_m^{-1}\, Y_m(u) \tag{5.5}$$

auf Ω_n gleichmäßig konvergiert; sie stellt dann dort eine gerade, stetige Funktion $g(u)$ dar, die wegen (5.2) und

$$G(u)=\sum_{m=0}^{\infty} Y_m(u)$$

die Integralgleichung (5.1) löst. Hierzu bemerken wir zunächst, daß aus (5.3) für gerade m bei Anwendung der Stirlingschen Formel für $m \to \infty$ die Abschätzung

$$|\lambda_m^{-1}|=O(m^{(n+2)/2}) \tag{5.6}$$

folgt. Zur Abschätzung von $Y_m(u)$ benutzen wir die Ungleichung ([6], S. 14)

$$|Y_m(u)| \leqq \left[\frac{N(n, m)}{\omega_n}\right]^{\frac{1}{2}} |a_m|, \tag{5.7}$$

wo

$$a_m^2=\sum_{j=1}^{N(n,m)} a_{mj}^2$$

gesetzt ist und ω_n die Oberfläche von Ω_n bezeichnet. Nach (5.4) ist dabei

$$\left[\frac{N(n, m)}{\omega_n}\right]^{\frac{1}{2}}=O(m^{(n-2)/2}). \tag{5.8}$$

Zur Abschätzung von $|a_m|$ ist die Differenzierbarkeitsvoraussetzung für die Funktion G auszunutzen: Bezeichnet Δ den Laplace-Beltrami-Operator auf Ω_n, so gilt auf Ω_n ([6], S. 39)

$$\Delta\, Y_m(u)+m(m+n-2)\, Y_m(u)=0. \tag{5.9}$$

Da die Funktion G k-mal stetig differenzierbar ist (mit einer geraden Zahl k), findet man nach $k/2$-maliger Benutzung der Gl. (5.9) und der Greenschen Formel die Gleichung

$$\begin{aligned} a_m^2 &= \int G(u)\, Y_m(u)\, d\Omega_u \\ &= \left[\frac{-1}{m(m+n-2)}\right]^{k/2} \int Y_m(u)\, \Delta^{k/2}\, G(u)\, d\Omega_u \end{aligned}$$

für $m>0$, wo $\Delta^{k/2}$ den $k/2$-mal iterierten Operator Δ bedeutet. Mit den Bezeichnungen

$$b_{mj} = \int Y_{mj}(u)\, \Delta^{k/2}\, G(u)\, d\Omega_u, \qquad b_m^2 = \sum_{j=1}^{N(n,m)} b_{mj}^2$$

ergibt sich nach Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|a_m| \leqq m^{-k}\, |b_m|.$$

Da die Funktion $\Delta^{k/2} G$ auf Ω_n stetig ist, konvergiert

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m^2,$$

es gilt also

$$|a_m| = o(m^{-k}).^{3} \tag{5.10}$$

Aus (5.6), (5.7), (5.8) und (5.10) ergibt sich schließlich

$$|\lambda_m^{-1}\, Y_m(u)| = O(m^{n-k}).$$

Wegen $k \geqq n+2$ folgt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (5.5) und damit die Behauptung des Hilfssatzes.

Wir bemerken noch, daß sich für $n=2$ und zweimal stetig differenzierbare Funktionen G die Lösung der Integralgleichung (5.1) leicht explizit angeben läßt; es gilt nämlich, wenn wir das Argument von G als Winkel schreiben,

$$G(\varphi) = \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi-\psi)| \left[G\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) + G''\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right] d\psi.$$

Man bestätigt diese Gleichung durch partielle Integration (für $n=3$ vgl. BLASCHKE [*1*], S. 149, Formel (**)). –

Für einen Körper $K \in \mathfrak{K}_n$, dessen Stützfunktion zweimal stetig differenzierbar ist, läßt sich die r-te Oberflächenfunktion bekanntlich als unbestimmtes (Lebesguesches) Integral einer stetigen Funktion auf Ω_n ausdrücken, nämlich der r-ten (normierten) elementarsymmetrischen Funktion der Hauptkrümmungs-

[3] Für $n=2$ ist diese Aussage über die Größenordnung der Fourierkoeffizienten einer Funktion der Klasse C^k wohlbekannt; für Kugelfunktionen scheint (5.10) aber in der Literatur nicht vorhanden zu sein.

radien der Randfläche von K. Insbesondere ist

$$S_{n-1}(K;\omega)=\int_{\omega} s_{n-1}(K,u)\,d\Omega_u,$$

wo $s_{n-1}(K,u)$ das Produkt der Hauptkrümmungsradien der Randfläche von K im Punkt mit äußerem Normalenvektor u ist.

Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir:

Satz 3. *Sei $\bar{K}\in\mathfrak{K}_n$ ein zentralsymmetrischer konvexer Körper mit $\bar{K}\notin\mathfrak{S}_n$. Die Stützfunktion von $\bar{K}$ sei k-mal stetig differenzierbar mit geradem $k\geqq n+2$, und die Krümmungsfunktion $s_{n-1}(\bar{K},u)$ sei auf Ω_n positiv. Dann existiert ein zentralsymmetrischer konvexer Körper $K\in\mathfrak{K}_n$ mit*

$$v_{n-1}(K,u)>v_{n-1}(\bar{K},u) \qquad \textit{für alle } u\in\Omega_n,$$

aber

$$V_n(K)<V_n(\bar{K}).$$

Beweis. O.B.d.A. liege der Mittelpunkt von $\bar{K}$ im Koordinatenursprung. Die Stützfunktion $p(\bar{K},u)$ des Körpers $\bar{K}$ ist dann eine gerade Funktion der Klasse C^k auf Ω_n, sie läßt sich also nach dem Hilfssatz darstellen in der Form

$$p(\bar{K},u)=\int |u\cdot w|\,f(w)\,d\Omega_w \tag{5.11}$$

mit einer geraden, stetigen Funktion f. Angenommen, es wäre $f\geqq 0$ auf Ω_n. Man kann das Integral in (5.11) gleichmäßig in u approximieren durch eine Folge von Summen der Form

$$\sum_{j=1}^{s} |u\cdot w_j|\,f(w_j)\int_{\omega_j} d\Omega$$

mit $\omega_j\subset\Omega_n$ und $w_j\in\omega_j$. Wegen $f(w_j)\geqq 0$ ist jede dieser Summen eine endliche Linearkombination mit nicht negativen Koeffizienten von Stützfunktionen von Strecken. $\bar{K}$ ist also durch endliche Vektorsummen von Strecken approximierbar, entgegen der Voraussetzung.

Da also die gerade, stetige Funktion f negative Werte annimmt, kann man auf Ω_n eine gerade Funktion $G(u)$ der Klasse C^k wählen mit

$$G(u)\begin{cases}\geqq 0, & \text{wenn } f(u)<0\\ =0 & \text{sonst}\\ \not\equiv 0.\end{cases}$$

Nach dem Hilfssatz gibt es eine gerade, stetige Funktion $g(u)$ auf Ω_n mit

$$G(u)=\int |u\cdot w|\,g(w)\,d\Omega_w.$$

Nach Voraussetzung hat die Krümmungsfunktion $s_{n-1}(\overline{K}, u)$ auf Ω_n ein positives Minimum. Wir können daher annehmen, daß die Funktion

$$h(u) = s_{n-1}(\overline{K}, u) + g(u)$$

auf Ω_n positiv ist (andernfalls ersetze man G durch λG mit genügend kleinem positivem λ). Da h eine gerade Funktion ist, gilt

$$\int u\, h(u)\, d\Omega_u = 0.$$

Nach dem (bereits im 3. Abschnitt benutzten) Satz von MINKOWSKI existiert daher ein zentralsymmetrischer konvexer Körper $K \in \mathfrak{K}_n$, für den das unbestimmte Integral der Funktion h die Oberflächenfunktion ist:

$$S_{n-1}(K; \omega) = \int_\omega h(u)\, d\Omega_u.$$

Für die $(n-1)$-dimensionalen Inhalte der Projektionen von $\overline{K}$ und K gilt nach (2.6)

$$\begin{aligned} 2[v_{n-1}(K, u) - v_{n-1}(\overline{K}, u)] &= \int |u \cdot w|\, S_{n-1}(K; d\Omega_w) - \int |u \cdot w|\, S_{n-1}(\overline{K}; d\Omega_w) \\ &= \int |u \cdot w|\, [h(w) - s_{n-1}(\overline{K}, w)]\, d\Omega_w \\ &= \int |u \cdot w|\, g(w)\, d\Omega_w \\ &= G(u) \geqq 0. \end{aligned}$$

Ferner ist nach (2.4), (2.5) und (5.11)

$$\begin{aligned} n[V_n(\overline{K}) - V_{1,n-1}(\overline{K}, K)] &= \int p(\overline{K}, u)\, S_{n-1}(\overline{K}; d\Omega_u) - \int p(\overline{K}, u)\, S_{n-1}(K; d\Omega_u) \\ &= \int p(\overline{K}, u)\, [s_{n-1}(\overline{K}, u) - h(u)]\, d\Omega_u \\ &= -\int \{\int |u \cdot w|\, f(w)\, d\Omega_w\}\, g(u)\, d\Omega_u \\ &= -\int \{\int |u \cdot w|\, g(u)\, d\Omega_u\}\, f(w)\, d\Omega_w \\ &= -\int G(w)\, f(w)\, d\Omega_w \\ &> 0 \end{aligned}$$

wegen der Wahl der Funktion G. Mit Hilfe der Ungleichung (2.1) findet man

$$V_n(\overline{K}) > V_n(K).$$

Um den in Satz 3 verlangten Körper zu erhalten, braucht man nur K mit einem hinreichend kleinen Faktor > 1 zu strecken.

Zur Ergänzung von Satz 3 bleibt zu zeigen, daß die Voraussetzungen des Satzes erfüllbar sind: Die Menge $\hat{\mathfrak{K}}_n^k \subset \mathfrak{K}_n$ der zentralsymmetrischen Körper mit k-mal stetig differenzierbarer Stützfunktion und überall positiver Krümmungsfunktion s_{n-1} liegt in der Menge $\hat{\mathfrak{K}}_n$ aller zentralsymmetrischen konvexen

Körper des R^n dicht. $\mathfrak{S}_n$ ist in $\hat{\mathfrak{K}}_n$ abgeschlossen. Daher folgt aus der Existenz eines Körpers aus $\hat{\mathfrak{K}}_n$, der nicht aus $\mathfrak{S}_n$ ist, auch die Existenz von Körpern aus $\hat{\mathfrak{K}}_n^k$, die nicht in $\mathfrak{S}_n$ enthalten sind. Für $n \geqq 3$ (bekanntlich ist $\hat{\mathfrak{K}}_2 = \mathfrak{S}_2$) ist die Existenz von Körpern aus $\hat{\mathfrak{K}}_n - \mathfrak{S}_n$ aber von SHEPHARD [7] gezeigt worden; das Oktaeder bzw. seine höherdimensionalen Verallgemeinerungen gehören dazu.

Zusatz bei der Korrektur. In den inzwischen erschienenen Proceedings of the Colloquium on Convexity (Copenhagen 1965), Københavns Universitets Matematiske Institut 1967, findet sich eine Arbeit von C. M. PETTY, Projection bodies, S. 234—241, in der u.a. ähnliche Fragen wie oben behandelt werden. Insbesondere wird dort auch Satz 1 (Theorem 2) und ein Spezialfall von Satz 2 (Theorem 5) bewiesen.

Literatur

[1] BLASCHKE, W.: Kreis und Kugel, 2. Aufl. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1956.
[2] BONNESEN, T., u. W. FENCHEL: Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer 1934.
[3] BUSEMANN, H.: Convex surfaces. New York: Interscience Publ. 1958.
[4] COURANT, R., and D. HILBERT: Methods of mathematical physics, vol. I. New York: Interscience Publ. 1953.
[5] FENCHEL, W., u. B. JESSEN: Mengenfunktionen und konvexe Körper. Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **16**, 3, 1—31 (1938).
[6] MÜLLER, C.: Spherical harmonics. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
[7] SHEPHARD, G. C.: Approximation problems for convex polyhedra. Mathematika **11**, 9—18 (1964).
[8] — Shadow systems of convex bodies. Israel J. Math. **2**, 229—236 (1964).

Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt am Main