PLAUMANN, P.
Math. Zeitschr. 99, 123—140 (1967)

Erweiterungen kompakter Gruppen durch abelsche Gruppen

PETER PLAUMANN

Eingegangen am 24. Oktober 1966

Herrn REINHOLD BAER zum 65. Geburtstag am 22. 7. 1967 gewidmet

Das Ziel unserer Untersuchungen ist es, die Klasse $\mathfrak{D}$ der lokal kompakten Gruppen mit kompakter Kommutatorgruppe und die Klasse $\mathfrak{Z}$ der lokal kompakten Gruppen mit kompakter Zentrumsfaktorgruppe durch Angabe äquivalenter Eigenschaften zu charakterisieren. In der Kategorie der diskreten Gruppen finden wir ein Vorbild in den Veröffentlichungen von B. H. NEUMANN ([1951] und [1954]), BAER, EREMIN und MACDONALD. Wir zitieren die betreffenden Resultate in Satz 3.1 bzw. 3.2, wobei wir wegen eines ausführlichen Überblicks auf die Einleitung zu MACDONALD verweisen.

Im hier vorgelegten ersten Teil unserer Arbeit wenden wir uns der Kategorie der lokal kompakten, zusammenhängenden Gruppen zu. Aus IWASAWA [1951] ist bekannt, daß die in dieser Kategorie enthaltenen Gruppen aus der Klasse $\mathfrak{D}$ genau die Gruppen mit beliebig kleinen invarianten Umgebungen der Eins sind. In Analogie zu Satz 3.1 zeigen wir in Satz 4.1 die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften:

Kompaktheit der abgeschlossenen Hülle der Kommutatorgruppe,

Kompaktheit der Restklassenräume nach den normalen Hüllen aller (respektive aller zur additiven Gruppe der reellen Zahlen isomorphen) Untergruppen,

Kompaktheit der abgeschlossenen Hüllen der Klassen konjugierter Elemente.

Für die Klasse $\mathfrak{Z}$ leistet der Satz 4.2 Entsprechendes. Danach sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

Kompaktheit der Faktorgruppe nach dem Zentrum respektive der zusammenhängenden Komponente des Zentrums,

Kompaktheit der abgeschlossenen Hülle der Kommutatorgruppe zusammen mit der Existenz einer zusammenhängenden abelschen Untergruppe mit kompaktem Restklassenraum,

Kompaktheit über den Komponenten der Normalisatoren bestimmter Klassen von Untergruppen, (wie der Klasse aller abelschen Untergruppen oder der Klasse aller Untergruppen, in denen eine von zwei Elementen erzeugte Untergruppe dicht liegt),

Isomorphie zum direkten Produkt einer Vektorgruppe und einer kompakten Gruppe.

Die letztgenannte Strukturaussage hat für diskrete Gruppen kein Gegenstück.

Unter den verwendeten Hilfsmitteln nimmt der Zerfällungssatz aus IWASAWA [1949] (Lemma 3.8) eine prominente Stelle ein. Wir zitieren ihn in der verallgemeinerten Form von HOFMANN-MOSTERT, Theorem XVI als unseren Satz 1.1. Hierzu verweisen wir noch auf FREUDENTHAL [1964], TITS und HOFMANN. Resultate aus der Theorie der lokal kompakten Gruppen zitieren wir durchgängig nach IWASAWA [1949] und HEWITT-ROSS, ohne der Frage nachzugehen, welches die ursprüngliche Quelle ist.

Mein besonderer Dank gilt Herrn H. SALZMANN, der diese Arbeit angeregt hat und mir während ihrer Anfertigung stets mit Rat zur Seite stand.

Bezeichnungen

Alle unsere Aussagen beziehen sich auf die Kategorie der lokal kompakten Gruppen. Die Objekte dieser Kategorie werden wir mit „Gruppen" bezeichnen und die Morphismen — d.h. die abstrakten Homomorphismen, die zugleich stetige und offene Abbildungen sind — mit „Homomorphismen". Damit Untergruppen auch Unterobjekte sind, ist es sinnvoll, nur abgeschlossene Untergruppen zu betrachten. Die Bezeichnung „stetiger Homomorphismus" verwenden wir für abstrakte Homomorphismen, die stetig, aber nicht notwendig offen sind. Wegen der übrigen Terminologie verweisen wir auf die nachfolgende Aufstellung.

G_d — die der Gruppe G zugrunde liegende abstrakte Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie.

$N_G H$ — Normalisator von H in G

$C_G H$ — Zentralisator von H in G

$H_G H$ — kleinster Normalteiler von G, der H umfaßt

$\{T\}$ — die von der Teilmenge T erzeugte abstrakte Untergruppe von G

$x^g = g^{-1}xg$

$[x, y] = x^{-1}x^y$

$[X, Y] = [[x, y] \mid x \in X, y \in Y]$

$D(X, Y) = \overline{\{[X, Y]\}}$

${}_1D(X, G) = D(X, G), \ldots, {}_iD(X, G) = D({}_{i-1}D(X, G), G)$

${}_1D(G, G) = DG, \ldots, {}_iD(G, G) = {}_iDG$

$D_1(G, G) = DG, \ldots, D_iG = D(D_{i-1}G, D_{i-1}G)$

$ZG = Z_1G$ — Zentrum von G

Z_iG definiert durch $Z_iG/Z_{i-1}G = Z(G/Z_{i-1}G)$

G_0 — zusammenhängende Komponente der Eins in G

$G\colon A$ — Raum der linken Nebenklassen von G modulo A, versehen mit der Quotiententopologie

$P_{\alpha \in A} G_\alpha$ — cartesisches Produkt der Gruppen G_α, versehen mit der Produkttopologie

$P_{\alpha \in A} G_\alpha$ $= G_1 \times \cdots \times G_n$, wenn $A = [1, 2, \ldots, n]$ endlich ist.

$\chi(G)$ — charakteristischer Index von G (siehe IWASAWA [1949], Lemma 4.10)

$\boldsymbol{R}$ — additive Gruppe der reellen Zahlen mit ihrer natürlichen Topologie

$\boldsymbol{Z}$ — additive Gruppe der ganzen Zahlen mit der diskreten Topologie

$\boldsymbol{K}$ — $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$.

1. Wir geben zunächst einige Lemmata an, die sich mit der Stetigkeit von Projektionen einer Gruppe auf Restklassenräume befassen. Entsprechende Sätze für Faktorgruppen finden sich in der Literatur an vielen Stellen. Wir verweisen hierzu etwa auf HEWITT-ROSS, Kapitel II.5. Die dort gegebenen Beweise lassen sich in den meisten Fällen ziemlich ungeändert auf unsere Situation übertragen.

Lemma 1.1. *Für zwei Untergruppen A und B der Gruppe G mit $A \subseteq B$ wird durch*

$$\pi\colon\ x \cdot A : A \in G : A \longrightarrow x \cdot B : B \in G : B$$

eine stetige und offene Abbildung von $G:A$ auf $G:B$ definiert.

Beweis. Sei U_A eine offene Menge in $G:A$. Dann gibt es eine offene Menge U in G, so daß $U_A = UA:A$ ist. Also ist

$$\pi(U_A) = \pi(UA:A) = UB:B$$

eine offene Menge in $G:B$.

Sei umgekehrt $V_B = VB:B$ eine offene Menge in $G:B$. Dann ist

$$\overset{\leftarrow}{\pi}(V_B) = \overset{\leftarrow}{\pi}(VB:B) = VBA:A$$

eine offene Menge in $G:A$.

Lemma 1.2. *Seien A und B Untergruppen der Gruppe G mit $G = AB$. Dann ist die natürliche Abbildung φ von $A:(A \cap B)$ auf $(AB):B$, die durch*

$$\varphi\colon\ x(A \cap B):(A \cap B) \longrightarrow xB:B$$

definiert ist, eineindeutig und stetig.

Beweis. Daß aus den Voraussetzungen des Lemmas die Eineindeutigkeit von φ folgt, ist aus der abstrakten Gruppentheorie bekannt. Wir werden nun zeigen, daß φ^{-1} eine offene Abbildung ist. Sei also V eine offene Teilmenge von $(AB):B$. Dann gibt es eine Teilmenge U von A, für die $V = UB:B$ ist. Insbesondere ist also UB in G offen. Nach dem Dedekindschen modularen Gesetz ist $U(A \cap B) = A \cap UB$. Daraus folgt, daß

$$\varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}(UB:B) = U(A \cap B):(A \cap B) = (A \cap UB):(A \cap B)$$

eine offene Teilmenge von $A:(A \cap B)$ ist.

Lemma 1.3. *Seien A und B zwei Untergruppen der Gruppe G, für die $G = AB$ ist. Dafür, daß die natürliche Abbildung φ von $A:(A \cap B)$ auf $AB:B$ ein Homöomorphismus ist, ist jede der folgenden Bedingungen hinreichend:*

α) *$AB:B$ ist diskret,*

β) *$A:(A \cap B)$ ist kompakt,*

γ) *A ist σ-kompakt, und B ist in G normal.*

Beweis. Nach Lemma 1.2 ist φ eine eineindeutige und stetige Abbildung. Dann folgt aber aus α) oder β), daß φ ein Homöomorphismus ist. Daß auch

γ) eine hinreichende Bedingung dafür ist, ist der Inhalt von Theorem 5.33 aus HEWITT-ROSS.

Lemma 1.4. *Sei A eine Untergruppe der Gruppe G. Der Restklassenraum $G:A$ ist dann und nur dann kompakt, wenn es eine kompakte Teilmenge K von G gibt, für die $G=KA$ ist.*

Beweis. Wenn $G:A$ kompakt ist, so folgt die Behauptung nach HEWITT-ROSS, Note 5.24b. Sei umgekehrt K eine kompakte Teilmenge von G, für die $G=KA$ ist. Dann induziert die Restklassenprojektion von G auf $G:A$ eine stetige Abbildung von K auf $G:A$. Also ist $G:A$ kompakt.

Lemma 1.5. *Seien A und B Untergruppen der Gruppe G, für die $A\subseteq B$ ist. Wenn die Räume $G:B$ und $B:A$ kompakt sind, so ist auch $G:A$ kompakt.*

Beweis. Da $G:B$ und $B:A$ kompakt sind, gibt es nach Lemma 1.4 kompakte Teilmengen K von G und L von B, so daß $G=KB$ und $B=LA$ ist. Also ist $G=KLA$. Da aber KL eine kompakte Teilmenge von G ist, folgt aus Lemma 1.4, daß $G:A$ kompakt ist.

Lemma 1.6. *Sei G eine Gruppe und seien A und B Untergruppen von G, für die $G:A$ endlich und $G:B$ kompakt ist. Dann ist $G:(A\cap B)$ kompakt.*

Beweis. Aus der Endlichkeit von $G:A$ folgt die Endlichkeit von $B:(A\cap B)$. Wegen Lemma 1.5 ist also $G:(A\cap B)$ kompakt.

Lemma 1.7. *Sei A eine offene, zusammenhängende Untergruppe der Gruppe G, und sei N ein Normalteiler von G. Dann ist AN/N zu $A/(A\cap N)$ isomorph. Wenn insbesondere G/N kompakt ist, so ist auch $A/(A\cap N)$ kompakt.*

Beweis. Da A eine offene Untergruppe von G ist, ist auch AN in G offen und damit abgeschlossen. Also ist die Behauptung wegen Lemma 1.3 γ erfüllt, da A als zusammenhängende Gruppe σ-kompakt ist.

Wenn G/N kompakt ist, so ist auch AN/N als abgeschlossene Teilmenge von G/N kompakt. Daraus folgt die zusätzliche Bemerkung des Lemmas.

Lemma 1.8. *Seien A und B vertauschbare Untergruppen der Gruppe G. Wenn B und $G:AB$ kompakt sind, so ist auch $G:A$ kompakt.*

Beweis. Nach Lemma 1.4 ist $AB:A$ kompakt. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.5.

Lemma 1.9. *Sei π ein Epimorphismus der Gruppe G auf die Gruppe H, sei X eine Untergruppe von G, und sei Y die abgeschlossene Hülle von X^π in H. Wenn $G:X$ kompakt ist, so ist auch $H:Y$ kompakt.*

Beweis. Wenn $G:X$ kompakt ist, so gibt es nach Lemma 1.4 eine kompakte Teilmenge K von G, so daß $G=KX$ ist. Wegen der Stetigkeit von π ist dann K^π eine kompakte Teilmenge von H, und es ist

$$H=K^\pi\cdot X^\pi=K^\pi\cdot Y.$$

Nach Lemma 1.4 folgt daraus, daß $H:Y$ kompakt ist.

Lemma 1.10. *Wenn für ein Element g der Gruppe G der Raum g^G lokal kompakt ist, so ist g^G zu $G:C_G(g)$ homöomorph.*

Beweis. Ein Beweis dieser aus der Theorie der Transformationsgruppen wohlbekannten Tatsache findet sich etwa in FREUDENTHAL [1936], Nr. 26.

Zum bequemeren Zitieren fügen wir die folgenden beiden Zerfällungssätze an, die wir oft benötigen werden.

Satz 1.1. *Wenn die Gruppe G eine Vektoruntergruppe V mit kompaktem $G:V$ besitzt, so gibt es in G einen zu V isomorphen Normalteiler N und eine kompakte Untergruppe K, so daß $G=VK$ ist.*

Beweis. HOFMANN-MOSTERT, Theorem XVI.

Satz 1.2. *Wenn in einer abelschen Gruppe G die Komponente G_0 offen ist, so ist G zu dem direkten Produkt von G_0 und G/G_0 isomorph.*

Beweis. HEWITT-ROSS, 24.45.

2. Für spätere Anwendung benötigen wir einige Ergebnisse über die obere Zentralreihe einer zusammenhängenden Gruppe. Wir werden diese Resultate, die für Liegruppen aus der Kenntnis der nilpotenten Liealgebren herzuleiten sind, mit andersartigen Hilfsmitteln beweisen.

Lemma 2.1. *Sei N ein Normalteiler der Gruppe G, sei γ der natürliche Epimorphismus von G auf $G/C_G N$, sei U eine Umgebung der Eins in G, und sei T eine Teilmenge von G mit kompaktem T^γ. Dann enthält U eine Umgebung V der Eins in G, für die $(V\cap N)^T \subseteq U$ ist.*

Beweis. Wie in HEWITT-ROSS beim Beweis zu Theorem 4.9 gezeigt wird, gibt es zu jedem Element $g\in G$ eine Umgebung $V_g\subseteq U$ der Eins in G, so daß für alle $x\in g V_g$ die Beziehung $V_g^x\subseteq U$ gilt. Die Familie $[g V_g \mid g\in G]$ bildet eine offene Überdeckung von G. Da der Epimorphismus γ eine offene Abbildung ist, bildet die Familie $[g^\gamma V_g^\gamma \mid g\in G]$ eine offene Überdeckung von G^γ. Nun ist T^γ eine kompakte Teilmenge von G^γ. Also gibt es endlich viele Elemente $g_1, \dots, g_n$ von G, so daß

$$T^\gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (g_i^\gamma V_{g_i}^\gamma)$$

ist. Wir setzen nun

$$V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i}.$$

Dann ist V eine in U enthaltene Umgebung der Eins in G. Zu jedem $t\in T$ gibt es ein $c\in C_G N$ und eine natürliche Zahl k, $1\leqq k\leqq n$, mit $ct\in g_k V_{g_k}$. Nach Konstruktion von V_{g_k} ist dann $V_{g_k}^{ct}\subseteq U$. Also ist

$$(V_{g_k}\cap N)^{ct}=(V_{g_k}\cap N)^t\subseteq U.$$

Daraus folgt aber, daß

$$(V\cap N)^t\subseteq (V_{g_k}\cap N)^t\subseteq U$$

ist, was zu zeigen war.

Wenn A und B abelsche Gruppen sind, so wird die abstrakte Gruppe $\mathrm{Hom}(A, B)$ zu einer topologischen Gruppe, wenn man sie mit der kompakt-offenen Topologie versieht. Eine Basis für die Umgebungen der Eins besteht dabei aus den Mengen der Form

$$B(C, V) = [\eta \in \mathrm{Hom}(A, B) \mid C^\eta \subseteq V],$$

wobei C eine kompakte Teilmenge von A und V eine Umgebung der Eins in B ist. (Siehe HEWITT-ROSS, 23.34.)

Lemma 2.2. *Seien A und B Untergruppen der Gruppe G, die folgenden Bedingungen genügen:*

(a) $B \subseteq N_G A$,

(b) $D(A, DB) = 1$,

(c) $D(D(A, B), A) = 1$,

(d) $D(D(A, B), B) = 1$.

Dann wird durch die Vorschrift

$$a^\mu(b \cdot DB) = [a, b], \qquad \text{für } a \in A,\ b \in B$$

ein stetiger Homomorphismus μ von A in die Gruppe $H = \mathrm{Hom}(B/DB, D(A, B))$ definiert.

Beweis. Wegen Bedingung (a) ist $D(A, B)$ in A enthalten. Also folgt aus Bedingung (c), daß $D(A, B)$ eine abelsche Gruppe ist.

Wenn $b \cdot DB = c \cdot DB$ ist, so ist wegen Bedingung (b) für alle $a \in A$ die Beziehung $a^\mu(b \cdot DB) = a^\mu(c \cdot DB)$ erfüllt. Daraus folgt, daß a^μ auf B/DB eindeutig definiert ist.

Sei nun $a \in A$ und seien $x, y \in B$. Nach Bedingung (b) gilt

$$\begin{aligned} a^\mu(x y \cdot DB) &= [a, x y] = [a, y] \cdot [a, x]^y = [a, x] \cdot [a, y] \\ &= a^\mu(x \cdot DB) \cdot a^\mu(y \cdot DB). \end{aligned}$$

Also liegt a^μ in H.

Seien $x, y \in A$, und sei $b \in B$. Wegen (d) ist dann

$$\begin{aligned} (x \cdot y)^\mu(b \cdot DB) &= [x y, b] = [x, b]^y \cdot [y, b] = [x, b] \cdot [y, b] \\ &= x^\mu(b \cdot DB) \cdot y^\mu(b \cdot DB). \end{aligned}$$

Das heißt, daß μ ein abstrakter Homomorphismus ist.

Es bleibt die Stetigkeit von μ zu zeigen. Dazu betrachten wir die Menge $B(\bar{C}, \bar{V})$ in H, wobei $\bar{C}$ eine kompakte Teilmenge von B/DB und $\bar{V}$ eine Umgebung der Eins in $D(A, B)$ ist. Sei C das Urbild von $\bar{C}$ in B, und sei V eine Umgebung der Eins in G, für die $\bar{V} = V \cap D(A, B)$ ist. Wir wählen eine symmetrische Umgebung U der Eins in G, so daß $U^2 \subseteq V$ ist. Mit σ bezeichnen wir den natürlichen Epimorphismus von $N_G A$ auf $N_G A/C_G A$. Nach (a) ist B und damit C in $N_G A$ enthalten, und wegen Bedingung (c) ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & C^\sigma \\ \bar{C} \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

Dabei ist π die Restklassenprojektion von B auf B/DB und δ die Abbildung

$$\delta\colon\ x\cdot DB\in B/DB \longrightarrow x\cdot C_G A\in N_G A/C_G A\,.$$

Da $\bar{C}$ kompakt ist, da ferner π offen und σ stetig ist, folgt, daß $C^\sigma = C^{\pi\delta} = \bar{C}^\delta$ kompakt ist. Mit $T=C$ können wir also Lemma 2.1 auf $N_G A$ anwenden. Danach gibt es eine Umgebung W der Eins in G, für die $W\cap N_G A\subseteq U\cap N_G A$ ist, so daß $(W\cap A)^C\subseteq U$ gilt. Wir setzen $\overline{W}=W\cap A$. Dann ist

$$\overline{W}^\mu(\bar{C}) = [\overline{W}, C] \subseteq \overline{W}^{-1}\,\overline{W}^C \subseteq U^2 \subseteq V.$$

Also ist $\overline{W}^\mu(\bar{C})$ in $\bar{V}$ enthalten, woraus die Beziehung $\overline{W}^\mu\subseteq B(\bar{C}, \bar{V})$ folgt. Das heißt aber, daß μ eine stetige Abbildung ist.

Definition. Eine Gruppe G heißt *kompaktfrei*, wenn 1 eine maximale kompakte Untergruppe von G ist.

Satz 2.1. *Wenn die Gruppe G zusammenhängend ist, so ist die Faktorgruppe $Z_2 G/ZG$ kompaktfrei.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß G eine Liegruppe ist. Wenn wir $A=Z_2 G$ und $B=G$ setzen, so sind ersichtlich die Voraussetzungen (a) bis (d) von Lemma 2.2 erfüllt. Der Kern des stetigen Homomorphismus μ ist in diesem Fall die Untergruppe ZG, so daß μ einen stetigen Monomorphismus $\bar{\mu}$ von $Z_2 G/ZG$ in $\operatorname{Hom}(G/DG, D(G, Z_2 G))$ induziert. Mit G sind auch G/DG und $D(G, Z_2 G)$ zusammenhängende Liegruppen. Da beide Gruppen abelsch sind, gibt es nicht negative ganze Zahlen r, s, t, u, so daß

$$G/DG \cong \boldsymbol{R}^r\times\boldsymbol{K}^t \quad\text{und}\quad D(G, Z_2 G)\cong\boldsymbol{R}^s\times\boldsymbol{K}^u$$

ist. Demnach ist

$$H=\operatorname{Hom}(G/DG, D(G, Z_2 G))\cong\operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^r\times\boldsymbol{K}^t, \boldsymbol{R}^s\times\boldsymbol{K}^u)\,.$$

Nach Hewitt-Ross, 23.34 ergibt sich weiter:

$$H\cong\operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^r, \boldsymbol{R}^s)\times\operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^r, \boldsymbol{K}^u)\times\operatorname{Hom}(\boldsymbol{K}^t, \boldsymbol{R}^s)\times\operatorname{Hom}(\boldsymbol{K}^t, \boldsymbol{K}^u)\,.$$

Über die einzelnen direkten Faktoren, die hier auftreten, weiß man folgendes (s. Hewitt-Ross, 23.27 und 26.18):

$$\operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^r, \boldsymbol{R}^s)\cong\boldsymbol{R}^{r+s}, \qquad \operatorname{Hom}(\boldsymbol{R}^r, \boldsymbol{K}^u)\cong\boldsymbol{R}^{r+u},$$
$$\operatorname{Hom}(\boldsymbol{K}^t, \boldsymbol{R}^s)=0, \qquad \operatorname{Hom}(\boldsymbol{K}^t, \boldsymbol{K}^u)\cong\boldsymbol{Z}^{t+u}.$$

Also ist $H \cong \boldsymbol{R}^{2r+s+u} \times \boldsymbol{Z}^{t+u}$ und damit eine kompaktfreie Gruppe. Dasselbe gilt dann auch für die Gruppe $Z_2 G/ZG$.

Als zusammenhängende Gruppe ist G nach MONTGOMERY-ZIPPIN, Theorem 4.6 projektiver Limes von Liegruppen. Also gibt es eine Familie $\mathfrak{N}$ von Normalteilern von G, die sämtlich kompakt sind und für die $\bigcap \mathfrak{N} = 1$ ist, so daß für alle $N \in \mathfrak{N}$ die Faktorgruppe G/N eine Liegruppe ist.

Sei nun K eine Untergruppe von $Z_2 G$ und sei $N \in \mathfrak{N}$. Wenn K/ZG kompakt ist, so ist auch $KN/(ZG)N$ kompakt. Es gelten die Beziehungen $KN/N \subseteq Z_2(G/N)$ und $(ZG)N/N \subseteq Z(G/N)$. Andererseits ist $F = (KN/N)/((ZG)N/N)$ zu $KN/(ZG)N$ isomorph und damit kompakt. Dann ist aber auch $(KN/N)\,Z(G/N)/Z(G/N)$ als stetiges Bild von F kompakt.

Nach dem oben gezeigten ist $Z_2(G/N)/Z(G/N)$ eine kompaktfreie Gruppe. Daraus folgt, daß KN/N in $Z(G/N)$ enthalten ist. Also gilt die Beziehung

$$D(K, G) \subseteq D(KN, G) \subseteq N.$$

Da dies für alle $N \in \mathfrak{N}$ gilt, ist $D(K, G) \subseteq \bigcap \mathfrak{N} = 1$. Demnach liegt K in ZG q.e.d.

Korollar 2.1. *Sei G eine nilpotente zusammenhängende Gruppe. Dann ist für alle natürlichen Zahlen n die Faktorgruppe $G/Z_n G$ kompaktfrei.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist für eine natürliche Zahl k falsch. Dann gibt es eine echte Obergruppe K von $Z_k G$ in G, für die $K/Z_k G$ kompakt ist. Da G nilpotent ist, gibt es eine natürliche Zahl $n > k$, für die $K \subseteq Z_n G$ aber $K \nsubseteq Z_{n-1} G$ ist. Als stetiges Bild von $K/Z_k G$ ist die Faktorgruppe $F = K \cdot Z_{n-1} G/Z_{n-1} G$ kompakt. Andererseits ergibt Anwendung von Satz 2.1 auf die Gruppe $G/Z_{n-2} G$, daß die Faktorgruppe $Z_n G/Z_{n-1} G$ und deren Untergruppe F kompaktfrei ist. Es folgt, daß $F = 1$ und somit $K \subseteq Z_{n-1} G$ ist, im Widerspruch zu der oben gemachten Annahme.

Das Folgende zeigt, daß für viele Zwecke die obere Zentralreihe einer zusammenhängenden Gruppe durch die Reihe der Zusammenhangskomponenten der Zentren ersetzt werden kann.

Lemma 2.3. *Sei G eine zusammenhängende nilpotente Gruppe. Für jede natürliche Zahl k ist dann $Z_k G$ eine reine Untergruppe von G und damit teilbar.*

Beweis. Sei x ein Element von $Z_k G$, zu dem es $y \in G$ und eine natürliche Zahl n gibt, so daß $x = y^n$ ist. Dann erzeugt $y \cdot Z_k G$ eine endliche Untergruppe von $G/Z_k G$. Diese Gruppe ist aber nach Korollar 2.1 kompaktfrei. Also ist $y \in Z_k G$. In PLATONOV wird gezeigt, daß eine zusammenhängende nilpotente Gruppe teilbar ist. Daraus folgt die Teilbarkeit der reinen Untergruppe $Z_k G$.

Lemma 2.4. *Sei G eine zusammenhängende Gruppe. Wenn ZG total unzusammenhängend ist, so ist $ZG = Z_2 G$.*

Beweis. Sei $xZG \in Z(G/ZG) = Z_2 G/ZG$. Dies ist damit äquivalent, daß $D(x, G) \subseteq ZG$ ist. Da aber die Gruppe $D(x, G)$ zusammenhängend ist, folgt daraus $D(x, G) = 1$.

Lemma 2.5. *Sei G eine zusammenhängende nilpotente Liegruppe. Dann ist auch ZG zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen, die Behauptung ist falsch. Dann gibt es eine zusammenhängende nilpotente Liegruppe H minimaler Dimension >1, für die ZH nicht zusammenhängend ist. Nach Satz 1.2 ist ZH das direkte Produkt von $(ZH)_0$ und einer diskreten Gruppe D. Wegen Lemma 2.3 ist ZH teilbar, also auch der direkte Faktor D. Mit η bezeichnen wir den kanonischen Epimorphismus von H auf $H/(ZH)_0$. Nach Lemma 2.4 ist $(ZH)_0 \neq 1$. Also ist $\dim H^\eta < \dim H$. Wegen der Minimalität von $\dim H$ ist dann $Z(H^\eta)$ zusammenhängend. Andererseits enthält $Z(H^\eta)$ die zu D isomorphe diskrete Untergruppe D^η. Nach HEWITT-ROSS, Theorem 6.12 ist aber D^η ein direkter Faktor von $Z(H^\eta)$, q.e.a.

Satz 2.2. *Sei G eine zusammenhängende nilpotente Gruppe. Dann ist für jede natürliche Zahl k die Untergruppe $Z_k G$ zusammenhängend.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß ZG von einer kompakten Menge E erzeugt wird. Dazu wählen wir einen kompakten Normalteiler N von G, für den G/N eine Liegruppe ist. Wegen Korollar 2.1 liegt N in ZG. Da ZG/N eine Liegruppe ist, läßt es sich als direktes Produkt von $(ZG/N)_0$ und einer diskreten Gruppe F darstellen, die nach Lemma 2.3 teilbar ist. Also ist F nach HEWITT-ROSS, Theorem 6.12 ein direkter Faktor der Gruppe $Z(G/N)$, welche wegen Lemma 2.5 zusammenhängend ist. Dies ist nur möglich, wenn $F=1$ und somit ZG/N zusammenhängend ist. Dann gibt es aber eine kompakte Teilmenge E/N von G/N, welche ZG/N erzeugt. Also ist E ein Erzeugendensystem von G, das wegen der Kompaktheit von N selbst kompakt ist.

Nach HEWITT-ROSS, Theorem 9.14 ist also ZG das direkte Produkt zweier Untergruppen A und B, wobei A zu $\boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{Z}^n$ isomorph ist und B kompakt ist. Nach Lemma 2.3 ist ZG teilbar. Also sind es auch die direkten Faktoren A und B. Wegen HEWITT-ROSS, Theorem 24.25 ist zunächst B zusammenhängend. Weiterhin muß $n=0$ sein, so daß auch A zusammenhängend ist. Also ist ZG zusammenhängend.

Wenn nun bereits gezeigt ist, daß $Z_n G$ zusammenhängend ist, so ist nach dem oben gezeigten die Gruppe $Z(G/Z_n G) = Z_{n+1} G/Z_n G$ zusammenhängend. Also ist auch $Z_{n+1} G$ zusammenhängend.

Satz 2.3. *Sei G eine zusammenhängende Gruppe. Für alle natürlichen Zahlen i und k ist dann*

$$Z_{k+i} G/(Z_k G)_0 = Z_i\big(G/(Z_k G)_0\big).$$

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir $H=(Z_k G)_0$. Sei Z diejenige Untergruppe von G, für die $Z/H = Z_i(G/H)$ ist. Nach Überlegungen aus der abstrakten Gruppentheorie ist klar, daß $Z \subseteq Z_{k+i} G$ ist. Sei nun $x \in Z_{k+i} G$. Dann folgt, daß ${}_iD(x, G) \subseteq Z_k G$ ist. Andererseits ist mit G auch die Gruppe ${}_iD(x, G)$ zusammenhängend. Also liegt ${}_iD(x, G)$ in H. Daraus folgt aber, daß $Z_{k+i} G \subseteq Z$ gilt.

Korollar 2.2. *Wenn in einer zusammenhängenden Gruppe G die Relation* $(Z_k G)_0 = (Z_{k+1} G)_0$ *gilt, so ist* $Z_{k+1} G = Z_{k+2} G$.

Beweis. Wenn $(Z_k G)_0 = (Z_{k+1} G)_0$ ist, so ist die Gruppe

$$F = Z_{k+1} G / (Z_{k+1} G)_0 = Z_{k+1} G / (Z_k G)_0$$

total unzusammenhängend. Nach Satz 2.3 ist $F = Z(G/(Z_k G)_0)$. Daraus ergibt sich nach Lemma 2.4, daß $F = Z_2(G/(Z_k G)_0)$ ist. Wieder nach Satz 2.3 folgt daraus, daß

$$Z_{k+1} G/(Z_k G)_0 = Z(G/(Z_k G)_0) = Z_2(G/(Z_k G)_0) = Z_{k+2} G/(Z_k G)_0$$

ist. Daraus folgt $Z_{k+1} G = Z_{k+2} G$, wie behauptet war.

3. Nun definieren wir die Eigenschaften lokal kompakter Gruppen, die der Gegenstand dieser Untersuchung sind. Wir zitieren, welche Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften in der Kategorie der diskreten Gruppen bestehen. Danach beweisen wir einige Lemmata über die Vererblichkeit auf Untergruppen und Faktorgruppen.

Definition 1. Die Gruppe G habe die Eigenschaft $\mathfrak{z}$ (resp. $\mathfrak{z}_0$), wenn die Faktorgruppe G/ZG (resp. $G_0/(ZG_0)_0$) kompakt ist.

2. Sei $\mathfrak{X}$ eine Menge von Untergruppen der Gruppe G. Wenn für alle $H \in \mathfrak{X}$ der Raum $G : N_G H$ (resp. $G_0 : (N_G H)_0$) kompakt ist, so sagen wir, die Gruppe G habe die Eigenschaft $\mathfrak{n}(\mathfrak{X})$ (resp. $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{X})$). Wenn für alle $H \in \mathfrak{X}$ der Raum $H_G H : H$ kompakt ist, so habe G die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{X})$.

3. Eine Gruppe G habe die Eigenschaft $\mathfrak{d}$, wenn ihre Kommutatorgruppe DG kompakt ist.

4. Die Gruppe G habe die Eigenschaft $\mathfrak{k}$ (resp. $\bar{\mathfrak{k}}$), wenn für alle Elemente $g \in G$ der Raum g^G (resp. $\overline{g^G}$) kompakt ist. Wenn es darüberhinaus eine natürliche Zahl m gibt, so daß für kein $g \in G$ die Anzahl der Komponenten von g^G die Schranke m überschreitet, so sagen wir, die Gruppe habe die Eigenschaft $\mathfrak{k}^*$.

Eine Gruppe mit der Eigenschaft $\mathfrak{e}$ werden wir auch eine $\mathfrak{e}$-Gruppe nennen.

Mit $\mathfrak{U}$ bezeichnen wir die Menge aller Untergruppen einer Gruppe G, mit $\mathfrak{A}$ die Menge aller ihrer abelschen Untergruppen.

Die Eigenschaften $\mathfrak{n}(\mathfrak{U})$, $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{U})$ und $\mathfrak{h}(\mathfrak{U})$ werden wir, wenn keine Mißverständnisse möglich sind, auch mit $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_0$ und $\mathfrak{h}$ bezeichnen.

Wegen der Beweise der beiden folgenden Sätze verweisen wir auf MACDONALD, wo sich auch ein ausführlicher Überblick findet, auf wen die Behauptungen im einzelnen zurückgehen.

Satz 3.1. *Sei G eine diskrete Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist eine* $\mathfrak{d}$*-Gruppe,*

(b) *G ist eine* $\mathfrak{k}^*$*-Gruppe,*

(c) *G hat die Eigenschaft* $\mathfrak{h}(\mathfrak{U})$.

Satz 3.2. *Für eine diskrete Gruppe G sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist eine $\mathfrak{z}$-Gruppe,*

(b) *G hat die Eigenschaft $\mathfrak{n}(\mathfrak{U})$,*

(c) *G hat die Eigenschaft $\mathfrak{n}(\mathfrak{A})$,*

(d) 1. *G ist eine $\mathfrak{d}$-Gruppe,*

2. *Es gibt eine abelsche Untergruppe A von G mit kompaktem $G:A$.*

Lemma 3.1. *Sei G eine $\mathfrak{z}$-Gruppe, sei N ein Normalteiler von G, und sei H eine offene, zusammenhängende Untergruppe von G. Dann sind G/N und H beide $\mathfrak{z}$-Gruppen.*

Beweis. Nach Lemma 1.8 ist mit G/ZG auch $(G/N)/\overline{(ZG\cdot N/N)}$ kompakt. Da aber $\overline{ZG\cdot N/N}$ in $Z(G/N)$ enthalten ist, folgt aus Lemma 1.1 die Kompaktheit von $(G/N)/Z(G/N)$.

Nach Lemma 1.7 ist $H/(H\cap ZG)$ kompakt. Da $H\cap ZG$ in ZH enthalten ist, folgt aus Lemma 1.1, daß H eine $\mathfrak{z}$-Gruppe ist.

Lemma 3.2. *Sei G eine $\mathfrak{z}_0$-Gruppe, und sei N ein Normalteiler von G, für den NG_0 in G abgeschlossen ist. Dann ist auch G/N eine $\mathfrak{z}_0$-Gruppe.*

Beweis. Nach HEWITT-ROSS, Theorem 7.12 ist $(G/N)_0=NG_0/N$, und es ist $\overline{N(ZG_0)_0/N}\subseteq(Z(G/N)_0)_0$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 1.8 und Lemma 1.1.

Lemma 3.3. *Sei G eine $\mathfrak{d}$-Gruppe, sei H eine Untergruppe von G, und sei N ein Normalteiler von G. Dann sind H und G/N gleichfalls $\mathfrak{d}$-Gruppen.*

Beweis. Als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge DG ist zunächst DH kompakt. Die zweite Behauptung ist evident, wenn man die Beziehung $D(G/N)=(N\cdot DG)/N$ beachtet.

Definition. Sei N ein Normalteiler der Gruppe G, und sei $\mathfrak{X}$ eine Menge von Untergruppen der Faktorgruppe G/N. Mit $\mathfrak{X}\cdot N$ bezeichnen wir folgende Menge von Untergruppen von G:

$$\mathfrak{X}\cdot N=[H\mid N\subseteq H\subseteq G,\ H/N\in\mathfrak{X}].$$

Lemma 3.4. *Sei N ein Normalteiler der Gruppe G, und sei $\mathfrak{X}$ eine Menge von Untergruppen von G/N. Wenn G die Eigenschaft $\mathfrak{n}(\mathfrak{X}\cdot N)$ hat, so ist G/N eine $\mathfrak{n}(\mathfrak{X})$-Gruppe. Wenn G die Eigenschaft $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{X}\cdot N)$ hat und wenn NG_0 in G abgeschlossen ist, so hat G/N die Eigenschaft $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{X})$.*

Beweis. Sei $J/N\in\mathfrak{X}$. Dann liegt J in $\mathfrak{X}\cdot N$, woraus folgt, daß $G:N_G J$ kompakt ist. Nun ist $N_G J/N\subseteq N_{G/N}(J/N)$. Also folgt aus Lemma 1.8 und Lemma 1.1 die Kompaktheit von $(G/N):N_{G/N}(J/N)$.

Wegen HEWITT-ROSS, Theorem 7.12 ist $NG_0/N=(G/N)_0$. Da aber $(N_G J)_0\cdot N/N$ in $(N_{G/N}(J/N))_0$ liegt, folgt die zweite Behauptung wie oben aus Lemma 1.8 und Lemma 1.1.

Lemma 3.5. *Sei G eine $\mathfrak{h}(\mathfrak{X})$-Gruppe für irgendeine Menge $\mathfrak{X}$ von Untergruppen, sei H eine Untergruppe von G, und sei N ein Normalteiler von G. Sei ferner $\mathfrak{V}$ eine Menge von Untergruppen von H mit $\mathfrak{V}\subseteq\mathfrak{X}$, und sei $\mathfrak{W}$ eine Menge von Untergruppen von G/N mit $\mathfrak{W}\cdot N\subseteq\mathfrak{X}$. Dann hat H die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{V})$ und G/N die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{W})$.*

Beweis. Für jedes $U\in\mathfrak{V}$ ist $H_H U:U$ ein abgeschlossener Unterraum des kompakten Raums $H_G U:U$.

Für $Y/N\in\mathfrak{W}$ ist mit $H_G Y:Y$ auch $(H_G Y/N):(Y/N)$ kompakt. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß $H_{G/N}(Y/N)$ ein abgeschlossener Teilraum von $H_G Y/N$ ist, welcher Y/N umfaßt.

Lemma 3.6. *Sei N ein Normalteiler der $\mathfrak{k}$-Gruppe G. Dann hat auch G/N die Eigenschaft $\mathfrak{k}$.*

Beweis. Nach Lemma 1.10 ist für alle $g\in G$ der Raum $G:C_G(g)$ kompakt. Da $C_G(g)\cdot N/N$ in $C_{G/N}(gN/N)$ enthalten ist, folgt aus Lemma 1.8 und Lemma 1.1, daß auch $(G/N):C_{G/N}(gN/N)$ kompakt ist.

Lemma 3.7. *Sei H eine Untergruppe der Gruppe G, und sei N ein Normalteiler von G. Wenn G die Eigenschaft $\bar{\mathfrak{k}}$ hat, so haben auch H und G/N diese Eigenschaft.*

Beweis. Für jedes $h\in H$ ist $\overline{h^H}$ als abgeschlossener Teilraum des kompakten Raums $\overline{h^G}$ selbst kompakt.

Da für alle $g\in G$ der Raum $\overline{(gN/N)^{(G/N)}}$ in $\overline{g^G}N/N$ enthalten ist und da dieser Raum als stetiges Bild von $\overline{g^G}$ kompakt ist, hat G/N die Eigenschaft $\bar{\mathfrak{k}}$.

Den Inhalt der vorstehenden Lemmata fassen wir zu einem Satz zusammen.

Satz 3.3. *Die Eigenschaften $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ und $\bar{\mathfrak{k}}$ vererben sich auf Untergruppen, die Eigenschaft $\mathfrak{z}$ auf offene, zusammenhängende Untergruppen. Die Eigenschaften $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ und $\bar{\mathfrak{k}}$ vererben sich auf epimorphe Bilder, die Eigenschaften $\mathfrak{n}_0$ und $\mathfrak{z}_0$ bei Epimorphismen mit Kernen K, für die KG_0 in G abgeschlossen ist.*

4. Im folgenden werden wir für die Klasse der zusammenhängenden Gruppen eine Charakterisierung der im vorigen Abschnitt definierten Eigenschaften angeben.

Lemma 4.1. *Sei X eine zusammenhängende Untergruppe der Gruppe G. Dann ist auch $H_G X$ zusammenhängend.*

Beweis. Sei $H=H_G X$. Dann ist H_0 als charakteristische Untergruppe des Normalteilers H von G selbst normal in G. Wegen $X\subseteq H_0$ ist also $H=H_0$.

Für einige häufiger vorkommenden Klassen von Untergruppen reservieren wir folgende Bezeichnungen:

$\mathfrak{U}$ – Menge aller Untergruppen,

$\mathfrak{A}$ – Menge aller abelschen Untergruppen,

$\mathfrak{Z}$ – Menge aller Untergruppen, in denen eine von zwei Elementen erzeugte abstrakte Untergruppe dicht liegt,

$\mathfrak{M}$ – Menge aller monothetischen Untergruppen, i.e. aller Untergruppen, in denen eine abstrakte zyklische Untergruppe dicht liegt,

$\mathfrak{R}$ – Menge aller zu $\boldsymbol{R}$ isomorphen Untergruppen.

Satz 4.1. *Für eine zusammenhängende Gruppe G sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist eine $\mathfrak{d}$-Gruppe,*

(b) *G hat die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{U})$,*

(c) *G hat die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{R})$,*

(d) *G ist eine $\bar{\bar{\mathfrak{k}}}$-Gruppe,*

(e) *G ist die Erweiterung einer kompakten, zusammenhängenden Gruppe durch eine abelsche Gruppe.*

(f) *In G gibt es einen nilpotenten $\mathfrak{d}$-Normalteiler N und einen kompakten halbeinfachen Normalteiler K, so daß $G=NK$ und $N \cap K$ total unzusammenhängend ist.*

Beweis. Sei zunächst (a) erfüllt, und sei U eine Untergruppe von G. Es gilt die Beziehung $U \subseteq H_G U \subseteq U \cdot DG$. Da DG kompakt ist, ist nach Lemma 1.4 auch $(U \cdot DG){:}\,U$ kompakt. Also ist $H_G U{:}\,U$ als abgeschlossener Unterraum von $(U \cdot DG){:}\,U$ kompakt.

Trivialerweise folgt (c) aus (b).

Sei nun (c) erfüllt. Angenommen, (a) gilt nicht. Dann gibt es eine zusammenhängende Gruppe G minimalen charakteristischen Indexes, die (c) aber nicht (a) erfüllt. Angenommen, $\chi(G)$ wäre 1. Nach Satz 1.1 wäre dann G das direkte Produkt einer eindimensionalen Vektoruntergruppe E und einer kompakten Untergruppe N. Dann wäre aber DG in N enthalten, also kompakt. Sei nun K der maximale kompakte, zusammenhängende Normalteiler von G. Wir betrachten die Faktorgruppe $F=G/K$. Sei $\mathfrak{R}$ die Menge aller zu $\boldsymbol{R}$ isomorphen Untergruppen von F. Wir wollen nun zeigen, daß G die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{R} \cdot K)$ hat. Sei also H eine Untergruppe von G, für die $H/K \in \mathfrak{R}$ ist. Dann läßt sich H in der Form $E \cdot K$ darstellen, wobei E eine zu $\boldsymbol{R}$ isomorphe Untergruppe von G ist. Da $H_G(EK) \subseteq (H_G E) \cdot K$ ist, folgt, daß mit $(H_G E){:}\,E$ nach Lemma 1.4 auch $(H_G E)\,K{:}\,E$ und deshalb auch $(H_G(EK)){:}\,(EK)$ kompakt ist. Also hat G die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{R} \cdot K)$, und es folgt aus Lemma 3.5, daß F die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{R})$ hat. Wir behaupten, daß für alle $V \in \mathfrak{R}$ bereits V in F normal ist. Da $H_F\,V{:}\,V$ kompakt ist, gibt es in $H_F\,V$ einen Normalteiler N, der zu V isomorph ist, und eine kompakte Untergruppe C, so daß $H_F\,V=NC$ ist. Nach Lemma 4.1 ist $H_F V$ zusammenhängend, also auch C. Es folgt, daß C in $H_F V$ normal ist, da eine kompakte, zusammenhängende Gruppe nur trivial auf $\boldsymbol{R}$ operieren kann. Dann ist aber C als maximaler kompakter, zusammenhängender Normalteiler von $H_F V$ charakteristisch in $H_F V$, also normal in F. Es folgt, daß $C=1$ ist; also ist V normal in F. Wir betrachten die Faktorgruppe $W=F/V$ für irgendein $V \in \mathfrak{R}$. Da

$$\chi(W)=\chi(F)-1=\chi(G)-1$$

ist und W die Eigenschaft $\mathfrak{h}(\mathfrak{P})$ hat, wobei $\mathfrak{P}$ die Menge aller zu $\boldsymbol{R}$ isomorphen Untergruppen von W ist, erfüllt W wegen der Minimalität von $\chi(G)$ die Bedingung (a). Also ist $DW=D/V$ eine kompakte Untergruppe von W. Dann ist wie oben D das direkte Produkt von V und einem kompakten Normalteiler C von F. Da aber $C=1$ sein muß, folgt, daß für alle $R\in\mathfrak{R}$ die Kommutatorgruppe $D(F/R)=1$ ist. Das ist aber nur möglich, wenn $DF=1$ ist, q.e.a.

Sei wiederum (a) erfüllt, und sei $x\in G$. Dann ist der Raum $\overline{x^G}$ zu

$$x^{-1}\overline{x^G}=\overline{x^{-1}x^G}$$

homöomorph. Dieser Raum ist aber als abgeschlossener Teilraum des kompakten Raums DG kompakt.

Daß (e) aus (d) folgt, wird in USHAKOV gezeigt. Die Implikation (e)$\to$(a) ist trivial.

Es gelte (a), und es sei S eine zusammenhängende auflösbare Untergruppe von G. Dann ist DS kompakt und nach IWASAWA [1949], Lemma 2.2 und Theorem 4 in ZS enthalten. Also ist S nilpotent. Daß G die angegebene Struktur hat, folgt nun nach PLAUMANN.

Bemerkung. In IWASAWA [1951], Theorem 2 wird gezeigt, daß die Aussagen des Satzes 4.1 zu folgendem äquivalent sind:

(g) *In G gibt es beliebig kleine invariante Umgebungen der Eins, i.e. in jeder Umgebung U der Eins in G ist eine Umgebung V der Eins enthalten, für die $V=V^G$ ist.*

Lemma 4.2. *Sei G eine zusammenhängende $\mathfrak{d}$-Gruppe. Wenn für eine Vektoruntergruppe V von Z_2G der Raum $G:N_G V$ kompakt ist, so liegt V in ZG.*

Beweis. Sei W irgendeine Vektoruntergruppe von G, und sei $x\in N_G W$. Da $D(x, W)$ eine kompakte Untergruppe von W ist, muß $D(x, W)=1$ sein. Also ist $N_G W=C_G W$.

Wir nehmen nun an, daß G eine Liegruppe ist. Sei V zu $\boldsymbol{R}^m$ isomorph. Da V in Z_2G liegt und da DG kompakt ist, ist $D(G, V)$ zu $\boldsymbol{K}^n$ isomorph. Wenn wir $A=G$ und $B=V$ setzen, so sind die Voraussetzungen (a) bis (d) von Lemma 2.2 erfüllt. Der Kern des dort definierten Homomorphismus μ ist die Gruppe $C_G V$. Also induziert μ einen stetigen Monomorphismus $\bar{\mu}$ von der kompakten Gruppe $G/C_G V$ in die Gruppe $H=\mathrm{Hom}(V, D(G, V))$. Nun ist aber

$$\mathrm{H}\cong\mathrm{Hom}(\boldsymbol{R}^m, \boldsymbol{K}^n)\cong\boldsymbol{R}^{m+n}$$

eine kompaktfreie Gruppe. Daraus folgt, daß $G=C_G V$ ist.

Sei schließlich G eine beliebige zusammenhängende Gruppe. Dann gibt es nach MONTGOMERY-ZIPPIN, Theorem 4.6 eine Familie $\mathfrak{N}$ kompakter Normalteiler von G mit $\bigcap\mathfrak{N}=1$, so daß für jedes $N\in\mathfrak{N}$ die Faktorgruppe G/N eine Liegruppe ist. Man sieht leicht, daß VN/N die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Also ist VN/N in $Z(G/N)$ enthalten. Folglich ist $D(G, V)\subseteq N$. Da dies für alle $N\in\mathfrak{N}$ gilt, ist $D(G, V)\subseteq\bigcap\mathfrak{N}=1$.

Lemma 4.3. *Sei G eine zusammenhängende $\mathfrak{d}$-Gruppe, und sei A ein abelscher Normalteiler von G. Dann ist A in $Z_2 G$ enthalten.*

Beweis. Da DG kompakt ist, ist $D(A, G)$ ein kompakter, zusammenhängender abelscher Normalteiler von G. Nach IWASAWA [1949], Theorem 4 liegt also $D(A, G)$ in ZG.

Lemma 4.4. *Jede zusammenhängende $\mathfrak{z}$-Gruppe ist eine $\mathfrak{d}$-Gruppe.*

Beweis. Sei G eine zusammenhängende $\mathfrak{z}$-Gruppe. Nach Lemma 2.1 mit $N=G$ gibt es in jeder Umgebung U der Eins in G eine Umgebung W der Eins, für die $W^G \subseteq U$ ist. Also ist $V = \bigcap [U^g | g \in G]$ eine Umgebung der Eins, die in U enthalten ist und für die $V^G = V$ gilt. Die Behauptung folgt nun aus der Bemerkung zu Satz 4.1.

Lemma 4.5. *Sei G eine zusammenhängende halbeinfache Liegruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *G ist kompakt,*

(b) *G ist eine $\mathfrak{z}$-Gruppe,*

(c) *G ist eine $\mathfrak{d}$-Gruppe.*

Beweis. Daß (b) aus (a) folgt, ist trivial. Wenn (b) erfüllt ist, so folgt (c) nach Lemma 4.4. Wenn schließlich (c) gilt, dann folgt (a) aus der Tatsache, daß für eine halbeinfache Liegruppe die Beziehung $G = DG$ besteht.

Das Radikal der Gruppe G ist der maximale auflösbare und zusammenhängende Normalteiler von G.

Lemma 4.6. *Sei G eine zusammenhängende $\mathfrak{d}$-Gruppe, und sei R das Radikal von G. Dann ist die Faktorgruppe G/R kompakt.*

Beweis. In G gibt es eine Familie $\mathfrak{N}$ kompakter Normalteiler mit $\bigcap \mathfrak{N} = 1$, so daß für jedes $N \in \mathfrak{N}$ die Faktorgruppe G/N eine Liegruppe ist. Nach Lemma 3.3 ist G/N eine $\mathfrak{d}$-Gruppe. Sei S/N das Radikal von G/N. Dann ist auch $(G/N)/(S/N)$ eine $\mathfrak{d}$-Gruppe. Da diese Gruppe halbeinfach ist, ist sie nach Lemma 4.5 kompakt. Die Behauptung folgt nun nach IWASAWA [1949], Theorem 17.

Satz 4.2. *Sei G eine zusammenhängende Gruppe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) 1. *G ist eine $\mathfrak{d}$-Gruppe,*

2. *In G gibt es eine zusammenhängende abelsche Untergruppe A mit kompaktem $G:A$,*

(b) *G ist eine $\mathfrak{z}_0$-Gruppe,*

(c) *G ist das direkte Produkt einer Vektorgruppe und einer kompakten Gruppe,*

(d) *G ist eine $\mathfrak{z}$-Gruppe,*

(e) *G hat die Eigenschaft $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{U})$,*

(f) *G hat die Eigenschaft* $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{A})$,

(g) *G hat die Eigenschaft* $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{Z})$,

(h) *G hat die Eigenschaften* $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{M})$ *und* $\mathfrak{n}_0(\mathfrak{N})$,

(i) 1. *G ist eine* $\mathfrak{k}$*-Gruppe,*

2. *G ist eine* $\mathfrak{n}(\mathfrak{B})$*-Gruppe, wobei* $\mathfrak{B}$ *der Durchschnitt von* $\mathfrak{N}$ *mit der Menge der Untergruppen von* $Z_2 G$ *ist.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch die Implikationen, die das nachstehende Schema angibt.

$$\begin{tikzcd}
(d) \arrow[dr] & & & (f) \arrow[dr] & \\
& (b) \arrow[r] \arrow[dl] & (e) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (h) \arrow[dd] \\
(c) \arrow[uu] & & & (g) \arrow[ur] & \\
& (a) \arrow[uu] & & & (i) \arrow[lll]
\end{tikzcd}$$

Wenn (a) erfüllt ist, so ist die Untergruppe A das direkte Produkt einer Vektorgruppe V und einer kompakten Gruppe K. Daraus folgt, daß der Restklassenraum $G : V$ kompakt ist. Also gibt es nach Satz 1.1 einen Vektornormalteiler W von G, so daß G/W kompakt ist. Nach Lemma 4.3 ist W in $Z_2 G$ enthalten. Da weiterhin $G/N_G W = 1$ kompakt ist, folgt aus Lemma 4.2, daß W in $(ZG)_0$ liegt. Also ist $G/(ZG)_0$ kompakt.

Sei (b) erfüllt, und sei V eine maximale Vektoruntergruppe von $(ZG)_0$. Dann ist G/V kompakt. Also gibt es eine kompakte Untergruppe K von G, so daß $G = VK$ ist. Da V zentral ist, ist dieses Produkt dann direkt.

Mit (c) gilt trivialerweise auch (d).

Nun sei (d) erfüllt. Wegen Lemma 4.4 ist dann DG kompakt. Mit η bezeichnen wir den natürlichen Epimorphismus von G auf $G/(ZG)_0$. Sei R das Radikal von G. Da $(ZG)_0$ auflösbar und zusammenhängend ist, ist R^η das Radikal von G^η. Mit G ist auch R eine $\mathfrak{d}$-Gruppe. Also ist DR ein kompakter, zusammenhängender auflösbarer Normalteiler von G, und es folgt nach IWASAWA [1949], Lemma 2.2 und Theorem 4, daß DR in $(ZG)_0$ liegt. Demnach ist R^η abelsch. Da nach Lemma 3.3 auch G^η/R^η eine $\mathfrak{d}$-Gruppe ist, folgt aus Lemma 4.6, daß G^η/R^η kompakt ist. Nach Lemma 4.3 liegt aber R^η in $Z_2(G^\eta)$ und daraus folgt wegen Lemma 4.2, daß R^η in $(ZG^\eta)_0$ liegt. Da G/ZG kompakt ist, gilt wegen Korollar 2.1 die Beziehung $ZG = Z_2 G$. Also ist nach Satz 2.3 die Gruppe

$$Z(G^\eta) = Z(G/(ZG)_0) = Z_2\, G/(ZG)_0 = Z\, G/(ZG)_0$$

total unzusammenhängend. Deshalb ist $R^\eta = 1$ und daher G^η kompakt. Also erfüllt G die Bedingung (b).

Es ist trivial, daß aus (b) die Bedingung (e) und daß aus (e) die Bedingungen (f) und (g) folgen. Jede der Bedingungen (f) und (g) impliziert (h), weil die beiden Untergruppenmengen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ im Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{Z}$ liegen.

Mit (h) ist (i.2) erfüllt. Wir wollen nun zeigen, daß aus (h) auch (i.1) folgt. Wenn die von einem Element $g \in G$ erzeugte zyklische Untergruppe Z in G abgeschlossen ist, so ist die Gruppe aller stetigen Automorphismen von Z

endlich. Also ist $N_G Z/C_G Z$ eine endliche Gruppe. Da aber $C_G Z = C_G(g)$ ist, folgt nach Lemma 1.5, daß der Raum $G: C_G(g)$ kompakt ist. Wir nehmen nun an, daß Z nicht abgeschlossen ist. Dann ist $M = \overline{Z}$ eine kompakte abelsche Untergruppe von G. In IWASAWA [1949], Korollar zu Theorem 1′ wird gezeigt, daß die Gruppe S aller stetigen Automorphismen von M — in der kompakt-offenen Topologie — total unzusammenhängend ist. Wegen der Kompaktheit von M ist die Abbildung φ, definiert durch

$$m^{\varphi(n N_G M)} = n^{-1} m n, \qquad \text{für } m \in M \text{ und } n \in N_G M,$$

ein stetiger Isomorphismus von $N_G M/C_G M$ auf S. Also liegt $(N_G M)_0$ in $C_G M$, und demzufolge ist auch in diesem Fall der Raum $G: C_G(g)$ kompakt. Nach Lemma 1.10 ist nun G eine $\mathfrak{k}$-Gruppe.

Sei schließlich (i) erfüllt. Nach Satz 4.1 folgt aus (i.1), daß G eine $\mathfrak{d}$-Gruppe ist. Also ist wegen Lemma 4.6 für das Radikal R von G die Faktorgruppe G/R kompakt. Da nach IWASAWA [1949], Lemma 2.2 und Theorem 4 die Gruppe DR in $(ZG)_0$ liegt, ist $R/(ZG)_0$ ein zusammenhängender abelscher Normalteiler von $G/(ZG)_0$, für den die Faktorgruppe $(G/(ZG)_0)/(R/(ZG)_0)$ kompakt ist. Also erfüllt $G/(ZG)_0$ die Bedingung (a.2). Wir schließen daraus, daß $G/(ZG)_0/(Z(G/(ZG)_0)_0$ kompakt ist. Wegen Korollar 2.2 ist

$$(Z(G/(ZG)_0)_0 = (Z_2 G)_0/(ZG)_0 .$$

Also ist $G/(Z_2 G)_0$ kompakt. Nach IWASAWA [1949], Theorem 13 ist

$$(Z_2 G)_0 = E_1 \dots E_n C,$$

wobei die E_i zu $\boldsymbol{R}$ isomorphe Untergruppen sind und C eine maximale kompakte Untergruppe von $(Z_2 G)_0$ ist. Wegen Korollar 2.1 liegt C in $Z(Z_2 G)_0$, ist also charakteristisch in $(Z_2 G)_0$ und damit normal in G. Daraus folgt nach IWASAWA [1949], Theorem 4, daß C in $(ZG)_0$ liegt. Wegen (i.2) ist für alle j, $1 \leqq j \leqq n$, der Raum $G: N_G E_j$ kompakt. Also liegt nach Lemma 4.2 auch E_j in $(ZG)_0$. Es folgt, daß $(Z_2 G)_0 = (ZG)_0$ ist, d.h. Bedingung (b) ist erfüllt. Wenn wir $A = (ZG)_0$ setzen, so ist auch Bedingung (a.2) erfüllt.

Bemerkung. Aus der Literatur sind zahlreiche Bedingungen von anderer Art als die in Satz 4.2 genannten bekannt, welche die zusammenhängenden $\mathfrak{z}$-Gruppen charakterisieren. Wir zitieren hier nach HOFMANN-MOSTERT, Korollar XII, 1 die folgenden:

(j) *G ist maximal fastperiodisch,*

(k) *G hat hinreichend viele endlich-dimensionale unitäre Darstellungen,*

(l) *Die rechte und linke uniforme Struktur von G stimmen überein.*

Zum Schluß geben wir ein Beispiel an, das zeigt, daß in den zusammengesetzten Bedingungen (a) und (i) des Satzes 4.2 nichts Überflüssiges enthalten ist.

Beispiel. Sei M die Menge aller Tripel (r, s, t) mit $r, s \in \boldsymbol{R}$ und $t \in \boldsymbol{K}$. Sei ferner φ ein stetiger Epimorphismus von $\boldsymbol{R}$ auf $\boldsymbol{K}$, für den $1^\varphi = 0$ ist. Wenn man für zwei Elemente (r, s, t) und (a, b, c) aus M folgendes Produkt erklärt:

$$(a, b, c)(r, s, t) = \left(a+r,\, b+s,\, c+t+(b\,r)^\varphi\right),$$

so wird M, versehen mit der Produkttopologie, zu einer zusammenhängenden Liegruppe. (Siehe IWASAWA [1949], p. 550.) Mit T bezeichnen wir die kompakte Untergruppe der Elemente von M der Form $(0, 0, t)$. Dann ist $T = D\,M = Z\,M$. Ersichtlich ist M keine $\mathfrak{Z}$-Gruppe. Für jedes $x \in M \setminus Z\,M$ ist $x^M = x\,T$. Also erfüllt M die Bedingung (i.1) aber nicht (i.2). Die beiden Elemente (1, 0, 0) und (0, 1, 0) sind miteinander vertauschbar und erzeugen eine Untergruppe F, die zu $\boldsymbol{Z}^2$ isomorph ist. Also ist $N = F\,T$ ein abelscher Normalteiler von M. Offensichtlich ist M/N kompakt. Man sieht, daß in (a.2) die Bedingung, daß A zusammenhängend ist, unentbehrlich ist.

Literatur

BAER, R.: Endlichkeitskriterien für Kommutatorgruppen. Math. Ann. **124**, 161—177 (1952).

EREMIN, I. I.: Gruppen mit endlichen Klassen konjugierter abelscher Untergruppen [Russisch]. Mat. Sbornik **47**, 45—54 (1959).

FREUDENTHAL, H.: Einige Sätze über topologische Gruppen. Ann. of Math. **37**, 46—56 (1936).

— Ein Zerlegungssatz für im Kleinen kompakte Gruppen. Archiv d. Math. **15**, 161—165 (1964).

HEWITT, E., and K. A. ROSS: Abstract harmonic analysis I, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.

HOFMANN, K. H.: Über das Nilradikal lokal kompakter Gruppen. Math. Z. **91**, 206—215 (1966).

—, and P. MOSTERT: Splitting in topological groups. Providence, Memoirs of the AMS 43, 1963.

IWASAWA, K.: Some types of topological groups. Ann. of Math. **50**, 507—558 (1949).

— Topological groups with small invariant neighbourhoods of the identity. Ann of Math.. **54**, 345—348 (1951).

MACDONALD, I. D.: Some explicit bounds in groups with finite derived groups. Proc. London Math. Soc. (3) **11**, 23—56 (1961).

MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Topological transformation groups. New York: Interscience Publishers 1955.

NEUMANN, B. H.: Groups with finite classes of conjugate elements. Proc. London Math. Soc. (3) **1**, 178—187 (1951).

— Groups covered by permutable subsets. J. London Math. Soc. **29**, 236—248 (1954).

PLATONOV, V. P.: Einige Klassen topologischer Gruppen [Russisch]. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **158**, 784—787 (1964).

PLAUMANN, P.: Klassen zusammenhängender Gruppen. Erscheint in Arch. d. Math.

TITS, J.: Automorphismes de déplacement des groupes de Lie. Topology **3**, 97—107 (1964).

USHAKOV, V. I.: Topologische $\overline{FC}$-Gruppen [Russisch]. Sibirsk Mat. J. **4**, 1162—1174 (1963).

Mathematisches Seminar der Universität
6 Frankfurt/Main, Robert-Mayer-Straße 6—8