Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1967

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0095|log16

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

X 27

Mathematische Zeitschrift

Herausgegeben von **H. Wielandt**, Tübingen

unter Mitwirkung von **B. Eckmann**, Zürich
E. Heinz, München
R. Nevanlinna, Helsinki
K. Zeller, Tübingen

Wissenschaftlicher Beirat A. E. Ingham, Cambridge
H. Kneser, Tübingen
W. Magnus, New York
O. Perron, München
G. Pickert, Gießen

Band 95 · Heft 2 · 1967

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Math. Z.

Abgeschlossen am 14. November 1966

4186

Die **Mathematische Zeitschrift**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*. 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

*

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht auch das Recht der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Fußnoten, die nicht zum Beitragskopf gehören, sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule
E. Heinz, 34 Göttingen, Math. Inst. d. Universität
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Aurorankatu 16-20 C, Inst. f. angew. Math.
H. Wielandt, zur Zeit: Dept. of Math., University of Wisconsin, Madison 6, Wis., USA
K. Zeller, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität

*

Springer-Verlag
1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301,
Fernschreibnummer 01-83319,
69 Heidelberg 1, Postfach 1780, Fernsprecher 49101, Fernschreibnummer 04-61723

STOLL, W.
Math. Zeitschr. 95, 87—138 (1967)

The Continuity of the Fiber Integral

WILHELM STOLL*

Dedicated to MARILYN STOLL

Received June 1, 1966

Let M be a pure m-dimensional, complex manifold. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f: M\to N$ be a holomorphic map. Suppose that f is *q-fibering*, i.e. every fiber $f^{-1}(f(a))$ is a pure q-dimensional analytic set. Because $q=m-p$, this is equivalent to requiring that f is open. Let χ be a continuous, exterior differential form of bidegree (q, q) on M. Then χ can be integrated along the fibers $f^{-1}(y)$. The question is, if this integral depends continuously on y. Easy examples show the contrary. For instance, the integral may not exist. Hence, suppose that χ has compact support in M. Then, the integral exists. Still, it may be discontinuous. However, if the fibers are counted with its multiplicity $\nu_f(z)$, where $z\in M$, then the integral

$$\int_{f^{-1}(y)} \nu_f \chi$$

becomes a continuous function of y (Theorem 3.8).

The continuity of the fiber integral is one of the main tools in the proof of a general "*First Main Theorem*" of value distribution, which unifies the theory of CHERN and LEVINE as developed in [2] and [8] with the theory of KNESER and STOLL as developed in [4] and [11]. The first theory counts the points with its multiplicities in countable fibers. The second theory measures the volume of fibers consisting of pure one-codimensional analytic sets with multiplicities. The unified theory measures the volume of fibers consisting of pure q-dimensional analytic sets with multiplicities.

However, for this application, a much stronger form of the continuity of the fiber integral is needed (Theorem 4.9): *Let M, N, m, p, q and f be as before. Let G be an open subset of M with compact closure and with boundary $S=\bar{G}-G$. Let χ be a continuous differential form of bidegree (q, q) on M. Let T be the support of $\chi|S$. Let $b\in N$. Suppose that $S_b=f^{-1}(b)\cap T$ is a set of measure zero on the space $f^{-1}(b)$. Let $g: M\to \mathbf{C}^s$ be a holomorphic map. Suppose that g is not identically zero on any one of the branches of $f^{-1}(b)$. Let h be a continuous function on $M-g^{-1}(0)$ such that $|h|\leqq|\log|g||^{\kappa}$ on $M-g^{-1}(0)$, where κ is a non-negative integer. Then open neighborhoods U of $\bar{G}$ and W of b exist such that $g^{-1}(0)$ does not contain any branch of $f^{-1}(w)\cap U$ if $w\in W$.*

* This research was partially supported by the National Science Foundation under grant NSF GP-3988.

Moreover

$$\int_{f^{-1}(W)\cap G} \nu_f h\chi \to \int_{f^{-1}(b)\cap G} \nu_f h\chi,$$

$$\int_{f^{-1}(w)\cap \bar{G}} \nu_f h\chi \to \int_{f^{-1}(b)\cap \bar{G}} \nu_f h\chi$$

for $w\to b$ *if* $w\in W$.

In the case $q=0$ (and $\kappa=0$), the integrals are sums and these results have already been obtained in I STOLL [*14*][1]. In the same paper, the necessary study of the multiplicity ν_f is provided and the foundation for the investigations here are lain.

In section 1, the existence of many unitary, clear bases is shown. In section 2, differential forms and their integration are discussed. Especially, positive and non-negative forms are investigated. They are also important for value distribution, where it is essential to know if the integrand is non-negative. Section 2 deals also with a generalization of Fubini's theorem. A Schwartz inequality for differential forms is proved.

In section 3, the continuity of the fiber integral is proved for continuous integrands. At first, this is done for unmixed forms (Lemma 3.4 and Proposition 3.5). Then the Schwartz inequality is used to extend the result to unmixed forms. Section 4 proves the general version.

§ 1. Clear Bases

Let V be a complex vector space of dimension n. Define $V^n=V\times\cdots\times V$ (n-times). Then $(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n)\in V^n$ is a base of V if and only if the exterior product $\mathfrak{c}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{c}_n\neq 0$, i.e., if and only if $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n$ are linearly independent over $\boldsymbol{C}$. The set

$$\mathrm{GL}(V)=\{(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n)\mid \mathfrak{c}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{c}_n\neq 0\}$$

(general linear group) of all bases of V is an open, dense subset of V^n, whose complement $V^n-\mathrm{GL}(V)$ is analytic.

A function $(\,|\,)$: $V\times V\to\boldsymbol{C}$ is said to be a *Hermitian product* on V if and only if

1. $(a_1\mathfrak{x}_2+a_2\mathfrak{x}_2\mid\mathfrak{y})=a_1(\mathfrak{x}_1\mid\mathfrak{y})+a_2(\mathfrak{x}_2\mid\mathfrak{y})$ *for* $a_\nu\in\boldsymbol{C}$, $\mathfrak{x}_\nu\in V$, $\mathfrak{y}\in V$ *for* $\nu=1, 2$.
2. $\overline{(\mathfrak{x}\mid\mathfrak{y})}=(\mathfrak{y}\mid\mathfrak{x})$ *if* $\mathfrak{x}\in V$ *and* $\mathfrak{y}\in V$.
3. $(\mathfrak{x}\mid\mathfrak{x})>0$ *if* $\mathfrak{x}\in V-\{0\}$.

Then $|\mathfrak{x}|=\sqrt{(\mathfrak{x}\mid\mathfrak{x})}$ defines a norm on V and V becomes a Banach space in this norm. An element $(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n)\in V^n$ is said to be an orthonormal base of V if and only if

$$(\mathfrak{c}_\mu\mid\mathfrak{c}_\nu)=\delta_{\mu\nu}=\begin{cases}0 & \text{for } \mu\neq\nu\\ 1 & \text{for } \mu=\nu.\end{cases}$$

The set $\mathfrak{U}(V)$ of all orthonormal bases of V is a non-empty connected smooth real analytic submanifold of $\mathrm{GL}(V)$.

[1] Because of the close connection, the paper [*14*] is referred to as I STOLL [*14*].

Let $\mathfrak{S}(n)$ be the group of all permutations of $\{1, 2, \ldots, n\}$. If $\pi \in \mathfrak{S}(n)$, then an induced map $\tilde{\pi}: V^n \to V^n$ is defined by $\pi(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n) = (\mathfrak{c}_{\pi(1)}, \ldots, \mathfrak{c}_{\pi(n)})$. Obviously, $\widetilde{\pi_1 \circ \pi_2} = \tilde{\pi}_1 \circ \tilde{\pi}_2$ and $\tilde{\mathrm{Id}} = \mathrm{Id}$. Moreover,

$$\tilde{\pi}(\mathrm{GL}(V)) = \mathrm{GL}(V), \quad \tilde{\pi}(\mathfrak{U}(V)) = \mathfrak{U}(V).$$

Instead of $\tilde{\pi}: V^n \to V^n$, the notation $\pi: V^n \to V^n$ shall be used.

Let q and n be integers with $1 \leqq q \leqq n$. Define $\mathfrak{T}(q, n)$ as the set of all injective increasing maps

$$\varphi: \{1, \ldots, q\} \to \{1, \ldots, n\}.$$

Then $\varphi \in \mathfrak{T}(q, n)$ defines one and only one permutation $\underline{\varphi} \in \mathfrak{S}(n)$ such that

a) $\underline{\varphi}(\nu) = \varphi(\nu)$ for $\nu = 1, \ldots, q$.

b) $\underline{\varphi}(\nu) < \underline{\varphi}(\nu+1)$ for $\nu = q+1, \ldots, n-1$.

Together

$$1 \leqq \varphi(1) < \cdots < \varphi(q) \leqq n,$$

$$1 \leqq \underline{\varphi}(q+1) < \cdots < \underline{\varphi}(n) \leqq n.$$

The map $j: \mathfrak{T}(q,n) \to \mathfrak{S}(n)$ which is defined by $j(\varphi) = \underline{\varphi}$ is injective.

Let A be an analytic subset of an open subset G of the n-dimensional complex vector space V. Let $\mathfrak{a} \in A$. A base $\mathfrak{c} = (\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n) \in \mathrm{GL}(V)$ is said to be *distinguished for* $(A, \mathfrak{a}, q)$ if and only if $q \in \boldsymbol{Z}$ with $0 \leqq q \leqq n$ and if

$$\left\{ \mathfrak{a} + \sum_{\mu=q+1}^{n} z_\mu \mathfrak{c}_\mu \mid z_\mu \in \boldsymbol{C} \right\} \cap A$$

contains $\mathfrak{a}$ as an isolated point. If $q = 0$, a base is dinstinguished if and only if $\mathfrak{a}$ is an isolated point of A, in which case all bases are distinguished for $(A, \mathfrak{a}, 0)$ and also are called *clear* for $(A, \mathfrak{a}, 0)$. If $q > 0$, a base $\mathfrak{c} \in \mathrm{GL}(V)$ is said to be *clear for* $(A, \mathfrak{a}, q)$ if and only if for every $\varphi \in \mathfrak{T}(q,n)$ the base $\underline{\varphi}(\mathfrak{c})$ is distinguished for $(A, \mathfrak{a}, q)$. Define

$$Y(A, \mathfrak{a}, q) = \{\mathfrak{c} \mid \mathfrak{c} \in \mathrm{GL}(V), \ \mathfrak{c} \text{ clear for } (A, \mathfrak{a}, q)\}.$$

The following result is proved in THIE [*15*], Theorem A 2. (See also BUNGART [*1*] and NISHINO [*9*].)

Proposition 1.1. *Let A be a pure q-dimensional analytic subset of an open subset G of the n-dimensional complex vector space V with $0 \leqq q < n$. Pick $\mathfrak{a} \in A$. Then a thin analytic subset Δ of* $\mathrm{GL}(V)$ *contains* $\mathrm{GL}(V) - Y(A, \mathfrak{a}, q)$. *Especially, $Y(A, \mathfrak{a}, q)$ contains a dense open subset of* $\mathrm{GL}(V)$.

Now, it shall be shown, that there are enough orthonormal clear bases, that is, $\mathfrak{U}(V) - Y(A, \mathfrak{a}, q)$ is contained in a nowhere dense analytic subset of $\mathfrak{U}(V)$.

For $0 \neq \mathfrak{z} \in V$, define $\rho(\mathfrak{z}) = \{\lambda \mathfrak{z} \mid \lambda \in \boldsymbol{C}\}$. Then $\boldsymbol{P}(V) = \{\rho(\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in V - \{0\}\}$ is the complex projective space associated to V. In the well known way, $\boldsymbol{P}(V)$ is a compact, connected complex manifold of dimension $n-1$ and $\rho: V - \{0\} \to \boldsymbol{P}(V)$ is an open and holomorphic map with $\rho^{-1}(\rho(\mathfrak{a})) = \{\lambda \mathfrak{a} \mid 0 \neq \lambda \in \boldsymbol{C}\}$.

An analytic subset T of V is said to be an *analytic cone* in V, if and only if $\mathfrak{z} \in T$ implies $\rho(\mathfrak{z}) \subseteq T$. The subset T of V is an analytic cone if and only if the set $T' = \rho(T - \{0\})$ is an analytic subset of $\boldsymbol{P}(V)$ and T is pure q-dimensional if and only if T' is pure $(q-1)$-dimensional.

Let A be a pure q-dimensional analytic subset of an open neighborhood G of $\mathfrak{a} \in V$. Suppose that $0 < q < n$. Assume that $\mathfrak{a} \in A$. Then $\mathfrak{t} \in V$ is said to be a *tangent vector on A at $\mathfrak{a}$* if a sequence $\{\mathfrak{z}_\nu\}_{\nu \in N}$ of points $\mathfrak{z}_\nu \in A$ exists such that

$$\frac{\mathfrak{z}_\nu}{|\mathfrak{z}_\nu|} \to \mathfrak{t} \qquad \text{for } \nu \to \infty .$$

Then

$$T_{\mathfrak{a}} = T_{\mathfrak{a}}(A) = \{z\,\mathfrak{t} \mid z \in \boldsymbol{C},\ \mathfrak{t} \text{ tangent vector on } A \text{ at } \mathfrak{a}\}$$

is a pure q-dimensional analytic cone[2].

Let $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_q$ be linearly independent vectors in V. They span the linear subspace

$$E(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_q) = \left\{ \sum_{\mu=1}^{q} z_\mu \mathfrak{c}_\mu \mid z_\mu \in \boldsymbol{C} \right\} = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} \wedge \mathfrak{c}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{c}_q = 0\},$$

whose image in $\boldsymbol{P}(V)$ is the $(q-1)$-dimensional plane

$$\ddot{E}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_q) = \rho(E(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_q) - \{0\}).$$

In the exterior product $\bigwedge_q V$, define the analytic cone

$$\tilde{\mathfrak{G}}^q(V) = \{\mathfrak{c}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{c}_q \mid \mathfrak{c}_\mu \in V\}.$$

Then

$$\mathfrak{G}^{q-1}(V) = \rho(\mathfrak{G}^q(V) - \{0\})$$

is a smooth, connected, compact complex submanifold of

$$\boldsymbol{P}\left(\bigwedge_q V\right),$$

which is called the *Grassmann manifold of q-dimensional subspaces of V or $(q-1)$-dimensional planes in $\boldsymbol{P}(V)$*. It is $\dim \mathfrak{G}^{q-1}(V) = q(n+1-q)$. If $\gamma \in \mathfrak{G}^{q-1}(V)$ then $\gamma = \rho(\mathfrak{c}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{c}_q)$. Then

$$E(\gamma) = E(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_q),$$

$$\ddot{E}(\gamma) = \ddot{E}(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_q) = \rho(E(\gamma) - \{0\})$$

[2] See THIE [15], Proposition 3.1 and WHITNEY [16] and [17].

are well defined. The maps

$$E\colon \mathfrak{G}^{q-1}(V) \to \{S \mid S \text{ } q\text{-dimensional linear subspace of } V\},$$

$$E\colon \mathfrak{G}^{q-1}(V) \to \{L \mid L \text{ } (q-1)\text{-dimensional plane in } \boldsymbol{P}(V)\}$$

are bijective.

Lemma 1.2. *Let V be a complex vector space of dimension n. Let N be an analytic set of dimension $q-1$ in $\boldsymbol{P}(V)$. Suppose that $0<q<n$ and $p=n-q$. Then*

$$S=\{\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{G}^{p-1}(V) \text{ with } \ddot{E}(\gamma) \cap N \neq \emptyset\}$$

is a thin analytic subset of $\mathfrak{G}^{p-1}(V)$.

For the proof see THIE [*15*], Lemma A1. Now, it can be proved that there are enough orthonormal clear bases

Proposition 1.3. *Let V be an n-dimensional complex vector space with an Hermitian product $(\ |\ )$. Let A be a pure q-dimensional analytic subset of an open subset G of V with $0 \leqq q<n$. Take $\mathfrak{a} \in V$. Then a nowhere dense, real analytic subset R of $\mathfrak{U}(V)$ exists that*

$$\mathfrak{U}(V)-Y(A,\mathfrak{a},q) \subseteq R.$$

Hence $Y(A,\mathfrak{a},q)$ contains an open dense subset of $\mathfrak{U}(V)$.

Proof. Without loss of generality, $\mathfrak{a}=0$ can be assumed. If $q=0$, the theorem is trivial. Suppose that $0<q<n$ and define $p=n-q$.

Let T be the tangent cone of A at 0. Then $N=\rho(T-\{0\})$ is a pure $(q-1)$-dimensional analytic subset of $\boldsymbol{P}(V)$. Moreover

$$S=\{\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{G}^{p-1}(V) \text{ with } \ddot{E}(\gamma) \cap N \neq \emptyset\}$$

is a thin analytic subset of $\mathfrak{G}^{p-1}(V)$. For $\varphi \in \mathfrak{T}(q,n)$ define

$$\sigma_\varphi\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathfrak{G}^{p-1}(V)$$

by

$$\sigma_\varphi(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n)=\rho(\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(q+1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(n)})$$

where $\rho\colon \tilde{\mathfrak{G}}^p(V)-\{0\} \to \mathfrak{G}^{p-1}(V)$ is the residual map. Obviously, σ_φ is well-defined, holomorphic and surjective. Take $\gamma \in \mathfrak{G}^{p-1}(V)$. Then $\gamma=\rho(\mathfrak{b}_{q+1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{b}_n)$, where $\mathfrak{b}_{q+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n$ are linearly independent over $\boldsymbol{C}$. An orthonormal base $\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \in \mathfrak{U}(V)$ exists such that $E(\mathfrak{b}_{q+1}, \ldots, \mathfrak{b}_n)=E(\mathfrak{a}_{q+1}, \ldots, \mathfrak{a}_n)$. Hence

$$\mathfrak{b}_{q+1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{b}_n=\lambda\, \mathfrak{a}_{q+1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{a}_n \qquad \text{with } \lambda \neq 0.$$

Define $\mathfrak{c}=\underline{\tilde{\varphi}}^{-1}(\mathfrak{a}) \in \mathfrak{U}(V)$. Then $\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(\nu)}=\mathfrak{a}_\nu$ and

$$\sigma_\varphi(\mathfrak{c})=\rho(\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(q+1)} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(n)})=\rho(\mathfrak{a}_{q+1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{a}_n)=\rho(\mathfrak{b}_{q+1} \wedge \cdots \wedge \mathfrak{b}_n)=\gamma.$$

Hence, $\sigma_\varphi(\mathfrak{U}(V))=\mathfrak{G}^{p-1}(V)$. Therefore $R_\varphi=\sigma_\varphi^{-1}(S)\cap\mathfrak{U}(V)$ is a proper subset of $\mathfrak{U}(V)$, which is real analytic. Because $\mathfrak{U}(V)$ is connected and because $\mathfrak{U}(V)\neq R_\varphi$, the real analytic set R_φ is nowhere dense in $\mathfrak{U}(V)$ and $\mathfrak{U}(V)-R_\varphi$ s open and dense in $\mathfrak{U}(V)$. Therefore,

$$R=\bigcup_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,n)} R_\varphi$$

is a nowhere dense analytic subset of $\mathfrak{U}(V)$ and $\mathfrak{U}(V)-R$ is dense and open in $\mathfrak{U}(V)$.

Take $\mathfrak{c}=(\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_n)\in\mathfrak{U}(V)-Y(A,0,q)$. Then $\varphi\in\mathfrak{T}(q,n)$ exists such that 0 is not an isolated point of

$$A\cap E(\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(q+1)}\wedge\cdots\wedge\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(n)}).$$

Therefore a sequence $\{\mathfrak{z}_\nu\}_{\nu\in N}$ of points of this intersection with $\mathfrak{z}_\nu\neq 0$ exists such that $\mathfrak{z}_\nu\to 0$. Because $\mathfrak{z}_\nu/|\mathfrak{z}_\nu|$ is bounded, it can be assumed – by selecting a subsequence – that

$$\frac{\mathfrak{z}_\nu}{|\mathfrak{z}_\nu|}\to\mathfrak{t}\qquad\text{for }\nu\to\infty.$$

Then

$$\mathfrak{t}\in E(\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(q+1)}\wedge\cdots\wedge\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(n)})\quad\text{and}\quad\mathfrak{t}\in T\quad\text{or}\quad\rho(t)\in\ddot{E}(\sigma_\varphi(\mathfrak{c}))\cap N;$$

hence

$$\sigma_\varphi(\mathfrak{c})\in S\quad\text{and}\quad\mathfrak{c}\in\sigma_\varphi^{-1}(S)\cap\mathfrak{U}(V)=R_\varphi\subseteq R.$$

Therefore

$$\mathfrak{U}(V)-Y(A,0,q)\subseteq R.$$

Q.e.d.

§ 2. Some Remarks on Differential Forms and Integration

The theory of differential forms and their integration is supposed to be known. However, some remarks shall be made.

1. *Remark.* Let M be a pure m-dimensional complex manifold. The complex structure $\mathfrak{S}(M)$ is the set of all biholomorphic maps $\alpha: U_\alpha\to U'_\alpha$ where U_α is open on M and U'_α is open in $\boldsymbol{C}^m$. If $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$, then the coordinate functions $z_\mu=z_\mu^\alpha: U_\alpha\to\boldsymbol{C}$ are defined such that $\alpha=(z_1^\alpha,\ldots,z_m^\alpha)$. Let d be the exterior derivative on M. For $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$ and $\psi\in\mathfrak{T}(q,m)$ define the exterior forms

$$\zeta_\varphi^\alpha=\zeta_\varphi=dz_{\varphi(1)}^\alpha\wedge\cdots\wedge dz_{\varphi(q)}^\alpha,$$

$$\eta_{\varphi\psi}^\alpha=\eta_{\varphi\psi}=\left(\frac{i}{2}\right)^q dz_{\varphi(1)}\wedge d\bar{z}_{\psi(1)}\wedge\cdots\wedge dz_{\varphi(q)}\wedge d\bar{z}_{\psi(q)}$$

on U_α. Then

$$\bar{\zeta}_\varphi=d\bar{z}_{\varphi(1)}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_{\varphi(q)},$$

$$\eta_{\varphi\psi}=(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^q\zeta_\varphi\wedge\bar{\zeta}_\psi=\bar{\eta}_{\psi\varphi}.$$

For every form χ of bidegree (p, q) on a subset A of M and for every $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $A\cap U_\alpha\neq\emptyset$, uniquely determined function $\tilde{\chi}^\alpha_{\varphi\psi}$ exist on $A\cap U_\alpha$ such that

$$\chi\,|\,U_\alpha\cap A=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(p,m)}\ \sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\tilde{\chi}^\alpha_{\varphi\psi}\,\zeta^\alpha_\varphi\wedge\bar{\zeta}^\alpha_\psi. \tag{1}$$

The class of the functions $\tilde{\chi}^\alpha_{\varphi\psi}$ is the same as the class of χ. If $p=q$, then uniquely determined functions $\chi^\alpha_{\varphi\psi}$ exist on $U_\alpha\cap A$ such that

$$\chi\,|\,U_\alpha\cap A=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\ \sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\chi^\alpha_{\varphi\psi}\,\eta^\alpha_{\varphi\psi}. \tag{2}$$

2. *Remark.* A form χ is real on A if and only if $\bar{\chi}=\chi$ on A. If χ has bidegree (p,q), then χ is real if and only if $p=q$ and if $\chi^\alpha_{\varphi\psi}=\bar{\chi}^\alpha_{\psi\varphi}$ whenever $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$, $U_\alpha\cap A=\emptyset$, $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$ and $\psi\in\mathfrak{T}(q,m)$.

3. *Remark.* A form χ of degree $2m$ has bidegree (m,m). Let ι be the one and only element of $\mathfrak{T}(m,m)$. If χ has bidegree (m,m) on $A\subseteq M$ and if $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $A\cap U_\alpha\neq\emptyset$, then

$$\chi\,|\,A\cap U_\alpha=\chi^\alpha_{\iota\iota}\,\eta_{\iota\iota}.$$

One and only one form $|\chi|$ exists on A, such that

$$|\chi|\,|\,A\cap U_\alpha=|\chi^\alpha_{\iota\iota}|\,\eta_{\iota\iota}$$

if $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $A\cap U_\alpha\neq\emptyset$. If χ and ξ are two real forms of bidegree (m,m) on A, if $a\in A$, then $\chi\leqq\xi$ at a if and only if $\chi^\alpha_{\iota\iota}(a)\leqq\xi^\alpha_{\iota\iota}(a)$ for every $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$. This defines an order on the set of all real forms on A. As usual write $\chi<\xi$ at a if and only if $\chi\leqq\xi$ and $\chi\neq\xi$ at a, that is $\chi^\alpha_{\iota\iota}(a)<\xi^\alpha_{\iota\iota}(a)$ for every $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$. Because zero is a form of bidegree (m,m), it is defined when a real form of bidegree (m,m) is positive, non-negative, non-positive respectively negative at a.

Let $B\subseteq A$, and let χ and ξ be forms of bidegree (m,m) on A, then $\chi\leqq\xi$ on B if and only if $\chi\leqq\xi$ at a for every $a\in B$ and $\chi<\xi$ on B if and only if $\chi<\xi$ at a for every $a\in B$. If $A=B$, omit "on B" in this notation. Obviously, $0\leqq|\chi|$.

4. *Remark.* If M and N are complex manifolds and if $\sigma: N\to M$ is a holomorphic map, then σ induces a form $\sigma^*(\chi)$ on $\sigma^{-1}(B)$ for every form χ on a subset B of M. The map σ^* is a homomorphism preserving degrees and bidegrees.

5. *Remark.* Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Then N is said to be a complex submanifold if and only if N is a subspace of M and a complex manifold, such that the inclusion map $j: N\to M$, which is defined by $j(z)=z$ is holomorphic. Moreover N is said to be a *smooth complex submanifold* of M, if N is a complex submanifold and if for every $a\in N$ the Jacobian of the inclusion map j has rank $n(a)$ at a where $n(a)=\dim_a N$.

6. *Remark.* Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let $0<q<m$. Let $a\in A\subseteq M$. Let χ and ξ be real forms of bidegree (q,q) on A. Then $\chi\leqq\xi$ at a, if and only if for every smooth, pure q-dimensional complex

submanifold N of M with $a\in N$, the inequality $j_N^*(\chi)\leqq j_N^*(\xi)$ holds at a where $j_N\colon N\to M$ is the inclusion map. Observe that Remark 3 applies to $j_N^*(\chi)$ and $j_N^*(\xi)$ on N. The module of all real forms of bidegree (q,q) on A over the ring of real functions on A is ordered by "$\leqq$ at a". If $\chi\leqq\xi$ at a and $\chi(a)\neq\xi(a)$ write $\chi<\xi$ at a, which is the case if and only if $j_N^*(\chi)<j_N^*(\xi)$ at a for all smooth, pure q-dimensional, complex submanifolds N of M with $a\in N$. Define χ to be positive at a iff $\chi>0$ at a; define χ to be non-negative at a iff $\chi\geqq 0$ at a, define χ to be non-positive at a iff $\chi\leqq 0$ at a and define χ to be negative at a if $\chi<0$ at a.

Let $B\subseteq A$, and let χ and ξ be real forms of bidegree (q,q) on A, then $\chi\leqq\xi$ on B if and only if $\chi\leqq\xi$ at a for all $a\in B$ and $\chi<\xi$ on B if and only if $\chi<\xi$ at a for all $a\in B$. Define χ to be positive, non-negative, non-positive or negative on B, iff $\chi>0$, $\chi\geqq 0$, $\chi\leqq 0$ or $\chi<0$ respectively on B. In these definitions, omit "on B" if $B=A$. Obviously, $\chi>0$ on B implies $\chi\geqq 0$. The forms $\eta^\alpha_{\varphi\varphi}$ are non-negative on U_α for all $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$.

Since non-negative forms are only inextensively investigated in the literature[3], some results concerning these forms shall be proved here, because they are important in showing that the integrands in the First Main Theorem are non-negative.

Let χ be a real form of bidegree (q,q) on A. Take $a\in A$ and $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$. Then

$$\chi=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\chi^\alpha_{\varphi\psi}\eta^\alpha_{\varphi\varphi}\qquad\text{on } U_\alpha\cap A.$$

Define a real valued function $F[a,\alpha,\chi]=F$ on $\boldsymbol{C}^{mq}$ by setting

$$\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_q),\qquad \mathfrak{x}_\mu=(x_{\mu 1},\ldots,x_{\mu m})\in\boldsymbol{C}^m,$$

$$D_\varphi(\mathfrak{x})=\begin{vmatrix} x_{1\varphi(1)},\ldots,x_{1\varphi(q)}\\ \cdot\quad\cdots\quad\cdot\\ x_{q\varphi(1)},\ldots,x_{q\varphi(q)}\end{vmatrix}\qquad\text{for } \varphi\in\mathfrak{T}(q,m),$$

$$F[z,\alpha,\chi](\mathfrak{x})=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\chi^\alpha_{\varphi\psi}D_\varphi(\mathfrak{x})\overline{D_\psi(\mathfrak{x})}.$$

Lemma 2.1. *Let $a\in A\subseteq M$. Let χ be a real form of bidegree (q,q) on M. Then the following properties are equivalent.*

a) *χ is non-negative at a.*

b) *$F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\geqq 0$ for some $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$ and for all $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{C}^{mq}$.*

c) *$F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\geqq 0$ for all $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$ and all $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{C}^{mq}$.*

Proof. a) *implies* c): Take $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$ and $\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_q)\in\boldsymbol{C}^{mq}$ with $\mathfrak{x}_\mu\in\boldsymbol{C}^m$ for $\mu=1,\ldots,q$. If $\mathfrak{x}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{x}_q=0$, then $D_\varphi(\mathfrak{x})=0$ for all $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$. Hence $F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})=0$. If $\mathfrak{x}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{x}_q\neq 0$, an open neighborhood V of 0 in $\boldsymbol{C}^q$ exists such that $\beta_0\colon V\to\boldsymbol{C}^m$ maps V into U'_α where

$$\beta_0(u_1,\ldots,u_q)=u_1\mathfrak{x}_1+\cdots+u_q\mathfrak{x}_q+\alpha(a).$$

[3] See LELONG [6], [7] and STOLL [13].

Then $\beta^{-1}=\alpha^{-1}\circ\beta'\colon V\to M$ is well defined and $N=\beta^{-1}(V)$ is a smooth pure q-dimensional complex submanifold of N with $\beta\in\mathfrak{S}(N)$. Then $\alpha\circ\beta^{-1}=(w_1,\ldots,w_m)$. Let $j\colon N\to M$ be the inclusion map. Then

$$\frac{\partial(w_{\varphi(1)},\ldots,w_{\varphi(q)})}{\partial(u_1,\ldots,u_q)}=D_\varphi(\mathfrak{x}).$$

If $\iota\in\mathfrak{T}(q,q)$, then

$$j^*(\chi)(a)=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\chi^\alpha_{\varphi\psi}\,D_\varphi(\mathfrak{x})\,\overline{D_\psi(\mathfrak{x})}\,\eta^\beta_{\iota\iota}=F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\,\eta^\beta_{\iota\iota}.$$

Hence $F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\geqq 0$. Hence a) implies c). Obviously c) implies b).

Now, it shall be proved, that b) *implies* a). Let N be any pure q-dimensional smooth complex submanifold of M with $a\in N$. Take $\beta\in\mathfrak{S}(N)$ with $a\in U_\beta$. Take that $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$ for which $F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\geqq 0$ if $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{C}^{mq}$. On $\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$, $\alpha\circ\beta^{-1}$ is defined. Set

$$\mathfrak{x}_\nu=\frac{\partial}{\partial u_\nu}\,\alpha\circ\beta^{-1}(u_1,\ldots,u_q)|_{\beta(a)}.$$

Define $\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_q)\in\boldsymbol{C}^{mq}$. Then

$$j^*(\chi)(a)=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\chi^\alpha_{\varphi\psi}\,D_\varphi(\mathfrak{x})\,\overline{D_\psi(\mathfrak{x})}\,\eta^\beta_{\iota\iota}=F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\,\eta^\beta_{\iota\iota}.$$

Because $F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\geqq 0$, the form $j^*(\chi)$ is non-negative at a. Hence $\chi\geqq 0$ at a, which proves a); q.e.d.

An almost identical proof shows:

Lemma 2.2. *Let $a\in A\subseteq M$. Let χ be a real form of bidegree (q,q) on M. Then the following properties are equivalent.*

a) *χ is positive at a.*

b) *Some $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$ exists such that $F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})>0$ for all $\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_q)\in\boldsymbol{C}^{mq}$ with $\mathfrak{x}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{x}_q\neq 0$.*

c) *For all $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$ and all $\mathfrak{x}=(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_q)\in\boldsymbol{C}^{mq}$ with $\mathfrak{x}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{x}_q\neq 0$ is $F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})>0$.*

Lemma 2.3. *Let χ be a real form of bidegree (q,q) on the subset A of the pure m-dimensional complex manifold M with $0<q\leqq m$. Then χ is non-negative at $a\in A$ if and only if, for every holomorphic map $f\colon V\to M$ of an open neighborhood V of 0 in $\boldsymbol{C}^q$ into M with $f(0)$, the form $f^*(\chi)$ is non-negative at 0.*

Proof. a) *Suppose that the condition is satisfied.* Let N be a smooth, pure q-dimensional complex submanifold of M with $a\in N$. Let $j\colon N\to M$ be the inclusion map. Take $\beta\in\mathfrak{S}(N)$ with $a\in U_\beta$ and $\beta(a)=0$. Then $\beta^{-1}\colon U'_\beta\to U_\beta$ is biholomorphic and U'_β is an open neighborhood of 0 in $\boldsymbol{C}^q$. Hence $f=j\circ\beta^{-1}\colon U'_\beta\to M$ is holomorphic with $f(0)=a$. Hence $f^*(\chi)$ is non-negative at 0. Because β is biholomorphic, also $\beta^*(f^*(\chi))=(f\circ\beta)^*(\chi)=j^*(\chi)$ is non-negative at $\beta(0)=a$.

b) *Suppose that χ is non-negative.* Let $0\in V\subseteq \boldsymbol{C}^q$ and let V be open. Let $f\colon V\to M$ be holomorphic and $f(0)=a$. Pick $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ with $a\in U_\alpha$. Define

$$\frac{\partial}{\partial u_\nu}(\alpha\circ f)(u_1,\ldots,u_q)|_0=\mathfrak{x}_\nu.$$

Let $\iota\in\mathfrak{T}(q,q)$ and form $\eta_{\iota\iota}$ for the coordinates $u_1,\ldots,u_q$ of $\boldsymbol{C}^q$. Then

$$f^*(\chi)(a)=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\chi_{\varphi\psi}D_\varphi(\mathfrak{x})\overline{D_\psi(\mathfrak{x})}\eta_{\iota\iota}=F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\cdot\eta_{\iota\iota}$$

with $F[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})\geqq 0$. Hence $f^*(\chi)$ is non-negative at a.

Let M and N be complex manifolds. Let $f\colon N\to M$ be a holomorphic map. Let $a\in N$. Suppose that $n=\dim_a N$ and $m=\dim_{f(a)}M$ and that $n\leqq m$. Then f is said to be *regular at* $a\in N$, if and only if the Jacobian of f at a has rank n. If $g\colon R\to N$ and $f\colon N\to M$ are holomorphic, if $b=g(a)$ and $c=f(b)$ with $\dim_a R\leqq\dim_b B\leqq\dim_c M$, and if f is regular at b and g is regular at a, then $f\circ g$ is regular at a.

Lemma 2.4. *Let χ be real form of bidegree (q,q) on the subset A of the pure m-dimensional complex manifold M with $0<q\leqq m$. Let $a\in A$. Then χ is positive at a if and only if for every holomorphic map $f\colon V\to M$ of an open neighborhood V of 0 in $\boldsymbol{C}^q$ with $a=f(0)$ which is regular at 0, the form $f^*(\chi)$ is positive at 0.*

The proof is trivial. This is practically a reformulation of the definition of positivity at a.

Lemma 2.5. *Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let $b\in M$. Let χ be a form of bidegree (q,q) on M with $0<q\leqq m$. Let χ be non-negative at b. Let N be a pure n-dimensional complex manifold with $0<q\leqq n$. Let $a\in N$. Let $f\colon N\to M$ be a holomorphic map with $f(a)=b$. Then $f^*(\chi)$ is non-negative on N. Moreover, if $n\leqq m$, if f is regular at a and if χ is positive at b, then $f^*(\chi)$ is positive at a.*

Proof. Let $0\in V\subseteq\boldsymbol{C}^q$ and let V be open. Let $g\colon V\to N$ be any holomorphic map with $g(0)=a$. Then $f\circ g\colon V\to N$ is holomorphic with $(f\circ g)(0)=b$. Hence $(f\circ g)^*(\chi)=g^*(f^*(\chi))$ is non-negative at 0. Hence $f^*(\chi)$ is non-negative at a.

If $n\leqq m$, if f is regular at a and if χ is positive at b, choose g to be regular at 0. Then $f\circ g\colon V\to N$ is regular at 0. Hence $(f\circ g)^*(\chi)=g^*(f^*(\chi))$ is positive at a. Hence $f^*(\chi)$ is positive at a; q.e.d.

Let M be a pure m-dimensional complex manifold. For $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ define $\alpha=(z_1,\ldots,z_m)$ on U_α. For $\mu\neq\nu$ define

$$\eta'_{\mu\nu}=\left(\frac{i}{2}\right)^{m-2}dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\cdots\wedge dz_{\mu-1}\wedge d\bar z_{\mu-1}\wedge dz_{\mu+1}\wedge d\bar z_{\mu+1}\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge dz_{\nu-1}\wedge d\bar z_{\nu-1}\wedge dz_{\nu+1}\wedge d\bar z_{\nu+1}\wedge\cdots\wedge dz_m\wedge d\bar z_m,$$
$$\eta'_\mu=\left(\frac{i}{2}\right)^{m-1}dz_1\wedge d\bar z_1\wedge\cdots\wedge dz_{\mu-1}\wedge d\bar z_{\mu-1}\wedge dz_{\mu+1}\wedge\cdots\wedge dz_m\wedge d\bar z_m$$

on U_α. Let χ be a form of bidegree $(m-1,m-1)$ on A. Let $a\in A\cap U_\alpha$. Then uniquely determined functions $\chi'_{\mu\nu}$ on U_α exist such that

$$\chi=\frac{i}{2}\sum_{\mu\neq\nu}\chi'_{\mu\nu}\,dz_\mu\wedge d\bar{z}_\nu\wedge\eta'_{\mu\nu}+\sum_{\mu=1}^{n}\chi'_{\mu\mu}\eta'_\mu.$$

For $\mathfrak{x}\in\boldsymbol{C}^{m-1}$, define

$$H[a,\alpha,\chi](\mathfrak{x})=\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\chi'_{\mu\nu}(a)\,x_\mu\bar{x}_\nu.$$

Then χ is real at a if and only if $H[a,\alpha,\chi]$ is a Hermitian Form on $\boldsymbol{C}^m$, i.e., if $\overline{\chi'_{\mu\nu}(a)}=\chi'_{\nu\mu}(a)$. Then χ is non-negative (positive) at a if and only if $H[a,\alpha,\chi]$ is a non-negative (positive) definite Hermitian form. (See STOLL [*11*], Satz 4.3, p.42.)

Theorem 2.6. (LELONG)[4]. *Let χ and ψ be forms on the subset A of a pure m-dimensional complex manifold M. Suppose that χ has bidegree (q,q) and that ψ has bidegree $(1,1)$. Suppose that χ and ψ are non-negative (positive) at $a\in A$. Suppose that $0<q<m$. Then $\chi\wedge\varphi$ is non-negative (resp. positive) at a.*

Proof. Suppose at first, that $q=m-1$. Then $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$, with $a\in U_\alpha$ exists such that

$$\psi=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\psi_{\mu\nu}\,dz_\mu\wedge d\bar{z}_\nu\qquad\text{on } U_\alpha\cap A$$

with $\psi_{\mu\nu}(a)=0$ if $\mu\neq\nu$. On $U_\alpha\cap A$ is

$$\chi=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\chi'_{\mu\nu}\,dz_\mu\wedge d\bar{z}_\nu\wedge\eta'_{\mu\nu}+\sum_{\mu=1}^{m}\chi'_{\mu\mu}\eta'_\mu,$$

$$\psi\wedge\chi=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\chi'_{\mu\nu}\psi_{\mu\nu}\eta^{\alpha}_{\iota\iota},$$

where $\iota\in\mathfrak{T}(m,m)$. If χ and ψ are non-negative, then $\chi'_{\mu\mu}(a)\geqq 0$ and $\psi_{\mu\mu}(a)\geqq 0$ for $\mu=1,\ldots,m$. If χ and ψ are positive, then $\chi'_{\mu\mu}(a)>0$ and $\psi_{\mu\mu}(a)>0$ for $\mu=1,\ldots,m$. At a is

$$(\chi\wedge\psi)(a)=\sum_{\mu=1}^{m}\chi'_{\mu\mu}(a)\,\psi_{\mu\mu}(a)\,\eta_{\iota\iota}\geqq 0\qquad(\text{resp. }>0).$$

Now, suppose that $0<q<m-1$. Let $0\in V\subseteq\boldsymbol{C}^{q+1}$ where V is open. Let $f\colon V\to M$ be holomorphic with $f(0)=a$. According to Lemma 2.5 the forms $f^*(\chi)$ and $f^*(\psi)$ are non-negative at 0. The first part of the proof shows that $f^*(\chi)\wedge f^*(\psi)=f^*(\chi\wedge\psi)$ is non-negative at 0. According to Lemma 2.3, $\chi\wedge\psi$ is non-negative at a. If χ and ψ are positive at a, suppose that f is regular at 0. Then $f^*(\chi)$ and $f^*(\psi)$ are positive at 0, according to Lemma 2.4. Then the first part of the proof shows, that $f^*(\chi)\wedge f^*(\psi)=f^*(\chi\wedge\psi)$ is positive at 0. According to Lemma 2.4, χ is positive at a; q.e.d.

[4] See LELONG [*6*].

It is unknown, if Theorem 2.9 remains true if ψ has a bidegree (p,p) with $1<p\leqq m-q$. According to Theorem 2.9, any form

$$\sum_{\mu=1}^{s} c_\mu \chi_{\mu 1}\wedge\cdots\wedge\chi_{\mu q}$$

is non-negative (positive) at a if $0<q\leqq m$, if $\chi_{\mu\nu}$ is a real form of bidegree $(1,1)$ which is non-negative (positive) at a and if $c_\mu>0$.

Lemma 2.7. *Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let $0<q\leqq m$. If ω is a form of bidegree $(q,0)$ on the subset A of M, then*

$$\chi=(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^q\omega\wedge\bar{\omega}$$

is non-negative on A.

Proof. Take $a\in A$. Let $0\in V\subseteq \boldsymbol{C}^q$ and let V be open. Let $f: V\to M$ be holomorphic with $a=f(0)$. Let $z_1,\ldots,z_q$ be the coordinates on V. Let $\iota\in\mathfrak{T}(q,q)$ and form ζ_ι for $z_1,\ldots,z_q$. Then $f^*(\omega)=g\,\zeta_\iota$. Hence

$$f^*(\chi)=g\cdot\bar{g}\,\eta_{\iota\iota}=|g|^2\eta_{\iota\iota}\geqq 0 \qquad \text{at } 0.$$

Therefore, χ is non-negative on A; q.e.d.

Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let ψ and χ be forms of bidegree (q,q) on a subset A of M. Then

$$|\psi|\leqq\chi \qquad \text{at } a\in A$$

means, that

1. *The form χ is non-negative at a.*

2. *If N is any pure q-dimensional complex submanifold of N with $a\in N$ and if $j: N\to M$ is the inclusion map, then $|j^*(\psi)|\leqq j^*(\chi)$ at a.*

If $B\subseteq A$, then $|\psi|\leqq\chi$ on B means, $|\psi|\leqq\chi$ for all $a\in B$.

If K is a compact subset of A, and if ψ and χ are continuous forms of bidegree (q,q) on the subset A of M, if χ is positive on K, then a constant $c>0$ exists such that [5]

$$|\psi|\leqq c\,\chi \qquad \text{on } K.$$

7. *Remark.* Let M be a pure m-dimensional complex manifold. For $\alpha\in\mathfrak{S}(M)$ and $\beta\in\mathfrak{S}(M)$ with $U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ define $(w_1,\ldots,w_m)=\beta\circ\alpha^{-1}$ as holomorphic vector function on $\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$. Then the Jacobian determinant is given by

$$\Delta_{\beta\alpha}(x)=\left.\frac{\partial(w_1,\ldots,w_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}\right|_{\alpha(x)} \qquad \text{for } x\in U_\alpha\cap U_\beta.$$

[5] The proof is almost identical to the proof of Lemma 7.17, STOLL [13].

Take $p \in \boldsymbol{R}$. A *density*[6] ψ *of weight* p *on the subset* A *of* M is a function on $\{(x,\alpha) \mid x \in U_\alpha \cap A,\ \alpha \in \mathfrak{S}(M)\}$ such that

$$\psi(x,\alpha) = \psi(x,\beta)\,|\Delta_{\beta\alpha}(x)|^{2p} \qquad \text{on } U_\alpha \cap U_\beta \cap A.$$

Obviously, the densities of weight p on the subset A of M form a complex vector space with conjugation, and the real valued densities of weight p form a real vector space, which is partially ordered. If ψ is a density of weight p on A, then $|\psi|$ is real density of weight p on A. If ψ_ν is a density of weight p_ν on A for $\nu = 1, 2$, then $\psi_1 \psi_2$ is a density of weight $p_1 + p_2$ on A. The densities of weight 1 on A can be identified with the differential forms of degree $2m$ on A by

$$\psi(x,\alpha) \Leftrightarrow \psi(x,\alpha)\,\eta^\alpha_{1\,1} \qquad \text{at } x.$$

This identification respects conjugation, absolute value and inequalities.

8. *Remark.* Let M be a complex vector space of dimension m. *A density* ψ *of biweight* (p,q) *on* A is a function on $\{(x,\alpha) \mid x \in U_\alpha \cap A,\ \alpha \in \mathfrak{S}(M)\}$ such that

$$\psi(x,\beta)\,\Delta^p_{\beta\alpha}\,\bar{\Delta}^q_{\beta\alpha} = \psi(x,\alpha) \qquad \text{on } A \cap U_\alpha \cap U_\beta.$$

The densities of biweight (p,q) on A form a complex vector space. If ψ_ν is a density of biweight (p_ν, q_ν) on A for $\nu = 1, 2$, then $\psi_1 \psi_2$ is a density of biweight $(p_1 p_2, q_1 q_2)$. If ψ is a density of biweight (p,q), then $\overline{\psi}$ is a density of biweight (q,p) and $|\psi|$ is a non-negative density of weight $\frac{1}{2}(p+q)$. Moreover, ψ is a density of weight q if and only if it is a density of biweight (q,q). The densities of biweight $(1,0)$ can be identified with the forms of bidegree $(m,0)$ by $\psi(x,\alpha) \Leftrightarrow \psi(x,\alpha)\,\zeta^\alpha_1$ and the densities of biweight $(0,1)$ can be identified with the forms of bidegree $(0,m)$ by $\psi(x,\alpha) \Leftrightarrow \psi(x,\alpha)\,\overline{\zeta^\alpha_1}$.

9. *Remark.* Let M be a complex manifold. Let d be the exterior derivative. Then ∂ is the complex component of d and $\bar{\partial}$ the conjugate complex component such that $d = \partial + \bar{\partial}$. Define

$$d^\perp = i(\partial - \bar{\partial}).$$

10. *Remark.* Let V be an m-dimensional complex vector space with hermitian product $(\,|\,)$. For $z \in V$ define

$$(d\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}) = \partial(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}),$$

$$(\mathfrak{z} \mid d\mathfrak{z}) = \bar{\partial}(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}),$$

$$(d\mathfrak{z} \mid d\mathfrak{z}) = \partial(\mathfrak{z} \mid d\mathfrak{z}) = -\bar{\partial}(d\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}),$$

$$v = \frac{i}{2}(d\mathfrak{z} \mid d\mathfrak{z}),$$

$$v_p = \frac{1}{p!}\, v \wedge \cdots \wedge v \qquad (p\text{-times}).$$

[6] Obviously, the density ψ can also be defined as a section in a certain line bundle E_p over A, where $E_p \otimes E_q = E_{p+q}$.

Then υ is the associated exterior form to a Kaehler metric on V and υ_p is positive υ and υ_p are called the *euclidean forms* to (|). If $\mathfrak{c}=(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m)\in \mathrm{GL}(V)$ is a base of V, then holomorphic functions $z_1, \ldots, z_m$ exist on V uniquely such that

$$\mathfrak{z}=\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu(\mathfrak{z})\,\mathfrak{c}_\nu \qquad \text{for } \mathfrak{z}\in V.$$

The map $\alpha=(z_1, \ldots, z_m)\colon V\to \boldsymbol{C}^m$ is biholomorphic. Define $\zeta^{\mathfrak{c}}_{\varphi}=\zeta^{\alpha}_{\varphi}$ and $\eta^{\mathfrak{c}}_{\varphi\psi}=\eta^{\alpha}_{\varphi\psi}$. Then

$$(\mathfrak{z}\,|\,\mathfrak{z})=\sum_{\mu,\nu=1}^{m} g_{\mu\nu}\, z_\mu\, \bar{z}_\nu, \qquad g_{\mu\nu}=(\mathfrak{c}_\mu\,|\,\mathfrak{c}_\nu),$$

$$\upsilon=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{m} g_{\mu\nu}\, dz_\mu\wedge d\bar{z}_\nu.$$

If and only if $\mathfrak{c}\in\mathfrak{U}(V)$ is orthonormal then $g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$ and

$$\upsilon=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{m} dz_\mu\wedge d\bar{z}_\nu,$$

$$\upsilon_p=\left(\frac{i}{2}\right)^{p}\sum_{\varphi\in\mathfrak{A}(p,m)} \eta^{\mathfrak{c}}_{\varphi\varphi}.$$

11. *Remark.* Let M be an oriented real manifold of class C^∞. Let N be an oriented real submanifold of pure dimension n and class C^k with $k\geqq 1$. Let ψ be a differential form of degree n on a subset A of M, such that $A\cap N$ is measurable on N. Let $j_N\colon N\to M$ be the inclusion; suppose that $j_N^*(\psi)$ as differential form of degree n is integrable over $A\cap N$, then define

$$\int_{A\cap N}\psi=\int_{A\cap N} j_N^*(\psi),$$

$$\int_{A\cap N}|\psi|=\int_{A\cap N}|j_N^*(\psi)|.$$

12. *Remark.* Let M be a complex manifold. Let N be a pure n-dimensional analytic subset of M. Let ψ be a differential form of degree $2n$ on a subset A of M. Let $\dot{N}$ be the set of simple points of N. Suppose that ψ is integrable over $A\cap\dot{N}$. Then define

$$\int_{A\cap N}\psi=\int_{A\cap\dot{N}}\psi, \qquad \int_{A\cap N}|\psi|=\int_{A\cap\dot{N}}|\psi|.$$

The integral always exists if A is compact and ψ is continuous on A. Of course if $A\subseteq N$, then $A\cap N=A$, but $\int_A\psi$ is an integral in the manifold $\dot{N}$, not in the manifold M.

For the properties of integrals an analytic sets see STOLL [*10*] and LELONG [*5*]. Now, some additional properties shall be proved.

Lemma 2.8. *Let M and N pure m-dimensional complex manifolds. Let $f: M \to N$ be a light holomorphic map. Let χ be a measurable differential form of degree $2m$ on N. Let G be a measurable subset of M. Let g be a measurable function on M such that $g \cdot f^*(\chi)$ is integrable over G. Then*

$$\int_G g\, f^*(\chi) = \int_{y \in N} \Big(\sum_{z \in G} \nu_f(z; y)\, g(z) \Big) \cdot \chi$$

where $\nu_f(z; y)$ is the y-multiplicity of f at z and where the sum

$$\sum_{z \in G} \nu_f(z; y)\, g(z)$$

is almost countable and absolutely convergent, almost every where on $B = \{z \mid \chi(z) \neq 0\}$.

Proof. Let $\tilde{\nu}$ be the characteristic function of the graph of f in $M \times N$. Let Δ be the set where f is not locally biholomorphic. Then Δ is a thin analytic subset of M, and $f(M)$ is almost thin[7] in N. Then $L = f(M)$ in N and $S = f^{-1}(L)$ in M are sets of measure zero. According to STOLL [*10*], Satz 6, is

$$\int_{G-S} g\, f^*(\chi) = \int_N \sum_{x \in G-S} \tilde{\nu}(x, y)\, g(x)\, \chi$$

where the sum is countable and absolutely convergent almost everywhere on B. Because S is a set of measure zero, this implies

$$\int_{G-S} g\, f^*(\chi) = \int_G g\, f^*(\chi).$$

If $y \in L$, then $\tilde{\nu}(x,y) = 1 = \nu_f(x,y)$ for all $x \in (G-S) \cap f^{-1}(y) = G \cap f^{-1}(y)$ and $\tilde{\nu}(x,y) = 0 = \nu_f(x,y)$ for all other x in G. Hence

$$\int_N \Big(\sum_{x \in G-S} \tilde{\nu}(x, y)\, g(x) \Big) \chi = \int_{N-L} \Big(\sum_{x \in G-S} \tilde{\nu}(x, y)\, g(x) \Big) \chi$$

$$= \int_{N-L} \Big(\sum_{x \in G} \nu_f(x, y)\, g(x) \Big) \chi = \int_N \Big(\sum_{x \in G} \nu_f(x, y)\, g(x) \Big) \chi.$$

Q.e.d.

Remark 1. This change from $\tilde{\nu}$ to ν_f, which changes only the integrand but not the integrals is important, because $\sum \nu_f(z,y)\, g(x)$ may be continuous on N if $\sum \tilde{\nu}(z,y)\, g(x)$ is not. (See I STOLL [*14*], Proposition 3.1 and 3.2.)

Remark 2. The same proof shows that $g\, f^*(\chi)$ is integrable, if χ is non-negative and if

$$\sum_G \nu_f(z, y)\, |g(z)|$$

[7] A subset Q of a complex space M is said to be *thin* if and only if every $a \in M$ is contained in an open neighborhood U of a which contains an analytic set L such that $Q \cap U \subseteq L$ and such that $U - L$ is dense in U. A subset Q of M is said to be *almost thin* if and only if Q is the union of atmost countable many thin sets. Let M and N be complex spaces of the same pure dimension. If $f: M \to N$ is holomorphic and if Q is almost thin in M, then $f(Q)$ is almost thin in N. (See STOLL [*12*], Hilfssatz 6.4, p. 397.)

is convergent almost everywhere on

$$B=\{z\,|\,\chi(z)\neq 0\} \quad \text{and if} \quad \sum_{z\in G} \nu_f(z;y)\,|\,g(z)|\,\chi$$

is integrable over N.

Now, a similar result for maps with positive fiber dimension is true. A holomorphic map $f\colon M\to N$ was called a *q-fibering map* if and only if all fibers $f^{-1}(f(a))$ are pure q-dimensional for all $a\in M$. For each point $a\in M$, a *multiplicity* $\nu_f(a)$ of f at a is defined[8]. For $b\in N$, define

$$\nu_f(a;b)=\begin{cases}\nu_f(a) & \text{if } a=b\\ 0 & \text{if } a\neq b.\end{cases}$$

Proposition 2.9. *Let M and N be pure dimensional complex manifolds with $0<\dim N=n<\dim M=m$. Let $f\colon M\to N$ be a holomorphic, p-fibering map with $p=m-n$. Let χ be a measurable form of bidegree (p,p) on M. Let ψ be a measurable form of bidegree (n,n) on N. Let G be a measurable subset of M. Suppose that $\chi\wedge f^*(\psi)$ is integrable over G. Define $T=\{z\,|\,\psi(z)\neq 0\}$. Then*

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} \nu_f\,\chi$$

exists for almost all $y\in T$. The differential form which is

$$\Big(\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} \nu_f\,\chi\Big)\cdot\psi$$

on T and zero on $N-T$ is integrable over N and

$$\int\limits_G \chi\wedge f^*(\psi)=\int\limits_N \Big(\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} \nu_f\,\chi\Big)\psi\,.$$

Proof. Let Δ be the set of all points where the rank of the Jacobian matrix of f is smaller than p. Then Δ is a thin analytic subset of M and $f(\Delta)=L$ is a set of measure zero on N. According to STOLL [*10*], Satz 7, Zusatz 2, is

$$\int\limits_{G-\Delta} \chi\wedge f^*(\psi)=\int\limits_N \Big(\int\limits_{f^{-1}(y)\cap(G-\Delta)} \chi\Big)\psi$$

where

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap(G-\Delta)} \chi=\int\limits_{f^{-1}(y)\cap(G-\Delta)} \nu_f\,\dot{\chi}$$

exists almost everywhere on T. Because L is a set of measure zero on N and because $\Delta\cap f^{-1}(y)$ is a set of measure zero on $f^{-1}(y)$ if $y\in N-L$, this implies

$$\begin{aligned}\int\limits_G \chi\wedge f^*(\psi)&=\int\limits_{N-L}\ \int\limits_{f^{-1}(y)\cap(G-\Delta)} \nu_f\,\chi\,\psi\\ &=\int\limits_{N-L}\ \int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} \nu_f\,\chi\,\psi\\ &=\int\limits_N\ \int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} \nu_f\,\chi\,\psi\,.\end{aligned}$$

Q.e.d.

[8] See I STOLL [*14*], § 5.

Remark. The same proof shows that $\chi \wedge f^*(\psi)$ is integrable over G, if ψ is non-negative on N and if

$$\int_{f^{-1}(y) \cap G} v_f \, |\chi|$$

for almost all $y \in T$ exists and if

$$\int_{f^{-1}(y) \cap G} v_f \, |\chi| \, \psi$$

is integrable over N.

Let m, p and q be positive integers with $m = p+q$. Then $\boldsymbol{C}^m = \boldsymbol{C}^p \times \boldsymbol{C}^q$. Let $z_1, \ldots, z_p$ be the coordinate functions on $\boldsymbol{C}^p$ and $w_1, \ldots, w_q$ be the coordinate functions on $\boldsymbol{C}^q$. Let $\pi_1 : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^p$ and $\pi_2 : \boldsymbol{C}^m \to \boldsymbol{C}^q$ the projections defined by $\pi_1(z,w) = z$ and $\pi_2(z,w) = w$ if $(z,w) \in \boldsymbol{C}^p \times \boldsymbol{C}^q$. Then $v_1, \ldots, v_m$ are the coordinate functions on $\boldsymbol{C}^m$ where $v_\mu = z_\mu \circ \pi_1$ for $1 \leqq \mu \leqq p$ and $v_{p+\mu} = w_\mu \circ \pi_2$ for $1 \leqq \mu \leqq q$. Define

$$\xi = \left(\frac{i}{2}\right)^q dw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge dw_q \wedge d\bar{w}_q ,$$

$$\eta = \left(\frac{i}{2}\right)^q dv_{p+1} \wedge d\bar{v}_{p+1} \wedge \cdots \wedge dv_{p+1} \wedge d\bar{v}_m .$$

Then $\eta = \pi_2^*(\xi)$. With these notations the following proposition can be proved

Proposition 2.10. *Let M be an open subset of $\boldsymbol{C}^m$. Let A be an open bounded subset of $\boldsymbol{C}^p$. Let B be an open subset of $\boldsymbol{C}^q$. Let $p+q=m$. Suppose that $\bar{A} \times B \subseteq M$. Let N be a pure p-dimensional normal complex space. Let $f : M \to N$ be an holomorphic, q-fibering map. Let $b \in N$. Suppose that*

$$F = f^{-1}(b) \cap (A \times B) = f^{-1}(b) \cap (\bar{A} \times B) \neq \emptyset .$$

For every $w \in B$, define $f_w : A \to N$ by $f_w(z) = f(z,w)$ if $z \in A$. Suppose that f_w is light for every $w \in B$. Let g be defined and measurable on F. Suppose that either $v_f \, g \, \eta$ is integrable over F or that

$$\sum_{z \in A} v_{f_w}(z;b) \, |g(z,w)| \, \xi$$

is integrable over B. Then

$$\int_F v_f \, g \, \eta = \int_B \Big(\sum_{z \in A} v_{f_w}(z;b) \, g(z,w) \Big) \cdot \xi$$

where both integrals exist.

Proof. Define $\pi : F \to B$ by $\pi(z,w) = w$ if $(z,w) \in F$. Then π is proper and light. Because F is pure q-dimensional, π is open and surjective. Let $\dot{F}$ be the set of simple points of F. Let $j : \dot{F} \to \boldsymbol{C}^m$ be the inclusion map. Then $\pi_2 \circ j = \pi \mid \dot{F}$. A thin analytic subset S of B exists, such that $T = \pi^{-1}(S)$ is a thin analytic subset of F and such that $\pi : F - T \to B - S$ is locally biholomorphic, proper and surjective. Moreover, F and $\pi^{-1}(w) = A \times \{w\}$ intersect simply at every

point $(z,w)\in(F-T)\cap\pi^{-1}(w)$. Hence

$$v_f(z,w)=v_{f_w}(z)=v_{f_w}(z;b) \quad \text{if} \quad (z,w)\in(F-T)\cap\pi^{-1}(w).$$

Together with Lemma 2.8, this implies,

$$\begin{aligned}\int_F v_f\, g\,\eta &= \int_F v_f\, g\, j^*(\eta)=\int_{F-T} v_{f_w}(z;b)\, g(z,w)\, j^*(\pi_2^*(\xi))\\ &=\int_{F-T} v_{f_w}(z;b)\, g(z,w)\,\pi^*(\xi)\\ &=\int_{B-S}\sum_{(z,w)\in F-T} v_\pi((z,w);w)\, v_{f_w}(z;b)\, g(z,w)\cdot\xi\end{aligned}$$

if $v_f\, g\,\eta$ is integrable over F.

If $(z,w)\in F-T$, then $v_\pi((z,w);w)=1$. If $z\in A$ and $w\in B-S$ and $v_{f_w}(z;b)>0$. Then $f(z,w)=b$ and $(z,w)\in F$ with $w\notin S$. Hence, $(z,w)\in F-T$. Therefore,

$$\sum_{(z,w)\in F-T} v_\pi((z,w);w)\, v_{f_w}(z;b)\, g(z,w)=\sum_{z\in A} v_{f_w}(z;b)\, g(z,w).$$

Hence

$$\begin{aligned}\int_F v_f\, g\,\eta &= \int_{B-S}\Big(\sum_{z\in A} v_{f_w}(z;b)\, g(z,w)\Big)\cdot\xi\\ &=\int_B\Big(\sum_{z\in A} v_{f_w}(z;b)\, g(z,w)\Big)\cdot\xi.\end{aligned}$$

If

$$\sum_{z\in A} v_{f_w}(z;b)\,|g(z,w)|\,\xi$$

integrable over B, so it is integrable over $B-S$. Hence

$$\sum_{(z,w)\in F-T} v_\pi((z,w);w)\, v_{f_w}(z;b)\,|g(z,w)|\,\xi$$

is integrable over $B-S$. Hence $v_{f_w}(z;b)\, g(z,w)\,\eta=v_f(z,w)\, g(z,w)\,\eta$ is integrable over $F-T$. Hence $v_f\, g\,\eta$ is integrable over F. Q.e.d.

Let N be a pure n-dimensional complex manifold. Let ω and ξ be forms of bidegree $(n,0)$ on N. Then $\omega\wedge\bar{\xi}$ and $|\omega\wedge\bar{\xi}|$ are forms of degree $2n$ on N. The forms ω and ξ can be identified with densities $\underline{\omega}$ respectively $\underline{\xi}$ of biweight $(1,0)$ on N. The form $\bar{\xi}$ can be identified with a density $(\bar{\underline{\xi}})$ of biweight $(0,1)$, which coincides with the conjugate $\overline{(\underline{\xi})}$ of $\underline{\xi}$. Denote $\bar{\underline{\xi}}=\overline{(\underline{\xi})}=(\bar{\underline{\xi}})$. Now, $|\underline{\omega}|$, $|\underline{\xi}|$, and $|\bar{\underline{\xi}}|$ are densities of weight $\frac{1}{2}$ on N. Moreover, $|\underline{\omega}|^2$, $\underline{\omega}\cdot\bar{\underline{\xi}}$, $|\underline{\omega}|\cdot|\underline{\xi}|$, $\underline{\xi}\cdot\bar{\underline{\xi}}$ and $|\underline{\xi}|^2$ are densities of weight 1 on N. Under the identification of densities and forms is

$$\underline{\omega}\,\bar{\underline{\xi}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n\omega\wedge\bar{\xi},$$

$$|\underline{\omega}|\cdot|\bar{\underline{\xi}}|=|\omega\wedge\bar{\xi}|=|\underline{\omega}\cdot\bar{\underline{\xi}}|,$$

$$\underline{\xi}\cdot\bar{\underline{\xi}}=|\xi|^2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n\xi\wedge\bar{\xi}=|\xi\wedge\bar{\xi}|.$$

Proof. Take $\alpha\in\mathfrak{S}(N)$. Let $\iota\in\mathfrak{T}(m,m)$ be the identity and $\zeta_\iota=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$ where $\alpha=(z_1,\ldots,z_n)$. Then functions a and b on U_α exist such that $\omega=a\,\zeta_\iota$ and $\xi=b\,\zeta_\iota$ on U_α. Hence

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n\omega\wedge\bar{\xi}=a\,\bar{b}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n\zeta_\iota\wedge\bar{\zeta}_\iota=a\,\bar{b}\,\eta_{\iota\iota}=\underline{\omega}\cdot\bar{\underline{\xi}},$$

$$|\omega\wedge\bar{\xi}|=|a\,\bar{b}|\,\eta_{\iota\iota}=|a|\,|\bar{b}|\,\eta_{\iota\iota}=|\underline{\omega}|\,|\bar{\underline{\xi}}|,$$

$$|\omega\wedge\bar{\xi}|=|a\,\bar{b}|\,\eta_{\iota\iota}=|\omega\cdot\bar{\underline{\xi}}|,$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n\xi\wedge\bar{\xi}=b\,\bar{b}\,\eta_{\iota\iota}=|\xi\wedge\bar{\xi}|=|\underline{\xi}|^2$$

which proves the anounced identities.

If M is a pure m-dimensional complex manifold, and if ω is a form of bidegree $(n,0)$ on M with $0<n\leqq m$, then

$$\Omega=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^n\omega\wedge\bar{\omega}$$

is non-negative according to Lemma 2.7.

If, in general, ψ is a form of degree $2n$, and $\underline{\psi}$ the corresponding density of weight 1, define

$$\int_A\underline{\psi}=\int_A\psi\quad\text{if}\quad\int_A\psi$$

exists.

Proposition 2.11 (Schwartz inequality). *Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let A be a pure q-dimensional analytic subset of M with $0<q<m$. Let g be a measurable, non-negative function on A. Let ω and ξ be continuous forms of bidegree $(q,0)$ on M. Define*

$$\Omega=(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^q\omega\wedge\bar{\omega},$$

$$\Xi=(-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}\left(\frac{i}{2}\right)^q\xi\wedge\bar{\xi}.$$

Suppose that $g\Omega$ and $g\Xi$ are integrable over A. Then

$$\int_A g\,\omega\wedge\bar{\xi}\quad\text{and}\quad\int_A g\,|\omega\wedge\bar{\xi}|$$

exist. Moreover

$$\left|\int_A g\,\omega\wedge\bar{\xi}\right|^2\leqq\left(\int_A g\,|\omega\wedge\bar{\xi}|\right)^2\leqq\int_A g\,\Omega\int_A g\,\Xi.$$

Proof. Let $\dot{A}$ be the set of simple points of A and let $j\colon\dot{A}\to M$ be the inclusion. Then $j^*(\omega)$ and $j^*(\xi)$ are densities of bidegree $(q,0)$ on $\dot{A}$. Let

$j^*(\underline{\omega})$ and $j^*(\underline{\xi})$ be the corresponding densities of biweight $(1,0)$. For $\lambda \in \boldsymbol{R}$, define continuous non-negative density χ_λ of weight 1 on $\dot{A}$ by

$$\chi_\lambda = \big||j^*(\underline{\omega})| + \lambda |j^*(\underline{\zeta})|\big|^2.$$

Then

$$\chi_\lambda = |j^*(\underline{\omega})|^2 + 2\lambda |j^*(\underline{\omega})|\,|j^*(\zeta)| + \lambda^2 |j^*(\underline{\xi})|^2$$

$$= j^*(\Omega) + 2\lambda |j^*(\omega \wedge \bar{\xi})| + \lambda^2 j^*(\Xi).$$

Let K be a compact subset of $\dot{A}$. Define $g_n = \mathrm{Min}(g,n)$ if $n \in \boldsymbol{N}$. Then

$$0 \leqq \int_K g_n \chi_\lambda = \int_K g_n \Omega + 2\lambda \int_K g_n |\omega \wedge \bar{\xi}| + \lambda^2 \int_K g_n \Xi$$

for every $\lambda \in \boldsymbol{R}$. Hence the discriminant of this quadratic form in λ is non-positive, which means

$$\Big(\int_K g_n |\omega \wedge \bar{\xi}|\Big)^2 \leqq \int_K g_n \Omega \cdot \int_K g_n \Xi.$$

Now, $g_n \to g$ for $n \to \infty$ monotonically increasing. Hence

$$\Big(\int_K g |\omega \wedge \bar{\xi}|\Big)^2 \leqq \int_K g \Omega \int_K g \Xi \leqq \int_A g \Omega \cdot \int_A g \Xi < \infty$$

for all compact subsets K of A. This implies the existence of

$$\int_A g |\omega \wedge \bar{\xi}|, \quad \text{hence of} \quad \int_A g\, \omega \wedge \bar{\xi}.$$

It implies the inequality

$$\Big|\int_A g\, \omega \wedge \bar{\xi}\Big|^2 \leqq \Big(\int_A g |\omega \wedge \bar{\xi}|\Big)^2 \leqq \int_A g \Omega \cdot \int_A g \Xi.$$

Q.e.d.

§ 3. The Continuity of the Fiber Integral

The continuity of the fiber integral will be proved by proceeding from easier to more complicated situations, starting out locally in nice coordinate systems.

Lemma 3.1. *Let M be an open neighborhood of 0 in $\boldsymbol{C}^m$. Let N be a normal complex space of pure dimension p with $0 < p < m$. Define $q = m - p$. Let $f\colon M \to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Define $F = f^{-1}(f(0))$. Suppose that $(\boldsymbol{C}^p \times \{0\}) \cap F$ contains 0 as an isolated point.*

Then polycylinders D and D' in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 and a polycylinder E in $\boldsymbol{C}^q$ with center 0 exist such that

1. *The product $\bar{D}' \times \bar{E}$ is compact and contained in M and $\bar{D} \subseteq D'$.*

2. *For every $w \in \bar{E}$, define $f_w\colon D' \to N$ by $f_w(z) = f(z,w)$ if $z \in D'$. Then f_w is a light holomorphic map.*

3. *It is $((\bar{D}' - D) \times \bar{E}) \cap F = \emptyset$.*

Proof. An open, bounded polycylinder D_0 in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 and an open, bounded polycylinder E_0 in $\boldsymbol{C}^q$ with center 0 exists such that $\bar{D}_0 \times \bar{E}_0 \subseteq M$ and such that

$$((\bar{D}_0 - D_0) \times \bar{E}) \cap F = \emptyset,$$
$$F \cap (\bar{D}_0 \times \{0\}) = \emptyset.$$

An open connected neighborhood V of $f(0)$ exists such that

$$U = f^{-1}(V) \cap (\bar{D}_0 \times E_0) = f^{-1}(V) \cap (D_0 \times E_0).$$

Open polycylinders D' and D with center 0 in $\boldsymbol{C}^p$ and an open polycylinder E in $\boldsymbol{C}^q$ with center 0 exist such that

$$\bar{D} \subseteq D' \subseteq \bar{D}' \subseteq D_0 \quad \text{and} \quad \bar{E} \subseteq E_0,$$
$$\bar{D}' \times \bar{E} \subseteq U \quad \text{and} \quad ((\bar{D}' - D) \times \bar{E}) \cap F = \emptyset.$$

Conditions 1 and 3 are satisfied. Take $w \in \bar{E}$. Take $z \in D'$. Then $(z, w) \in U$ or $f(z, w) \in V$. Hence

$$f^{-1}(f(z, w)) \cap (\bar{D}_0 \times \{w\}) = f^{-1}(f(z, w)) \cap (D_0 \times \{w\})$$

is a compact analytic subset of $D_0 \times E_0$, therefore finite. Because $(f_w^{-1}(f_w(z)) \cap D') \times \{w\}$ is a subset of this finite set, $f_w^{-1}(f_w(z))$ is finite. Therefore $f_w \colon D' \to N$ is light; q.e.d.

Now, the continuity of the integrand shall be proved in a special situation

Lemma 3.2. *Let M be an open neighborhood of 0 in $\boldsymbol{C}^m$. Let D be a bounded, open polycylinder in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0. Let E be a bounded, open polycylinder in $\boldsymbol{C}^q$ with center 0. Suppose that $\bar{D} \times \bar{E} \subseteq M$ and $m = p + q$. Let g be a continuous function on $\bar{D} \times \bar{E}$. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space. Let $f \colon M \to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let V be an open, connected neighborhood of $f(0)$ such that*

$$f^{-1}(V) \cap (\bar{D} \times \bar{E}) = f^{-1}(V) \cap (D \times \bar{E}).$$

Let D' be an open neighborhood of $\bar{D}$ with $\bar{D}' \times \bar{E} \subseteq M$. For every $w \in E$ define $f_w \colon D' \to N$ by $f_w(z) = f(z, w)$ if $z \in D'$. Suppose that f_w is light if $w \in E$. Define $u \colon E \times V \to \boldsymbol{C}$ by

$$u(w, y) = \sum_{z \in D} \nu_{f_w}(z; y)\, g(z, w).$$

Then u is a continuous, bounded function on $E \times V$.

Proof. According I Stoll [*14*], Lemma 2.4, for every fixed $w \in E$, the function $n_{f_w}(D; y)$ of y is constant on V. According I Stoll [*14*], Theorem 2.7, the function $n_{f_w}(D; y)$ of w is constant on E for every $y \in V$. Hence a positive integer $s \in \boldsymbol{N}$ exists such that

$$s = n_{f_w}(D; y) = \sum_{z \in D} \nu_{f_w}(z; y)$$

for all $(w, y) \in E \times V$.

A constant $L>0$ exists such that $|g(z,w)|\leqq L$, if $(z,w)\in\bar{D}\times\bar{E}$. Then

$$|u(w,y)|\leqq s\cdot L \quad \text{if} \quad (w,y)\in\bar{D}\times\bar{E}.$$

Hence u is bounded.

Take $(a,b)\in E\times V$. Let $z_1,\ldots,z_r$ be the different points of $f_a^{-1}(b)\cap D$. Take any $\varepsilon>0$. An open polycylinder F in $\boldsymbol{C}^q$ with center a and open polycylinders D_ρ in $\boldsymbol{C}^p$ with center z_ρ exist such that

1. For $\rho=1,\ldots,r$ is $\bar{D}_\rho\subseteq D$ and $\bar{F}\subseteq E$.
2. For $\mu\neq\rho$ is $\bar{D}_\rho\cap\bar{D}_\mu=\emptyset$. Moreover,

$$\bigcup_{\mu=1}^{r} f^{-1}(b)\cap(D_\mu\times\bar{F})=f^{-1}(b)\cap(\bar{D}\times\bar{F}).$$

3. If $(z,w)\in\bar{D}_\rho\times\bar{F}$, then

$$|g(z,w)-g(z_\rho,a)|<\frac{\varepsilon}{s}.$$

An open connected neighborhood W of b with $W\subseteq V$ exists such that

$$\bigcup_{\rho=1}^{r} f^{-1}(W)\cap(D_\rho\times\bar{F})=f^{-1}(W)\cap(\bar{D}\times\bar{F}).$$

According to I STOLL [*14*], Lemma 2.4, for every fixed $w\in F$, the function $n_{f_w}(D_\rho;y)$ of y is constant on W. According to I STOLL [*14*], Theorem 2.7, the function $n_{f_w}(D_\rho;y)$ of w is constant on F for every $y\in W$. Hence a positive integer s_ρ exists such that

$$s_\rho=n_{f_w}(D_\rho;y) \quad \text{if} \quad (w,y)\in F\times W.$$

Then

$$s_\rho=n_{f_a}(D_\rho;b)=v_{f_a}(z_\rho;b).$$

If $(w,y)\in F\times W$, then

$$\begin{aligned}
|u(w,y)-u(a,b)| &= \Big|\sum_{z\in D} v_{f_w}(z;y)\,g(z,w)-\sum_{z\in D} v_{f_a}(z;b)\,g(z,a)\Big| \\
&= \left|\sum_{\rho=1}^{r}\Big(\sum_{z\in D_\rho} v_{f_w}(z,y)\,g(z,w)-s_\rho\,g(z_\rho,a)\Big)\right| \\
&= \left|\sum_{\rho=1}^{r}\sum_{z\in D_\rho} v_{f_w}(z;y)\big(g(z,w)-g(z_\rho,a)\big)\right| \\
&\leqq \sum_{\rho=1}^{r}\sum_{z\in D_\rho} v_{f_w}(z;y)\,|g(z,w)-g(z_\rho,a)| \\
&< n_{f_w}(D;y)\cdot\frac{\varepsilon}{s}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Therefore, u is continuous at (a,b); q.e.d.

Let $\boldsymbol{C}^m=\boldsymbol{C}^p\times\boldsymbol{C}^q$. Let $\pi_1\colon \boldsymbol{C}^m\to\boldsymbol{C}^p$ and $\pi_2\colon \boldsymbol{C}^n\to\boldsymbol{C}^q$ be the projections defined by $\pi_1(z,w)=z$ and $\pi_2(z,w)=w$. Let $z_1,\ldots,z_p$ be the coordinate functions of $\boldsymbol{C}^p$ and let $w_1,\ldots,w_q$ be the coordinate functions of $\boldsymbol{C}^q$. Let $v_1,\ldots,v_m$ be the coordinate functions on $\boldsymbol{C}^m$. Then $v_\mu=z_\mu\circ\pi_1$ for $\mu=1,\ldots,p$ and $v_{p+\mu}=w_\mu\circ\pi_2$ for $\mu=1,\ldots,q$. Define $j\in\mathfrak{T}(q,m)$ by $j(\mu)=p+\mu$ for $\mu=1,\ldots,q$, and let $\iota\in\mathfrak{T}(q,q)$ be the identity. Define

$$\eta_{jj}=\left(\frac{i}{2}\right)^q dv_{p+1}\wedge d\bar{v}_{p+1}\wedge\cdots\wedge dv_m\wedge d\bar{v}_m,$$

$$\eta_{\iota\iota}=\left(\frac{i}{2}\right)^q dw_1\wedge d\bar{w}_1\wedge\cdots\wedge dw_q\wedge d\bar{w}_q.$$

Then $\pi_2^*(\eta_{\iota\iota})=\eta_{jj}$. Using these notations, the following Lemma can be easily proved.

Lemma 3.3. *Under the assumptions of Lemma 3.2, the function*

$$I(y)=\int\limits_{f^{-1}(y)\cap(D\times E)} v_f\, g\,\eta_{jj}$$

of y is continuous and bounded on V.

Proof. Because g is continuous on $\bar{D}\times\bar{E}$, the integral $I(y)$ exists if $y\in V$. According to Lemma 2.3 is

$$I(y)=\int\limits_E\sum_{z\in D} v_{f_w}(z;y)\,g(z,w)\cdot\eta_{\iota\iota}=\int\limits_E u(w,y)\,\eta_{\iota\iota}$$

for every $y\in V$. Because u is continuous and bounded on $E\times V$, the function I is continuous and bounded on V; q.e.d.

This result can be immediately extended to a special type of differential form. Let V be a complex vector space of dimension m. Let $\mathfrak{c}=(\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_m)$ be a base of V and consider $\eta_{\varphi\psi}$ for this base (Remark 10). A form χ of bidegree (q,q) on an open subset G of V is said to be *unmixed* on G in respect to the base $\mathfrak{c}$ if and only if functions χ_φ exists on G such that

$$\chi=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\chi_\varphi\,\eta_{\varphi\varphi}$$

on G.

Lemma 3.4. *Let M be an open subset of the m-dimensional complex vector space V. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f\colon M\to N$ be a q-fibering, holomorphic map. Take $a\in M$. Define $F_a=f^{-1}(f(a))$. Let $\mathfrak{c}=(\mathfrak{c}_1,\ldots,\mathfrak{c}_m)\in\mathrm{GL}(V)$ be a base of V, which is clear for (F_a,a,q).*

Then, an open neighborhood U of a and an open neighborhood W of $b=f(a)$ exist such that $\bar{U}$ is compact and contained in M and such that for every continuous differential form χ which his unmixed in V in respect to the base χ and

which has compact support in U, the integral

$$I(y)=\int_{f^{-1}(y)} v_f\,\chi$$

is a continuous function of y in W.

Proof. Without loss of generality, $a=0$ can be assumed. Since $\mathfrak{c}$ is clear, for every $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$, Lemma 3.1 gives non-empty, bounded polycylinders

$$E_\varphi=\left\{\sum_{\lambda=1}^{q} z_{\varphi(\lambda)}\,\mathfrak{c}_{\varphi(\lambda)}\,\middle|\,|z_{\varphi(\lambda)}|<t_{\varphi(\lambda)}\right\},$$

$$D_\varphi=\left\{\sum_{\lambda=q+1}^{m} z_{\underline{\varphi}(\lambda)}\,\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(\lambda)}\,\middle|\,|z_{\underline{\varphi}(\lambda)}|<t_{\underline{\varphi}(\lambda)}\right\},$$

$$D'_\varphi=\left\{\sum_{\lambda=q+1}^{m} z_{\underline{\varphi}(\lambda)}\,\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(\lambda)}\,\middle|\,|z_{\underline{\varphi}(\lambda)}|<t'_{\underline{\varphi}(\lambda)}\right\},$$

$$U_\varphi=E_\varphi\times D_\varphi=\left\{\sum_{\lambda=1}^{m} z_{\underline{\varphi}(\lambda)}\,\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(\lambda)}\,\middle|\,|z_{\underline{\varphi}(\lambda)}|<t_{\underline{\varphi}(\lambda)}\right\}$$

such that $\bar{D}_\varphi\subseteq D'_\varphi$ and $\bar{D}'_\varphi\times\bar{E}_\varphi\subseteq M$ and such that for $w\in E_\varphi$ the map $f|\{w\}\times D'_\varphi$ is light, moreover, such that $F_a\cap(\bar{E}_\varphi\times(\bar{D}'_\varphi-D_\varphi))=\emptyset$. An open neighborhood W_φ of b exists such that

$$f^{-1}(W_\varphi)\cap\left(\bar{E}_\varphi\times(\bar{D}_\varphi-D_\varphi)\right)=\emptyset.$$

Then

$$U=\bigcap_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)} U_\varphi$$

is an open neighborhood of $a=0$, and

$$W=\bigcap_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)} W_\varphi$$

is an open neighborhood of $b=f(a)$. Let

$$\chi=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)} \chi_\varphi\,\eta_{\varphi\varphi}\quad.$$

be a continuous differential form on M, which is unmixed in respect to $\mathfrak{c}$ and which has compact support on U. According to Lemma 3.3 the integral

$$I_\varphi(y)=\int_{f^{-1}(y)} v_f\,\chi_\varphi\,\eta_{\varphi\varphi}=\int_{f^{-1}(y)\cap U_\varphi} v_f\,\chi_\varphi\,\eta_{\varphi\varphi}$$

is continuous on W_φ. Therefore,

$$I(y)=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)} I_\varphi(y)$$

is continuous on Q; q.e.d.

This results permits to prove the continuity of the fiber integral if the integrand is the euclidean form v_q.

Proposition 3.5. *Let V be a m-dimensional complex vector space with a Hermitian product $(\,|\,)$. Let M be an open non-empty subset of V. Let g be a continuous function with compact support in M. Let N be a pure p-dimensional normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f: M\to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let v_q be the euclidean form associated to $(\,|\,)$. For $y\in N$ define*

$$I(y)=\int_{f^{-1}(y)} v_f\, g\, v_q.$$

Then I is a continuous function on N.

Proof. Let K be the support of g. If $b\notin f(K)$ then $I(y)$ is zero in an open neighborhood of b. Hence I is continuous at b. Take $b\in f(K)$. Pick $a\in f^{-1}(b)\cap K$. An orthonormal base $\mathfrak{c}=(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_m)\in\mathfrak{U}(V)$ of V exists which is clear for $(f^{-1}(b), a, q)$. According to Lemma 3.4, open neighborhoods $U(a)$ of a and $W(a)$ of b exist such that for every continuous unmixed form χ on V with compact support in $U(a)$ the integral

$$I_\chi(y)=\int_{f^{-1}(y)} v_f\,\chi,$$

is continuous on $W(a)$. Unmixed means of course, unmixed in respect to $\mathfrak{c}$. If $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$ and if $\eta_{\varphi\varphi}$ is formed for $\mathfrak{c}$. Then

$$v_q=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\eta_{\varphi\varphi}$$

is unmixed for $\mathfrak{c}$. Hence, if λ is any continuous function on V with compact support in $U(a)$, then

$$I(y;a,\lambda)=\int_{f^{-1}(y)} v_f\,\lambda\, g\, v_q$$

is a continuous function on $W(a)$.

Finitely many points $a_1, \ldots, a_r$ exist in $K\cap f^{-1}(b)$ such that

$$f^{-1}(b)\cap K\subseteq\bigcup_{\rho=1}^{t} U(a_\rho).$$

An open neighborhood U of $f^{-1}(b)\cap K$ with $\overline{U}$ compact exist such that

$$f^{-1}(b)\cap K\subseteq U\subseteq\overline{U}\subseteq\bigcup_{\rho=1}^{t} U(a_\rho).$$

An open neighborhood W of b with

$$W\subseteq\bigcap_{\rho=1}^{r} W(a_\rho)$$

exists such that

$$f^{-1}(y)\cap K\subseteq U \qquad \text{if } y\in W.$$

Continuous function $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ exist on V such that λ has compact support in $U(a_\rho)$ and such that

$$\sum_{\rho=1}^{r} \lambda_\rho(z) = 1$$

if $z \in \overline{U}$. For $y \in W$ is

$$I(y) = \int_{f^{-1}(y)} v_f \, g \, v_q = \int_{f^{-1}(y) \cap K} v_f \, g \, v_q$$

$$= \sum_{\rho=1}^{r} \int_{f^{-1}(y) \cap K} v_f \, g \, \lambda_\rho \, v_q = \sum_{\rho=1}^{r} I(y; a_\rho, \lambda_\rho)$$

where $y \in W(a_\rho)$ for each ρ. Hence I is continuous on W. Q.e.d.

Now, this results shall be extended, step by step to mixed forms.

Lemma 3.6. *Let M be an open neighborhood of $\boldsymbol{C}^m$. Let N be a pure p-dimensional normal complex space with $0 < p < m$. Define $q = m - p$. Let $f\colon M \to N$ be a q-fibering, holomorphic map. Let D and D' be open, bounded polycylinders in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 such that $\overline{D} \subset D'$. Let E and E' be open, bounded polycylinders in $\boldsymbol{C}^q$ with center 0 such that $\overline{E} \subset E'$. Suppose that $\overline{D}' \times \overline{E}' \subseteq M$. For $w \in E'$ define $f_w\colon D' \to N$ by setting $f_w(z) = f(z, w)$ if $z \in D'$. Suppose that f_w is light if $w \in E'$. For $y \in N$, define $F(y) = f^{-1}(y) \cap (D \times E)$. Define $b = f(0)$. Suppose that $f^{-1}(b) \cap (\overline{D}' \times \overline{E}') = \{0\} \times \overline{E}'$. Let χ be a continuous form of bidegree (q, q) on $\overline{D} \times \overline{E}$. Then*

$$\int_{F(y)} v_f \, \chi \to \int_{F(b)} v_f \, \chi \qquad \text{for } y \to b.$$

Proof. Let D'' be an open polycylinder in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 such that $\overline{D} \subseteq D'' \subseteq \overline{D}'' \subseteq D'$. Take an open, connected neighborhood W of b such that

$$f^{-1}(W) \cap \overline{D}'' \times \overline{E}' = f^{-1}(W) \cap (D \times \overline{E}').$$

Define $\kappa \in \mathfrak{T}(q, m)$ by $\kappa(\nu) = p + \nu$ for $\nu = 1, \ldots, q$. Let g be any continuous function $\overline{D}'' \times \overline{E}'$. For $\varphi \in \mathfrak{T}(q, m)$ and $\psi \in \mathfrak{T}(q, m)$ form $\eta_{\varphi\psi}$ in respect to the natural coordinates $z_1, \ldots, z_m$ on $\boldsymbol{C}^m = \boldsymbol{C}^p \times \boldsymbol{C}^q$. Define $F'(y) = f^{-1}(y) \cap (D'' \times E')$. According to Lemma 3.3, the integral

$$I_1(y, g) = \int_{F'(y)} v_f \, g \, \eta_{\kappa\kappa}$$

is a continuous and bounded function of y on W.

Form v_q in respect to the standard Hermitian form

$$(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{w}) = \sum_{\mu=1}^{m} z_\mu \, \overline{w}_\mu \qquad \text{on } \boldsymbol{C}^m.$$

If g is a continuous function on M with compact support in M, then

$$I_2(y, g) = \int_{f^{-1}(y)} v_f \, g \, v_q$$

is a continuous function of y on N.

Let g be any continuous function on $\bar{D} \times \bar{E}$. Then $|g|$ can be continued to a continuous, non-negative function h on $\boldsymbol{C}^m$, whose support is compact and contained in $D'' \times E'$. Then

$$I_3(y,h) = I_2(y,h) - I_1(y,h)$$

is a continuous function of y on W. Define $\mathfrak{T}_0(q,m) = \mathfrak{T}(q,m) - \{\kappa\}$. Because

$$v_q - \eta_{\kappa\kappa} = \sum_{\varphi \in \mathfrak{T}(q,m)} \eta_{\varphi\varphi} - \eta_{\kappa\kappa} = \sum_{\varphi \in \mathfrak{T}_0(q,m)} \eta_{\varphi\varphi}$$

the integral I_3 has the form

$$I_3(y,g) = \sum_{\varphi \in \mathfrak{T}_0(q,m)} \int_{F'(y)} v_f \, h \, \eta_{\varphi\varphi} .$$

If $y = b$, then $F'(b) = \{0\} \times E'$ and $z_1 = \cdots = z_p = 0$ on $F'(b)$. Let $j\colon F'(b) \to \boldsymbol{C}^m$ be the inclusion. Then $j^*(dz_\mu) = d(z_\mu \circ j) = 0$ for $\mu = 1, \ldots, p$. Hence if $\varphi \neq \kappa$, then $j^*(\eta_{\varphi\varphi}) = 0$ and $j^*(\eta_{\varphi\psi}) = 0 = j^*(\eta_{\psi\varphi})$ for every $\psi \in \mathfrak{T}(q,m)$. Especially, $I_3(b,h) = 0$, which implies

$$I_3(y,h) \to 0 \qquad \text{for } y \to b .$$

Pick any $\varphi \in \mathfrak{T}(q,m)$ and $\psi \in \mathfrak{T}(q,m)$. According to the Schwarz inequality (Proposition 2.11) is

$$\begin{aligned} \Big| \int_{F(y)} v_f \, g \, \eta_{\varphi\psi} \Big|^2 &\leqq \Big(\int_{F(y)} v_f \, |g| \, |\eta_{\varphi\psi}| \Big)^2 \\ &\leqq \int_{F(y)} v_f \, |g| \, \eta_{\varphi\varphi} \cdot \int_{F(y)} v_f \, |g| \, \eta_{\psi\psi} \\ &\leqq \int_{F'(y)} v_f \, h \, \eta_{\varphi\varphi} \cdot \int_{F'(y)} v_f \, h \, \eta_{\psi\psi} . \end{aligned}$$

Now

$$\int_{F'(y)} v_f \, h \, \eta_{\varphi\varphi} \leqq I_3(y,h) \qquad \text{if } \varphi \neq \kappa ,$$

$$\int_{F'(y)} v_f \, h \, \eta_{\varphi\varphi} = I_1(y,h) \qquad \text{if } \varphi = \kappa$$

and the same for ψ. Hence, if $\varphi \neq \kappa \neq \psi$ then

$$\Big| \int_{F(y)} v_f \, g \, \eta_{\varphi\psi} \Big|^2 \leqq I_3(y,h)^2 .$$

If $\varphi = \kappa \neq \psi$ or $\psi = \kappa \neq \varphi$ then

$$\Big| \int_{F(y)} v_f \, g \, \eta_{\varphi\psi} \Big|^2 \leqq I_1(y,h) \cdot I_3(y,h) .$$

Because $I_3(y,h) \to 0$ for $y \to b$ and because I_1 is continuous at b, this implies

$$\int_{F(y)} v_f \, g \, \eta_{\varphi\psi} \to 0 \qquad \text{for } y \to b ,$$

if $(\varphi,\psi)\neq(\kappa,\kappa)$. In this case $j^*(\eta_{\varphi\psi})=0$. Hence

$$\int_{F(y)} v_f\, g\, \eta_{\varphi\psi} \to \int_{F(b)} v_f\, g\, \eta_{\varphi\psi} \qquad \text{for } y\to b.$$

According to Lemma 3.3, this is also true for $(\varphi,\psi)=(\kappa,\kappa)$.

Let χ be a continuous form of bidegree (q,q) on $\bar{D}\times\bar{E}$. Then

$$\chi=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\ \sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)} \chi_{\varphi\psi}\,\eta_{\varphi\psi}$$

where $\chi_{\varphi\psi}$ are continuous functions on $\bar{D}\times\bar{E}$. Therefore

$$\int_{F(y)} v_f\,\chi=\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\ \sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\ \int_{F(y)} v_f\,\chi_{\varphi\psi}\,\eta_{\varphi\psi}\to$$

$$\to\sum_{\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)}\ \sum_{\psi\in\mathfrak{T}(q,m)}\ \int_{F(b)} v_f\,\chi_{\varphi\psi}\,\eta_{\varphi\psi}=\int_{F(b)} v_f\,\chi$$

for $y\to b$; q.e.d.

Lemma 3.7. *Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let N be a pure p-dimensional normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $b\in N$ and define $F=f^{-1}(b)$. Let $\dot{F}$ be the set of simple points of F. Let χ be a continuous form of bidegree (q,q) on M with compact support K. Suppose that $K\cap(F-\dot{F})=\emptyset$. Then*

$$\int_{f^{-1}(y)} v_f\,\chi\to\int_{f^{-1}(b)} v_f\,\chi \qquad \textit{for } y\to b.$$

Proof. Pick any $a\in K\cap F$. Then $a\in\dot{F}$. An open neighborhood $U(a)$ of a and open bounded polycylinders D' in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 and E' in $\boldsymbol{C}^q$ with center 0 and a biholomorphic map $\alpha\colon U(a)\to U'(a)$ onto an open neighborhood U' of $\bar{D}'\times\bar{E}'$ in $\boldsymbol{C}^m$ exist such that $U(a)\cap F=U(a)\cap\dot{F}$ and $\alpha(a)=0$ and $\alpha(U(a)\cap F)=U'(a)\cap(\{0\}\times\boldsymbol{C}^q)$. Moreover, this can be done such that $f\circ\alpha^{-1}|D'\times\{w\}$ is a light map for every $w\in E'$ (Lemma 3.1). Let D be an open polycylinder in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 such that $\bar{D}\subset D'$. Let E be an open polycylinder in $\boldsymbol{C}^q$ with center 0 such that $\bar{E}\subseteq E'$. Define $V(a)=\alpha^{-1}(D\times E)$. Let g be a continuous function on M with compact support in $V(a)$. According to Lemma 3.5

$$\int_{f^{-1}(y)} v_f\,g\,\chi=\int_{f^{-1}(y)\cap V(a)} v_f\,g\,\chi\to\int_{f^{-1}(b)\cap V(a)} v_f\,g\,\chi=\int_{f^{-1}(b)} v_f\,g\,\chi$$

for $y\to b$.

Finitely many points $a_1,\ldots,a_r$ in $K\cap F$ exist such

$$K\cap F\subseteq\bigcup_{\rho=1}^{r} V(a_\rho)=V.$$

An open neighborhood U of $K\cap F$ exists such that $\bar{U}$ is compact and contained in V. Continuous function $g_1,\ldots,g_r$ exist on M such that g_ρ has compact

support in $V(a_\rho)$ and such that

$$\sum_{\rho=1}^{r} g_\rho(z)=1 \qquad \text{if } z\in U.$$

An open neighborhood W of b exists such that $f^{-1}(y)\cap K\subseteq f^{-1}(y)\cap U$ for every $y\in W$. If $y\in W$, then

$$\int_{f^{-1}(y)} v_f\,\chi=\int_{f^{-1}(y)\cap K} v_f\,\chi=\sum_{\rho=1}^{r}\int_{f^{-1}(y)\cap K} v_f\,g_\rho\,\chi$$

$$=\sum_{\rho=1}^{r}\int_{f^{-1}(y)} v_f\,g_\rho\,\chi\to\sum_{\rho=1}^{r}\int_{f^{-1}(b)} v_f\,g_\rho\,\chi=\int_{f^{-1}(b)} v_f\,\chi$$

for $y\to b$; q.e.d.

Now, it is possible to obtain the first theorem about the continuity of the fiber integral. Later, it will be improved considerably.

Theorem 3.8. *(The continuity of the fiber integral.) Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let N be a pure p-dimensional normal complex space with $0<p<m$. Let $f: M\to N$ be a q-fibering holomorphic map with $q=m=p$. Let χ be a continuous differential form of bidegree (q,q) on M with compact support. Then the integral*

$$I(y)=\int_{f^{-1}(y)} v_f\,\chi$$

is a continuous function of y on N.

Remark. This theorem is also true if $p=m$, then χ is a continuous function with compact support and the integral is a sum. Then the theorem coincides with I STOLL [*14*], Proposition 3.1.

Proof. At first, consider the special case, where M is an open subset of a complex vector space V with a Hermitian product (|). Let K be the support of χ. A constant $c>0$ exists such that[9]

$$|\chi|\leqq c\,v_q \qquad \text{on } M,$$

where v_q is the euclidean standard form to (|). Let g be any continuous, non-negative function on M with compact support on M such that $g(z)=1$ if $z\in K$. Then

$$|\chi|=g\,|\chi|\leqq c\,g\,v_q \qquad \text{on } M.$$

Pick any $b\in N$. Define $F=f^{-1}(b)$. If $f^{-1}(b)\cap K=\emptyset$, then I is identically zero in a neighborhood of b, hence continuous at b. Therefore, suppose that $F\cap K\neq\emptyset$. Let $\dot{F}$ be the set of simple points of F.

Take any $\varepsilon>0$. A compact subset L of $\dot{F}$ exists such that

$$0\leqq\int_{\dot{F}} g\,v_f\,v_q-\int_L g\,v_f\,v_q<\frac{\varepsilon}{4c+1}.$$

[9] See the end of Remark 6.

Because $F-L$ is open in F, an open subset U of M exists such that $F-L=F\cap U$. Then

$$0\leqq \int_{F\cap U} g\, v_f\, v_q < \frac{\varepsilon}{4c+1}.$$

Now

$$K\cap(F-\dot{F})\subseteq K\cap(F-L)=K\cap F\cap U\subseteq U\subseteq M.$$

An open neighborhood W of $K\cap(F-\dot{F})$ exists such that $\overline{W}$ is compact and contained in U. Take a continuous function λ on M such that $0\leqq\lambda(z)\leqq 1$ for all $z\in M$ and $\lambda(z)=1$ for all $z\in\overline{W}$, moreover such that λ has compact support in U. According to Proposition 3.4, an open neighborhood $W_1(\varepsilon)$ of b exists such that

$$\Big|\int_{f^{-1}(y)} \lambda\, g\, v_f\, v_q - \int_{f^{-1}(b)} \lambda\, g\, v_f\, v_q\Big| < \frac{\varepsilon}{4c+1},$$

if $y\in W_1(\varepsilon)$. Hence

$$\int_{f^{-1}(y)} \lambda\, g\, v_f\, v_q < \frac{\varepsilon}{4c+1} + \int_{F\cap U} \lambda\, g\, v_f\, v_q < \frac{\varepsilon}{4c+1} + \int_{F\cap U} g\, v_f\, v_q < \frac{2\varepsilon}{4c+1}.$$

The form $(1-\lambda)\chi$ has compact support K_1 in M with $K_1\cap(F-\dot{F})=\emptyset$. According to Lemma 3.7, an open neighborhood $W_2(\varepsilon)$ of b with $W_2(\varepsilon)\subseteq W_1(\varepsilon)$ exists such that

$$\Big|\int_{f^{-1}(y)} v_f(1-\lambda)\chi - \int_{f^{-1}(b)} v_f(1-\lambda)\chi\Big| < \frac{\varepsilon}{4c+1},$$

if $y\in W_2(\varepsilon)$. Hence, if $y\in W_2(\varepsilon)$, then

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{f^{-1}(y)} v_f\chi - \int_{f^{-1}(b)} v_f\chi\Big| \\
&\quad\leqq \Big|\int_{f^{-1}(y)} v_f\lambda\chi\Big| + \Big|\int_{f^{-1}(b)} v_f\lambda\chi\Big| + \Big|\int_{f^{-1}(y)} v_f(1-\lambda)\chi - \int_{f^{-1}(b)} v_f(1-\lambda)\chi\Big| \\
&\quad\leqq \int_{f^{-1}(y)} c\, v_f\lambda\, g\, v_q + \int_{f^{-1}(b)} c\, v_f\lambda\, g\, v_q + \frac{\varepsilon}{4c+1} < \\
&\quad< \frac{2c\varepsilon}{4c+1} + \frac{2c\varepsilon}{4c+1} + \frac{\varepsilon}{4c+1} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Therefore I is continuous at b. In the special case, the theorem is proved.

In the general case, let K be again the support of χ. Open sets $U_1, \ldots, U_r$ and biholomorphic maps $\alpha_\rho\colon U_\rho \to U'_\rho$ onto an open subset of $\boldsymbol{C}^m$ exist such that

$$K\subseteq \bigcup_{\rho=1}^{r} U_\rho.$$

Continuous functions g_ρ with compact support in U_ρ exist such that

$$\sum_{\rho=1}^{r} g_\rho(z)=1 \qquad \text{for } z\in K.$$

Then

$$\int_{f^{-1}(y)} v_f\, g_\rho\, \chi = \int_{U_\rho \cap f^{-1}(y)} v_f\, g_\rho\, \chi$$

is continuous on N. Hence

$$I(y) = \int_{f^{-1}(y)\cap K} v_f\, \chi = \sum_{\rho=1}^{r} \int_{f^{-1}(y)} v_f\, g_\rho\, \chi$$

is a continuous function of y on N; q.e.d.

The continuity of the fiber integral shall now be proved step by step under less restricting assumptions. In the next theorem, the integrand will not have compact support. Easy examples show, that the fiber integral is not continuous in such a case, unless some additional assumptions are made. These are made in view of later application; of course a more elegant version could be obtained, if less general assumptions are made; however this would not suffice for the applications.

Let χ be a continuous form on a subset D of a complex manifold M. Let S be a subset of D. Let A be the set of all points $a \in S$ such that an open neighborhood U of a exists such that $\chi(z)=0$ if $z \in U \cap S$. Then $S-A$ is called *the support of χ in S*. If S is compact, so is $S-A$. Observe, that $S-A$ may be smaller than the intersection of the support of χ with S. This fact will be very helpful in later applications.

Theorem 3.9. *(The continuity of the fiber integral.) Let M be a complex manifold of pure dimension m. Let N be a pure p-dimensional, normal, complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f: M \to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let G be an open subset of M with compact closure $\bar{G}$. Define $S=\bar{G}-G$. Let χ be a continuous differential form of bidegree (q,q) on $\bar{G}$. Let T be the support of χ in S. Take $b \in N$. Suppose that $S_b = f^{-1}(b) \cap T$ is a set of measure zero on the space $f^{-1}(b)$. Then*

$$\int_{f^{-1}(y)\cap G} v_f\, \chi \to \int_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\, \chi, \tag{1}$$

$$\int_{f^{-1}(y)\cap \bar{G}} v_f\, \chi \to \int_{f^{-1}(b)\cap \bar{G}} v_f\, \chi \tag{2}$$

for $y \to b$.

Remark 1. In every neighborhood of b, points y may exist such that $T \cap f^{-1}(y)$ is not a set of measure zero on $f^{-1}(y)$. Hence both integrals on the left side in (1) and (2) may be different. Of course, both integrals on the right side in (1) and (2) are equal, because S_b is a set of measure zero on $f^{-1}(b)$.

Remark 2. Theorem 3.9 is also true if $p=m$ i.e. $q=0$. The integral becomes a sum. In this case, Theorem 3.8 is nothing else than *I*, Proposition 3.2.

Remark 3. If $0<p<m$, and if S is a real analytic set, then $f^{-1}(b) \cap S$ is real analytic in $f^{-1}(b)$, hence it is a set of measure zero in $f^{-1}(b)$, if and only if S does not contain a branch of $f^{-1}(b)$. If S contains a branch of $f^{-1}(b)$, this branch must be compact. Because this branch has positive dimension

this is impossible on STEIN manifolds. Hence S_b is always a set of measure zero if S is real analytic and M a STEIN manifold.

Proof. Of course, χ can be continued to a continuous form on M. The set S_b is not changed by this continuation. At first, consider the special case, where M is an open subset of the complex vector space V with Hermitian product $(\,|\,)$. A constant $c>0$ exist such that $|\chi| \leqq c\, v_q$ on $\bar{G}$.

Take any $\varepsilon>0$. A sequence $\{U_\mu\}_{\mu\in N}$ of open and bounded neighborhoods U_μ of the compact subset S_b of M exists such that $\overline{U}_{\mu+1}\subseteq U_\mu\subseteq\overline{U}_\mu\subseteq M$ for each $\mu\in\boldsymbol{N}$ and such that

$$f^{-1}(b)\cap T=S_b=\bigcap_{\mu=1}^{\infty} U_\mu .$$

Because S_b is a set of measure zero on $F=f^{-1}(b)$, a number $\mu\in\boldsymbol{N}$ exists such that

$$0\leqq \int\limits_{U_\mu\cap F} v_f\, v_q<\frac{\varepsilon}{4c+1}.$$

Take a continuous function λ on V with compact support in U_μ such that $0\leqq\lambda(z)\leqq 1$ if $z\in V$ and $\lambda(z)=1$ if $z\in U_{\mu+1}$. An open neighborhood W_1 of b exists such that $f^{-1}(\overline{W}_1)\cap T\subseteq U_{\mu+1}$ and such that $\overline{W}_1$ is compact. Let W_2 be an open neighborhood of b with $\overline{W}_2\subseteq W_1$. Let ρ_0 be a continuous function on N with compact support in W_1 such that $0\leqq\rho_0(y)\leqq 1$ if $y\in N$ and $\rho_0(y)=1$ if $y\in\overline{W}_2$. Define $\rho=\rho_0\circ f$. Then ρ is a continuous function on M with $0\leqq\rho(z)\leqq 1$ if $z\in M$ and $\rho(z)=0$ if $z\in M-f_1^{-1}(W_1)$. Define

$$\psi(z)=\begin{cases}(1-\lambda(z))\,\rho(z)\,\chi(z) & \text{if } z\in\bar{G}\\ 0 & \text{if } z\in M-\bar{G}.\end{cases}$$

The form ψ is certainly continuous on $M-S$. Since $\rho(z)=0$ if $z\in M-f^{-1}(\overline{W}_1)$, ψ is continuous on $M-f^{-1}(\overline{W}_1)$. Take a in $S-f^{-1}(\overline{W}_1)$. If $a\in T\cap f^{-1}(\overline{W}_1)$, then $a\in U_{\mu+1}$, but $1-\lambda(z)=0$ for $z\in U_{\mu+1}$. Hence ψ is continuous on $U_{\mu+1}$, especially at a. If $a\in(S-T)\cap f^{-1}(\overline{W}_1)$, then an open neighborhood A of a exists such that $\chi(z)=0$ if $z\in S\cap A$. Hence $(1-\lambda(z))\,\rho(z)\,\chi(z)=0$ if $z\in S\cap A$. Hence, ψ is continuous in A, especially at a. Hence ψ is continuous on M with support L in $\bar{G}$. Therefore, L is compact. Therefore

$$\int\limits_{f^{-1}(y)} v_f\,\psi\to\int\limits_F v_f\,\psi \qquad \text{for } y\to b$$

according to Theorem 3.8. If $y\in W_2$ then

$$\int\limits_{f^{-1}(y)} v_f\,\psi=\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f(1-\lambda)\,\rho\,\chi=\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\bar{G}} v_f(1-\lambda)\,\rho\,\chi$$

$$=\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f(1-\lambda)\,\chi=\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\bar{G}} v_f(1-\lambda)\,\chi$$

because $f^{-1}(y)\cap T\subseteq U_{\mu+1}$ and $1-\lambda(z)=0$ of $z\in U_{\mu+1}$. An open neighborhood W_3 of b with $W_3\subseteq W_2$ exists such that

$$\Big|\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f(1-\lambda)\chi-\int\limits_{F\cap G} v_f(1-\lambda)\chi\Big|<\frac{\varepsilon}{4c+1}$$

if $y\in W_3$. The same estimate holds for $\bar{G}$ instead of G. If $y\in W_3$, then

$$\Big|\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f\lambda\chi\Big|\leqq c\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f\lambda v_q\leqq c\int\limits_{f^{-1}(y)} v_f\lambda v_q.$$

The same estimate holds for $\bar{G}$ instead of G. Because λ has compact support in M,

$$\int\limits_{f^{-1}(y)} v_f\lambda v_q\to\int\limits_F v_f\lambda v_q=\int\limits_{F\cap U_\mu} v_f\lambda v_q$$

for $y\to b$. Therefore, an open neighborhood W_4 of b with $W_4\subseteq W_3$ exists such that

$$\int\limits_{f^{-1}(y)} v_f\lambda v_q\leqq\frac{\varepsilon}{4c+1}+\int\limits_{F\cap U_\mu} v_f\lambda v_q\qquad\text{if } y\in W_4.$$

Hence

$$\int\limits_{f^{-1}(y)} v_f\lambda v_q\leqq\frac{\varepsilon}{4c+1}+\int\limits_{F\cap U_\mu} v_f v_q\leqq\frac{2\varepsilon}{4c+1}\qquad\text{if } y\in W_4.$$

Hence, if $y\in W_4$, then

$$\Big|\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f\lambda\chi\Big|<\frac{2c\varepsilon}{4c+1}$$

and the same estimate is true for $\bar{G}$ instead of G. If $y\in W_4$ then

$$\begin{aligned}\Big|\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f\chi-\int\limits_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\chi\Big|&\leqq\Big|\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f\lambda\chi\Big|+\Big|\int\limits_{F\cap G} v_f\lambda\chi\Big|+\\&+\Big|\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G} v_f(1-\lambda)\chi-\int\limits_{F\cap G} v_f(1-\lambda)\chi\Big|<\\&<\frac{2c\varepsilon}{4c+1}+\frac{2c\varepsilon}{4c+1}+\frac{\varepsilon}{4c+1}=\varepsilon.\end{aligned}$$

The same estimate is true for $\bar{G}$ instead of G. This proves the Theorem in the special case.

Now, consider the general case. Biholomorphic maps $\alpha_\rho\colon U_\rho\to U'_\rho$ of an open subset U_ρ of M onto an open subset U'_ρ of $\boldsymbol{C}^m$ exist such that

$$\bar{G}\subseteq\bigcup_{\rho=1}^{r} U_\rho.$$

Continuous functions g_ρ with compact support in U_ρ exist such that

$$\sum_{\rho=1}^{r} g_\rho(z)=1\qquad\text{for all } z\in\bar{G}.$$

The sets U_ρ are chosen such that each $\overline{U}_\rho$ is compact. Let T_ρ be the support of $g_\rho\chi$ on the boundary $S_\rho=\overline{U_\rho\cap G}-(U_\rho\cap G)$.

If $x\in S_\rho$, a sequence $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ of points of $U_\rho\cap G$ converges to x for $\nu\to\infty$. Hence $x\in\overline{U}_\rho\cap\overline{G}$. If $x\in G$, then $x\notin U_\rho$, hence $x\in(\overline{U}_\rho-U_\rho)\cap G$. If $x\in\overline{G}-G=S$, then $x\in S\cap\overline{U}_\rho$. Hence

$$S_\rho\subseteq(S\cap\overline{U}_\rho)\cup\big((\overline{U}_\rho-U_\rho)\cap G\big).$$

Because g_ρ has its support in U_ρ, this implies

$$f^{-1}(b)\cap T_\rho\subseteq f^{-1}(b)\cap T_\rho\cap S\subseteq f^{-1}(b)\cap T\cap S=S_b.$$

Therefore, $f^{-1}(b)\cap T_\rho$ has measure zero in $f^{-1}(b)$. Consequently,

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap G\cap U_\rho} v_f\, g_\rho\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap G\cap U_\rho} v_f\, g_\rho\chi$$

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G\cap U_\rho}} v_f\, g_\rho\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap\overline{G\cap U_\rho}} v_f\, g_\rho\chi$$

for $y\to b$.

Define $L_\rho=\overline{U_\rho\cap G}-(U_\rho\cap\overline{G})$. If $x\in U_\rho\cap\overline{G}$, then a sequence $\{x_\nu\}_{\nu\in N}$ of points of G converges to x. Because U_ρ is open, a number ν_0 exists such that $x_\nu\in U_\rho$ if $\nu\geqq\nu_0$. Hence, $x\in\overline{U_\rho\cap G}$. Therefore $U_\rho\cap\overline{G}\subseteq\overline{U_\rho\cap G}$ and $U_\rho\cap\overline{G}=\overline{(U_\rho\cap G)}\cup L_\rho$. Moreover

$$L_\rho=\overline{U_\rho\cap G}-U_\rho\cap\overline{G}\subseteq(\overline{U}_\rho\cap\overline{G})-(U_\rho\cap\overline{G})=(\overline{U}_\rho-U_\rho)\cap\overline{G}.$$

Because g_ρ has its support in U_ρ, this implies

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G\cap U_\rho}} v_f\, g_\rho\chi=\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G}\cap U_\rho} v_f\, g_\rho\chi.$$

Hence

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G}\cap U\rho} v_f\, g_\rho\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap\overline{G}\cap U_\rho} v_f\, g_\rho\chi$$

for $y\to b$. For $y\in N$ is

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G}} v_f\,\chi=\sum_{\rho=1}^{r}\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G}} v_f\, g_\rho\chi=\sum_{\rho=1}^{r}\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G}\cap U_\rho} v_f\, g_\rho\chi$$

and the same identity holds for G instead of $\overline{G}$. Consequently

$$\int\limits_{f^{-1}(y)\cap\overline{G}} v_f\,\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap\overline{G}} v_f\,\chi\qquad\text{for } y\to b$$

which is also true for G instead of $\overline{G}$; q.e.d.

Considering Remark 3, it is interesting to know, that every compact subset of a complex manifold is contained in an open neighborhood with real analytic boundary:

Proposition 3.10. *Let M be a non-compact, complex manifold of pure dimension m. Let K be a compact subset of M. Then an open neighborhood G of K*

with $\bar{G}$ compact exists such that $S=\bar{G}-G$ is a smooth, real analytic submanifold of M with pure real dimension $2m-1$.

Proof. According to GRAUERT [3], a proper real analytic map $\alpha: M \to \boldsymbol{R}^s$ for some $s \in \boldsymbol{N}$ exists, such that α is injective and its Jacobian has rank $2m$. Of course, $0 \notin \alpha(M)$ can be assumed. Then $g=|\alpha|$ is a real analytic function on M, which assumes every value in $a \leqq y < \infty$ where

$$a = \operatorname*{Max}_{x \in K} g(x).$$

According to SARD's theorem a value y with $a<y<\infty$ exists such that $dg \neq 0$ on $g^{-1}(y)=S$. Hence S is a smooth, real analytic, pure $(2m-1)$-dimensional submanifold of M. Moreover S is the boundary of the open neighborhood $G=\{z \mid g(z)<y\}$ of K. The closure $\bar{G}=\{z \mid g(z) \leqq y\}$ is compact; q.e.d.

§ 4. Logarithmic Integrands

Although the Theorem 3.9, is a result on its own merits, it is not sufficiently general for all the cases, where it will be needed. The proof of the First Main Theorem requires the use of integrands with certain types of logarithmic singularities. Therefore the theorem about the continuity of the fiber integral shall be extended to those integrands. At first, some preparations have to be done:

Lemma 4.1. *Let M be an open subset of $\boldsymbol{C}^m$. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f: M \to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let C and C' be open, bounded polycylinders in $\boldsymbol{C}^{q-1}$ with center 0. Let D and D' be open, bounded disks in $\boldsymbol{C}$ with center 0. Let E and E' be open, bounded polycylinders in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0. Suppose that*

$$\bar{C} \subseteq C', \quad \bar{D} \subseteq D', \quad \bar{E} \subseteq E', \quad \bar{C} \times \bar{D} \times \bar{E} \subseteq M.$$

For $y \in C' \times D'$ define $f_y: E' \to N$ by $f_y(z)=f(y,z)$ if $z \in E'$. Suppose that f_y is light if $y \in C' \times D'$. Let g be a holomorphic function on M. Let W and W' be open, connected neighborhoods of $b \in N$ with $\overline{W}'$ compact such that

$$\overline{W} \subseteq W',$$

$$f^{-1}(W') \cap \left(\bar{C}' \times \bar{D}' \times (\bar{E}' - E)\right) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(W') \cap g^{-1}(0) \cap \left(\bar{C}' \times (\bar{D}' \times \bar{E}' - D \times E)\right) = \emptyset.$$

For $(y,w) \in (C' \times D') \times W'$ define

$$h(y,w) = \prod_{z \in E} g(y,z)^{\nu_{f_y}(z;w)}.$$

Then h is holomorphic on $C' \times D' \times W'$ and $n_{f_y}(E;w)=s$ is constant on $C' \times D' \times W'$.

For each $w\in W'$, *define* $h_w\colon C'\times D'\to \boldsymbol{C}$ *by* $h_w(y)=h(y,w)$. *For each* $(x,w)\in C'\times W'$ *define* $h_{x,w}\colon D'\to \boldsymbol{C}$ *by* $h_{x,w}(z)=h(x,z,w)$. *Then* $h_{x,w}(z)\neq 0$ *if* $z\in D'-D$. *Moreover* $u=n_{h_{x,w}}(D;0)$ *is constant on* $C'\times W'$.

Define $H(x,b)=D\cap h_{x,b}^{-1}(0)$. *For* $\rho>0$ *and* $x\in C'$, *define*

$$T(x,\rho)=\bigcup_{v\in H(x,b)}\{z\,|\,|z-v|<\rho\},$$

$$T(\rho)=\bigcup_{x\in C}\{x\}\times T(x,\rho).$$

Then $T(\rho)$ *is an open neighborhood of* $h_b^{-1}(0)\cap(C\times D)$. *A constant* $\rho_0>0$ *exists such that* $T(\rho)\subseteq C\times D$ *for every* ρ *in* $0<\rho\leqq\rho_0$ *and such that an open connected neighborhood* $W(\rho)$ *of* b *with* $W(\rho)\subseteq W$ *exists such that*

$$h_w^{-1}(0)\cap(C\times D)\subseteq T(\rho)$$

if $w\in W(\rho)$ *and* $0<\rho\leqq\rho_0$.

Proof 1. Apply I STOLL [*14*]. Theorem 3.7 using the following table.

There	M	N	m	Q	q	f	f_y	G	W	g	h	s
Here	E'	N	p	$C'\times D'$	q	f	f_y	E	W'	g	h	s

Hence, h is holomorphic on $C'\times D'\times W'$ and $n_{f_y}(E;w)=s$ constant on $C'\times D'\times W'$.

Take $(x,w)\in C'\times W'$. If $h_{x,w}(z)=0$ and $z\in D'$, then $v\in E$ with $g(x,z,v)=0$ and $v_{f_y}(v;w)>0$ exists, where $y=(x,z)$. Hence $(y,v)\in g^{-1}(0)$ and $f(y,v)=w\in W'$. Therefore

$$(x,z,v)\in f^{-1}(W')\cap g^{-1}(0)\cap(C'\times D'\times E)\subseteq C'\times D\times E$$

which implies $z\in D$. Therefore $h_{x,w}(z)\neq 0$ if $z\in D'-D$.

According to the classical Rouché Theorem $u=n_{h_{x,w}}(D;0)$ is constant on the connected space $C'\times W'$.

2. Take $\rho>0$. Let C'' be any polycylinder with center 0 in $\boldsymbol{C}^{q-1}$ such that $C\subseteq C''\subseteq\bar{C}''\subset C'$. Define

$$T''(\rho)=\bigcup_{x\in C''}\{x\}\times T(x,\rho).$$

Now, it will be shown that $T''(\rho)$ is open. Take $(a,t)\in T''(\rho)$. Then $a\in C''$ and $t\in T(a,\rho)$. Hence $v\in H(a,b)$ exists such that $|t-v|<\rho$. Let $\{(a_\nu,t_\nu)\}_{\nu\in N}$ be any sequence in $\boldsymbol{C}^q$ which converges to (a,t) for $\nu\to\infty$. Because C'' is an open neighborhood of a, a number ν_0 exists such that $a_\nu\in C''$ if $\nu\geqq\nu_0$. A number $\nu_1\geqq\nu_0$ exists such that $|t_\nu-t|<\frac{1}{2}(\rho-|t-v|)$ if $\nu\geqq\nu_1$. Because $h_{ab}\not\equiv 0$, a number ρ_1 can be found such that

1. $0<\rho_1<\frac{1}{2}(\rho-|t-v|)$,
2. $\{z\,|\,|z-v|\leqq\rho_1\}\subseteq D$,
3. $h(a,z,b)\neq 0$ if $|z-v|=\rho_1$.

Then a number $\varepsilon>0$ exists such that

4. $\{x\,|\,|x-a|<\varepsilon\}\subseteq C''$,

5. $h(x,z,b)\neq 0$ if $|z-v|=\rho_1$ and $|x-a|<\varepsilon$.

Because $v\in H(a,b)$, it is $h(z,v,b)=0$. Therefore, for each x with $|x-a|<\varepsilon$, a complex number $\lambda(x)$ with $|\lambda(x)-v|<\rho_1$ exists such that $h(x,\lambda(x),b)=0$. It is $\lambda(x)\in D$. Hence $\lambda(x)\in H(x,b)$. If $v\geqq v_1$, then

$$|\lambda(x)-t_v|\leqq|\lambda(x)-v|+|v-t|+|t-t_v|<\rho_1+|v-t|+\tfrac{1}{2}(\rho-|t-v|)<\rho\,.$$

Therefore, $t_v\in T(x,\rho)$ if $v\geqq v_1$ and $|x-a|<\varepsilon$. A number $v_2\geqq v_1$ exists such that $|a_v-a|<\varepsilon$ if $v\geqq v_2$. Because $a_v\in C''$ if $v\geqq v_2$, this implies $(a_v,t_v)\in T''(\rho)$ if $v\geqq v_2$. Therefore, $T''(\rho)$ is open. The special case $C''=C$ implies that $T(\rho)$ is open. Moreover,

$$\begin{aligned} h_b^{-1}(0)\cap(C\times D)&=\{(x,z)\,|\,(x,z)\in C\times D, h(x,z,b)=0\}\\ &=\bigcup_{x\in C}\{x\}\times(h_{x,b}^{-1}(0)\cap D)\\ &\subseteq\bigcup_{x\in C}\{x\}\times T(x,\rho)=T(\rho)\,. \end{aligned}$$

Therefore, $T(\rho)$ is an open neighborhood of $h_b^{-1}(0)\cap(C\times D)$.

3. Suppose that a sequence $\{\rho_\nu\}_{\nu\in\boldsymbol{N}}$ of positive real numbers exists such that $\rho_\nu\to 0$ for $\nu\to\infty$ and such that $T(\rho_\nu)$ is not contained in $C\times D$. Pick (x_ν,z_ν) in $T(\rho_\nu)-(C\times D)$. Then $x_\nu\in C$. For each ν, a point $v_\nu\in D$ with $|z_\nu-v_\nu|<\rho_\nu$ and $h(x_\nu,v_\nu,b)=0$ exists. A subsequence $\{(x_{\nu_\lambda},v_{\nu_\lambda})\}_{\lambda\in\boldsymbol{N}}$ exists such that $\nu_\lambda\to\infty$ for $\lambda\to\infty$ and $(x_{\nu_\lambda},v_{\nu_\lambda})\to(x,v)$ for $\lambda\to\infty$ with $(x,v)\in\bar{C}\times\bar{D}$. Then $(x,v)\in C'\times D'$ and $h(x,v,b)=0$. Therefore, $v\in D$. Because, $\rho_\nu\to 0$ for $\nu\to\infty$, it converges $z_{\nu_\lambda}\to v$ for $\rho\to\infty$. A number λ_0 exists such that $z_{\nu_\lambda}\in D$ if $\lambda\geqq\lambda_0$. Hence $(x_{\nu_\lambda},z_{\nu_\lambda})\in C\times D$ if $\lambda\geqq\lambda_0$. But this is wrong. Therefore, a positive real number ρ_0 exists such that $T(\rho)\subseteq C\times D$ for all ρ with $0<\rho\leqq\rho_0$.

4. Take C'' as before but with $\bar{C}\subset C''$. Then $T''(\rho)\cap(C\times\boldsymbol{C})=T(\rho)$. Take ρ with $0<\rho\leqq\rho_0$. Suppose that a sequence $\{w_\nu\}_{\nu\in\boldsymbol{N}}$ of points in W exists such that $w_\nu\to b$ for $\nu\to\infty$ and such that $h_{w_\nu}^{-1}(0)\cap(C\times D)$ is not contained in $T(\rho)$. For each $\nu\in\boldsymbol{N}$, pick

$$(x_\nu,z_\nu)\in h_{w_\nu}^{-1}(0)\cap(C\times D)-T(\rho)\,.$$

A convergent subsequence $\{(x_{\nu_\lambda},z_{\nu_\lambda})\}_{\lambda\in\boldsymbol{N}}$ with $\nu_\lambda\to\infty$ for $\lambda\to\infty$ exists such that $(x_{\nu_\lambda},z_{\nu_\lambda})\to(x,z)$ for $\lambda\to\infty$. Then, $(x,z)\in\bar{C}\times\bar{D}$. Because $h(x_{\nu_\lambda},z_{\nu_\lambda},w_{\nu_\lambda})=0$ for all $\lambda\in\boldsymbol{N}$, also $h(x,z,b)=0$ holds with $(x,z)\in C''\times D'$. Hence $z\in D$, and $z\in H(x,b)\subseteq T(x,\rho)$. Hence $(x,z)\in T''(\rho)$. Because $T''(\rho)$ is open, a number λ_0 exists such that $(x_{\nu_\lambda},z_{\nu_\lambda})\in T''(\rho)$ if $\lambda\geqq\lambda_0$. Because $(x_{\nu_\lambda},z_{\nu_\lambda})\in C\times\boldsymbol{C}$, this implies $(x_{\nu_\lambda},z_{\nu_\lambda})\in T(\rho)$ which is wrong. Hence, an open neighborhood $W(\rho)$ of b with $W(\rho)\subseteq W$ exists such that

$$h_w^{-1}(0)\cap(C\times D)\subseteq T(\rho)$$

if $w\in W(\rho)$; q.e.d.

Lemma 4.2. *Make the same assumptions as in Lemma 4.1. Then a holomorphic function e on* $C'\times D'\times W'$ *and bounded holomorphic function* a_μ *for* $\mu=0, 1, \ldots, u-1$ *on* $C'\times W'$ *and functions* α_μ *on* $C'\times W'$ *exist such that*

1) $\omega(y,z)=\sum_{\mu=0}^{u-1} a_\mu(y)\, z^\mu+z^u=\prod_{\mu=1}^{u}(z-\alpha_\mu(y))$,

2) $\alpha_\mu(y)\in D$ *if* $y\in C'\times W'$,

3) $h=e\cdot w$ *on* $C'\times D'\times W'$,

4) $e(x,z,w)\neq 0$ *if* $(x,z,w)\in C'\times D'\times W'$.

Proof. This is nothing else than the application of the Weierstrass preparation theorem to h on $C'\times D'\times W'$; observe that $h(x,z,w)\neq 0$ if $(x,z,w)\in C'\times (D'-D)\times W'$ and that $n_{h_x,w}(D,0)=u$ is constant on $C'\times W'$. Because $\alpha_\mu(x,w)\in D$, the elementary symmetric functions a_μ of the functions α_μ are bounded on $C'\times W'$; q.e.d.

Let $\mathrm{Id}: \boldsymbol{C}^m\to\boldsymbol{C}^m$ be the identity map. Then $\mathrm{Id}=(z_1, \ldots, z_m)$ where $z_1, \ldots, z_m$ are the coordinate functions. Let $\iota\in\mathfrak{T}(q,m)$ by the map defined by $\iota(\nu)=\nu$ or $\nu=1, \ldots, q$ where $1\leqq q\leqq m$. Then

$$\eta_{\iota\iota}=\left(\frac{i}{2}\right)^q dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge dz_q\wedge d\bar{z}_q.$$

Lemma 4.3. *Let M be an open subset of* $\boldsymbol{C}^m$. *Let N be a pure p-dimensional, normal, complex space with* $0<p<m$. *Define* $q=m-p$. *Let* $f: M\to N$ *be a holomorphic, q-fibering map. Let C and C' be open, bounded polycylinders in* $\boldsymbol{C}^{q-1}$ *with center* 0. *Let D and D' be open, bounded disks in* $\boldsymbol{C}$ *with center* 0. *Let E and E' be open, bounded polycylinders in* $\boldsymbol{C}^p$ *with center* 0. *Suppose that*

$$\bar{C}\subseteq C',\quad \bar{D}\subseteq D',\quad \bar{E}\subseteq E',\quad \bar{C}'\times\bar{D}'\times\bar{E}'\subseteq M.$$

For $y\in C'\times D'$, *define* $f_y: E'\to N$ *by* $f_y(z)=f(y,z)$ *if* $z\in E'$. *Suppose that* f_y *is light if* $y\in C'\times D'$. *Let g be a holomorphic function on M. Let* $b\in N$. *Suppose that*

$$f^{-1}(b)\cap(\bar{C}'\times\bar{D}'\times(\bar{E}'-E))=\emptyset,$$

$$f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap(\bar{C}'\times(\bar{D}'\times\bar{E}'-D\times E))=\emptyset.$$

Let κ *be a non-negative integer.*

Then, an open neighborhood W of b in N exists such that g is not identically zero on anyone of the branches of $f^{-1}(w)\cap(C\times D\times E)$ *if* $w\in W$. *Moreover, for every* $\varepsilon>0$ *an open neighborhood* $U(\varepsilon)$ *of* $(f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0))\cap(C\times D\times E)$ *with* $U(\varepsilon)\subseteq C\times D\times E$ *and an open neighborhood* $W(\varepsilon)$ *of b with* $W(\varepsilon)\subseteq W$ *exists such that*

$$\int_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} \nu_f\,|\log|g||^\kappa\,\eta_{\iota\iota}<\varepsilon.$$

Proof. Open connected neighborhoods W and W' of b exist such that $\overline{W}\subseteq W'$ and such that $\overline{W}'$ is compact, moreover such that

$$f^{-1}(W')\cap\left(\bar{C}'\times\bar{D}'\times(\bar{E}'-E)\right)=\emptyset,$$

$$f^{-1}(W')\cap g^{-1}(0)\cap\left(\bar{C}'\times(\bar{D}'\times E'-D\times E)\right)=\emptyset.$$

Hence, the results and notations of Lemma 4.1 and Lemma 4.2 can be applied. Let $w\in W$ and let B be a branch of $f^{-1}(w)\cap(C\times D\times E)$. Suppose that g is identically zero on B. The branch B is contained in one and only one branch B' of $f^{-1}(w)\cap(C'\times D'\times E')$. By construction, B' is contained in $C'\times D'\times E$. Hence the projection $\pi\colon B'\to C'\times D'$ is proper. Because B' is pure q-dimensional and because $C'\times D'$ is open in $\boldsymbol{C}^q$, the map π is surjective. Hence $(x,z,v)\in B'$ with $(x,z)\in C'\times(D'-D)$ exists. Because g is identically zero on B, it is identically zero on B'. Hence $g(x,z,v)=0$. Hence

$$(x,z,v)\in f^{-1}(w)\cap g^{-1}(0)\cap(C'\times D'\times E')\subseteq C'\times D\times E.$$

which implies $z\in D$. Contradiction! Therefore g is not identically zero on any one of the branches of $f^{-1}(w)\cap(C\times D\times E)$ if $w\in W$.

Positive real numbers $t_1,\ldots,t_m$, $t_1',\ldots,t_m'$ exist such that

$$C\times D\times E=\prod_{\mu=1}^{m}\{z_\mu\,|\,|z_\mu|<t_\mu\},\qquad C'\times D'\times E'=\prod_{\mu=1}^{m}\{z_\mu\,|\,|z_\mu|<t_\mu'\}.$$

Using the same notation as in Lemma 4.1 and Lemma 4.2, this implies $|\alpha_\mu(x,w)|<t_q$, if $(x,w)\in C'\times D'$ for $\mu=1,\ldots,m$. Because the holomorphic function e does not assume the value zero on $C'\times D'\times W'$, a constant $L_1>1$ exists such that

$$\left|\log|e(x,z,w)|\right|<L_1\quad\text{if}\quad(x,z,w)\in\bar{C}\times\bar{D}\times\overline{W}.$$

Take any ρ in

$$0<\rho<\operatorname{Min}\left(\rho_0,\frac{1}{10},\frac{1}{2t_q}\right)=\rho_1.$$

For $w\in W(\rho)$ is $h_w^{-1}(0)\cap(C\times D)\subseteq T(\rho)\subseteq C\times D$. For $x\in C$ define

$$T_\mu(x,\rho)=\{z\,|\,|z-\alpha_\mu(x,b)|<\rho\}.$$

Then

$$T(x,\rho)=\bigcup_{\mu=1}^{u}T_\mu(x,\rho)\subseteq D.$$

Suppose, that $\kappa\geqq 1$. If $x_1,\ldots,x_m$ are complex numbers, then

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m}x_\nu\right|^\kappa\leqq m^{\kappa-1}\sum_{\nu=1}^{m}|x_\nu|^\kappa$$

is claimed. For $\kappa=1$, it is obviously correct. If $\kappa>1$, define

$$\lambda=\frac{\kappa}{\kappa-1}.$$

Then

$$\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}=1 \quad \text{and} \quad \kappa-1=\frac{\kappa}{\lambda}.$$

Therefore

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu\right| \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{m} 1^\lambda\right)^{1/\lambda} \left(\sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu|^\kappa\right)^{1/\kappa} = m^{1/\lambda}\left(\sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu|^\kappa\right)^{1/\kappa},$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m} x_\nu\right|^\kappa \leqq m^{\kappa/\lambda} \sum_{\nu=1}^{m} |x_\nu|^\kappa$$

which proves the claim. If $\kappa \geqq 1$, then

$$\begin{aligned}
&\int_{T(x,\rho)} \left|\log|h_{x,w}(z_q)|\right|^\kappa \frac{i}{2}\, dz_q \wedge d\bar{z}_q \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{u} \int_{T_\mu(x,\rho)} \left|\log|h_{x,w}(z_q)|\right|^\kappa \frac{i}{2}\, dz_q \wedge d\bar{z}_q \\
&\leqq \sum_{\mu=1}^{u} (u+1)^{\kappa-1} \int_{T_\mu(x,\rho)} \left|\log|e(x,z_q,q)|\right|^\kappa \frac{i}{2}\, dz_q \wedge d\bar{z}_q + \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^{u} (u+1)^{\kappa-1} \sum_{\nu=1}^{u} \int_{T_\mu(x,\rho)} \left|\log|z_q-\alpha_\nu(x,w)|\right|^\kappa \frac{i}{2}\, dz_q \wedge d\bar{z}_q \\
&\leqq (u+1)^\kappa \pi \rho^2 L_1^\kappa + \sum_{\mu=1}^{u} (u+1)^{\kappa-1} \sum_{\nu=1}^{u} \int_{T_\mu(x,\rho)} \left|\log|z_q-\alpha_\nu(x,w)|\right|^\kappa \frac{i}{2}\, dz_q \wedge d\bar{z}_q .
\end{aligned}$$

At first, considered the case $|\alpha_\nu(x,w)-\alpha_\mu(x,b)| \leqq 2\rho$. If $z_q \in T_\mu(x,\rho)$ then

$$|z_q-\alpha_\nu(x,w)| \leqq |z_q-\alpha_\mu(x,b)| + |\alpha_\mu(x,b)-\alpha_\nu(x,w)| < 3\rho < \tfrac{1}{3} < 1.$$

Define $S=\{z_q \,|\, |z_q-\alpha_\nu(x,w)| \leqq 3\rho\}$. Then $T_\mu(x,\rho) \subseteq S$ and

$$\begin{aligned}
&\int_{T_\mu(x,\rho)} \left|\log|z-\alpha_\nu(x,w)|\right|^\kappa \frac{i}{2}\, dz_q \wedge d\bar{z}_q \\
&\quad \leqq \int_S \left(\log\frac{1}{|z_q-\alpha_\nu(x,w)|}\right)^\kappa \frac{i}{2}\, dz_q \wedge d\bar{z}_q = 2\pi \int_0^{3\rho} \left(\log\frac{1}{r}\right)^\kappa r\, dr \\
&\quad = 2\pi \sum_{\mu=0}^{\kappa} \frac{\kappa(\kappa-1)\ldots(\mu+1)}{2^{\kappa-\mu+1}} (3\rho)^2 \left(\log\frac{1}{3\rho}\right)^\mu \leqq 9\pi(\kappa+1)!\,\rho^2 \left(\log\frac{1}{\rho}\right)^\kappa .
\end{aligned}$$

Now, consider the case $|\alpha_\nu(x,w)-\alpha_\mu(x,b)| > 2\rho$. For $z_q \in T_\mu(x,\rho)$ is

$$|z_q-\alpha_\nu(x,w)| \geqq |\alpha_\mu(x,b)-\alpha_\nu(x,w)| - |z_q-\alpha_\mu(x,b)| \geqq 2\rho-\rho=\rho,$$

$$|z_q-\alpha_\nu(x,w)| \leqq |z_q| + |\alpha_\nu(x,w)| < 2t_q .$$

Hence

$$-\log\frac{1}{\rho}=\log\rho\leqq\log|z_q-\alpha_\nu(x,w)|\leqq\log 2t_q\leqq\log\frac{1}{\rho}.$$

Therefore

$$\int\limits_{T_\mu(x,\rho)}\left|\log|z_q-\alpha_\nu(x,w)|\right|^\kappa\frac{i}{2}dz_q\wedge d\bar{z}_q$$
$$\leqq\pi\rho^2\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^\kappa\leqq 9\pi(\kappa+1)!\,\rho^2\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^\kappa.$$

Define $L_2=10(u+1)^{k+1}(\kappa+1)!\,L_1^\kappa$. Then

$$\int\limits_{T(x,\rho)}\left|\log|h(x,z_q,w)|\right|^\kappa\frac{i}{2}dz_q\wedge d\bar{z}_q$$
$$\leqq\pi(u+1)^\kappa L_1^\kappa\rho^2+(u+1)^{\kappa+1}9\pi(\kappa+1)!\,\rho^2\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^\kappa$$
$$\leqq\pi L_2\rho^2\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^\kappa,$$

if $(x,w)\in C\times W(\rho)$ and $0<\rho<\rho_1$. If $\kappa=0$, then

$$\int\limits_{T(x,\rho)}\left|\log|h(x,z_q,w)|\right|^\kappa\frac{i}{2}dz_q\wedge d\bar{z}_q\leqq u\cdot\pi\cdot\rho^2\leqq\pi L_2\pi\rho^2\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^\kappa.$$

Define $L_3=\pi^q t_1^2\dots t_{q-1}^2 L_2$. Then

$$\int\limits_{T(\rho)}\left|\log|h(x,z_q,w)|\right|^\kappa\eta_{11}$$
$$=\int\limits_C\left(\int\limits_{T(x,\rho)}\left|\log|h(x,z_q,w)|\right|^\kappa\frac{i}{2}dz_q\wedge d\bar{z}_q\right)\times$$
$$\times\left(\frac{i}{2}\right)^{q-1}dz_1\wedge d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge dz_{q-1}\wedge d\bar{z}_{q-1}$$
$$\leqq L_3\rho^2\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^\kappa$$

if $w\in W(\rho)$ and $0<\rho<\rho_1$.

A constant $L_4>1$ exists such that $|g(\mathfrak{z})|\leqq L_4$, if $\mathfrak{z}\in\bar{C}\times\bar{D}\times\bar{E}$. If $x_\nu\geqq 0$, then

$$\sum_{\nu=1}^s x_\nu^\kappa\leqq s\left(\sum_{\nu=1}^s x_\nu\right)^\kappa$$

because κ is a non-negative integer. Therefore

$$\sum_{v\in E}\nu_{f_y}(v;w)\left(\log\frac{L_4}{|g(y,v)|}\right)^\kappa$$
$$\leqq s\left(\sum_{v\in E}\nu_{f_y}(v;w)\log\frac{L_4}{|g(y,v)|}\right)^\kappa$$
$$\leqq s\cdot\left(\log\frac{L_4^s}{|h(y,w)|}\right)^\kappa\leqq s2^{\kappa-1}(\log L_4^s)^\kappa+s2^{\kappa-1}\left|\log|h(y,w)|\right|^\kappa,$$

if $y \in C \times D$ and $w \in W(\rho)$ and $0 < \rho < \rho_1$. Therefore, using Proposition 2.10, the following estimate can be made

$$\begin{aligned}
&\int_{f^{-1}(w) \cap (T(\rho) \times E)} \nu_f \left(\log \frac{L_4}{|g|}\right)^\kappa \eta_{11} \\
&\quad = \int_{y \in T(\rho)} \sum_{v \in E} \nu_{f_y}(v; w) \left(\log \frac{L_4}{|g(y,v)|}\right)^\kappa \eta_{11} \\
&\quad \leqq \int_{T(\rho)} 2^{\kappa-1} (\log L_4^s)^\kappa \eta_{11} + \int_{y \in T(\rho)} 2^{\kappa-1} \left|\log |h(y; w)|\right|^\kappa \eta_{11} \\
&\quad \leqq s 2^{\kappa-1} (\log L_4^s)^\kappa \pi^q t_1^2 \ldots t_{q-1}^2 u \rho^2 + s 2^{\kappa-1} L_3 \rho^2 \left(\log \frac{1}{\rho}\right)^\kappa \\
&\quad \leqq L_5 \rho^2 \left(\log \frac{1}{\rho}\right)^\kappa \quad \text{if} \quad w \in W(\rho) \quad \text{and} \quad 0 < \rho < \rho_1,
\end{aligned}$$

where L_5 is a constant which does not depend on w and ρ. Now

$$\begin{aligned}
\left|\log |g|\right|^\kappa &\leqq \left|\log \frac{L_4}{|g|} - \log L_4\right|^\kappa \\
&\leqq 2^{\kappa-1} \left(\log \frac{L_4}{|g|}\right)^\kappa + 2^{\kappa-1} (\log L_4)^\kappa.
\end{aligned}$$

Observe, that $L_5 = L_5(\kappa)$ depends on κ. Define $L_6 = L_5(0)$. Then

$$\int_{f^{-1}(w) \cap (T(\rho) \times E)} \nu_f \eta_{11} \leqq L_6 \rho^2.$$

Hence

$$\begin{aligned}
&\int_{f^{-1}(w) \cap (T(\rho) \times E)} \nu_f \left|\log |g|\right|^\kappa \eta_{11} \\
&\quad \leqq \int_{f^{-1}(w) \cap (T(\rho) \times E)} \nu_f 2^{\kappa-1} \left(\log \frac{L_4}{|g|}\right)^\kappa \eta_{11} + 2^{\kappa-1} (\log L_4)^\kappa \int_{f^{-1}(w) \cap (T(\rho) \times E)} \nu_f \eta_{11} \\
&\quad \leqq 2^{\kappa-1} L_5 \rho^2 \left(\log \frac{1}{\rho}\right)^\kappa + 2^{\kappa-1} (\log L_4)^\kappa \cdot L_6 \rho^2 \\
&\quad \leqq L_7 \rho^2 \left(\log \frac{1}{\rho}\right)^\kappa
\end{aligned}$$

if $w \in W(\rho)$ and $0 < \rho < \rho_1$, where the constant L_7 does not depend on w and ρ.

Take any $\varepsilon > 0$. Then $\rho(\varepsilon)$ with $0 < \rho(\varepsilon) < \rho_1$ exists such that

$$L_7 \rho(\varepsilon)^2 \left(\log \frac{1}{\rho(\varepsilon)}\right)^\kappa < \varepsilon.$$

Then $U(\varepsilon) = T(\rho(\varepsilon)) \times E$ is an open subset of $C \times D \times E$. If $(y,z) \in g^{-1}(0) \cap f^{-1}(b) \cap ((C \times D) \times E)$, then $\nu_f((y,z); b) > 0$ and $g(y,z) = 0$. Hence $h(y,b) = 0$ with $y \in C \times D$. Therefore $y \in h_b^{-1}(0) \cap (C \times D)$, which implies $y \in T(\rho(\varepsilon))$. Because

$z \in E$, this means $(y,z) \in U(\varepsilon)$. Hence, $U(\varepsilon)$ is an open neighborhood of $g^{-1}(0) \cap h^{-1}(b) \cap (C \times D \times E)$. Moreover, for every $w \in W(\rho(\varepsilon))$, the estimate

$$\int_{f^{-1}(w) \cap U(\varepsilon)} v_f \, |\log |g||^{\kappa} \eta_{\iota} < \varepsilon$$

holds; q.e.d.

Lemma 4.4. *Let M be an open neighborhood of $0 \in \boldsymbol{C}^m$. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0 < p < m$. Let κ be a non-negative integer. Define $q = m - p$. Let $f: M \to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let g be a holomorphic function on M with $g(0) = 0$. Define $b = f(0)$. Suppose that 0 in $\boldsymbol{C}^m$ is an isolated point of the two sets*

$$f^{-1}(b) \cap (\{0\} \times \boldsymbol{C}^p) \qquad (\text{with } 0 \in \boldsymbol{C}^q)$$

$$f^{-1}(b) \cap g^{-1}(0) \cap (\{0\} \times \boldsymbol{C}^{p+1}) \qquad (\text{with } 0 \in \boldsymbol{C}^{q-1}).$$

Then an open, bounded neighborhood U of 0 in $\boldsymbol{C}^m$ with $\overline{U} \subseteq M$ and an open neighborhood W of b exist such that g is not identically zero on any one of the branches of $f^{-1}(w) \cap U$ if $w \in W$.

Moreover, for every $\varepsilon > 0$, an open neighborhood $U(\varepsilon)$ of $f^{-1}(b) \cap g^{-1}(0) \cap U$ with $U(\varepsilon) \subseteq U$ and an open neighborhood $W(\varepsilon)$ of b with $W(\varepsilon) \subseteq W$ exist such that

$$\int_{f^{-1}(w) \cap U(\varepsilon)} v_f \, |\log |g||^{\kappa} \eta_{\iota}$$

for all $w \in W(\varepsilon)$, where $\iota \in \mathfrak{T}(q,m)$ is defined by $\iota(\nu) = \nu$ for $\nu = 1, \ldots, q$.

Proof. An open and bounded polycylinder E_0 in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 and a disk D_0 in $\boldsymbol{C}$ exist such that

(1) $f^{-1}(b) \cap (\{0\} \times \overline{E}_0) = \{0\}$,

(2) $f^{-1}(b) \cap g^{-1}(0) \cap (\{0\} \times \overline{D}_0 \times \overline{E}_0) = \{0\}$.

According to Lemma 3.1 open and bounded polycylinders A in $\boldsymbol{C}^q$ and E, E' in $\boldsymbol{C}^p$ with center 0 exist such that

(3) $\overline{A} \times \overline{E}' \subseteq M$ and $\overline{E} \subset E' \subseteq \overline{E}' \subset E_0$,

(4) $\overline{A} \subseteq \boldsymbol{C}^{q-1} \times D_0$,

(5) $f^{-1}(b) \cap (\overline{A} \times (\overline{E}' - E)) = \emptyset$,

(6) If $y \in \overline{A}$, define $f_y: E' \to N$ by $f_y(z) = f(y,z)$ $z \in E'$. Then f_y is a light holomorphic map.

Now, $A = B \times D_1$, where B is an open polycylinder in $\boldsymbol{C}^{q-1}$ with center 0 and where D_1 is an open disk in $\boldsymbol{C}$ with center 0 and with $\overline{D}_1 \subseteq D_0$. Both $\overline{B}$ and $\overline{D}_1$ are compact. Let D and D' be open disks with center 0 such that $\overline{D} \subset D'$ and $\overline{D}' \subset D_1$. Then $\overline{D}' \times \overline{E}' - D \times E$ is compact and contained in $(D_0 \times E_0 - \{(0,0)\})$. Hence

$$f^{-1}(b) \cap g^{-1}(0) \cap (\{0\} \times (\overline{D}' \times \overline{E}' - D \times E)) = \emptyset.$$

Therefore, open polycylinders C and C' with center 0 in $\boldsymbol{C}^{q-1}$ exist such that $\bar{C}\subseteq C'$ and $\bar{C}'\subset B$ and such that

$$f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap(\bar{C}'\times(\bar{D}'\times\bar{E}'-D\times E))=\emptyset.$$

Then $\bar{C}'\times\bar{D}'\subseteq B\times D_1=A$. Therefore

$$f^{-1}(b)\cap(\bar{C}'\times\bar{D}'\times(\bar{E}'-E))=\emptyset.$$

Define $U=C\times D\times E$. Then U is an open, bounded neighborhood of 0 with $\bar{U}\subseteq M$. Moreover, according to Lemma 4.3, the assertions of Lemma 4.4 are true; q.e.d.

This result shall now be extended to differential forms on manifolds.

Lemma 4.5. *Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f\colon M\to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let κ be a non-negative integer. Let g be a holomorphic function on M. Let $a\in M$. Define $b=f(a)$. Suppose that*

$$\dim_a f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)=q-1.$$

Let χ be a continuous differential form of bidegree (q,q) on M.

Then an open neighborhood U of a and an open neighborhood W of b exists such that g is not identically zero on any one of the branches of $f^{-1}(w)\cap U$ if $w\in W$. Moreover, for every $\varepsilon>0$, an open neighborhood $U(\varepsilon)$ of $f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap U$ with $U(\varepsilon)\subseteq U$ and an open neighborhood $W(\varepsilon)$ of b with $W(\varepsilon)\subseteq W$ exist such that

$$\int_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} v_f\,|\log|g||^{\kappa}\,|\chi|<\varepsilon$$

for every $w\in W(\varepsilon)$.

Proof. Without loss of generality, it can be assumed that M is an open subset of an m-dimensional complex vector space V and that $a=0\in V$. Take an Hermitian product $(\,|\,)$ on V. Let M_0 be an open, bounded neighborhood of 0 such that $\overline{M}_0\subseteq M$. Define the euclidean form v_q in respect to $(\,|\,)$. A constant $c>0$ exists such that

$$|\chi|\leqq\frac{c}{m!}v_q$$

on M_0. Let $Y_0=Y(f^{-1}(b),0,q)$ be the set of all bases $\mathfrak{c}\in\mathrm{GL}(V)$ which are clear for $(f^{-1}(b),0,q)$. Observe, that $f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)$ is an analytic set of pure dimension $q-1$ which contains 0. Let

$$Y_1=Y(f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0),\ 0,\ q-1)$$

be the set of all bases $\mathfrak{c}\in\mathrm{GL}(V)$ which are clear for $(f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0),0,q-1)$. According to Proposition 1.3 nowhere dense real analytic subsets R_0 and R_1 of the space $\mathfrak{U}(V)$ of all unitary bases exists such that $\mathfrak{U}(V)-Y_\nu\subseteq R_\nu$ for $\nu=0,1$. Hence $\mathfrak{U}(V)-(Y_0\cap Y_1)\subseteq R_0\cup R_1$, where $R_0\cup R_1$ is a nowhere dense, real analytic subset of $\mathfrak{U}(V)$. Hence $\mathfrak{c}\in\mathfrak{U}(V)\cap Y_0\cap Y_1$ exists. Hence,

for every $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$ the base $\underline{\varphi}(\mathfrak{c})$ is distinguished for $(f^{-1}(b),0,q)$ and for every $\psi\in\mathfrak{T}(q-1,m)$, the base $\underline{\psi}(\mathfrak{c})$ is distinguished for $(f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0),0,q-1)$. Take $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$. Then

$$f^{-1}(b)\cap\left\{\sum_{\mu=q+1}^{m} z_{\underline{\varphi}(\mu)}\,\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(\mu)}\,|\,z_\mu\in\boldsymbol{C}\right\}$$

contains 0 as an isolated point. Define $\psi\in\mathfrak{T}(q-1,m)$ by $\psi(\nu)=\varphi(\nu)$ if $\nu=1,\ldots,q-1$. Then

$$\{\underline{\psi}(\nu)\,|\,q\leqq\nu\leqq n\}=\{\underline{\varphi}(\nu)\,|\,q\leqq\nu\leqq n\}\,.$$

Therefore

$$f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap\left\{\sum_{\mu=q}^{m} z_{\underline{\varphi}(\mu)}\,\mathfrak{c}_{\underline{\varphi}(\mu)}\,|\,z_\mu\in\boldsymbol{C}\right\}$$

contains 0 as an isolated point.

According to Lemma 4.4, an open and bounded neighborhood U_φ of 0 with $\overline{U}_\varphi\subseteq M_0$ and an open neighborhood W_φ of b exists such that g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(w)\cap U_\varphi$ if $w\in W_\varphi$. Moreover, for every $\varepsilon>0$, an open neighborhood $U_\varphi(\varepsilon)$ of $f^{-1}(b)\cap g(0)\cap U_\varphi$ with $U_\varphi(\varepsilon)\subseteq U_\varphi$ and an open neighborhood $W_\varphi(\varepsilon)$ with $W_\varphi(\varepsilon)\subseteq W_\varphi$ exist such that

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\,\cap\,U_\varphi(\varepsilon)} v_f\,|\log|g||^\kappa\,\eta_{\varphi\varphi}<\frac{\varepsilon}{c}$$

for all $w\in W_\varphi(\varepsilon)$.

Define

$$U=\bigcap_{\varphi\,\in\,\mathfrak{T}\,(q,\,m)} U_\varphi\,,\qquad U(\varepsilon)=\bigcap_{\varphi\,\in\,\mathfrak{T}\,(q,\,m)} U_\varphi(\varepsilon)\,,$$

$$W=\bigcap_{\varphi\,\in\,\mathfrak{T}\,(q,\,m)} W_\varphi\,,\qquad W(\varepsilon)=\bigcap_{\varphi\,\in\,\mathfrak{T}\,(q,\,m)} W_\varphi(\varepsilon)\,.$$

Then $U, W, U(\varepsilon)$ and $W(\varepsilon)$ are open and

$$0\in f^{-1}(b)\cap g(0)\cap U\subseteq U(\varepsilon)\subseteq U\subseteq M\,,$$

$$b\in W(\varepsilon)\subseteq W\subseteq N\,.$$

Take $w\in W$. Suppose that g is identically zero on some branch B of $f^{-1}(w)\cap U$. Pick any $\varphi\in\mathfrak{T}(q,m)$. Then B is contained in one and only one branch B' of $f^{-1}(w)\cap U_\varphi$ and g is identically zero on B'. Because $w\in W_\varphi$, this is impossible. Therefore g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(w)\cap U$ if $w\in W$. If $\varepsilon>0$ and $w\in W(\varepsilon)$, then

$$\begin{aligned}\int\limits_{f^{-1}(w)\,\cap\,U(\varepsilon)} v_f\,|\log|g||^\kappa\,|\chi|&\leqq\frac{c}{m!}\int\limits_{f^{-1}(w)\,\cap\,U(\varepsilon)} v_f\,|\log|g||^\kappa\,v_q\\&=\frac{c}{m!}\sum_{\varphi\,\in\,\mathfrak{T}\,(q,\,m)}\ \int\limits_{f^{-1}(w)\,\cap\,U_\varphi(\varepsilon)} v_f\,|\log|g||^\kappa\,\eta_{\varphi\varphi}\\&<\frac{c}{m!}\binom{m}{q}\frac{\varepsilon}{c}<\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Q.e.d.

This result shall be extended to a holomorphic vector function g. On $\boldsymbol{C}^s$, a Hermitian product $(\,|\,)$ is defined by

$$(z\,|\,w)=\sum_{\mu=1}^{s} z_\mu \bar{w}_\mu$$

if $z=(z_1, \ldots, z_s)$ and $w=(w_1, \ldots, w_s)$. If not otherwise mentioned, always this Hermitian product is meant on $\boldsymbol{C}^s$ for every $s\in\boldsymbol{N}$. At first, the following Lemma has to be proved.

Lemma 4.6. *Let M be a complex manifold of pure dimension m. Let $g: M\to\boldsymbol{C}^s$ be a holomorphic map. Let F be a pure q-dimensional analytic subset of M. Let $a\in F\cap g^{-1}(0)$. Suppose that $\dim_a F\cap g^{-1}(0)<q$. Then there exist an open neighborhood V of a, an holomorphic function h on V and a constant $L>1$ such that the following assertions hold:*

1. *The function h is not identically zero on any branch of $F\cap V$.*
2. *It is*
$$F\cap g^{-1}(0)\cap V\subseteq F\cap h^{-1}(0)\cap V.$$
3. *If $0\leqq\kappa\in\boldsymbol{Z}$ and $z\in V$, then*
$$\big|\log|g(z)|\big|^\kappa\leqq\big|\log|h(z)|\big|^\kappa+(\log L)^\kappa.$$

Proof. For every subset A of M, which is analytic in a neighborhood of a, denote by A' the germ of A at a. Then F' has finitely many branches $B_1, \ldots, B_r$. An open neighborhood U of a is said to be *privileged*, if every branch of $U\cap F$ contains a, if there are exactly r branches of $U\cap F$, and if U is biholomorphically equivalent to an open polycylinder in $\boldsymbol{C}^m$. The branches of $F\cap U$ can be enumerated by $A_1(U), \ldots, A_r(U)$ such that $B_\rho=A_\rho(U)'$ for $\rho=1, \ldots, r$. It is well-known, that the set $\mathfrak{B}$ of all privileged neighborhoods U of a forms a base of open neighborhoods of a. Moreover, if $U\in\mathfrak{B}$ and $V\in\mathfrak{B}$ with $V\subseteq U$, then $A_\rho(V)=A_\rho(U)\cap V$ for $\rho=1, \ldots, r$.

Take $U\in\mathfrak{B}$ and $V\in\mathfrak{B}$ such that $\overline{V}\subseteq U$ and such that $\overline{U}$ is compact. Because $\dim A_\rho(U)=q$ and $0\leqq\dim_a g^{-1}(0)\cap A_\rho(U)<q$, the map g is not identically zero on $A_\rho(U)$ for $\rho=1, \ldots, r$. Define $\pi_\lambda: \boldsymbol{C}^s\to\boldsymbol{C}$ as the projection $\pi_\lambda(z_1, \ldots, z_s)=z_\lambda$. Define $g_\lambda=\pi_\lambda\circ g$. Then, at least one index λ_ρ with $1\leqq\lambda_\rho\leqq s$ exists such that g_{λ_ρ} is not identically zero on $A_\rho(U)$. Hence g_{λ_ρ} is not identically zero on $A_\rho(V)=A_\rho(U)\cap V$. Therefore, a simple point c_ρ of F exists such that $c_\rho\in A_\rho(V)$ and such that $g_{\lambda_\rho}(c_\rho)\neq 0$. Then $c_\rho\notin A_\mu(U)$ if $\mu\neq\rho$. According to Theorem A, a holomorphic function f_ρ on U exists such that $f_\rho(c_\rho)=1$ and $f_\rho(z)=0$ if $z\in A_\mu(U)$ for every $\mu\neq\rho$. Take $c>0$ such that $|f_\rho(z)|\leqq c$ for all $z\in\overline{V}$ and all $\rho=1, \ldots, r$. Define h on U by

$$h(z)=\frac{1}{r\,c}\sum_{\rho=1}^{r} g_{\lambda_\rho}(z)\,f_\rho(z).$$

Then h is holomorphic on U. For $z=c_\rho$ is

$$h(c_\lambda)=\frac{1}{r\,c}\,g_{\lambda_\rho}(c_\rho)\neq 0.$$

Therefore h is not identically zero on $A_\rho(U)$. Hence h is not identically zero on any branch of $F \cap V$. For $z \in V$ is

$$|h(z)| \leqq \frac{1}{r\,c} \sum_{\rho=1}^{r} |g_{\lambda_\rho}(z)|\,|f_\rho(z)| \leqq |g(z)|\,.$$

A constant $L>1$ exists, such that $|g(z)| \leqq L$ if $z \in \overline{V}$. Therefore

$$\log|h(z)| \leqq \log|g(z)| \leqq \log L \qquad \text{if } z \in L,$$

which implies

$$\big|\log|g(z)|\big| \leqq \mathrm{Max}\big(\big|\log|h(z)|\big|, \log L\big)$$

for all $z \in V$. If $0 \leqq \kappa \in \boldsymbol{Z}$, then

$$\big|\log|g(z)|\big|^\kappa \leqq \mathrm{Max}\big(\big|\log|h(z)|\big|^\kappa, (\log L)^\kappa\big) \leqq \big|\log|h(z)|\big|^\kappa + (\log L)^\kappa$$

for all $z \in V$; q.e.d.

Now, Lemma 4.5 can be extended to vector functions:

Lemma 4.7. *Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f\colon M \to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let κ be a non-negative integer. Let $g\colon M \to \boldsymbol{C}^s$ be a holomorphic map. Let $a \in M$. Define $b=f(a)$. Suppose that*

$$0 \leqq \dim_a f^{-1}(b) \cap g^{-1}(0) \leqq q-1.$$

Let χ be a continuous differential form of bidegree (q,q) on M.

Then an open neighborhood U of a and an open neighborhood W of b exist such that g is not identically zero on any one of the branches of $f^{-1}(w) \cap U$ if $w \in W$. Moreover, for every $\varepsilon>0$, an open neighborhood $U(\varepsilon)$ of $f^{-1}(b) \cap g^{-1}(0) \cap U$ with $U(\varepsilon) \subseteq U$ and an open neighborhood $W(\varepsilon)$ of b with $W(\varepsilon) \subseteq W$ exist such that

$$\int_{f^{-1}(w) \cap U(\varepsilon)} v_f \big|\log|g|\big|^\kappa |\chi| < \varepsilon$$

for every $w \in W(\varepsilon)$.

Proof. An open neighborhood V of a, an holomorphic function h on V and a constant $L>1$ exists such that the assertions of Lemma 4.6 hold. According to Lemma 4.5, open neighborhoods U_1 and U_2 with $U_1 \cup U_2 \subseteq V$ and open neighborhoods W_1 and W_2 of b exist such that h is not identically zero on any one of the branches of $f^{-1}(w) \cap U_\nu$ if $w \in W_\nu$ for $\nu=1, 2$. Moreover, for every $\varepsilon>0$, open neighborhoods $U_1(\varepsilon)$ of $f^{-1}(b) \cap h^{-1}(0) \cap U_1$ and $U_2(\varepsilon)$ of $f^{-1}(b) \cap h^{-1}(0) \cap U_2$ with $U_1(\varepsilon) \subseteq U_1$ and $U_2(\varepsilon) \subseteq U_2$ and open neighborhoods $W_1(\varepsilon)$ and $W_2(\varepsilon)$ of b with $W_1(\varepsilon) \subseteq W_1$ and $W_2(\varepsilon) \subseteq W$ exist such that

$$\int_{f^{-1}(w) \cap U_1(\varepsilon)} v_f \big|\log|h|\big|^\kappa |\chi| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{if } w \in W_1(\varepsilon),$$

$$\int_{f^{-1}(w) \cap U_2(\varepsilon)} v_f (\log|h|)^0 |\chi| < \frac{\varepsilon}{2(\log L)^\kappa} \qquad \text{if } w \in W_2(\varepsilon).$$

Then

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap U_2(\varepsilon)} v_f(\log L)^\kappa |\chi| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{if } w\in W_2(\varepsilon).$$

Define $W=W_1\cap W_2$ and $U=U_1\cap U_2$. For every $\varepsilon>0$, define $U(\varepsilon)=U_1(\varepsilon)\cap U_2(\varepsilon)$ and $W(\varepsilon)=W_1(\varepsilon)\cap W_2(\varepsilon)$. Then $U(\varepsilon)\subseteq U$ and $b\in W(\varepsilon)\subseteq W$.

Take $w\in W$. Let B be any branch of $f^{-1}(w)\cap U$. Suppose that g is identically zero on B. Then $|\log|g||\leqq|\log|h||+\log L$ on V implies that h is identically zero on B. But B is contained in one and only one branch B' of $f^{-1}(w)\cap U_1$. Therefore h is identically zero on B' which is wrong. Therefore, g is note identically zero on any branch of $f^{-1}(w)\cap U$ if $w\in W$. If $\varepsilon>0$, then

$$f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap U\subseteq f^{-1}(b)\cap h^{-1}(0)\cap U\subseteq U(\varepsilon)\subseteq U.$$

If $w\in W(\varepsilon)$, then

$$\begin{aligned}\int\limits_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} & v_f\,|\log|g||^\kappa\,|\chi| \\ &\leqq \int\limits_{f^{-1}(w)\cap U_1(\varepsilon)} v_f\,|\log|h||^\kappa\,|\chi| + \int\limits_{f^{-1}(w)\cap U_2(\varepsilon)} v_f(\log L)^\kappa\,|\chi| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Q.e.d.

Now, this result can be extended to neighborhoods of compact subsets of $f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)$.

Lemma 4.8. *Let M be a pure m-dimensional, complex manifold. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f\colon M\to N$ be an holomorphic q-fibering map. Let κ be a non-negative integer. Let $g\colon M\to \boldsymbol{C}^s$ be a holomorphic map. Let $b\in N$. Suppose that g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(b)$. Let χ be a continuous differential form of bidegree (q,q) on M. Let K be a compact subset of M such that $K_1=f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap K\neq\emptyset$.*

Then an open neighborhood U of K_1 and an open neighborhood W of b exist such that g is not identically zero on any branch of $U\cap f^{-1}(w)$ if $w\in W$. Moreover, for every $\varepsilon>0$, an open neighborhood $\dot{U}(\varepsilon)$ of $U\cap f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)$ with $U(\varepsilon)\subseteq U$ and an open neighborhood $W(\varepsilon)$ of b with $W(\varepsilon)\subseteq W$ exist such that

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} v_f(\log|g|)^\kappa\,|\chi|<\varepsilon$$

if $w\in W(\varepsilon)$. Especially, the integrals

$$\int\limits_{f^{-1}(b)\cap K} v_f\,|\log|g||^\kappa\,\chi \quad \text{and} \quad \int\limits_{f^{-1}(b)\cap K} v_f(\log|g|)^\kappa\,\chi$$

exist.

Proof. Take any $a\in K_1$. An open neighborhood U_a of a and an open neighborhood W_a of b exist such that g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(w)\cap U_a$ if $w\in W_a$. Moreover, for every $\varepsilon>0$, an open neighborhood

$U_a(\varepsilon)$ of $f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap U_a$ with $U_a(\varepsilon)\subseteq U_a$ and an open neighborhood $W_a(\varepsilon)$ of b with $W_a(\varepsilon)\subseteq W$ exist such that

$$\int_{f^{-1}(w)\cap U_a(\varepsilon)} v_f \left|\log|g|\right|^{\kappa}|\chi|<\varepsilon$$

if $w\in W_a(\varepsilon)$.

Finitely many points $a_1,\ldots,a_r$ exist in K_1 such that

$$K_1\subseteq \bigcup_{\rho=1}^{r} U_{a_\rho}.$$

Then

$$U=\bigcup_{\rho=1}^{r} U_{a_\rho}$$

is an open neighborhood of K_1 and

$$W=\bigcap_{\rho=1}^{r} W_{a_\rho}$$

is an oben neighborhood of b. Suppose that g is identically zero on a branch B of $f^{-1}(w)\cap U$, where $w\in W$. Then $B\cap U_{a_\rho}\neq\emptyset$ for some ρ. Let B' be a branch of $B\cap U_{a_\rho}$ in U_{a_ρ}. Then B' is a branch of $f^{-1}(w)\cap U_{a_\rho}$ and g is identically zero on B' with $w\in W_{a_\rho}$. This is wrong. Therefore, g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(w)\cap U$, if $w\in W$.

Take $\varepsilon>0$. Then

$$U(\varepsilon)=\bigcup_{\rho=1}^{r} U_a\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)$$

is open. Moreover,

$$f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap U=\bigcup_{\rho=1}^{r} f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap U_{a_\rho}$$

$$\subseteq \bigcup_{\rho=1}^{r} U_{a_\rho}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)=U(\varepsilon)\subseteq \bigcup_{\rho=1}^{r} U_{a_\rho}=U.$$

Moreover,

$$W(\varepsilon)=\bigcap_{\rho=1}^{r} W_{a_\rho}\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)$$

is an open neighborhood of b and is contained in W. If $w\in W(\varepsilon)$, then

$$\int_{U(\varepsilon)\cap f^{-1}(w)} v_f \left|\log|g|\right|^{\kappa}|\chi|\leqq \sum_{\rho=1}^{r}\int_{U_{a_\rho}(\varepsilon/r)\cap f^{-1}(w)} v_f \left|\log|g|\right|^{\kappa}\chi<\sum_{\nu=1}^{r}\frac{\varepsilon}{r}=\varepsilon.$$

Q.e.d.

Let M be a pure m-dimensional complex manifold. Let $g\colon M\to \boldsymbol{C}^s$ be a holomorphic map. Suppose that g is not identically zero on any component of M. Define $A=g^{-1}(0)$. Let κ be a non-negative integer. A function h is said to be *singular atmost of type* $\left|\log|g|\right|^{\kappa}$ if and only if h is defined and continuous

on $M-A$ and if $|h| \leqq |\log|g||^{\kappa}$ on $M-A$. Obviously, the functions $(\log|g|)^{\kappa}$ and $|\log|g||^{\kappa}$ are singular atmost of type $|\log|g||^{\kappa}$. Now, the main result can be formulated and proved.

Theorem 4.9. *(The continuity of the fiber integral.) Let M be a complex manifold of pure dimension m. Let N be a pure p-dimensional, normal complex space with $0<p<m$. Define $q=m-p$. Let $f: M \to N$ be a holomorphic, q-fibering map. Let G be an open subset of M with compact closure $\bar{G}$ and boundary $S=\bar{G}-G$. Let χ be a continuous differential form of bidegree (q,q) on M. Let T be the support of χ in S. Let $b \in N$. Suppose that $S_b=f^{-1}(b)\cap T$ is a set of measure zero on the space $f^{-1}(b) \neq \emptyset$. Let $g: M \to \boldsymbol{C}^s$ be a holomorphic map. Suppose that g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(b)$. Let h be continuous function on $M-g^{-1}(0)$ which is singular atmost of type $|\log|g||^{\kappa}$, where κ is a non-negative integer.*

Then an open neighborhood U of $\bar{G}$ and an open neighborhood W of b exist such that g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(w)\cap U$ if $w \in W$. Moreover,

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap G} v_f\, h\,\chi \to \int\limits_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\, h\,\chi,$$

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap \bar{G}} v_f\, h\,\chi \to \int\limits_{f^{-1}(b)\cap \bar{G}} v_f\, h\,\chi$$

if $w \to b$ with $w \in W$.

Proof. Obviously, the theorem is true if $f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap \bar{G}=\emptyset$. In this case, open neighborhoods W of b and U of $\bar{G}$ exist such that $f^{-1}(w)\cap g^{-1}(0)\cap U=\emptyset$ if $w \in W$. Now, apply Theorem 3.9.

Therefore, $f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap \bar{G} \neq \emptyset$ can be assumed. According to Lemma 4.8, open neighborhoods U_1 of $\bar{G}\cap f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)$ and W_1 of b exist such that g is not identically zero on any branch of $U_1\cap f^{-1}(w)$ if $w \in W_1$. Moreover, for every $\varepsilon>0$, an open neighborhood $U(\varepsilon)$ of $U_1\cap f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)$ with $U(\varepsilon)\subseteq U_1$ and an open neighborhood $W(\varepsilon)$ of b with $W(\varepsilon)\subseteq W_1$ exist such that

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} v_f\, |\log|g||^{\kappa}\,|\chi| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{if } w \in W(\varepsilon).$$

For $z \in f^{-1}(b)\cap(\bar{G}-U_1)$ is $g(z)\neq 0$. Because $\bar{G}-U_1$ is compact, open neighborhoods U_2 of $\bar{G}-U_1$ and W of b with $W\subseteq W_1$ exist such that $g(z)\neq 0$ if $z \in f^{-1}(W)\cap U_2$. Then $U=U_1\cup U_2$ is an open neighborhood of $\bar{G}$. Take $w \in W$, then

$$f^{-1}(w)\cap g^{-1}(0)\cap U = f^{-1}(w)\cap g^{-1}(0)\cap U_1.$$

Let B be a branch of $f^{-1}(w)\cap U$ with $w \in W$. Suppose that g is identically zero on B, then $B\subseteq U_1$ and B is a branch of $f^{-1}(w)\cap U_1$. Contradiction! Hence, g is not identically zero on any branch of $f^{-1}(w)\cap U$ if $w \in W$.

Take any $\varepsilon>0$. Let $U_1(\varepsilon)$ be an open neighborhood of $f^{-1}(b)\cap g^{-1}(0)\cap \bar{G}$ such that $\overline{U_1(\varepsilon)}$ is compact and contained in $U(\varepsilon)$. An open neighborhood

$W_1(\varepsilon)$ of b with $W_1(\varepsilon)\subseteq W(\varepsilon)\cap W$ and an open ball $D=\{z\,|\,|z|\leqq\delta\}$ in $\boldsymbol{C}^s$ with $\delta>0$ exist such that

$$f^{-1}(W_1(\varepsilon))\cap g^{-1}(\bar{D})\cap\bar{G}\subseteq U_1(\varepsilon).$$

The function h is continuous on the closed subset $M-g^{-1}(D)$ of M and can be continued to a continuous function h_ε on M. Let λ be a continuous function on M with compact support in $U(\varepsilon)$ such that $\lambda(z)=1$ for $z\in U_1(\varepsilon)$ and such that $0\leqq\lambda(z)\leqq 1$ for all $z\in M$. According to Theorem 3.9

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap G} v_f\, h_\varepsilon(1-\lambda)\,\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\, h_\varepsilon(1-\lambda)\,\chi,$$

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap\bar{G}} v_f\, h_\varepsilon(1-\lambda)\,\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap\bar{G}} v_f\, h_\varepsilon(1-\lambda)\,\chi$$

if $w\to b$.

If $w\in W_1(\varepsilon)$ and if $z\in f^{-1}(w)\cap\bar{G}$ with $1-\lambda(z)\neq 0$, then $z\in f^{-1}(w)\cap\bar{G}-U_1(\varepsilon)$. Hence $z\notin g^{-1}(\bar{D})$. Therefore, $h_\varepsilon(z)=h(z)$. Consequently, an open neighborhood $W_2(\varepsilon)$ of b with $W_2(\varepsilon)\subseteq W_1(\varepsilon)$ exists such that

$$\Big|\int\limits_{f^{-1}(w)\cap G} v_f\, h(1-\lambda)\,\chi-\int\limits_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\, h(1-\lambda)\,\chi\Big|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\Big|\int\limits_{f^{-1}(w)\cap\bar{G}} v_f\, h(1-\lambda)\,\chi-\int\limits_{f^{-1}(b)\cap\bar{G}} v_f\, h(1-\lambda)\,\chi\Big|<\frac{\varepsilon}{3}$$

if $w\in W_2(\varepsilon)$. Hence, if $w\in W_2(\varepsilon)$, then

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_{f^{-1}(w)\cap G} v_f\, h\,\chi-\int\limits_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\, h\,\chi\Big|\\
&\quad\leqq\Big|\int\limits_{f^{-1}(w)\cap G} v_f\, h(1-\lambda)\,\chi-\int\limits_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\, h(1-\lambda)\,\chi\Big|+\\
&\qquad+\int\limits_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} v_f\,|h|\,|\lambda|\,|\chi|+\int\limits_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} v_f\,|h|\,|\lambda|\,|\chi|\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{3}+\int\limits_{f^{-1}(w)\cap U(\varepsilon)} v_f\,\big|\log|g|\big|^\kappa\,|\chi|+\int\limits_{f^{-1}(b)\cap U(\varepsilon)} v_f\,\big|\log|g|\big|^\kappa\,|\chi|\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

In this estimate, G may be replaced by $\bar{G}$. Therefore

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap G} v_f\, h\,\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap G} v_f\, h\,\chi,$$

$$\int\limits_{f^{-1}(w)\cap\bar{G}} v_f\, h\,\chi\to\int\limits_{f^{-1}(b)\cap\bar{G}} v_f\, h\,\chi$$

if $w\to b$ with $w\in W$; q.e.d.

Bibliography

[1] BUNGART, L.: Integration on real analytic varieties II. (To appear.)
[2] CHERN, S. S.: The integrated form of the first main theorem for complex analytic mappings in several complex variables. Ann. of Math. (2), **71**, 536—551 (1960).
[3] GRAUERT, H.: On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds. Ann. of Math. (2), **68**, 460—472 (1958).
[4] KNESER, H.: Zur Theorie der gebrochenen Funktionen mehrerer Veränderlicher. Jber. dtsch. Math. Ver. **48**, 1—28 (1938).
[5] LELONG, P.: Intégration sur une ensemble analytique complexe. Bull. Soc. Math. France **85**, 328—370 (1957).
[6] — Eléments positifs d'une algèbre extérieur complexe avec involution. Séminaire d'Analyse. Institut H. Poincarè Paris, 4e année, 1962, Expose n^0 1.
[7] — Fonctions entières (*n* variables) et fonctions plurisubharmoniques d'ordre fini dans C^n. J. d'Analyse Math. **12**, 365—407 (1964).
[8] LEVINE, H.: A theorem on holomorphic mappings into complex projective space. Ann. of Math. (2), **71**, 529—535 (1960).
[9] NISHINO, T.: Les ensembles analytiques et les domaines. J. Math. Kyoto Univ. **1—3**, 379—384 (1962).
[10] STOLL, W.: Mehrfache Integrale auf komplexen Mannigfaltigkeiten. Math. Zeitschr. **57**, 116—154 (1952).
[11] — Die beiden Hauptsätze der Wertverteilungstheorie bei Funktionen mehrerer, komplexer Veränderlicher (I). Acta math. **90**, 1—113 (1954).
[12] — Meromorphe Abbildungen komplexer Räume II. Math. Ann. **136**, 201—239 (1958).
[13] — The growth of the area of a transcendental analytic set II. Math. Ann. **156**, 144—170 (1964).
[14] — The multiplicity of a holomorphic map. Inventiones math. **2**, 15—58 (1966).
[15] THIE, P.: The Lelong number. (To appear in Math. Ann.)
[16] WHITNEY, H.: Local properties of analytic varieties. Differential and combinatorial topology, p.205—244. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press 1965.
[17] — Tangents to an analytic variety. Ann. of Math. (2), **81**, 496—549 (1965).

Department of Mathematics, University of Notre Dame. Notre Dame, Indiana, USA 46556

BREITSPRECHER, S.
Math. Zeitschr. 95, 139—168 (1967)

Uniforme projektive Ebenen*

SIEGFRIED BREITSPRECHER

Eingegangen am 25. Juli 1966

Einleitung

In §1 definieren wir uniforme Präinzidenzen und uniforme Inzidenzstrukturen. Auf diese wird man geführt, wenn man die Eigenschaft „fast-inzident" formalisiert, die für ein Punkt-Geraden-Paar in einer topologischen projektiven Ebene einen anschaulichen Sinn hat. Dabei orientiert man sich an der Verträglichkeitsbedingung für Äquivalenzrelationen in Inzidenzstrukturen. Wir zeigen, daß dieser Begriff die allgemeinen Eigenschaften hat, die man erwartet: Vervollständigungen existieren, die assoziierten separierten Strukturen sind (uniforme) Inzidenzstrukturen, es gibt filtrierende inverse Limiten. Damit konstruiert man leicht Beispiele uniformer projektiver Ebenen, in denen jeder allgemeine nichttriviale offene Schließungssatz ([*8*], 1.4) verletzt ist. Das zeigt, daß die Theorie noch an derselben exzessiven Allgemeinheit leidet wie die der diskreten projektiven Ebenen und daß man die topologischen Voraussetzungen verschärfen muß, wenn interessante Resultate erwartet werden.

In § 2 wird gezeigt, daß uniforme Ebenen topologisch sind, so daß das negative Resultat von §1 für topologische Ebenen erst recht gilt. Weiter verifizieren wir, daß die meisten bekannten Beispiele topologischer projektiver Ebenen uniforme Ebenen sind, nämlich die kompakten Ebenen und die Ebenen über bewerteten Körpern. Ein allgemeiner Satz über Existenz oder Eindeutigkeit verträglicher uniformer Strukturen in topologischen Ebenen ist nicht bekannt. Vervollständigung uniformer projektiver Ebenen liefert projektive Ebenen. Die Vervollständigung einer affinen uniformen Fastebene ((1.4)) ist in einem Spezialfall nichts anderes als die „projektive Abschließung", die durch Einführung der „uneigentlichen Elemente" entsteht.

In § 3 geben wir einen rekursiven Prozeß, der es gestattet, Morphismen einer beliebigen uniformen Ebene auf metrisierbare uniforme Ebenen zu konstruieren und die uniforme Ebene als inversen Limes von solchen metrisierbaren Ebenen darzustellen. Als eine Anwendung davon geben wir eine Verschärfung des Satzes von SALZMANN, daß eine kompakte projektive Ebene metrisierbar ist. Es zeigt sich ferner, daß zusammenhängende Ebenen nicht „zu viele" Morphismen gestatten, so daß die Bedingung des Zusammenhangs

* Die Arbeit wurde der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus Liebig-Universität, Gießen, als Dissertation eingereicht.

zu denjenigen Verschärfungen der topologischen Voraussetzungen gehören wird, deren Notwendigkeit oben begründet wurde.

Herrn PICKERT bin ich für seine ständige Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit, Herrn SALZMANN für kritische Ratschläge nach Durchsicht einer ersten Fassung zu Dank verpflichtet.

0. Grundbegriffe

(0.1) *Vorbemerkung.* In der Terminologie und Bezeichnungsweise lehnen wir uns – was Mengenlehre und allgemeine Topologie betrifft – an BOURBAKI ([1], [2]) an. Erinnert sei an die folgenden, in dieser Arbeit häufig verwendeten Bezeichnungen:

Ein *Graph* ist eine Menge, deren Elemente Paare sind. Ist G ein Graph, so bezeichnet G^{-1} den zu G *inversen* Graphen, d.h. die Menge der Paare (x,y) mit $(y,x)\in G$; für jede Menge A ist $G(A)$ die Menge der y, zu denen ein $x\in A$ mit $(x,y)\in G$ existiert; statt $G(\{x\})$ schreibt man $G(x)$, wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist. Sind G und H zwei Graphen, so bezeichnet $H\circ G$ den Graphen, der aus den Paaren (x,z) besteht, zu denen es ein y mit $(x,y)\in G$ und $(y,z)\in H$ gibt, also das Relationenprodukt von G mit H. Für jede Menge X ist Δ_X die Menge der Paare (x,x) mit $x\in X$, also der Graph der identischen Abbildung von X auf sich.

Die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge A eines topologischen Raumes wird mit $\bar{A}$ bezeichnet.

Die Termini „*uniforme Struktur*" und „*Nachbarschaftenfilter*" werden synonym gebraucht.

(0.2) Definition. Ein Graph E heißt *Inzidenzgraph*, wenn er nicht leer ist und der folgenden Bedingung genügt:

(I) *Aus* $(x_i, y_k)\in E$ *für* $i,k=1,2$ *folgt* $x_1=x_2$ *oder* $y_1=y_2$.

Eine Korrespondenz (E,X,Y) (d.h. ein Mengentripel (E,X,Y) mit $E\subset X\times Y$), in der E ein Inzidenzgraph ist, heißt eine *Inzidenzstruktur* oder kurz eine *Inzidenz*. Die Elemente von X heißen die *Punkte*, die Elemente von Y die *Geraden*, die Elemente von E die inzidenten Paare oder die *Fahnen* der Inzidenz (E,X,Y). Die Menge $E^{-1}(y)$ der mit einer Geraden y inzidenten Punkte heißt die *Punktreihe* in y und wird auch mit $P(y)$ bezeichnet; die Menge $E(x)$ der mit einem Punkt x inzidenten Geraden heißt das *Geradenbüschel* in x.

Ein *Morphismus* einer Inzidenz (E,X,Y) in eine Inzidenz (E',X',Y') ist ein Paar (f,g) von Abbildungen $f\colon X\to X'$, $g\colon Y\to Y'$ mit der Eigenschaft

(IM) *Aus* $(x,y)\in E$ *folgt* $(f(x),g(y))\in E'$.

(0.3) Sei (E,X,Y) eine Inzidenzstruktur. Sind $x_1, x_2\in X$ zwei verschiedene Punkte und existiert eine Gerade, welche mit beiden inzidiert, so ist diese eindeutig bestimmt; sie heißt die *Verbindungsgerade* von x_1 und x_2 und wird mit $x_1\vee x_2$ bezeichnet. Sind $y_1, y_2\in Y$ zwei verschiedene Geraden und existiert ein Punkt, welcher mit beiden inzidiert, so ist dieser eindeutig bestimmt; er

heißt der *Schnittpunkt* von y_1 und y_2 und wird mit $y_1 \wedge y_2$ bezeichnet. Auf diese Weise werden eine Abbildung einer Teilmenge von $(X \times X) - \Delta_X$ in Y und eine Abbildung einer Teilmenge von $(Y \times Y) - \Delta_Y$ in X definiert, die man als das *Verbinden* und das *Schneiden* bezeichnet.

(0.4) Definition. a) Eine Inzidenz heißt *regulär* (bzw. *geschlossen*), wenn in ihr jeder Punkt mit mindestens zwei (bzw. drei) Geraden und jede Gerade mit mindestens zwei (bzw. drei) Punkten inzidiert.

b) Eine reguläre Inzidenz heißt eine *Ebene*, wenn in ihr je zwei verschiedene Punkte eine Verbindungsgerade und je zwei verschiedene Geraden einen Schnittpunkt haben. Statt „geschlossene Ebene" sagt man „*projektive Ebene*"; die nicht geschlossenen Ebenen heißen auch *ausgeartet*.

c) Unter einer *affinen Fastebene* verstehen wir eine reguläre Inzidenzstruktur (E, X, Y), die der folgenden Bedingung genügt:

(AF) *Zu jedem Paar* $(x,y) \in (X \times Y) - E$ *gibt es genau ein* x_1 *und genau ein* y_1 *mit* $(x,y_1) \in E$, $(x_1, y) \in E$, *so daß* x *und* x_1 *keine Verbindungsgerade,* y *und* y_1 *keinen Schnittpunkt haben.*

Man nennt dann x_1 den mit x *konfluenten Punkt* auf y und y_1 die zu y *parallele Gerade* durch x.

d) Unter einer *topologischen (projektiven) Ebene* versteht man eine (projektive) Ebene, auf deren Punktmenge und Geradenmenge je eine separierte Topologie gegeben ist, derart, daß das Verbinden und das Schneiden stetige Abbildungen sind. (Bei einer projektiven Ebene braucht man statt der Separiertheit nur zu fordern, daß die Topologien von der gröbsten verschieden sind, dann folgt bereits, daß sie regulär sind: [9]; [8], p. 266.)

(0.5) Es seien X und Y zwei nicht leere Mengen. Die Menge der Inzidenzgraphen in $X \times Y$ ist dann nicht leer und durch die Inklusion $\subset$ geordnet. Diese Ordnung ist induktiv, denn aufgrund des „endlichen Charakters" des Inzidenzaxioms (I) ergibt sich sofort, daß sogar die Vereinigung einer nicht leeren, nach oben filtrierenden Menge von Inzidenzgraphen stets wieder ein Inzidenzgraph ist. Nach dem Satz von ZORN ist deshalb jeder Inzidenzgraph in $X \times Y$ in einem maximalen Inzidenzgraphen enthalten.

Sei $E \subset X \times Y$ ein Inzidenzgraph und $(x,y) \in (X \times Y) - E$. Genau dann ist $E \cup \{(x,y)\}$ wieder ein Inzidenzgraph, wenn für $x_1 \in E^{-1}(y)$ und $y_1 \in E(x)$ stets $(x_1, y_1) \notin E$ ist; also gilt:

Lemma. *Ein Inzidenzgraph* $E \subset X \times Y$ *ist genau dann maximal, wenn* $E \circ E^{-1} \circ E = X \times Y$ *ist, d.h., wenn zu jedem Paar* $(x,y) \in X \times Y$ *eine Fahne* $(x_1, y_1) \in E$ *mit* $(x,y_1) \in E$ *und* $(x_1, y) \in E$ *vorhanden ist.*

Es folgt, daß insbesondere der Graph einer projektiven Ebene oder einer affinen Fastebene stets maximal ist.

(0.6) Dualität. Ist (E, X, Y) eine (reguläre, geschlossene) Inzidenz (bzw. eine affine Fastebene, eine projektive Ebene), so ist das Tripel (E^{-1}, Y, X) wieder

eine (reguläre, geschlossene) Inzidenz (bzw. eine affine Fastebene, eine projektive Ebene), die man als die zur ersten *duale* bezeichnet. Daraus resultiert das sogenannte *Dualitätsprinzip* ([8], p. 2), dessen Anwendung durch Sprechweisen wie „dual hierzu", „durch Dualisieren" angedeutet, im folgenden aber meist nicht ausdrücklich erwähnt wird.

Im übrigen sei für die Terminologie und die Grundtatsachen betreffend Inzidenzstrukturen auf [8] verwiesen.

1. Uniforme Inzidenzstrukturen

(1.1) Definition. Eine *uniforme Präinzidenz* ist ein Tripel (E, X, Y), bestehend aus zwei (nicht notwendig separierten) uniformen Räumen X, Y und einer nicht leeren Teilmenge E des Produktraums $X \times Y$, das der folgenden Bedingung genügt:

(UI) *Zu Nachbarschaften U in X und V in Y gibt es stets eine Nachbarschaft W in $X \times Y$, derart, daß gilt:*

(*) *Aus $(x_i, y_k) \in W(E)$ für $i,k = 1, 2$ folgt $(x_1, x_2) \in U$ oder $(y_1, y_2) \in V$.*

Ein *Morphismus* einer uniformen Präinzidenz (E, X, Y) in eine uniforme Präinzidenz (E', X', Y') ist ein Paar (f, g) gleichmäßig stetiger Abbildungen $f: X \to X'$, $g: Y \to Y'$ mit der Eigenschaft (IM), d.h. mit $(f \times g)(E) \subset E'$.

Wir bemerken sogleich, daß das Axiom (UI) die folgende äquivalente Formulierung zuläßt:

(UI') *Zu Nachbarschaften U in X und V in Y gibt es stets Nachbarschaften U_1 in X und V_1 in Y, so daß gilt:*

(**) *Aus $(x_i, y_k) \in V_1 \circ E \circ U_1$ für $i,k = 1, 2$ folgt $(x_1, x_2) \in U$ oder $(y_1, y_2) \in V$.*

Für jedes Paar von Nachbarschaften U in X und V in Y ist nämlich die Menge W_{UV} der Quadrupel $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ mit $(x_1, x_2) \in U^{-1}$ und $(y_1, y_2) \in V$ eine Nachbarschaft im Produktraum $X \times Y$; und die Mengen der Form W_{UV} bilden eine Basis des Nachbarschaftenfilters von $X \times Y$. Die Behauptung folgt daher aus der Bemerkung, daß $W_{UV}(E) = V \circ E \circ U$ ist.

(1.2) Sei (E, X, Y) eine uniforme Präinzidenz, (E', X', Y') irgendein Mengentripel mit $\emptyset \neq E' \subset X' \times Y'$, f (bzw. g) eine Abbildung von X' in X (bzw. von Y' in Y), so daß $(f \times g)(E') \subset E$ ist. Versieht man X' (bzw. Y') mit der von f (bzw. g) induzierten uniformen Struktur, so wird das Tripel (E', X', Y') eine uniforme Präinzidenz und das Paar (f, g) ein Morphismus $(E', X', Y') \to (E, X, Y)$. In der Tat ist klar, daß die Eigenschaft (UI') sich auf Urbilder überträgt und beim Übergang zu einem kleineren Graphen erhalten bleibt.

(1.3) Satz. *Ist (E, X, Y) eine uniforme Präinzidenz, so hat man:*

a) Das Tripel $(\bar{E}, X, Y)$ ist eine uniforme Präinzidenz.

b) Wenn X und Y separiert sind, so sind die Mengentripel $(\bar{E}, X, Y)$ und (E, X, Y) Inzidenzstrukturen.

Für jede Teilmenge A von $X \times Y$ ist nämlich die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ gleich dem Durchschnitt der Umgebungen der Form $W(A)$ von A, wenn W die Nachbarschaften in $X \times Y$ durchläuft. Insbesondere hat man $\bar{A} \subset W(A)$ und folglich $W(\bar{A}) \subset \overset{2}{W}(A)$ für jedes W; es gibt also zu jedem W ein W' mit $W'(\bar{A}) \subset W(A)$. Angewandt auf den Graphen E liefert das die erste Behauptung. Die zweite braucht natürlich nur für $(\bar{E}, X, Y)$ bewiesen zu werden. Sei also $(x_i, y_k) \in \bar{E}$ für $i,k = 1, 2$, und sei $y_1 \neq y_2$. Wenn Y separiert ist, gibt es eine Nachbarschaft V in Y mit $(y_1, y_2) \notin V$. Weil $\bar{E} \subset W(E)$ für jede Nachbarschaft W in $X \times Y$ ist, hat man dann $(x_1, x_2) \in U$ für jede Nachbarschaft U in X, also $x_1 = x_2$, falls auch X separiert ist. Daher die Behauptung.

(1.4) Definition. a) Eine uniforme Präinzidenz (E, X, Y) heißt eine *uniforme Inzidenzstruktur* (kurz: *uniforme Inzidenz*), wenn X und Y separierte uniforme Räume sind.

b) Eine uniforme Inzidenz heißt eine *uniforme (projektive) Ebene*, wenn sie als Inzidenzstruktur eine (projektive) Ebene ist.

c) Eine uniforme Inzidenz (E, X, Y) heißt eine *uniforme Fastebene*, wenn sie als Inzidenzstruktur regulär ist und den beiden folgenden Bedingungen genügt:

(F) *Für jede Nachbarschaft U in X ist* $U \circ \overset{-1}{E} \circ E = X \times X$.

(F*) *Für jede Nachbarschaft V in Y ist* $V \circ E \circ \overset{-1}{E} = Y \times Y$.

Die Bedingung (F) besagt (für eine uniforme Inzidenz (E, X, Y)) in Worten: Sind $x_1, x_2 \in X$ irgend zwei Punkte, so gibt es in jeder Umgebung von x_2 einen Punkt x_2', derart, daß $x_2' = x_1$ ist oder die Verbindungsgerade $x_1 \vee x_2'$ existiert. (F*) ist die Dualisierung von (F). Jede uniforme Ebene ist natürlich eine uniforme Fastebene. Eine uniforme Fastebene werden wir *affin* nennen, wenn sie als Inzidenzstruktur eine affine Fastebene ist.

Eine uniforme Präinzidenz (E, X, Y) heißt *vollständig*, wenn E, X, Y vollständige uniforme Räume sind. (Dabei ist E mit der von $X \times Y$ induzierten uniformen Struktur zu versehen.) Es soll nun gezeigt werden, daß uniforme Präinzidenzen *separierte Vervollständigungen* und *assoziierte Inzidenzstrukturen* besitzen. Für jeden uniformen Raum X bezeichne dabei j_X (bzw. i_X) die kanonische Abbildung von X in die separierte Vervollständigung $\hat{X}$ (bzw. in den assoziierten separierten Raum $X_s = j_X(X)$).

(1.5) Satz. *Sei (E, X, Y) eine uniforme Präinzidenz.*

a) Identifiziert man die (separierte) Vervollständigung $\hat{E}$ von E mit der abgeschlossenen Hülle des Bildes $(j_X \times j_Y)(E)$ in $\hat{X} \times \hat{Y}$, so wird das Tripel $(\hat{E}, \hat{X}, \hat{Y})$ eine vollständige uniforme Inzidenzstruktur und das Paar (j_X, j_Y) ein Morphismus $(E, X, Y) \to (\hat{E}, \hat{X}, \hat{Y})$.

b) Zu jedem Morphismus (f, g): $(E, X, Y) \to (E', X', Y')$ in eine vollständige uniforme Inzidenz (E', X', Y') gibt es genau einen Morphismus $(\bar{f}, \bar{g})$: $(\hat{E}, \hat{X}, \hat{Y}) \to (E', X', Y')$, derart, daß $(f, g) = (\bar{f}, \bar{g}) \circ (j_X, j_Y) = (\bar{f} \circ j_X, \bar{g} \circ j_Y)$ ist.

Zu a): Aufgrund der genannten kanonischen Identifikation ([2], chap. II, § 3, no 9) ist trivialerweise $(j_X \times j_Y)(E) \subset \hat{E}$. Da $\hat{E}$, $\hat{X}$, $\hat{Y}$ separiert und vollständig sind, genügt es also, die Bedingung (UI') für $(\hat{E}, \hat{X}, \hat{Y})$ zu verifizieren.

Für jede symmetrische Nachbarschaft U in X bezeichne $\tilde{U}$ diejenige (symmetrische) Nachbarschaft in $\hat{X}$, welche aus den Paaren (ξ_1, ξ_2) besteht, wo ξ_1 und ξ_2 minimale Cauchy-Filter auf X sind, die eine Menge A mit $A \times A \subset U$ gemeinsam haben. (Eine solche Menge heißt *klein von der Ordnung U.*) Analog für Nachbarschaften V in Y. Zu Nachbarschaften U' in $\hat{X}$ und V' in $\hat{Y}$ gibt es stets symmetrische Nachbarschaften U in X und V in Y mit $\tilde{U} \subset U'$ und $\tilde{V} \subset V'$. Man kann nun weiter symmetrische Nachbarschaften U_0, U_1 in X und V_0, V_1 in Y derart wählen, daß gilt:

(i) $U_1 \subset U_0$, $\overset{3}{U_0} \subset U$ und $V_1 \subset V_0$, $\overset{3}{V_0} \subset V$.

(ii) Aus $(x_i, y_k) \in V_1 \circ E \circ U_1$ für $i,k = 1,2$ folgt $(x_1, x_2) \in U_0$ oder $(y_1, y_2) \in V_0$.

Hat man dann $(\xi_i, \eta_k) \in \tilde{V}_1 \circ E \circ \tilde{U}_1$ $(i,k = 1, 2)$ für minimale Cauchy-Filter ξ_i auf X und η_k auf Y, so gibt es minimale Cauchy-Filter α_{ik} auf X und β_{ik} auf Y mit den Eigenschaften:

(iii) Es gibt $A_{ik} \in \xi_i \cap \alpha_{ik}$ und $B_{ik} \in \beta_{ik} \cap \eta_k$ mit $A_{ik} \times A_{ik} \subset U_1$ und $B_{ik} \times B_{ik} \subset V_1$ für $i,k = 1, 2$.

(iv) Für $A \in \alpha_{ik}$ und $B \in \beta_{ik}$ ist stets $(A \times B) \cap E \neq \emptyset$.

Für Mengen A_{ik}, B_{ik} mit den in (iii) genannten Eigenschaften sind nun $A_{i1} \cap A_{i2}$, $B_{1k} \cap B_{2k}$ und $(A_{ik} \times B_{ik}) \cap E$ $(i,k = 1, 2)$ nicht leer; das folgt aus der Filtereigenschaft der ξ_i, η_k und (iv). Für Punkte $x_i \in A_{i1} \cap A_{i2}$, Geraden $y_k \in B_{k1} \cap B_{k2}$ und Fahnen $(u_{ik}, v_{ik}) \in (A_{ik} \times B_{ik}) \cap E$ hat man aber wegen (iii) $(x_i, u_{ik}) \in U_1$ und $(v_{ik}, y_k) \in V_1$, also $(x_i, y_k) \in V_1 \circ E \circ U_1$ für $i,k = 1, 2$, daher wegen (ii): $(x_1, x_2) \in U_0$ oder $(y_1, y_2) \in V_0$. Im ersten Fall ist z. B. die Menge $A_{11} \cup A_{22}$ klein von der Ordnung $U_1 \circ U_0 \circ U_1$, wegen (i) also erst recht von der Ordnung U, und da sie zu $\xi_1 \cap \xi_2$ gehört, folgt $(\xi_1, \xi_2) \in U'$. Im zweiten Fall ist die Menge $B_{11} \cup B_{22}$ klein von der Ordnung $V_1 \circ V_0 \circ V_1$, also erst recht von der Ordnung V, und da sie zu $\eta_1 \cap \eta_2$ gehört, folgt $(\eta_1, \eta_2) \in V'$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zu b): Es gibt genau eine gleichmäßig stetige Abbildung $\bar{f}\colon \hat{X} \to X'$ (bzw. $\bar{g}\colon \hat{Y} \to Y'$) mit $f = \bar{f} \circ j_X$ (bzw. $g = \bar{g} \circ j_Y$); es bleibt zu zeigen, daß das Paar $(\bar{f}, \bar{g})$ ein Morphismus ist, d. h. daß man $(\bar{f} \times \bar{g})(\hat{E}) \subset E'$ hat. Aber $\hat{E}$ ist (bei der schon in a) benützten Identifikation) die abgeschlossene Hülle des Bildes $(j_X \times j_Y)(E)$ in $\hat{X} \times \hat{Y}$; deren Bild bei der stetigen Abbildung $\bar{f} \times \bar{g}$ ist enthalten in der abgeschlossenen Hülle des Bildes $(\bar{f} \times \bar{g})((j_X \times j_Y)(E)) = (f \times g)(E)$, welches nach Voraussetzung in E' liegt. Weil E' abgeschlossen ist, folgt daraus die Behauptung.

(1.6) Satz. *Sei (E, X, Y) eine uniforme Präinzidenz.*

a) Identifiziert man den zu E assoziierten separierten Raum E_s mit dem Bild $(i_X \times i_Y)(E) \subset X_s \times Y_s$, so wird das Tripel (E_s, X_s, Y_s) eine uniforme Inzidenzstruktur und das Paar (i_X, i_Y) ein Morphismus $(E, X, Y) \to (E_s, X_s, Y_s)$.

b) Zu jedem Morphismus $(f,g)\colon (E,X,Y)\to(E',X',Y')$ *in eine uniforme Inzidenzstruktur gibt es genau einen Morphismus* $(f',g')\colon (E_s,X_s,Y_s)\to (E',X',Y')$ *mit* $(f,g)=(f',g')\circ(i_X,i_Y)=(f'\circ i_X, g'\circ i_Y)$.

Zu a): Die Identifikation ist von der im vorigen Satz benützten induziert, bei der man ja $E_s=j_E(E)=(j_X\times j_Y)(E)\subset j_X(X)\times j_Y(Y)=X_s\times Y_s$ hat. Die Behauptung folgt daher sofort aus (1.5), a) und (1.2).

Zu b): Nach (1.5), b) ist der zusammengesetzte Morphismus $(E,X,Y)\to(E',X',Y')\to(\hat{E}',\hat{X}',\hat{Y}')$ von der Form $(\bar{f},\bar{g})(j_X,j_Y)$, wo $(\bar{f},\bar{g})$ ein Morphismus von $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$ in $(\hat{E}',\hat{X}',\hat{Y}')$ ist. Man nimmt $f'=\bar{f}\,|\,X_s$ und $g'=\bar{g}\,|\,Y_s$, als Abbildungen in X' bzw. Y' aufgefaßt. Die Eindeutigkeit ist trivial.

(1.7) *Beispiele.* Wir erwähnen hier nur erst die trivialen Beispiele, welche zeigen, wie sich die ebene Inzidenzgeometrie unserer Theorie einordnet.

(i) Jede Inzidenz (E,X,Y) wird eine uniforme Inzidenz, wenn man X und Y mit den diskreten uniformen Strukturen versieht; (E,X,Y) heißt dann eine *diskrete Inzidenz.*

(ii) Sei (E',X',Y') eine diskrete Inzidenz, (E,X,Y) irgendein Mengentripel mit $\emptyset\neq E\subset X\times Y$ und f (bzw. g) eine Abbildung von X in X' (bzw. von Y in Y'), derart, daß $(f\times g)(E)\subset E'$ ist. Der Äquivalenzgraph R (bzw. S), welcher aus den Paaren $(x_1,x_2)\in X\times X$ mit $f(x_1)=f(x_2)$ (bzw. aus den Paaren $(y_1,y_2)\in Y\times Y$ mit $g(y_1)=g(y_2)$) besteht, bildet dann allein eine Basis der von f (bzw. g) induzierten uniformen Struktur. Nach (1.2) ist daher die folgende Verträglichkeitsbedingung erfüllt (vgl. [8], p. 27):

(IM′) *Aus* $x_i\equiv u_{ik}(\mathrm{mod}\ R)$, $(u_{ik},v_{ik})\in E$, $v_{ik}\equiv y_k(\mathrm{mod}\ S)$ *für* $i,k=1,2$ *folgt* $x_1\equiv x_2(\mathrm{mod}\ R)$ *oder* $y_1\equiv y_2(\mathrm{mod}\ S)$.

(iii) Sei (E,X,Y) eine uniforme Präinzidenz wie im vorigen Beispiel, wo die uniforme Struktur von X (bzw. Y) von einem Äquivalenzgraphen R (bzw. S) allein erzeugt wird. Dann hat man $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})=(E_s,X_s,Y_s)$, und beide sind nichts anderes als die Faktorstruktur, d.h. man hat $\hat{E}=E_s=E/(R_E\times S_E)=(S\circ E\circ R)/(R\times S)$, $\hat{X}=X_s=X/R$, $\hat{Y}=Y_s=Y/S$. Nach Satz (1.6) ist die Bedingung (IM′) also auch hinreichend dafür, daß die Faktorstruktur eine Inzidenz ist.

Aus solchen trivialen Beispielen lassen sich nun weniger triviale aufbauen. Es sei zunächst an eine Definition erinnert: Ein *inverses* (oder projektives) *System* von uniformen Räumen besteht aus einer Familie $(X_i)_{i\in I}$ von uniformen Räumen X_i mit teilweise geordneter Indexmenge I und einer Familie $(f_i^k)_{i\leqq k}$ von gleichmäßig stetigen Abbildungen $f_i^k\colon X_k\to X_i$, wo f_i^i für jedes $i\in I$ die identische Abbildung von X_i auf sich ist und für jedes Tripel $(i,j,k)\in I^3$ mit $i\leqq j\leqq k$ die Beziehung $f_i^j\circ f_j^k=f_i^k$ gilt. Ein *inverser* (oder projektiver) *Limes* dieses Systems besteht aus einem uniformen Raum $X=\lim X_i$ und einer Familie $(f_i)_{i\in I}$ von gleichmäßig stetigen Abbildungen (den *kanonischen Projektionen*) $f_i\colon X\to X_i$, die den folgenden Bedingungen genügen:

1^0 $f_i^k\circ f_k=f_i$ für $i,k\in I$, $i\leqq k$.

2^0 Ist $(g_i)_{i\in I}$ eine Familie gleichmäßig stetiger Abbildungen $g_i\colon Y\to X_i$ mit $f_i^k\circ g_k=g_i$ für $i,k\in I$, $i\leqq k$, so gibt es genau eine gleichmäßig stetige Abbildung $g\colon Y\to X$ mit $g_i=f_i\circ g$ für alle $i\in I$.

Den analogen Begriff eines inversen Systems und eines inversen Limes hat man in jeder Kategorie. Der Limes eines inversen Systems ist stets bis auf einen wohlbestimmten Isomorphismus eindeutig; im Fall der uniformen Räume existiert er immer, er kann freilich leer sein ([2], chap. II, § 2).

(1.8) Satz. *Es sei* (Γ_i, σ_i^k) *ein inverses System von uniformen Präinzidenzen* $\Gamma_i=(E_i, X_i, Y_i)$ *und Morphismen* $\sigma_i^k=(f_i^k, g_i^k)\colon (E_k, X_k, Y_k)\to(E_i, X_i, Y_i)$ $(i\leqq k)$ *mit einer (nach oben) filtrierenden Indexmenge* I; *sei* $E=\lim E_i$, $X=\lim X_i$, $Y=\lim Y_i$, *und für jedes* $i\in I$ *sei* f_i *(bzw.* g_i*) die kanonische Projektion* $X\to X_i$ *(bzw.* $Y\to Y_i$*). Unter der Voraussetzung, daß* E *nicht leer ist, gilt dann*:

a) Identifiziert man E *mit seinem kanonischen Bild in* $X\times Y$, *so wird* $\Gamma=(E,X,Y)$ *eine uniforme Präinzidenz, und die* $\sigma_i=(f_i, g_i)$ *werden Morphismen* $\Gamma\to\Gamma_i$.

b) Ist $\Gamma'=(E', X', Y')$ *eine uniforme Präinzidenz und* (ρ_i) *eine Familie von Morphismen* $\rho_i=(u_i, v_i)\colon (E', X', Y')\to(E_i, X_i, Y_i)$ *mit* $\sigma_i^k\circ\rho_k=\rho_i$ *für* $i\leqq k$, *so gibt es genau einen Morphismus* $\rho=(u, v)\colon (E', X', Y')\to(E,X,Y)$ *mit* $\rho_i=\sigma_i\circ\rho$ *für alle* $i\in I$ *(d.h.* Γ *ist mit den Projektionen* σ_i *ein inverser Limes des gegebenen Systems in der Kategorie der uniformen Präinzidenzen).*

Das kanonische Bild von E in $X\times Y$ ist der Durchschnitt der Urbilder $(f_i\times g_i)^{-1}(E_i)$; bezeichnen wir also für jedes $i\in I$ mit $\mathfrak{U}_i$ (bzw. $\mathfrak{V}_i$) die von f_i (bzw. g_i) induzierte uniforme Struktur auf X (bzw. Y), so macht nach (1.2) jedes der Paare $(\mathfrak{U}_i, \mathfrak{V}_i)$ das Mengentripel (E,X,Y) zu einer uniformen Präinzidenz. Da aber die Indexmenge filtrierend geordnet ist, ist die Vereinigung der $\mathfrak{U}_i$ (bzw. der $\mathfrak{V}_i$) bereits eine Basis der uniformen Struktur von X (bzw. Y), und die Eigenschaft (UI′) überträgt sich sofort auf diese. Daher ist das Tripel (E,X,Y) eine uniforme Präinzidenz. Die übrigen Behauptungen des Satzes sind trivial.

(1.9) Satz. *Sei* (Γ_i, σ_i^k) *ein inverses System von vollständigen uniformen projektiven Ebenen mit einer abzählbaren filtrierenden Indexmenge* I, *das den folgenden Bedingungen genügt:*

(i) *Für jedes* $i\in I$ *sind der Punktraum* X_i *und der Geradenraum* Y_i *von* Γ_i *metrisierbar (d.h. ihre uniformen Strukturen haben abzählbare Basen).*

(ii) *Für* $i,k\in I$ *mit* $i\leqq k$ *ist* $f_i^k(X_k)$ *dicht in* X_i *und* $g_i^k(Y_k)$ *dicht in* Y_i, *wobei* $\sigma_i^k=(f_i^k, g_i^k)$ *gesetzt ist. Dann ist der inverse Limes* $\Gamma=(\lim E_i, \lim X_i, \lim Y_i)$ *eine vollständige uniforme projektive Ebene (mit metrisierbaren uniformen Strukturen).*

Es ist wohlbekannt, daß unter den Voraussetzungen des Satzes die Limiten $X=\lim X_i$, $Y=\lim Y_i$ vollständige (metrisierbare) uniforme Räume sind und daß für jedes i das Bild von X (bzw. von Y) bei der kanonischen Projektion $f_i\colon X\to X_i$ (bzw. $g_i\colon Y\to Y_i$) dicht ist in X_i (bzw. Y_i) ([2], chap. II, § 3, Th. 1). Das Entsprechende gilt natürlich für $E=\lim E_i$, so daß insbesondere $E\neq\emptyset$ ist. Nach (1.8) bleibt also nur zu zeigen, daß in Γ je zwei Punkte eine Verbindungsgerade haben und daß Γ nicht ausgeartet ist.

Seien x und x' zwei verschiedene Punkte in X. Es gibt einen Index $i_0 \in I$ mit $f_i(x) \neq f_i(x')$ für alle $i \geqq i_0$, so daß für diese Indizes nach Voraussetzung eine Verbindungsgerade $y_i = f_i(x) \vee f_i(x')$ vorhanden ist. Für jeden anderen Index i wählen wir einen Index j mit $j \geqq i$ und $j \geqq i_0$ und setzen $y_i = g_i^j(y_j)$, was von j nicht mehr abhängt. Auf diese Weise wird eine Familie (y_i) von Geraden $y_i \in Y_i$ definiert, so daß $y_i = g_i^k(y_k)$ für jedes Indexpaar (i, k) mit $i \leqq k$ ist. Aufgrund der kennzeichnenden Eigenschaft eines inversen Limes (2^0 in (1.7)) gibt es nun genau eine Gerade $y \in Y$ mit $g_i(y) = y_i$ für alle $i \in I$, und es ist klar, daß diese Verbindungsgerade von x und x' ist.

In (2.1) (Korollar 4) wird sich ergeben, daß für jedes $x \in X$ und jeden Index i das Bild $g_i(E(x))$ dicht ist in dem Büschel $E_i(f_i(x))$, weil $f_i(X)$ dicht in X_i und $g_i(Y)$ dicht in Y_i ist. Indem man dies noch dualisiert, ergibt sich dann leicht, daß sogar die Bildstrukturen $((f_i \times g_i)(E), f_i(X), g_i(Y))$ alle geschlossen sind.

(1.10) *Beispiel und Anmerkungen.* Wir definieren rekursiv eine Folge $(\Gamma_n, y_n)_{n \geqq 0}$ von diskreten projektiven Ebenen $\Gamma_n = (E_n, X_n, Y_n)$ mit ausgezeichneten Geraden $y_n \in Y_n$ und eine Folge von Morphismen $\sigma_n^{n+1} : \Gamma_{n+1} \to \Gamma_n$ wie folgt:

1^0 $\Gamma_0 = (E_0, X_0, Y_0)$ sei irgendeine diskrete projektive Ebene und $y_0 \in Y_0$ irgendeine Gerade von Γ_0.

2^0 Ist (Γ_n, y_n) bereits definiert, so sei Γ_{n+1} die freie Ebenenerweiterung ([8], 1.3) der Inzidenzstruktur $\Gamma_n' = (E_n', X_n', Y_n')$ mit $X_n' = X_n$, $Y_n' = Y_n - \{y_n\}$, $E_n' = E_n \cap (X_n' \times Y_n')$. Diese enthält Γ_n' als Unterstruktur. Sei σ_n^{n+1} irgendein Morphismus $\Gamma_{n+1} \to \Gamma_n$, der in Γ_n' die Identität induziert; ein solcher existiert und ist notwendig surjektiv (loc. cit.). Als y_{n+1} nehmen wir irgendeine Gerade aus Y_{n+1} mit $\sigma_n^{n+1}(y_{n+1}) = y_n$.

Setzen wir für $m > n$ noch $\sigma_n^m = \sigma_n^{n+1} \circ \sigma_{n+1}^{n+2} \circ \cdots \circ \sigma_{m-1}^m$ und $\sigma_n^n = 1$ für $n \geqq 0$, so haben wir offenbar ein inverses System, das den Voraussetzungen von (1.9) genügt. Der Limes $\Gamma = \lim \Gamma_n$ ist also eine vollständige uniforme projektive Ebene (mit metrisierbaren uniformen Strukturen).

Nimmt man für Γ_0 bereits eine freie projektive Ebene ([4] und [8], loc. cit.), so enthält keines der Γ_n eine endliche geschlossene Unterstruktur ([8], p. 18); dasselbe gilt dann auch für Γ, denn zu jeder endlichen Unterstruktur von Γ gibt es einen Index n, so daß die kanonische Projektion $\sigma_n : \Gamma \to \Gamma_n$ die gegebene Unterstruktur isomorph auf eine Unterstruktur von Γ_n abbildet. (Wir übergehen die Details, weil wir hiervon nicht weiter Gebrauch machen wollen). Daraus kann man folgern, daß in Γ jeder allgemeine nichttriviale offene Schließungssatz ([8], 1.4) verletzt ist. Dies ist eines der typischen negativen Resultate, wie man sie in der Theorie der projektiven Ebenen antrifft (z. B. hat JAKOB JOUSSEN [13] kürzlich einen analogen Satz über angeordnete Ebenen bewiesen), und zeigt, daß ohne Verschärfung der topologischen oder der inzidenzgeometrischen Voraussetzungen interessante Wechselwirkungen zwischen den beiden Strukturgattungen nicht erwartet werden können.

2. Uniforme Ebenen. Beispiele

In diesem Paragraphen stellen wir die Verbindung zur Theorie der topologischen projektiven Ebenen her und zeigen, daß die klassischen Beispiele topologischer Ebenen sowie einige andere uniforme Ebenen sind.

(2.1) Satz. *Sei (E,X,Y) eine uniforme Inzidenz, U eine Nachbarschaft in X. Dann ist die Abbildung $(x_1, x_2)\to x_1 \vee x_2$ gleichmäßig stetig im Durchschnitt ihres Definitionsbereiches mit $(X\times X)-U$.*

Allgemeiner genügt jede uniforme Präinzidenz (E,X,Y) der folgenden Bedingung:

(UE) *Zu Nachbarschaften U in X und V in Y gibt es stets eine Nachbarschaft U_1 in X, derart, daß gilt:*

(i) *Aus $(x_{ik}, y_k)\in E$ für $i,k=1,2$ und $(x_{11}, x_{12})\in U_1$ und $(x_{21}, x_{22})\in U_1$ folgt $(x_{11}, x_{21})\in U$ oder $(x_{12}, x_{22})\in U$ oder $(y_1, y_2)\in V$.*

Um das zu sehen, hat man lediglich (zu gegebenen U und V) U_1, V_1 so zu wählen, daß (UI'), (**), erfüllt ist, und U_1 symmetrisch zu nehmen. Unter den Voraussetzungen von (i) ist dann nämlich einerseits

$$(x_{11}, y_1), (x_{21}, y_1)\in E \quad \text{und} \quad (x_{11}, y_2), (x_{21}, y_2)\in E\circ U_1,$$

wegen $E\subset E\circ U_1\subset V_1\circ E\circ U_1$ also schon $(x_{11}, x_{21})\in U$ oder $(y_1, y_2)\in V$, und andererseits (aufgrund der Symmetrie von U_1)

$$(x_{12}, y_2), (x_{22}, y_2)\in E \quad \text{und} \quad (x_{12}, y_1), (x_{22}, y_1)\in E\circ U_1,$$

also auch $(x_{12}, x_{22})\in U$ oder $(y_1, y_2)\in V$.

Wenn X und Y separiert, also Verbindungsgeraden eindeutig sind, besagt (UE) nichts anderes als die Behauptung des Satzes. Die zu (UE) duale Bedingung, die natürlich ebenfalls in jeder uniformen Präinzidenz erfüllt ist, wird im folgenden als (UE*) zitiert werden.

Korollar 1. *Jede uniforme (projektive) Ebene ist eine topologische (projektive) Ebene.*

Das ergibt sich sofort aus dem Satz und seiner Dualisierung, wenn man beachtet, daß in einer uniformen Ebene Punktraum und Geradenraum nach Voraussetzung separiert sind und daß die abgeschlossenen Nachbarschaften jeweils eine Basis der uniformen Struktur bilden.

Korollar 2. *Sei (E,X,Y) eine uniforme projektive Ebene. Für jeden Punkt $x_0\in X$ und jede Nachbarschaft U in X ist die Abbildung $x\to x\vee x_0$ von $X-U(x_0)$ in das Büschel $E(x_0)$ gleichmäßig stetig.*

Korollar 3. *In einer uniformen projektiven Ebene (E,X,Y) ist jede Projektivität einer Punktreihe auf eine Punktreihe oder ein Geradenbüschel gleichmäßig stetig.*

Nach (0.6) ist der Inzidenzgraph E maximal, nach Satz (1.3), b), ist er also abgeschlossen. Daher sind auch die Büschel $E(x)$ $(x\in X)$ und dual dazu die Punktreihen $P(y)$ $(y\in Y)$ abgeschlossen, und es gibt zu jedem Paar $(x_0, y_0)\in (X\times Y)-E$ eine Nachbarschaft U in X mit $U(x_0)\cap U(P(y_0))=\emptyset$. Daraus folgt nun mit Korollar 2 sofort, daß die Perspektivität der Punktreihe $P(y_0)$ auf das Geradenbüschel $E(x_0)$, d.h. die Abbildung $x\to x\vee x_0$ $(x\in P(y_0))$ gleichmäßig stetig ist. Weil eine Projektivität per definitionem aus solchen Perspektivitäten zusammengesetzt ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Korollar 4. *Sei (E', X', Y') eine uniforme (projektive) Ebene und (E,X,Y) eine Unterstruktur, in der je zwei verschiedene Punkte eine Verbindungsgerade und je zwei verschiedene Geraden einen Schnittpunkt haben. Ist X dicht in X' und Y dicht in Y', so ist (E,X,Y) selbst eine uniforme (projektive) Ebene.*

Dies ist die im Beweis von (1.9) verwendete Bemerkung und ergibt sich mit Korollar 1 aus dem folgenden Hilfssatz:

Lemma. *Sei (E', X', Y') eine topologische Ebene und (E,X,Y) eine Unterstruktur mit der folgenden Eigenschaft:*

(D) *Ist $y\in Y$, $y'\in Y'$ und $y\neq y'$, so gibt es in jeder Umgebung von y' eine Gerade $y_1\in Y$ mit $y_1\neq y$ und $y\wedge y_1\in X$.*

Dann ist für jedes $y\in Y$ die Punktreihe $\overset{-1}{E}(y)$ dicht in der Punktreihe $\overset{-1}{E'}(y)$.

Beweis. Sei $y\in Y$, $x\in\overset{-1}{E'}(y)$. Weil (E', X', Y') regulär ist, gibt es eine Gerade $y'\in E'(x)$ mit $y\neq y'$. Aufgrund der Stetigkeit des Schneidens und der Separiertheit von Y' gibt es dann zu jeder Umgebung U von x eine Umgebung V von y' mit $y\notin V$ und derart, daß der Schnittpunkt einer Geraden aus V mit y stets in U liegt. Nach Voraussetzung liegt aber in jeder solchen Umgebung V eine Gerade aus Y, deren Schnittpunkt mit y zu X, also zu $\overset{-1}{E}(y)\cap U$ gehört; daher die Behauptung.

Der folgende Satz ist eine teilweise Umkehrung von (2.1) und wird in § 3 noch verschärft werden.

(2.2) Satz. *Es seien X, Y uniforme Räume und E eine nicht leere Teilmenge von $X\times Y$, für welche die Bedingung* (UE) *von* (2.1) *erfüllt ist, und derart, daß gilt:*

(S) *Zu jeder Nachbarschaft U in X gibt es eine Nachbarschaft V in Y mit $V\circ E\subset E\circ U$.*

Dann ist das Tripel (E,X,Y) eine uniforme Präinzidenz.

Unter der Voraussetzung (S) kann man nämlich zu jeder Nachbarschaft U_1 in X eine Nachbarschaft U in X mit $\overset{2}{U}\subset U_1$ und dann eine Nachbarschaft V in Y mit $V\circ E\subset E\circ U$ wählen, so daß man $V\circ E\circ U\subset E\circ\overset{2}{U}\subset E\circ U_1$ hat. Daher genügt es, unter Voraussetzung von (UE) die folgende Aussage zu beweisen:

(UI 1) *Zu Nachbarschaften U in X und V in Y gibt es stets eine Nachbarschaft U_1 in X, derart, daß gilt:*
Aus $(x_i, y_k) \in E \circ U_1$ für $i,k=1,2$ folgt $(x_1, x_2) \in U$ oder $(y_1, y_2) \in V$.

Seien U und V gegeben. Man wählt zunächst eine Nachbarschaft U' in X mit $\overset{3}{U'} \subset U$ und dann eine symmetrische Nachbarschaft $U_1 \subset U'$, derart, daß (UE), (i), mit U' und $\overset{2}{U_1}$ statt U und U_1 erfüllt ist; das ist nach Voraussetzung möglich. Hat man nun $(x_i, y_k) \in E \circ U_1$ für $i,k=1,2$, so gibt es Punkte u_{ik} in X mit

$$(x_i, u_{ik}) \in U_1 \quad \text{und} \quad (u_{ik}, y_k) \in E \qquad \text{für } i,k=1,2.$$

Dann ist notwendig $(u_{11}, u_{12}) \in \overset{2}{U_1}$ und $(u_{21}, u_{22}) \in \overset{2}{U_1}$, also aufgrund der Wahl von U_1:

$$(u_{11}, u_{21}) \in U' \quad \text{oder} \quad (u_{12}, u_{22}) \in U' \quad \text{oder} \quad (y_1, y_2) \in V.$$

In den ersten beiden Fällen ist aber $(x_1, x_2) \in U_1 \circ U' \circ U_1 \subset \overset{3}{U'}$, also $(x_1, x_2) \in U$, q.e.d.

Wir wenden dies Kriterium in zwei Fällen an, nämlich auf kompakte Ebenen und Ebenen über bewerteten Körpern.

(2.3) Satz. *Sei (E,X,Y) eine kompakte projektive Ebene (d.h. eine topologische projektive Ebene, in der X und Y kompakt sind). Versieht man X und Y je mit der einzigen uniformen Struktur, welche mit der Topologie verträglich ist, so wird (E,X,Y) eine uniforme projektive Ebene.*

Die offenen Umgebungen der Diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ bilden eine Basis des Nachbarschaftenfilters von X. Für eine offene Umgebung U von Δ_X ist aber das Komplement $(X \times X) - U$ kompakt; daher ist die Bedingung (UE) erfüllt. Um die Bedingung (S) zu verifizieren, benötigen wir einen Hilfssatz:

Lemma. *Sei (E,X,Y) eine topologische projektive Ebene. Der Inzidenzgraph E ist mit der vom Produktraum $X \times Y$ induzierten Topologie und der Projektion $p = \mathrm{pr}_1 | E: E \to X$ (bzw. $q = \mathrm{pr}_2 | E: E \to Y$) ein lokal trivialer Faserraum über X (bzw. Y). Das heißt E hat bezüglich jeder der beiden Abbildungen lokale Produktstruktur, und insbesondere sind p und q offen.*

Hiermit ergibt sich die Behauptung folgendermaßen:

In einer kompakten projektiven Ebene (E,X,Y) sind die Fasern $\overset{-1}{p}(x)$ $(x \in X)$ kompakt, denn die Geradenbüschel $E(x)$ sind als abgeschlossene Teilmengen von Y kompakt, und die Faser $\overset{-1}{p}(x)$ ist nichts anderes als das Bild von $E(x)$ bei der Injektion $y \to (x,y)$ von $E(x)$ in $X \times Y$. Daher ist E kompakt und insbesondere abgeschlossen in $X \times Y$. Sei nun U eine offene Umgebung von Δ_X in $X \times X$. Der Graph $E \circ U$ ist das Bild von $(U \times Y) \cap (X \times E)$ bei der Abbildung $1_X \times q$ von $X \times E$ in $X \times Y$, die aufgrund des Lemmas offen ist; er ist daher eine offene Umgebung von E in $X \times Y$. Entsprechend schließt man aus

der Stetigkeit von $1_X \times q$ und der Kompaktheit von E, daß für jede abgeschlossene, also kompakte Nachbarschaft V in Y der Graph $V \circ E$ eine kompakte, also abgeschlossene Umgebung von E in $X \times Y$ ist. Bezeichnet β die Menge der abgeschlossenen Nachbarschaften in Y, so hat man also

$$\text{(i)} \qquad \bigcap_{V \in \beta} \overline{VE} = \bigcap_{V \in \beta} VE = \bar{E} = E .$$

Wäre nun $V \circ E \not\subset E \circ U$ für eine offene Nachbarschaft U in X und alle $V \in \beta$, so würden die Mengen $V \circ E \cap \complement(E \circ U)$, die alle abgeschlossen sind, eine Filterbasis auf dem kompakten Teilraum $\complement(E \circ U)$ von $X \times Y$ bilden. Diese hätte einen Häufungspunkt (x,y), der einerseits zu $\complement(E \circ U)$ und andererseits zu E gehören müßte (wegen (i)). Das ist aber unmöglich, weil $E \circ U$ eine Umgebung von E ist. Daher gibt es in der Tat ein $V \in \beta$ mit $V \circ E \subset E \circ U$, q.e.d.

Beweis des Lemmas. Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ gibt es eine nicht mit ihm inzidierende Gerade $y_0 \in Y$. Die affine Punktmenge $A = X - P(y_0)$ ist dann eine offene Umgebung von x_0 ([8], p. 263). Das Urbild $\bar{p}^{-1}(A)$ besteht aus den Paaren (x,y) von $X \times Y$, für welche $(x,y_0) \notin E$ ist, und wird durch die Abbildung φ mit

$$\text{(ii)} \qquad \varphi(z) = \big(p(z), q(z) \wedge y_0\big), \qquad z \in \bar{p}^{-1}(A),$$

umkehrbar eindeutig und stetig auf $A \times P(y_0)$ abgebildet. Dabei ist $p = \pi \circ \varphi$, wenn π die Projektion von $A \times P(y_0)$ auf A bezeichnet; und da die Umkehrabbildung $(x_1, x_2) \to (x_1, x_1 \vee x_2)$ von φ ebenfalls stetig ist, ist φ sogar ein Homöomorphismus. Daher die Behauptung für p; für q ergibt sie sich dual dazu.

Anmerkung. Zu den kompakten projektiven Ebenen gehören die klassischen Ebenen über den reellen Kompositionsalgebren ***R, C, H, Cay*** (Algebra der reellen Zahlen, komplexen Zahlen, Quaternionen, Oktaven) und allgemeiner die Ebenen über lokal kompakten Schiefkörpern; ferner die von SALZMANN ([*11*], [*12*]) untersuchten und weitgehend klassifizierten ebenen Ebenen.

(2.4) Ebenen über bewerteten Körpern. Sei K ein (kommutativer) Körper, $V = K^3$ der dreidimensionale K-Vektorraum der Tripel $x = (x_0, x_1, x_2)$ mit $x_i \in K$, R der Äquivalenzgraph, der aus den Paaren (x,y) mit $x, y \in V^* = V - \{0\}$ besteht, zu denen es ein $s \in K^* = K - \{0\}$ mit $y = s\,x$ gibt, und sei $\varphi\colon V^* \to V^*/R$ die kanonische Abbildung. Bekanntlich ist das Tripel (E, X, Y) mit $X = Y = V^*/R$ und

$$E = \{(\varphi(x), \varphi(y)) \mid x, y \in V^* \text{ und } \sum_i x_i\, y_i = 0\}$$

eine projektive Ebene, die Ebene über K. Sei nun Γ eine (total) angeordnete additive abelsche Gruppe und $v\colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung von K, d.h. $v(0) = \infty$, $v(1) = 0$, $v(x\,y) = v(x) + v(y)$ und $v(x+y) \geqq \inf(v(x), v(y))$ für $x, y \in K$.

Wir nehmen an, daß $v(K^*)=\Gamma \neq \{0\}$ (also insbesondere v nicht trivial) und K für v vollständig sei. V wird topologischer Vektorraum über K, wenn man die Familie der Untergruppen

(i) $$V_\alpha=\{x\in V \mid \inf_i v(x_i)>\alpha\}$$

mit $\alpha\in\Gamma$ als Umgebungsbasis von $0\in V$ nimmt. Setzen wir nun

(ii) $$M=\{x\in V \mid \inf_i v(x_i)=0\},$$

so hat jede Restklasse mod R ein Element in M. Denn für $x\in V^*$ ist

$$\inf_i v(x_i)<\infty,$$

und es gibt ein $k\in\{0,1,2\}$ mit

$$v(x_k)=\inf_i v(x_i).$$

Wählt man $s=x_k^{-1}$, so wird für $y=s\,x$:

$$v(y_j)=v(s\,x_j)=v(x_j)-\inf_i v(x_i) \qquad \text{für } j=0,1,2,$$

also

$$\inf_j v(y_j)=0.$$

Demnach kann $X=Y$ mit M/R_∞ identifiziert werden, wenn R_∞ die von R in M induzierte Äquivalenzrelation bezeichnet. Die kanonische Abbildung $\pi: M\to X$ ist dann die Einschränkung von φ auf M. Übrigens folgt im Falle $x,y\in M$ aus $y=s\,x$ stets $v(s)=0$, so daß die Restklassen mod R_∞ gerade die Bahnen der Einheitengruppe des Bewertungsrings von v in M sind.

Wir bezeichnen nun für jedes nicht negative $\alpha\in\Gamma$ mit R_α die Menge der Paare $(x,y)\in M\times M$, zu denen es ein $s\in K$ mit

$$v(s)=0 \quad \text{und} \quad \inf_i v(y_i-s\,x_i)>\alpha$$

gibt. Diese R_α sind Äquivalenzgraphen mit den Eigenschaften:

(iii) $$R_\beta\subset R_\alpha \qquad \text{für } \beta\geqq\alpha\geqq 0,$$

(iv) $$\bigcap_{\alpha\geqq 0} R_\alpha=R_\infty.$$

In der Tat sind Reflexivität und Symmetrie der R_α selbstverständlich, da $v(1)=0$ ist und $v(s)=0$ stets $s\neq 0$ und $v(s^{-1})=0$ nach sich zieht. Hat man aber $v(y_i-s\,x_i)>\alpha$ und $v(z_i-t\,y_i)>\alpha$ für $i=0,1,2$ mit $s,t\in K$, $v(s)=v(t)=0$, so

ist $v(t\,y_i - t\,s\,x_i) = v(y_i - s\,x_i)$ und daher

$$v(z_i - t\,s\,x_i) = v(z_i - t\,y_i + t\,y_i - t\,s\,x_i) \geqq \inf\big(v(z_i - t\,y_i),\, v(y_i - s\,x_i)\big) > \alpha$$

für $i = 0, 1, 2$; wegen $v(t\,s) = v(t) + v(s) = 0$ ergibt das die Transitivität von R_α. Die Beziehung (iii) bedarf keines Beweises. Hat man schließlich $x, y \in M$ und existiert für jedes $\alpha \geqq 0$ ein $s \in K$ mit

$$v(s) = 0 \quad \text{und} \quad \inf_i v(y_i - s\,x_i) > \alpha,$$

so liegen in jeder Umgebung des Punktes y (in M) Punkte des eindimensionalen Unterraumes Kx von V. Weil K vollständig ist, ist dieser Unterraum abgeschlossen, so daß $y \in Kx$, also $y \equiv x \bmod R_\infty$ sein muß; damit ist auch (iv) bewiesen. Man sieht, daß die R_α eine Basis einer (nicht separierten) uniformen Struktur auf M bilden; in dieser Weise fassen wir M als uniformen Raum auf. Bezeichnet man nun mit I die Menge der Paare (x, y) in $M \times M$, für die

$$\sum_i x_i\, y_i = 0$$

ist, so gilt:

Satz. *a) Das Tripel (I, M, M) ist eine uniforme Präinzidenz.*

b) Die assoziierte uniforme Inzidenz (I_s, M_s, M_s) ist als diskrete Inzidenzstruktur isomorph zu der projektiven Ebene (E, X, Y) über dem Körper K.

Wenn man als Punktmenge und Geradenmenge der Ebene über K die Menge M/R_∞ nimmt, ist der Inzidenzgraph E die Menge der Paare $(\pi(x), \pi(y))$ mit

$$(x, y) \in M \times M \quad \text{und} \quad \sum_i x_i\, y_i = 0,$$

also das Bild $(\pi \times \pi)(I)$. Wegen (iv) ist aber $i_M = \rho \circ \pi$, wobei $\rho\colon X = M/R_\infty \to M_s$ eine Bijektion ist. Da I_s mit dem Bild $(i_M \times i_M)(I)$ in $M_s \times M_s$ zu identifizieren ist, liefert also das Paar (ρ, ρ) den in b) verlangten Isomorphismus, und es bleibt nur a) zu beweisen. Dazu wiederum genügt es nach (2.2), die Bedingungen (UE) und (S) für (I, M, M) zu verifizieren.

Der Beweis wird vereinfacht durch die Bemerkung, daß (I, M, M) eine große Gruppe von Automorphismen besitzt. Dabei ist es bequem, die Elemente von V als einspaltige Matrizen aufzufassen, und die linearen Abbildungen von V in sich mit ihren Matrizen (in bezug auf die kanonische Basis von $V = K^3$) zu identifizieren. Sei G die Gruppe der Matrizen $A \in \mathrm{GL}_3(K)$, die M invariant lassen (d.h. mit $Ax \in M$ für alle $x \in M$). Da die Vektoren der kanonischen Basis von V zu M gehören, gilt für eine Matrix $A = (a_{ik}) \in G$ stets

$$\inf_i v(a_{ik}) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2),$$

insbesondere $v(a_{ik}) \geqq 0$ für $i,k=0, 1, 2$ und daher auch $v(\det A) \geqq 0$. Dasselbe muß aber auch für die inverse Matrix A^{-1} gelten, so daß man $v(\det A) = v(\det A^{-1}) = 0$ erhält und $v(A_{ik}) \geqq 0$ $(i,k=0, 1, 2)$, wenn A_{ik} das algebraische Komplement von a_{ik} in A bezeichnet. Sei umgekehrt A eine (3×3)-Matrix über K mit den Eigenschaften

$$\text{(v)} \qquad v(\det A)=0, \quad v(a_{ik}) \geqq 0, \quad v(A_{ik}) \geqq 0 \qquad (i,k=0,1,2).$$

Aus der ersten Bedingung folgt, daß $\det A \neq 0$ ist, also $A \in \mathrm{GL}_3(K)$. Setzt man $x' = Ax$ für $x \in V$, so folgt aus der zweiten Bedingung nach kurzer Rechnung

$$\inf_i v(x_i') \geqq \inf_i v(x_i),$$

d.h., daß A die Werte vergrößert. Aber aus der ersten und der letzten Bedingung in (v) erhält man für die Koeffizienten $b_{ik} = (\det A)^{-1} A_{ki}$ der zu A inversen Matrix ebenfalls $v(b_{ik}) \geqq 0$, so daß auch A^{-1} die Werte vergrößert. Es folgt, daß statt der obigen Ungleichung schärfer

$$\text{(vi)} \qquad \inf_i v(x_i') = \inf_i v(x_i), \qquad x' = Ax, \ x \in V$$

gilt, insbesondere, daß A zu G gehört, und darüber hinaus:

$$\text{(vii)} \qquad (x, y) \in R_\alpha \Rightarrow (Ax, Ay) \in R_\alpha \qquad (\alpha \in \Gamma, \ \alpha \geqq 0).$$

Jede der Eigenschaften (v), (vi) ist also charakteristisch für die Matrizen $A \in G$, und diese bilden nicht nur M in sich ab, sondern lassen auch die Basis $\{R_\alpha\}$ der uniformen Struktur von M elementweise invariant. Nun ist (v) unempfindlich gegen Transposition, d.h. mit $A \in G$ hat man auch $A^T \in G$ und folglich $A^* = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \in G$. Daher wird G (übrigens treu) als Automorphismengruppe der Korrespondenz (I, M, M) dargestellt, wenn man jedem $A \in G$ das Paar (f_A, g_A) der durch $f_A(x) = Ax$ und $g_A(y) = A^* y$ definierten Abbildungen von M auf sich zuordnet. In bezug auf diese Darstellung gilt nun:

Lemma. *G ist transitiv auf I.*

Wir nehmen dies zunächst für bewiesen und zeigen:

$$\text{(viii)} \qquad R_\alpha \circ I = I \circ R_\alpha \qquad \text{für } \alpha \in \Gamma, \ \alpha \geqq 0.$$

Für jedes nicht negative $\alpha \in \Gamma$ sei R_α' die Menge der Paare

$$(x, y) \in M \times M \quad \text{mit} \quad \inf_i v(y_i - x_i) > \alpha.$$

Die R'_α sind Äquivalenzgraphen, und man sieht sofort, daß gilt:

(ix) $$R'_\alpha \circ R_\infty = R_\alpha = R_\infty \circ R'_\alpha, \quad I \circ R_\infty = I = R_\infty \circ I.$$

Daher ist (viii) äquivalent mit

(x) $$R'_\alpha \circ I = I \circ R'_\alpha \quad \text{für } \alpha \in \Gamma,\ \alpha \geqq 0,$$

und es genügt, dies zu beweisen. Sei also $(x,y) \in I \circ R'_\alpha$. Dann gibt es ein $x' \in M$ mit $(x,x') \in R'_\alpha$ und $(x', y) \in I$, also

$$v(x_i - x'_i) > \alpha \quad \text{für } i = 0,1,2 \quad \text{und} \quad \sum_i x'_i y_i = 0.$$

Aufgrund des Lemmas darf man annehmen, daß $y=(1, 0, 0)$ und $x'=(0, 1, 0)$ ist (wo wir die Vektoren der Einfachheit halber wieder als Zeilen schreiben). Nun ist nach Voraussetzung

$$v(x_0 - x'_0) = v(x_0) > \alpha, \quad v(x_1 - x'_1) = v(x_1 - 1) > \alpha$$

und

$$v(x_2 - x'_2) = v(x_2) > \alpha, \quad \text{also} \quad 0 = \inf_i v(x_i) = v(x_1)$$

und daher $x_1 \neq 0$. Setzt man nun $y' = (1, -x_0 x_1^{-1}, 0)$, so ist offenbar $(x, y') \in I$ und

$$\inf_i v(y_i - y'_i) = v(y_1 - y'_1) = v(x_0 x_1^{-1}) = v(x_0) > \alpha,$$

d.h. $(y', y) \in R'_\alpha$ und folglich $(x,y) \in R'_\alpha \circ I$. Damit ist die Behauptung bewiesen und insbesondere die Bedingung (S) für (I, M, M) nachgeprüft.

Um die Bedingung (UE) für (I, M, M) zu verifizieren, genügt es (mit unseren jetzigen Bezeichnungen), die folgende Aussage zu beweisen:

(xi) Sind a, x, x', y, y' Vektoren aus M mit (a,y), (x,y), (a,y'), $(x', y') \in I$, $(a,x) \notin R_\beta$ und $(x, x') \in R_{\alpha+\beta}$ $(\alpha, \beta \in \Gamma,\ \alpha, \beta \geqq 0)$, so ist $(y, y') \in R_\alpha$.

Denn weil zu $z, z' \in M$ stets ein $w \in M$ mit $(z,w) \in I$ und $(z', w) \in I$ vorhanden ist, liefert eine zweifache Anwendung dieser Spezialisierung die allgemeine Behauptung. Beim Beweis von (xi) darf man aufgrund des Lemmas annehmen, daß $a=(1, 0, 0)$ und $y=(0, 0, 1)$ ist. Da a und x nach Voraussetzung insbesondere linear unabhängig sind, hat man dann notwendig $x_2=0$, $x_1 \neq 0$ und $\inf(v(x_0), v(x_1))=0$, so daß es genügt, die beiden Fälle $x_0=1$ und $x_1=1$ zu betrachten. Nun ist wegen $(a,x) \notin R_\beta$ für $s \in K$ mit $v(s)=0$ stets

1^0 $$\inf\big(v(s - x_0), v(x_1)\big) \leqq \beta,$$

und wegen $(x, x') \in R_{\alpha+\beta}$ ist

$$2^0 \qquad v(x_0 - x_0') > \alpha+\beta, \qquad v(x_1 - x_1') > \alpha+\beta, \qquad v(x_2') > \alpha+\beta.$$

Im Falle $x_0 = 1$ folgt aus 1^0: $0 \leqq v(x_1) \leqq \beta$, weil sich sonst mit $s=1$ ein Widerspruch ergäbe; aus 2^0 erhält man dann $v(x_1') = v(x_1)$, weil sonst $v(x_1 - x_1') = \inf(v(x_1), v(x_1')) \leqq \beta$ sein müßte. Im Falle $x_1 = 1$ folgt aus 2^0 direkt $v(x_1') = 0$, weil sonst $v(x_1 - x_1') = 0$ wäre. In jedem Fall hat man $x_1' \neq 0$. Aus $(a, y') \in I$ und $(x', y') \in I$ ergibt sich nun $y_0' = 0$ und $x_1' y_1' + x_2' y_2' = 0$, also $y_1' = -x_1'^{-1} x_2' y_2'$ und damit

$$v(y_1') = v(x_2') - v(x_1') + v(y_2') > \alpha+\beta-\beta+v(y_2') \geqq v(y_2').$$

Deshalb wird

$$v(y_2') = \inf_i v(y_i') = 0.$$

Setzt man nun $t = y_2'^{-1}$, so erhält man schließlich:

$$\inf_i v(y_i - t\, y_i') = v(y_1 - t\, y_1') = v(x_1'^{-1} x_2') = v(x_2') - v(x_1') > \alpha,$$

wegen $v(t) = 0$ also $(y, y') \in R_\alpha$, q.e.d.

Beweis des Lemmas. Durch Zusammensetzen von Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{20} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v(a_{00}) = 0, \qquad v(a_{20}) \geqq 0$$

und Permutationsmatrizen, die ja sämtlich zu G gehören, erkennt man leicht, daß G transitiv auf M ist. Daher genügt es zu zeigen, daß zu jedem $y \in M$ mit $y_0 = 0$ eine Matrix $A \in G$ von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

existiert, derart, daß die letzte Spalte von A^* gleich y ist. Wenn man noch die Bedingung $\det A = 1$ hinzufügt, wird aber

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & -a_{21} \\ 0 & -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Im Falle $v(y_2) = 0$ kann man also $a_{11} = y_2$, $a_{21} = -y_1$, $a_{22} = y_2^{-1}$, $a_{12} = 0$ nehmen, um eine Matrix zu erhalten, welche alle verlangten Eigenschaften und

überdies die Determinante 1 hat. Im Falle $v(y_2)>0$ ist $v(y_1)=0$, und man nimmt: $a_{11}=y_2$, $a_{21}=-y_1$, $a_{12}=-y_1^{-1}$, $a_{22}=0$

Anmerkung. Mit Hilfe der Relation (ix) ist nicht schwer zu sehen, daß die Bijektion $\rho: M/R_\infty \to M_s$ ein Homöomorphismus wird, wenn man auf M/R_∞ die Quotiententopologie der von V in M induzierten Topologie nach R_∞ nimmt. Das Ergebnis besagt daher, daß die topologische projektive Ebene über einem bewerteten Körper (in einer mit der Inzidenzstruktur im Sinne von (1.1) verträglichen Weise) uniformisierbar ist. Wir gehen jedoch nicht weiter auf dieses Beispiel ein, sondern schließen diesen Paragraphen mit zwei Sätzen über die Vervollständigung uniformer Fastebenen.

(2.5) Satz. *Die Vervollständigung einer uniformen Fastebene ist eine uniforme Ebene.*

Sei (E,X,Y) eine uniforme Fastebene; wir betrachten sie als Unterstruktur von $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$. Aufgrund der Regularität von (E,X,Y), ist leicht zu sehen, daß es in X drei verschiedene Punkte x_0, x_1, x_2 gibt, so daß die Verbindungsgeraden $x_0 \vee x_1$ und $x_0 \vee x_2$ existieren und verschieden sind. Es ist klar, daß die x_i dann auch in der Vervollständigung $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$, die nach (1.5) eine uniforme Inzidenz ist, nicht auf einer Geraden liegen. Es genügt also zu zeigen, daß in $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$ je zwei verschiedene Punkte eine Verbindungsgerade haben, denn zusammen mit der Dualisierung und der Existenz eines nicht ausgearteten Dreiecks liefert das auch die Regularität von $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$. Wir zeigen nun etwas allgemeiner:

Lemma. *Sei (E,X,Y) eine uniforme Inzidenz. Wenn die Menge der Paare verbindbarer Punkte in $(X\times X)-\Delta_X$ dicht ist, so besitzen in der Vervollständigung $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$ je zwei verschiedene Punkte eine Verbindungsgerade.*

Beweis. Seien ξ_1, ξ_2 zwei verschiedene minimale Cauchy-Filter auf X. Wird die Nachbarschaft U in X so gewählt, daß $(\xi_1, \xi_2)\notin \tilde{U}$ ist, so folgt aus $A_i\in\xi_i$ und $A_i\times A_i\subset U$ für $i=1,2$ stets $A_1\times A_2\subset(X\times X)-U$. Durchläuft also A_1 (bzw. A_2) die Mengen von ξ_1 (bzw. ξ_2), welche klein von der Ordnung U sind, so bilden die Mengen $A_1\times A_2$ eine Cauchy-Filterbasis auf $(X\times X)-U$. Da aber ξ_1 und ξ_2 je eine Basis aus offenen Mengen besitzen, sind aufgrund der Voraussetzung die Mengen $A_1\vee A_2$ (Menge der Verbindungsgeraden von Punkten aus A_1 mit Punkten aus A_2) alle nicht leer; nach Satz (2.1) bilden sie also eine Cauchy-Filterbasis auf Y. Der von dieser Basis erzeugte Filter enthält genau einen minimalen Cauchy-Filter η, und es ist klar, daß man $(\xi_i,\eta)\in\hat{E}$ für $i=1,2$ hat, daß also η Verbindungsgerade von ξ_1 und ξ_2 ist.

Es ist übrigens klar, daß die Vervollständigung nicht ausgeartet ist, wenn die Fastebene (E,X,Y) affin ist.

(2.6) Satz. *Sei (E,X,Y) eine affine uniforme Fastebene, derart, daß die Injektionen $j_X: X\to\hat{X}$, $j_Y: Y\to\hat{Y}$ offene Abbildungen sind. Dann gibt es in $\hat{E}$ genau eine Fahne (x_∞, y_∞), so daß $j_X(X)=\hat{X}-\bar{\hat{E}}^1(y_\infty)$ und $j_Y(Y)=\hat{Y}-\hat{E}(x_\infty)$*

ist. Das heißt, bei Vervollständigung von (E,X,Y) werden genau die „uneigentlichen" Punkte und Geraden hinzugefügt.

Sei (E,X,Y) eine affine uniforme Fastebene, die den Voraussetzungen des Satzes genügt. Der Graph E ist nach (0.6) maximaler Inzidenzgraph in $X \times Y$, nach Satz (1.3) also abgeschlossen in $X \times Y$. Identifiziert man nun (was bequem und wegen der Separiertheit von X und Y erlaubt ist) X mit $j_X(X)$ und Y mit $j_Y(Y)$, so ist $E=\hat{E}\cap(X\times Y)$, d.h. (E,X,Y) wird Unterstruktur der Vervollständigung $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$. Diese ist nach (2.5) eine projektive Ebene, und auf sie sollen sich im folgenden die Termini „Verbindungsgerade", „Punktreihe" usw. beziehen.

Zwei Geraden aus Y sind parallel, wenn sie einander gleich sind oder ihr Schnittpunkt zu $X_\infty=\hat{X}-X$ gehört; zwei Punkte aus X sind konfluent, wenn sie einander gleich sind oder ihre Verbindungsgerade zu $Y_\infty=\hat{Y}-Y$ gehört. Es ist klar, daß die auf diese Weise erklärten Relationen in X (bzw. Y) reflexiv und symmetrisch sind.

Es wird nun zunächst gezeigt, daß jede Punktreihe $P=P(y)$ mit $y\in Y$ genau einen Punkt von X_∞ enthält. Dazu wählen wir einen Punkt $x\in X$ mit $(x,y)\notin E$ und bezeichnen mit y_0 die zu y parallele Gerade (in Y) durch x und mit x_0 den zu x konfluenten Punkt (in X) auf Y. Dann ist $y_0\neq y$, und der Schnittpunkt $a=y\wedge y_0$ gehört zu $P\cap X_\infty$, so daß nur die Eindeutigkeit zu beweisen bleibt. Sei $b\in P\cap X_\infty$ (also $b\neq x$) und $y_1=x\vee b$. Nach Voraussetzung gibt es eine Umgebung U von x in $\hat{X}$, die x_0 nicht enthält und ganz in X liegt. Wegen der Stetigkeit des Schneidens gibt es weiter Umgebungen V_0, V_1 von $x\vee x_0$ in $\hat{Y}$, so daß der Schnittpunkt einer Geraden aus V_0 (bzw. V_1) mit y_0 (bzw. y_1) stets in U liegt; sei $V=V_0\cap V_1$. Dann kann wegen der Stetigkeit des Verbindens eine Umgebung $U'\subset U$ von x so gewählt werden, daß Verbindungsgeraden von Punkten aus U' mit x_0 zu V gehören. Nach Voraussetzung gibt es in U' einen Punkt u mit $u\vee x_0\in Y$, und für einen solchen gehört der Schnittpunkt $u_1=(u\vee x_0)\wedge y_1$ zu U, also zu X. Da die Gerade $x\vee x_0$ nicht zu Y gehört, ist dann $u_1\neq x$, folglich $y_1=x\vee u_1\in Y$. Da aber y_0 die einzige Parallele zu y durch x ist, muß dann $y_1=y_0$ und daher $b=y\wedge y_1=y\wedge y_0=a$ sein. Damit ist gezeigt, daß jede Gerade aus Y mit einem und nur einem Punkt von X_∞ inzidiert; die Verbindungsgerade zweier verschiedener Punkte von X_∞ gehört also zu Y_∞. Dual dazu inzidiert jeder Punkt aus X mit genau einer Geraden von Y_∞, und der Schnittpunkt von zwei verschiedenen Geraden aus Y_∞ gehört zu X_∞. Zwei parallele Geraden aus Y müssen demnach durch denselben Punkt von X_∞ gehen, und zwei konfluente Punkte aus X müssen auf derselben Geraden von Y_∞ liegen.

Jetzt seien $v_1, v_2\in Y$ irgend zwei nicht parallele Geraden, $o=v_1\wedge v_2\in X$ ihr Schnittpunkt und $z_1\in P(v_1)\cap X_\infty$ und $z_2\in P(v_2)\cap X_\infty$ ihre uneigentlichen Punkte. Für jeden von o und z_2 verschiedenen Punkt x auf v_2 ist die Verbindungsgerade $x\vee z_1$ nichts anderes als die Parallele zu $v_1=o\vee z_1$ durch x; sie gehört also zu Y. Daher geht auch durch den uneigentlichen Punkt z_1 eine und nur eine Gerade von Y_∞, nämlich die Verbindungsgerade $y_\infty=$

$z_1 \vee z_2$, und man hat $X_\infty \subset P(y_\infty)$. Dual dazu findet man einen Punkt $x_\infty \in X_\infty$ mit $Y_\infty \subset E(x_\infty)$. Insbesondere ist dann $(x_\infty, y_\infty) \in \hat{E}$. Die einzige uneigentliche Gerade durch o geht nun auch durch x_∞, ist also gleich der Verbindungsgeraden $o \vee x_\infty$; jede andere Gerade durch o gehört zu Y und schneidet y_∞ notwendig in ihrem uneigentlichen Punkt. Daher hat man auch $P(y_\infty) \subset X_\infty$ und dual dazu $\hat{E}(x_\infty) \subset Y_\infty$, also $X_\infty = P(y_\infty)$ und $Y_\infty = \hat{E}(x_\infty)$. Trivialerweise ist die Fahne (x_∞, y_∞) dadurch eindeutig bestimmt, und es ist alles bewiesen.

Anmerkungen. a) Es wäre interessant zu wissen, ob auch die Vervollständigung einer nicht schon lokal vollständigen affinen uniformen Fastebene eine projektive Abschließung der affinen Fastebene enthält.

b) Der Satz liefert eine hinreichende Bedingung dafür, daß ein topologischer Ternärkörper (K,τ) Koordinaten-Ternärkörper einer topologischen projektiven Ebene ist: Es genügt, daß die zugehörige affine Fastebene (E, X, Y) mit $X = Y = K \times K$ und

$$E = \{((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mid x_2 = \tau(y_1, x_1, y_2)\}$$

derart (auf eine mit der Topologie verträgliche Weise) uniformisiert werden kann, daß sie eine uniforme Fastebene wird.

3. Morphismen und Zusammenhang in uniformen Ebenen

(3.1) In den folgenden Hilfssätzen sind X, Y uniforme Räume und E eine nicht leere Teilmenge von $X \times Y$; $\mathfrak{U}$ sei die uniforme Struktur von X, $\mathfrak{V}$ diejenige von Y.

Für jeden Graphen $V \subset Y \times Y$ werde

$$\text{(i)}\quad V^* = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid E(x_1) \subset V(E(x_2)) \quad \text{und} \quad E(x_2) \subset V(E(x_1))\}$$

gesetzt. Dann hat man evidenterweise:

(ii) $\Delta_X \subset V^*$ für alle $V \in \mathfrak{V}$.

(iii) $\widehat{V^{-1}}^* = V^*$ für alle $V \in \mathfrak{V}$.

(iv) Aus $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$ und $V_2 \subset V_1$ folgt $V_2^* \subset V_1^*$.

Außerdem gilt:

(v) $\widehat{V^2}^* \subset (V)^{*2}$ für alle $V \in \mathfrak{V}$,

so daß für $V, V_1 \in \mathfrak{V}$ aus $V_1^2 \subset V$ stets $\widehat{V_1^*}^2 \subset V^*$ folgt. Zusammen besagt dies, daß die V^* mit $V \in \mathfrak{V}$ eine Basis einer uniformen Struktur $\mathfrak{V}^*$ auf X bilden. Bei abgeschlossenem E handelt es sich um diejenige uniforme Struktur, welche von der Abbildung $x \to E(x)$ von X in den „*Hyperraum*" von Y (s. z. B. ISBELL

[7], p. 28) induziert wird. Wir wollen diese mit der gegebenen uniformen Struktur $\mathfrak{U}$ vergleichen.

Lemma 1. *Für jeden Graphen $V \subset Y \times Y$ ist V^* der größte der symmetrischen Graphen $G \subset X \times X$ mit $E \circ G \subset V \circ E$.*

Beweis. Zunächst ist $E \circ V^* \subset V \circ E$, denn aus $(x, x') \in V^*$ und $(x', y) \in E$ folgt per definitionem $y \in V(E(x))$, also $(x, y) \in V \circ E$. Sei andererseits $G \subset Y \times Y$ ein symmetrischer Graph mit $E \circ G \subset V \circ E$, und sei $(x_1, x_2) \in G$, also auch $(x_2, x_1) \in G$. Aus $y \in E(x_1)$, d.h. $(x_1, y) \in E$, folgt dann $(x_2, y) \in V \circ E$, d.h. $y \in V(E(x_2))$. Also hat man $E(x_1) \subset V(E(x_2))$ und entsprechend $E(x_2) \subset V(E(x_1))$, zusammen $(x_1, x_2) \in V^*$. Demnach ist $G \subset V^*$, und da V^* symmetrisch ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Man sieht nun sofort:

Lemma 2. *Genau dann ist $\mathfrak{V}^*$ gröber als $\mathfrak{U}$ (d.h. $\mathfrak{V}^* \subset \mathfrak{U}$), wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*

(S*) *Zu jedem $V \in \mathfrak{V}$ gibt es ein $U \in \mathfrak{U}$ mit $E \circ U \subset V \circ E$.*

Das ist die zur Bedingung (S) von Satz (2.2) duale Bedingung. Nicht ebenso leicht sieht man, unter welchen Bedingungen $\mathfrak{V}^*$ feiner ist als $\mathfrak{U}$; wir haben das folgende Teilresultat, das für unsere Anwendungen ausreicht:

Lemma 3. *Das Tripel (E, X, Y) habe die Eigenschaft* (UE*) *von* (2.1) *und genüge der folgenden Bedingung:*

(R*) *Es gibt ein $V \in \mathfrak{V}$ mit $\Delta_X \subset E^{-1} \circ \complement V \circ E$.*

Dann ist die uniforme Struktur $\mathfrak{V}^*$ feiner als $\mathfrak{U}$.

Ist die Inklusion in (R*) für eine Nachbarschaft V erfüllt, so erst recht für kleinere Nachbarschaften. Wenn (E, X, Y) eine Inzidenzstruktur ist, besagt die Bedingung also in Worten: Ist V eine hinreichend kleine Nachbarschaft in Y, so gibt es in jedem Geradenbüschel zwei Geraden, die nicht von der Ordnung V benachbart sind. Die Konjunktion „(R) und (R*)", wo (R) die Dualisierung von (R*) bezeichnet, ist also eine ‚‚gleichmäßige Form" der Regularitätsbedingung, und die Negation von (R) besagt: Es gibt beliebig kleine Punktreihen.

Beweis des Lemmas. Es seien (UE*) und (R*) erfüllt, U sei eine Nachbarschaft in X. Wir wählen eine symmetrische Nachbarschaft V_1 in Y, derart, daß die Inklusion in (R*) mit $\overset{3}{V}_1$ statt V erfüllt ist, und eine symmetrische Nachbarschaft $V \subset V_1$, so daß aus $(x_i, y_{ik}) \in E$ $(i, k = 1, 2)$, $(y_{11}, y_{12}) \notin V_1$, $(y_{21}, y_{22}) \notin V_1$ und (y_{11}, y_{21}), $(y_{12}, y_{22}) \in V$ stets $(x_1, x_2) \in U$ folgt; das ist aufgrund der Voraussetzung (UE*) möglich. Hat man dann $(x_1, x_2) \in V^*$, so gibt es $y_{11}, y_{12} \in E(x_1)$ mit $(y_{11}, y_{12}) \notin \overset{3}{V}_1$ und $y_{21}, y_{22} \in E(x_2)$ mit (y_{11}, y_{21}), $(y_{12}, y_{22}) \in V$. Wäre nun $(y_{21}, y_{22}) \in V_1$, so hätte man im Widerspruch zur

Wahl von y_{11} und y_{12}: $(y_{11}, y_{12}) \in V \circ V_1 \circ V \subset \overset{3}{V_1}$; also ist $(y_{21}, y_{22}) \notin V_1$. Wegen $(x_i, y_{ik}) \in E$ folgt nun $(x_1, x_2) \in U$. Damit ist gezeigt, daß $V^* \subset U$, also $U \in \mathfrak{V}^*$, ist, und das Lemma ist bewiesen.

Lemma 4. *Genügt* (E, X, Y) *den Bedingungen* (UE), (R) *und* (F) (*s.* (1.4)), *so erfüllt* (E, X, Y) *auch die Bedingung* (S*) *von Lemma 2.*

Beweis. Aus (R) folgt zunächst

(R 1) *Es gibt ein* $U \in \mathfrak{U}$ *mit* $E \subset E \circ \complement U$,

d.h., wenn U eine hinreichend kleine Nachbarschaft in X ist, gibt es zu $(x, y) \in E$ stets ein $x' \in X$ mit $(x', y) \in E$ und $(x, x') \notin U$. Andernfalls gäbe es nämlich zu jeder Nachbarschaft U in X ein Paar $(x, y) \in E$ mit $\overset{-1}{E}(y) \times \overset{-1}{E}(y) \subset U$ im Widerspruch zu (R).

Seien nun (UE), (R) (also auch (R 1)) und (F) erfüllt, V sei eine Nachbarschaft in Y. Es ist zu zeigen, daß eine Nachbarschaft U in X mit $E \circ U \subset V \circ E$ existiert. Wir wählen zunächst eine symmetrische Nachbarschaft U_1 in X, so daß (R 1) mit $\overset{3}{U_1}$ statt U erfüllt ist, und dann eine symmetrische Nachbarschaft $U \subset U_1$, so daß aus $(x_{ik}, y_k) \in E$ $(i, k = 1, 2)$, $(x_{11}, x_{21}) \notin U_1$, $(x_{12}, x_{22}) \notin U_1$ und (x_{11}, x_{12}), $(x_{21}, x_{22}) \in U$ stets $(y_1, y_2) \in V$ folgt; das ist aufgrund der Voraussetzung (UE) möglich. Hat man dann $(x, y) \in E \circ U$, so gibt es ein x_{12} mit $(x, x_{12}) \in U$ und $(x_{12}, y) \in E$, und aufgrund der Wahl von U_1 existiert dazu ein x_{22} mit $(x_{22}, y) \in E$ und $(x_{12}, x_{22}) \notin \overset{3}{U_1}$. Aus $(x_{22}, x') \in U$ und $(x', x) \in U_1$ würde im Widerspruch hierzu $(x_{12}, x_{22}) \in U \circ U_1 \circ U \subset \overset{3}{U_1}$ folgen; also ist für $x' \in U(x_{22})$ stets $(x', x) \notin U_1$. Wegen der Voraussetzung (F) kann man aber $x_{21} = x' \in U(x_{22})$ so wählen, daß ein y_1 mit $(x, y_1) \in E$ und $(x_{21}, y_1) \in E$ existiert. Setzt man dann noch $x_{11} = x$ und $y_2 = y$, so hat man also $(x_{ik}, y_k) \in E$ für $i, k = 1, 2$, (x_{11}, x_{21}), $(x_{12}, x_{22}) \notin U_1$ und (x_{11}, x_{12}), $(x_{21}, x_{22}) \in U$, aufgrund der Wahl von U daher $(y_1, y_2) \in V$ und insbesondere $(x, y) = (x_{11}, y_2) \in V \circ E$. Damit ist gezeigt, daß $E \circ U \subset V \circ E$ ist, und das Lemma ist bewiesen.

Lemma 5. *Ist* (E, X, Y) *als Mengentripel eine Ebene und sind die uniformen Räume X und Y separiert, so ist die Bedingung* (R) *für* (E, X, Y) *eine Konsequenz aus* (UE).

Beweis. Es seien die Voraussetzungen des Lemmas und die Bedingung (UE) erfüllt. Wir nehmen an, daß (E, X, Y) beliebig kleine Punktreihen besitze und leiten einen Widerspruch her.

Für jede Nachbarschaft U in X sei M_U die Menge derjenigen Punkte, welche in Punktreihen liegen, die klein von der Ordnung U sind:

(i) $M_U = \{x \in X \mid \exists\, y \in E(x) \colon \overset{-1}{E}(y) \times \overset{-1}{E}(y) \subset U\}$.

Für Nachbarschaften U, U' in X mit $U' \subset U$ ist dann offenbar $M_{U'} \subset M_U$. Da keines der M_U leer ist, wird $\mu = \{M_U \mid U \in \mathfrak{U}\}$ eine Filterbasis auf X, ja sogar

eine Cauchy-Filterbasis, denn andernfalls gäbe es eine Nachbarschaft U_0 in X mit der Eigenschaft

(ii) Zu jeder Nachbarschaft U in X gibt es ein Punktepaar $(x_1, x_2) \notin U_0$ und ein Geradenpaar $(y_1, y_2) \in E(x_1) \times E(x_2)$ mit $\overset{-1}{E}(y_i) \times \overset{-1}{E}(y_i) \subset U$ für $i=1, 2$.

Da der Durchschnitt $\overset{-1}{E}(y_1) \cap \overset{-1}{E}(y_2)$ nach Voraussetzung nicht leer ist würde dann $\overset{-1}{E}(y_1) \times \overset{-1}{E}(y_2) \subset \overset{2}{U}$ folgen und insbesondere $(x_1, x_2) \in \overset{2}{U}$. Wenn jedoch $\overset{2}{U} \subset U_0$ gewählt wird, ist das unmöglich.

Nun ist X separiert und enthält mehr als einen Punkt; daher gibt es einen Punkt $x_0 \in X$, gegen den μ nicht konvergiert, und man kann $U \in \mathfrak{U}$ so wählen, daß für $M \in \mu$ mit $M \times M \subset U$ stets $U(M) \cap U(x_0) = \emptyset$ ist. $U(M)$ enthält nun beliebig kleine Punktreihen, und deren Trägergeraden schneiden jede Gerade aus $E(x_0)$. Wegen (UE) ist also das Büschel $E(x_0)$ klein von jeder Ordnung $V \in \mathfrak{V}$; weil Y separiert ist, kann es also höchstens ein Element enthalten. Das widerspricht aber der Voraussetzung, daß (E, X, Y) eine Ebene, insbesondere also eine reguläre Inzidenzstruktur ist.

(3.2) Satz. *Es seien X, Y uniforme Räume und E eine nicht leere Teilmenge von $X \times Y$, derart, daß die Bedingungen* (F) *und* (F*) *von* (1.4) *erfüllt sind, d.h. daß für Nachbarschaften U in X und V in Y stets $U \circ \overset{-1}{E} \circ E = X \times X$ und $V \circ E \circ \overset{-1}{E} = Y \times Y$ ist. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) (E, X, Y) ist eine uniforme Präinzidenz und die separierte Vervollständigung $(E, \hat{X}, \hat{Y})$ ist eine Ebene.

b) $(\overline{E}, X, Y)$ genügt den Bedingungen (UE), (UE*), (R) *und* (R*).

a) $\Rightarrow$ b): Ist a) erfüllt, so genügt (E, X, Y) nach Satz (2.1) den Bedingungen (UE), (UE*), und dasselbe gilt für die uniforme Ebene $(\hat{E}, \hat{X}, \hat{Y})$. Nach Lemma 5 gibt es also eine Nachbarschaft U' in $\hat{X}$ (bzw. V' in $\hat{Y}$) mit $\Delta_{\hat{Y}} \subset \hat{E} \circ \complement U' \circ \overset{-1}{\hat{E}}$ (bzw. $\Delta_{\hat{X}} \subset \overset{-1}{\hat{E}} \circ \complement V' \circ \hat{E}$), und daher hat man $S \subset \overline{E} \circ \complement U \circ \overset{-1}{\overline{E}}$ (bzw. $R \subset \overset{-1}{\overline{E}} \circ \complement V \circ \overline{E}$), wenn U (bzw. V) das Urbild von U' bei $j_X \times j_X$ (bzw. von V' bei $j_Y \times j_Y$) und R (bzw. S) den Durchschnitt der Nachbarschaften in X (bzw. Y) bezeichnet, denn das Urbild von $\hat{E}$ bei $j_X \times j_Y$ ist gerade $\overline{E}$. Insbesondere erfüllt die uniforme Präinzidenz $(\overline{E}, X, Y)$ also die Bedingungen (R) und (R*).

b) $\Rightarrow$ a): Ist b) erfüllt, so genügt $(\overline{E}, X, Y)$ nach Lemma 4 der Bedingung (S*), ist also aufgrund der Dualisierung von Satz (2.2) eine uniforme Präinzidenz. Dasselbe gilt dann wegen (1.2) für (E, X, Y). Die Vervollständigung $(E, \hat{X}, \hat{Y})$ ist nun auch die Vervollständigung von $(\overline{E}, X, Y)$, und aufgrund des Lemmas in (2.5) haben in dieser je zwei verschiedene Punkte eine Verbindungsgerade und je zwei verschiedene Geraden einen Schnittpunkt; bleibt zu zeigen, daß sie regulär ist. Dazu genügt es nun, die Existenz eines nicht kollinearen Punktetripels in X zu beweisen. Sei $(x_0, y_0) \in E$. Wegen der Voraussetzung (R) gibt es ein $x_1 \in \overset{-1}{\overline{E}}(y_0)$ und eine Nachbarschaft U in X mit $U(x_0) \cap U(x_1) = \emptyset$, so daß

$j_X(x_0) \neq j_X(x_1)$ wird. Mittels (R*) ergibt sich ebenso die Existenz eines $y_1 \in \overline{E}(x_1)$ mit $j_Y(y_1) \neq j_Y(y_0)$, und eine weitere Anwendung von (R) liefert die Existenz eines Punktes $x_2 \in \overline{\overline{E}}^{-1}(y_1)$ mit $j_X(x_2) \neq j_X(x_1)$. Es ist nun klar, daß dann die Punkte $j_X(x_i) \in \hat{X}$ nicht kollinear sind.

Korollar. *Es sei (E,X,Y) eine (projektive) Ebene, deren Punktmenge X und Geradenmenge Y mit separierten uniformen Strukturen versehen sind. Genau dann ist (E,X,Y) eine uniforme (projektive) Ebene, wenn das Verbinden und das Schneiden außerhalb beliebig kleiner Nachbarschaften gleichmäßig stetig sind (d.h., wenn* (UE) *und* (UE*) *gelten).*

Daß die Bedingung notwendig ist, wissen wir schon aus (2.1); daß sie auch hinreicht, ergibt sich mit Lemma 5 von (3.1) sofort aus dem Satz.

(3.3) Satz. *Ist (E,X,Y) eine uniforme Fastebene, so gilt:*

a) Es gibt in $(\overline{E},X,Y)$ keine sehr kleinen Punktreihen und keine sehr kleinen Geradenbüschel (d.h. die Bedingungen (R) *und* (R*) *sind erfüllt).*

b) Die uniforme Struktur von Y ist durch diejenige von X schon eindeutig bestimmt: Durchläuft U eine Basis des Nachbarschaftenfilters von X und bezeichnet U^* jeweils den größten symmetrischen Graphen in $Y \times Y$, für den $U^* \circ \overline{E} \subset \overline{E} \circ U$ ist, so bilden die U^* eine Basis des Nachbarschaftenfilters von Y.

Da $(\overline{E},X,Y)$ eine uniforme Fastebene ist, wenn dies für (E,X,Y) zutrifft, darf man voraussetzen, daß E schon abgeschlossen ist. Aufgrund der Lemmata 1, 2, 3, und 4 von (3.1) ist die Behauptung b) eine Folge von a), so daß es genügt, a) zu beweisen.

Sei also (E,X,Y) eine uniforme Fastebene mit abgeschlossenem Graphen. Als Unterstruktur der Vervollständigung $(\hat{E},\hat{X},\hat{Y})$, die nach (2.5) eine uniforme Ebene ist, erfüllt (E,X,Y) dann offenbar die Bedingung (D) des Lemmas in (2.1). Folglich ist für jedes $y \in Y$ die Punktreihe $\overline{E}^{-1}(y)$ dicht in der Punktreihe $\overline{\hat{E}}^{-1}(y)$, und dual dazu ist für jedes $x \in X$ das Büschel $E(x)$ dicht in dem Büschel $\hat{E}(x)$. Da nun – grob gesprochen – die abgeschlossene Hülle einer hinreichend kleinen Menge beliebig klein ist (vgl. Beweis von (1.3)), genügt es, die Behauptung für eine (vollständige) uniforme Ebene zu beweisen. Für diesen Fall ergibt sie sich aber sofort aus (2.1) und dem Lemma 5 in (3.1).

Korollar. *In einer uniformen Fastebene (E,X,Y) mit abgeschlossenem Graphen E gilt:*

(UI 2) *Zu jeder Nachbarschaft U in X gibt es eine Nachbarschaft U_1 in X, derart, daß gilt:*
Aus $(x_i, y_k) \in E \circ U_1$ für $i,k = 1, 2$ folgt $(x_1, x_2) \in U$ oder $(y_1, y_2) \in U^*$.

Teil b) des Satzes besagt übrigens, daß in einer uniformen Fastebene mit abgeschlossenem Graphen die Geraden (wie im Fall der diskreten Ebenen) mit ihren Punktreihen identifiziert werden können; dabei hat man auf der

Menge der Punktreihen die vom Hyperraum des Punktraums induzierte uniforme Struktur zu nehmen.

(3.4) Um die beabsichtigten Anwendungen von (3.3) geben zu können, benötigen wir zwei Hilfssätze:

Lemma 1. *Es sei* (E,X,Y) *eine Korrespondenz mit* $E\neq\emptyset$ *und* $\mathfrak{U}$ *eine uniforme Struktur auf* X*, derart, daß die Bedingung* (UI 2) *erfüllt ist. Dann ist* (E,X,Y) *mit den uniformen Strukturen* $\mathfrak{U}$ *auf* X *und* $\mathfrak{U}^*$ *auf* Y *eine uniforme Präinzidenz.*

Beweis. Sei $U\in\mathfrak{U}$ und $V\in\mathfrak{U}^*$, etwa $V=U'^*$, und sei $U_0=U\cap U'$. Wählt man $U_1\in\mathfrak{U}$ so, daß die Implikation in (UI 2) mit U_0 und $\overset{2}{U}_1$ statt U und U_1 erfüllt ist, so ist wegen $U_1^*\circ E\circ U_1\subset E\circ\overset{2}{U}_1$ die Implikation in (UI′) mit U_1 und U_1^* statt U_1 und V_1 erfüllt; daher die Behauptung.

Lemma 2. (E,X,Y) *sei eine uniforme Ebene,* U *und* U_1 *seien symmetrische Nachbarschaften in* X*, derart, daß die Implikation in* (UI 2) *erfüllt ist. Dann hat man* $\overset{2}{U}_1\subset U$*, falls* $U(\overset{-1}{E}(y))\neq X$ *für alle* $y\in Y$ *gilt. Es gibt Nachbarschaften* U *mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. Sei $(x_1,x_2)\in\overset{2}{U}_1$. Es gibt einen Punkt x und eine Gerade y_1 mit $(x_i,x)\in U_1$ und $(x_i,y_1)\in E$ für $i=1,2$. Wenn $U(\overset{-1}{E}(y_1))\neq X$ ist, existiert weiter ein Punkt x', der nicht in $U(\overset{-1}{E}(y_1))$ liegt. Ist nun y_2 eine Gerade, die mit x und x' inzidiert, so hat man offenbar $(x_i,y_k)\in E\circ U_1$ für $i,k=1,2$, und da $\overset{-1}{E}(y_2)\not\subset U(\overset{-1}{E}(y_1))$, also $(y_1,y_2)\notin U^*$ ist, folgt $(x_1,x_2)\in U$. Daher ist $\overset{2}{U}_1\subset U$, wie behauptet.

Um die Existenzaussage zu beweisen, wählt man zunächst eine symmetrische Nachbarschaft U_0 in X, so daß keine Punktreihe mehr klein von der Ordnung $\overset{2}{U}_0$ und kein Geradenbüschel mehr klein von der Ordnung $\widehat{\overset{2}{U}_0^*}$ ist; das ist nach Satz (3.3) möglich. Wählt man dann eine symmetrische Nachbarschaft U in X, so daß die Implikation in (UI 2) mit U_0 und U statt U und U_1 erfüllt ist, so ist $U(\overset{-1}{E}(y))\neq X$ für alle $y\in Y$. Wäre nämlich $U(\overset{-1}{E}(y_1))=X$, so könnte man irgendeinen Punkt x_1 auf y_1 und eine Gerade y_2 durch x_1 mit $(y_1,y_2)\notin U_0^*$ wählen. Mit jedem Punkt x_2 auf y_2 hätte man dann $(x_i,y_k)\in E\circ U$ $(i,k=1,2)$ also $(x_1,x_2)\in U_0$, so daß die Punktreihe in y_2 entgegen der Wahl von U_0 klein von der Ordnung $\overset{2}{U}_0$ wäre.

Sei nun (E,X,Y) eine uniforme Ebene und U eine symmetrische Nachbarschaft in X. Mit Hilfe des Korollars von Satz (3.3) beweist man rekursiv die Existenz einer Folge $(U_n)_{n\geqq 0}$ von symmetrischen Nachbarschaften, derart, daß $U_0=U$ ist und für alle $n\geqq 0$ gilt:

(i) *Aus* $(x_i,y_k)\in E\circ U_{n+1}$ *für* $i,k=1,2$ *folgt* $(x_1,x_2)\in U_n$ *oder* $(y_1,y_2)\in U_n^*$.

Wenn U schon hinreichend klein gewählt wird, hat man nach Lemma 2 außerdem:

(ii) $\overset{2}{U}_{n+1} \subset U_n$ für $n=0, 1, 2, \ldots,$

woraus nach (3.1) folgt, daß auch $\overset{2}{\widehat{U^*_{n+1}}} \subset U^*_n$ für $n \geqq 0$ ist. Demnach bilden die U_n (bzw. U_n^*) dann eine Basis einer metrisierbaren uniformen Struktur auf X (bzw. Y).

Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller Folgen (U_n) von Nachbarschaften in X, welche die Eigenschaften (i) und (ii) haben. Wir denken sie uns in der Form $\mathfrak{M}=\{(U^i_n)_{n\geqq 0} \mid i\in I\}$ gegeben, wo I eine teilweise geordnete Indexmenge ist, derart, daß für $i, j\in I$ genau dann $i\leqq j$ gilt, wenn $(U^i_n)_{n\geqq 0}$ eine gröbere uniforme Struktur definiert als $(U^j_n)_{n\geqq 0}$. Für irgend zwei Indizes i, j in I konstruiert man dann (mit Hilfe des Korollars von Satz (3.3)) rekursiv eine Folge $(U^k_n)_{n\geqq 0}$ in $\mathfrak{M}$ mit $U^k_n \subset U^i_n \cap U^j_n$; daher ist I filtrierend geordnet.

Für jedes $i\in I$ erhält man nun nach Lemma 1 eine uniforme Präinzidenz (E_i, X_i, Y_i), wenn man in (E, X, Y) die uniformen Strukturen durch die von den U^i_n und den $(U^i_n)^*$ erzeugten Strukturen ersetzt. Das Paar $(1_X, 1_Y)$ der identischen Abbildungen von X bzw. Y ist dann ein Morphismus von (E, X, Y) in (E_i, X_i, Y_i), der – zusammengesetzt mit dem kanonischen Morphismus von (E_i, X_i, Y_i) in die separierte Vervollständigung ((1.5)) – einen wohlbestimmten Morphismus (f_i, g_i) von (E, X, Y) auf eine dichte Unterstruktur von $(\hat{E}_i, \hat{X}_i, \hat{Y}_i)$ liefert. Für zwei Indizes $i, k\in I$ mit $i\leqq k$ kann das Paar $(1_X, 1_Y)$ aber ebenso wohl als Morphismus von (E_k, X_k, Y_k) in (E_i, X_i, Y_i) aufgefaßt werden; als solcher liefert es einen Morphismus (f^k_i, g^k_i) von $(\hat{E}_k, \hat{X}_k, \hat{Y}_k)$ in $(\hat{E}_i, \hat{X}_i, \hat{Y}_i)$ (Faktorisierung von (f_i, g_i) nach (1.5), b)). Auf diese Weise ist ein inverses System von vollständigen metrisierbaren uniformen Ebenen definiert. Sei $\tilde{X}=\lim X_i$, $\tilde{Y}=\lim Y_i$, $\tilde{E}=\lim E_i$, und $\tilde{E}$ werde mit seinem kanonischen Bild in dem Produktraum $\tilde{X}\times\tilde{Y}$ identifiziert (vgl. (1.8)). Diese Limiten sind vollständige und separierte uniforme Räume ([2], chap. II, § 3, no 5). Es gibt nun genau eine gleichmäßig stetige Abbildung $f: X\to\tilde{X}$ (bzw. $g: Y\to\tilde{Y}$), derart, daß für jedes $i\in I$ die zusammengesetzte Abbildung $X\to\tilde{X}\to X_i$ (bzw. $Y\to\tilde{Y}\to Y_i$) gleich f_i (bzw. g_i) ist. Da die U^i_0 mit $i\in I$ bereits eine Basis der uniformen Struktur von X bilden und X separiert ist, sieht man, daß f sogar ein Isomorphismus auf einen Teilraum von $\tilde{X}$ ist. Dieser Teilraum $f(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$, weil für jedes i das Bild $f_i(X)$ in X_i dicht ist (ein wohlbekannter Schluß; man benützt z.B. [7], (34), p. 71). Daher kann man $\tilde{X}$ mittels der Fortsetzung von f mit $\hat{X}$ identifizieren, und das Entsprechende gilt für $\tilde{Y}$.

Wenn die Ebene (E, X, Y) nicht ausgeartet ist, gibt es übrigens vier Punkte $x_\alpha\in X$, von denen je drei nicht auf einer Geraden liegen, und eine Nachbarschaft U in X, derart, daß $U(x_\alpha)\cap U(P(x_\beta\vee x_\gamma))=\emptyset$ ist für $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$, denn die Punktreihen sind abgeschlossen. Für jedes $i\in I$ mit $U^i_0\subset U$ ist dann auch die Ebene $(\hat{E}_i, \hat{X}_i, \hat{Y}_i)$ nicht ausgeartet, und die Indizes i mit dieser Eigenschaft bilden offenbar eine kofinale Teilmenge von I. Daher können wir folgendermaßen zusammenfassen:

Satz. *Jede vollständige uniforme (projektive) Ebene ist filtrierender inverser Limes von vollständigen metrisierbaren uniformen (projektiven) Ebenen.*

In einigen Fällen läßt sich dieses Ergebnis beträchtlich präzisieren. Um diese Fälle zu diskutieren, beweisen wir zuerst einen Satz über Morphismen topologischer projektiver Ebenen.

(3.5) Satz. *Es seien (E,X,Y) und (E',X',Y') topologische projektive Ebenen und $(f,g)\colon (E,X,Y)\to(E',X',Y')$ ein stetiger Morphismus mit $g(Y)=Y'$ (also auch $f(X)=X'$). Dann ist g (und folglich auch f) injektiv, oder die Urbilder $g^{-1}(g(y))$ $(y\in Y)$ sind offen in Y.*

Sei R (bzw. S) der Äquivalenzgraph, welcher aus den Paaren $(x_1,x_2)\in X\times X$ mit $f(x_1)=f(x_2)$ (bzw. aus den Paaren $(y_1,y_2)\in Y\times Y$ mit $g(y_1)=g(y_2)$) besteht. Wir nehmen an, daß $S\neq\Delta_Y$ ist, und zeigen, daß die Restklassen mod S, die wegen der Stetigkeit von g und der Separiertheit von Y' abgeschlossen sind, auch offen in Y sind.

Dazu genügt es zu zeigen, daß die Klassen der von S in einem Büschel $E(x_0)$ $(x_0\in X)$ induzierten Relation offen in $E(x_0)$ sind.

Sei $y\in E(x_0)$. Wir wählen einen von x_0 verschiedenen, aber zu x_0 mod R kongruenten Punkt x, der nicht mit y inzidiert (ein solcher existiert, weil mit S zugleich auch R die triviale Relation wäre), und einen zu x_0 nicht mod R kongruenten Punkt x' in $P(y)$. Jede Gerade $v\in E(x_0)$ mit $v\wedge(x\vee x')\not\equiv x$ mod R ist dann mod S kongruent zu $y'=x\vee x'$ und daher zu y. Die Menge dieser v ist aber offen in $E(x_0)$, weil die Menge der $u\in P(y')$ mit $u\equiv x$ mod R in $P(y')$ abgeschlossen und die Perspektivität von $E(x_0)$ auf $P(y')$ ein Homöomorphismus ist. Da sie y als Element enthält und selbst in $S(y)$ enthalten ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Es folgt, daß (f,g) im Falle $S\neq\Delta_Y$ auch dann noch ein (stetiger) Morphismus ist, wenn man (E',X',Y') als diskrete topologische Ebene betrachtet.

Korollar 1. *Ist (f,g) ein (stetiger) Morphismus einer zusammenhängenden topologischen projektiven Ebene auf eine topologische projektive Ebene, so sind die Abbildungen f und g injektiv.*

Wendet man den Satz in der Situation von (3.4) auf eine zusammenhängende uniforme projektive Ebene an, so sieht man, daß die f_i und die f_i^k alle injektiv werden. d.h.:

Korollar 2. *Es sei (E,X,Y) eine uniforme projektive Ebene, deren Punktraum X zusammenhängend ist. Dann ist die uniforme Struktur von X obere Grenze von separierten metrisierbaren uniformen Strukturen, die alle (im Sinne der Bedingung* (UI 2)*) mit der Inzidenzstruktur verträglich sind.*

Korollar 3. *Sei (f,g) ein (stetiger) Morphismus einer kompakten projektiven Ebene (E,X,Y) auf eine topologische projektive Ebene (E',X',Y'). Dann ist (f,g) ein Isomorphismus oder die Ebene (E',X',Y') ist endlich.*

Denn $X'=f(X)$ ist ebenfalls kompakt. Wenn f injektiv ist, ist f sogar ein Homöomorphismus (und ebenso g); andernfalls sind die Mengen $f^{-1}(f(x))$ $(x\in X)$ offen in X, und endlich viele von ihnen überdecken X.

(3.6) Satz. *Eine kompakte projektive Ebene ist metrisierbar.*

Zum Beweis benützt man den folgenden Satz von DEMBOWSKI [5]:

Lemma. *Jeder Morphismus einer endlichen projektiven Ebene auf eine endliche projektive Ebene ist ein Isomorphismus.*

Das ist ein einfacher Spezialfall der allgemeineren Resultate von [5]. Wir fügen der Vollständigkeit halber einen Beweis hinzu, dessen Prinzip demjenigen des Beweises von Satz (3.5) analog ist:

Seien (E,X,Y) und (E',X',Y') endliche projektive Ebenen und (f,g): $(E,X,Y)\to(E',X',Y')$ ein Morphismus mit $f(X)=X'$ und $g(Y)=Y'$. Sei n (bzw. m) die Ordnung von (E,X,Y) (bzw. (E',X',Y')), d.h. die um 1 verminderte Anzahl der Punkte auf einer Geraden; R und S mögen dieselbe Bedeutung wie in (3.5) haben. Durch Anwendung geeigneter Perspektivitäten zeigt man zunächst, daß die Klassen der von S in einem Geradenbüschel (bzw. von R in einer Punktreihe) induzierten Relation (unabhängig von der Wahl des Büschels bzw. der Punktreihe) alle dieselbe Elementezahl k haben. Wenn nun $S\neq\Delta_Y$ wäre, könnte man x, x', y, y' wie in (3.5) wählen. Eine Abzählung der Elemente von $E(x_0)$ mit Hilfe der Perspektivität von $E(x_0)$ auf $P(y')$ würde dann die Ungleichung $k\cdot m\leqq k$ liefern, die wegen $m\geqq 2$ für kein ganzes $k>0$ erfüllt ist.

Sei nun (E,X,Y) eine kompakte projektive Ebene. Nach (2.3) ist sie uniform und wegen der Kompaktheit natürlich vollständig. Nach (3.4) gibt es also wenigstens einen Morphismus (f,g) von (E,X,Y) auf eine metrisierbare uniforme projektive Ebene (E_1,X_1,Y_1), und diese ist notwendig selbst kompakt. Wenn nun f (und damit g) injektiv ist, sind wir fertig. Andernfalls ist (E_1,X_1,Y_1) nach Korollar 3 von Satz (3.5) endlich und daher (gleichmäßig) diskret. Folglich ist der Graph R der Paare $(x_1,x_2)\in X\times X$ mit $f(x_1)=f(x_2)$ selbst eine Nachbarschaft in X. Da X separiert ist, gibt es eine Nachbarschaft U in X mit $U\subset R$ und $U\neq R$. Nach dem Verfahren von (3.4) konstruiert man dann einen Morphismus (f',g') von (E,X,Y) auf eine (wiederum kompakte) metrisierbare uniforme projektive Ebene (E_2,X_2,Y_2), derart, daß aus $f'(x_1)=f'(x_2)$ stets $(x_1,x_2)\in U$ folgt, sowie einen verbindenden Morphismus (f_1^2,g_1^2) von (E_2,X_2,Y_2) auf (E_1,X_1,Y_1) mit $(f_1^2,g_1^2)(f',g')=(f,g)$. Wegen $U\neq R$ ist nun die Abbildung f_1^2 nicht injektiv, aufgrund des Lemmas ist also die Ebene (E_2,X_2,Y_2) nicht endlich. Nach Korollar 3 von Satz (3.5) ist also (f',g') ein Isomorphismus. Daher die Behauptung.

Anmerkung. Daß der Punktraum einer kompakten projektiven Ebene metrisierbar ist, ist bekannt aus [10]. Der Satz (3.6) besagt darüber hinaus, daß man eine Metrik wählen kann, die mit der Inzidenzstruktur verträglich ist im Sinne der Bedingung (UI 2), welche natürlich mit Hilfe der Metrik ausgedrückt werden kann.

Literatur

[1] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles, Chap. I—II, 2e éd., Paris: Hermann 1960; chap. III, 2e éd., Paris: Hermann 1963.
[2] — Topologie générale, chap. I—II. 3e éd., Paris: Hermann 1961.
[3] — Algèbre commutative, chap. VI. Paris: Hermann 1964.
[4] DEMBOWSKI, P.: Frei und offene projektive Ebenen. Math. Z. **72**, 410—438 (1960).
[5] — Homomorphismen von λ-Ebenen. Arch. Math. **10**, 46—50 (1959).
[6] FREUDENTHAL, H.: Kompakte projektive Ebenen. Ill. J. Math. **1**, 9—13 (1957).
[7] ISBELL, J.R.: Uniform spaces. Math. Surveys no. 12. Providence 1964.
[8] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.
[9] SALZMANN, H.: Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen. Math. Z. **61**, 489—494 (1955).
[10] — Topologische projektive Ebenen. Math. Z. **67**, 436—466 (1957).
[11] — Topologische Struktur zweidimensionaler projektiver Ebenen. Math. Z. **71**, 408—413 (1959).
[12] — Zur Klassifikation topologischer Ebenen. I: Math. Ann. **150**, 226—241 (1963); — II: Hbg., Math. Abh. **27**, 145—166 (1964).
[13] JOUSSEN, J.: Die Anordnungsfähigkeit der freien Ebenen. Hbg., Math. Abh. **29**, 137—184 (1966).

Gießen, Mathematisches Institut der Universität