Werk

Titel: Über die Lie-Algebren der Derivationen und der linksregulären Darstellungen in ze...

Autor: Meyberg, Kurt

Jahr: 1966

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0093|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

MEYBERG, K.
Math. Zeitschr. 93, 37–47 (1966)

Über die Lie-Algebren der Derivationen und der linksregulären Darstellungen in zentral-einfachen Jordan-Algebren

KURT MEYBERG

Eingegangen am 26. Juni 1965

Einleitung

In den Arbeiten [2] von JACOBSON und [1] von CHEVALLEY und SCHAFER wird die Struktur der Derivationsalgebren und die der Lie-Algebren der Strukturgruppe von zentral-einfachen Jordan-Algebren vollständig bestimmt. In beiden Arbeiten werden für die bei der Klassifikation der zentral-einfachen Jordan-Algebren auftretenden Typen getrennte Beweise geführt, in denen dann auch sehr wesentlich die spezielle Struktur der einzelnen Typen eingeht. Insbesondere in der Arbeit [1] von CHEVALLEY und SCHAFER gehen auch noch allerlei weitere Hilfsmittel aus der Theorie der Lie-Algebren ein.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, für die wesentlichen Ergebnisse aus [1] und [2] elementare Beweise zu geben, bei denen nicht die Klassifikation und auch im wesentlichen keine Lie-Theorie verwendet wird. Diese Arbeit kann als Fortsetzung von [4] angesehen werden, wo wir bereits einige Ergebnisse über die Derivationsalgebren bewiesen haben. Wir verwenden laufend die Bezeichnungen und Ergebnisse aus [4], von denen wir die wichtigsten in §1.1 wiederholen.

§1. Bezeichnungen und Hilfsmittel

1. Es sei $\mathfrak{A}$ stets eine zentral-einfache Jordan-Algebra über dem Körper K der Charakteristik Null. Wir bezeichnen mit e das Einselement, mit n die Dimension und mit s den Grad von $\mathfrak{A}$. Es ist d die durch

$$n = s + \frac{s(s-1)}{2} d$$

eindeutig bestimmte natürliche Zahl, die von $\mathfrak{A}$ abhängt. Wir wollen stets $s > 1$ voraussetzen. Mit σ bezeichnen wir die durch ((1.9))[1] definierte Linearform auf $\mathfrak{A}$, die sogenannte reduzierte Spur. Wir setzen $\sigma(x, y) = \sigma(xy)$ und zu festen $u, v \in \mathfrak{A}$ bezeichnen wir wieder die lineare Transformation $x \to \sigma(v, x)u$ mit uv^*. Die bezüglich σ adjungierte Transformation von A ist A^*. Für die Multiplikation $y \to xy$ schreiben wir $L(x)$, also $L(x)\, y = xy$, und wir benützen

[1] Hinweise in doppelten Klammern beziehen sich auf [4].

die Abkürzungen $D(x, y) := L(x)\,L(y) - L(y)\,L(x)$, $L(x, y) := L(x)\,L(y) - L(xy)$ und $P(x, y) := L(x)\,L(y) + L(y)\,L(x) - L(xy)$.

Es ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ die Lie-Algebra der Derivationen von $\mathfrak{A}$. Nach [4] gilt

Lemma 1.1. *In $\mathfrak{D}$ gibt es Basen E_i, D_i mit*

a) $D(x, y) = \sum \sigma(E_i\, x, y)\, D_i$,

b) $L(x, y) = -\sum E_i\, y x^*\, D_i$,

c) $\sum E_i\, D_i = d/4(s\,\mathrm{Id} - e e^*)$.

Beweis. Für S_i aus ((5.3)) schreiben wir E_i, dann folgt a) und b) aus ((5.1)) und ((5.7)). c) erhielten wir in [4] durch Spurbildung aus b).

Wir hatten in [4] zu einer linearen Transformation A von $\mathfrak{A}$ das Element $f(A) \in \mathfrak{A}$ durch Spur $A\,L(x) = \sigma(f(A), x)$ definiert. Nach ((4.8)) gilt

$$F x := f\big(L(x)\big) = \big(1 + (s-2)\, d/4\big)\, x + d/4\, \sigma(x)\, e \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{A}. \tag{1.1}$$

Ferner definierten wir zu A die Transformation $T(A)$ durch

$$T(A)\, x = f\big(A\, L(x)\big) + f\big(L(x)\, A\big) - f(A)\, x.$$

Insbesondere ist $T(A)\, e = f(A)$. Wegen $f(xy^*) = xy$ ((Lemma 2.1)) ist $T(xy^*) = P(x, y)$, und außerdem gilt nach ((6.4))

$$T\big(T(A)\big) = (1 - d/2)\, T(A) + d/2\, A \qquad \text{für } A = A^*. \tag{1.2}$$

Hierin $A = e e^*$ gesetzt, ergibt wegen $T(e e^*) = P(e, e) = \mathrm{Id}$

$$T(\mathrm{Id}) = (1 - d/2)\, \mathrm{Id} + d/2\, e e^*. \tag{1.3}$$

2. Nun definieren wir eine lineare Transformation S von $\mathfrak{E}$ in sich (mit $\mathfrak{E}$ bezeichnen wir den Raum der linearen Transformationen von $\mathfrak{A}$ in sich) durch

$$S(A)\, x = f\big(A\, L(x)\big) - f(A)\, x. \tag{1.4}$$

Wegen $f(xy^*\, L(z)) = f(x(yz)^*) = x(yz)$ gilt

$$S(x y^*) = L(x, y). \tag{1.5}$$

Auf eine systematische Untersuchung der Transformation S wollen wir hier verzichten und geben nur die für das Folgende benötigten Eigenschaften an.

Lemma 1.2. a) $S(A^*) = S(A)^*$ *für alle* $A \in \mathfrak{E}$

b) $T(A) = 2S(A) + L(f(A))$ *für* $A = A^*$,

c) $S(A^*) = -\sum D_i\, A\, E_i$ *für alle* $A \in \mathfrak{E}$,

d) $S(\mathrm{Id}) = d/4(e e^* - s\,\mathrm{Id})$,

e) $S(A) \in \mathfrak{D}$ *für* $A = -A^*$,

f) $S(D) = (\frac{1}{2} + (s-2)\, d/8)\, D$ *für alle* $D \in \mathfrak{D}$,

g) $S([D, A]) = [D, S(A)]$ *für alle* $A \in \mathfrak{E}$ *und* $D \in \mathfrak{D}$.

Beweis. Nach (1.5) gilt

$$S(x\,y^*)^* = L(x,y)^* = L(y,x) = S(y\,x^*) = S\big((x\,y^*)^*\big),$$

geeignete Summation ergibt a).

Wegen $f(B)=f(B^*)$ für alle $B\in\mathfrak{E}$ folgt $f(AL(x))=f(L(x)A)$ für $A=A^*$, und hiermit folgt Teil b) unmittelbar aus der Definition von T und S. Nach Lemma 1.1 b) und (1.5) gilt

$$S(x\,y^*) = -\sum E_i\,y\,x^*\,D_i\,.$$

Wir summieren geeignet und erhalten

$$S(A) = -\sum E_i\,A^*\,D_i\,.$$

Durch Übergang zum Adjungierten folgt hieraus c).

Teil d) folgt aus c) in Verbindung mit Lemma 1.1 c).

Um Teil e) zu beweisen, beachten wir, daß jedes schiefsymmetrische $A\in\mathfrak{E}$ in der Form $\sum(x\,y^*-y\,x^*)$ geschrieben werden kann. Hiermit folgt aus (1.5) $S(A)=\sum\,(S(x\,y^*)-S(y\,x^*))=\sum D(x,y)$. Wegen $D(x,y)\in\mathfrak{D}$ folgt die Behauptung.

Nun setzen wir $A=D\in\mathfrak{D}$ in (1.4) ein. Das ergibt wegen $D=-D^*$ mit (1.1)

$$S(D)\,x=\tfrac{1}{2}\,f\big(D\,L(x)-L(x)\,D\big)=\tfrac{1}{2}\,f\big(L(D\,x)\big)=\big(\tfrac{1}{2}+(s-2)\,d/8\big)\,D\,x\,;$$

denn es ist $\sigma(D\,x)=0$. Damit ist f) bewiesen.

Zu $D\in\mathfrak{D}$ betrachten wir das Lie-Produkt $[D, S(x\,y^*)]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
[D, S(x\,y^*)] &= D\,L(x)\,L(y) - D\,L(x\,y) - L(x)\,L(y)\,D + L(x\,y)\,D \\
&= D\,L(x)\,L(y) - L(x)\,D\,L(y) + L(x)\,D\,L(y) - L(x)\,L(y)\,D - \\
&\quad - D\,L(x\,y) + L(x\,y)\,D \\
&= L(D\,x)\,L(y) + L(x)\,L(D\,y) - L\big(D(x\,y)\big) \\
&= L(D\,x)\,L(y) - L\big((D\,x)\,y\big) + L(x)\,L(D\,y) - L\big(x(D\,y)\big) \\
&= S(D\,x\,y^*) + S\big(x(D\,y)^*\big) = S\big([D, x\,y^*]\big).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt Teil g).

Es seien $\mathfrak{E}^+$ und $S^+(\mathfrak{E})$ die selbstadjungierten Teile von $\mathfrak{E}$ bzw. $S(\mathfrak{E})$. Wegen Lemma 1.2 a) ist $S^+(\mathfrak{E})=S(\mathfrak{E}^+)$. Wir zeigen

Lemma 1.3. *Es ist*

$$\mathfrak{E}^+ = S(\mathfrak{E}^+) + L(\mathfrak{A})$$

als direkte Summe von Vektorräumen.

Beweis. Der symmetrische Teil von $S(x\,y^*)$ ist $\frac{1}{2}S(x\,y^*+y\,x^*)=\frac{1}{2}(P(x,y)-L(x\,y))$. Nach ((Satz 6.3)) kann man jede symmetrische Transformation A darstellen in der Form $A=\sum P(x,y)$. Durch Summation finden wir dann aus obiger

Gleichung $A=S(B)+L(u)$ mit gewissen $B=B^*\in\mathfrak{E}$ und $u\in\mathfrak{A}$. Wegen $S(B)e=0$ folgt $u=Ae$, und damit ist die Darstellung eindeutig; das liefert die Behauptung.

Weiter benötigen wir noch

Lemma 1.4. a) *Der Raum der selbstadjungierten Eigenvektoren von S zum Eigenwert 0 ist gegeben durch $\{xe^*+ex^*,\ x\in\mathfrak{A}\}$.*

b) *Der Raum der selbstadjungierten Eigenvektoren von S zum Eigenwert $-ds/4$ ist gegeben durch $\{\alpha(ee^*-s\,\mathrm{Id}),\ \alpha\in K\}$.*

Beweis. Zunächst ist klar, daß wegen $S(xe^*)=0$ die Vektoren xe^*+ex^* im Kern von S liegen. Nach Lemma 1.3 hat der symmetrische Teil des Kerns von S die Dimension n; der in der Behauptung a) angegebene Raum ist aber offensichtlich n-dimensional, also ist a) bewiesen.

Zu b): Wegen Lemma 1.2 d) ist ersichtlich $ee^*-s\,\mathrm{Id}$ ein symmetrischer Eigenvektor zum Eigenwert $-ds/4$. Nun sei $A=A^*$ und $S(A)=-ds/4\,A$. Zunächst folgt aus $S(A)\,e=0$ auch $Ae=0$. Mit Lemma 1.2 b) folgt

$$T(A)=-ds/2\,A+L\big(f(A)\big). \tag{1.6}$$

Hiervon bilden wir f. Das ergibt wegen $f(B)=T(B)e$ mit (1.2) für die linke Seite

$$f\big(T(A)\big)=T\big(T(A)\big)e=(1-d/2)\,T(A)\,e+d/2\,A\,e=(1-d/2)\,f(A). \tag{1.7}$$

Für die rechte Seite folgt mit (1.1)

$$-ds/2\,f(A)+\big(1+(s-2)\,d/4\big)f(A)+d/4\,\sigma\big(f(A)\big)e.$$

Somit folgt $sf(A)=\sigma(f(A))e$. Aus (1.6) erhalten wir dann

$$T(A)=-ds/2\,A+1/s\,\sigma\big(f(A)\big)\,\mathrm{Id}. \tag{1.8}$$

Hierauf wenden wir T an; das ergibt mit (1.2) und (1.3)

$$(1-d/2)\,T(A)+d/2\,A=-ds/2\,T(A)+1/s\,\sigma\big(f(A)\big)\big((1-d/2)\,\mathrm{Id}+d/2\,ee^*\big).$$

Mit (1.8) folgt hieraus

$$\big(d/2-ds/2\,(1-d/2)-(ds/2)^2\big)A=d/2s\,\sigma\big(f(A)\big)(ee^*-s\,\mathrm{Id}).$$

Man überzeugt sich sehr leicht, daß für $s>1$ der Koeffizient von A von Null verschieden ist, somit folgt aus der letzten Gleichung die Behauptung.

§ 2. Derivationen

1. Wir bestimmen zuerst

$$V(\mathfrak{D}):=\{A,\ A\in\mathfrak{E}\text{ mit }AD=DA\text{ für alle }D\in\mathfrak{D}\}.$$

$A\in V(\mathfrak{D})$ ist offenbar äquivalent mit

$$AD(x,y)=D(x,y)A\qquad\text{für alle } x,y\in\mathfrak{A}. \tag{2.1}$$

Hieraus ist bereits ersichtlich, daß Ae aus dem Zentrum von $\mathfrak{A}$ ist, also

$$Ae=\alpha e, \qquad \alpha\in K. \tag{2.2}$$

Wir wenden (2.1) an auf $u\in\mathfrak{A}$ und nehmen die entstehende Gleichung als Transformation in y. Es folgt

$$AL(x,u)=L(x,Au).$$

Mit $S(xy^*)=L(x,y)$ bedeutet dies

$$AS(xu^*)=S\big(x(Au)^*\big)=S(xu^*A^*).$$

Hieraus ersieht man, daß gilt

Lemma 2.1. *$A\in V(\mathfrak{D})$ ist gleichbedeutend mit*

$$AS(B)=S(BA^*) \qquad \textit{für alle } B\in\mathfrak{E}. \tag{2.3}$$

In (2.3) setzen wir $B=\mathrm{Id}$ und erhalten mit Lemma 1.2 d) und (2.2)

$$S(A^*)=-ds/4\,A+d/4\,\alpha\,ee^*. \tag{2.4}$$

Wir zeigen nun

Lemma 2.2. *Die Transformationen aus $V(\mathfrak{D})$ sind selbstadjungiert, falls nicht $d=1$ und $s=2$ gilt.*

Beweis. Da mit A auch offensichtlich A^* und damit $A-A^*$ zu $V(\mathfrak{D})$ gehört, genügt es zu zeigen, daß $V(\mathfrak{D})$ keine schiefsymmetrische Transformation $\neq 0$ enthält.

Sei also $B\in V(\mathfrak{D})$ und $B=-B^*$. Aus (2.4) folgt nun

$$S(B)=ds/4\,B+\alpha' ee^*, \qquad \alpha'\in K. \tag{2.5}$$

Wegen $S(ee^*)=0$ folgt hieraus $S(S(B))=ds/4\,S(B)$. Andererseits ist für schiefsymmetrisches B nach Lemma 1.2 e) $S(B)\in\mathfrak{D}$, aus Teil f) des gleichen Lemmas folgt nun $S(S(B))=(\frac{1}{2}+(s-2)\,d/8)\,S(B)$. Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$\big(ds/4-(\tfrac{1}{2}+(s-2)\,d/8)\big)\,S(B)=0.$$

Der Koeffizient von $S(B)$ ist Null genau dann, wenn $d(s+2)=4$ gilt; diese Gleichung ist nur für $d=1$ und $s=2$ lösbar. Dieser Fall ist nach Voraussetzung ausgeschlossen. Es folgt $S(B)=0$, nach (2.5) dann $B=\beta\,e\,e^*$, $\beta\in K$. Da aber ee^* symmetrisch ist, haben wir $B=0$.

Wir haben nun $A\in V(\mathfrak{D})$ mit $A=A^*$. (2.4) bedeutet nun

$$S(A)=-ds/4\,A+\alpha\,ee^*. \tag{2.6}$$

Hierauf S angewendet, ergibt

$$S\big(S(A)\big)=-ds/4\,S(A).$$

Das bedeutet, daß $S(A)$ Eigenvektor zum Eigenwert $-ds/4$ ist. Nach Lemma 1.2 a) ist $S(A)$ symmetrisch. Lemma 1.4 b) ergibt jetzt

$$S(A)=\kappa(e\,e^*-s\,\mathrm{Id}),\qquad \kappa\in K.$$

Dies tragen wir in (2.6) ein und finden

$$A=\rho\,\mathrm{Id}+\rho'\,e\,e^*,\qquad \rho,\rho'\in K.$$

Wir haben somit bewiesen:

Satz 2.3. *Wenn $\mathfrak{A}$ nicht die 3-dimensionale Algebra vom Grad 2 ist (d.h. es ist nicht $d=1$ und $s=2$)*[2]*, dann ist $A\in V(\mathfrak{D})$ äquivalent mit $A=\rho\,\mathrm{Id}+\rho'\,e\,e^*$, $\rho,\rho'\in K$.*

2. Nun bestimmen wir die Menge der bezüglich der Spurform Spur UV selbstadjungierten Transformationen $C:\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$, für die

$$C([U,V])=[U,C(V)]$$

für alle $U, V\in\mathfrak{D}$ gilt.

Vertauschen wir in dieser Gleichung U mit V, so ist ersichtlich, daß gilt

$$C([U,V])=[U,C(V)]=[C(U),V]. \tag{2.7}$$

Wir setzen $C_i:=C(D_i)$ und erhalten nach Lemma 1.1 a)

$$C(D(x,y))=\sum\sigma(E_i x,y)\,C_i. \tag{2.8}$$

In (2.7) ersetzen wir V durch $D(x,y)$. Für $U\in\mathfrak{D}$ verifiziert man leicht

$$[U,D(x,y)]=D(U\,x,y)+D(x,U\,y).$$

Hiermit und mit (2.8) folgt dann wegen $D=-D^*$ für alle $D\in\mathfrak{D}$

$$C([U,D(x,y)])=\sum\sigma([E_i,U]\,x,y)\,C_i. \tag{2.9}$$

Wir wenden (2.7) für $V=D(x,y)$ an auf u, beachten (2.9) und (2.8) und erhalten

$$\sum\sigma([E_i,U]\,x,y)\,C_i\,u=\sum\sigma(E_i x,y)\,[U,C_i]\,u=[C(U),D(x,y)]\,u.$$

Dies als Transformation in y aufgefaßt, ergibt, wenn wir $S(xy^*)=L(x,y)$ beachten,

$$\sum C_i\,u([E_i,U]\,x)^*=\sum[U,C_i]\,u(E_i x)^*=C(U)\,S(x\,u^*)-S(x(C(U)\,u)^*).$$

Wir setzen $A=\sum u\,x^*$. Mit $x(Bu)^*=x\,u^*\,B^*$ folgt durch Summation

$$\sum C_i\,A[U,E_i]=\sum[C_i,U]\,A\,E_i=C(U)\,S(A^*)+S(A^*\,C(U)) \tag{2.10}$$

für alle $A\in\mathfrak{E}$ und $U\in\mathfrak{D}$.

Nach Lemma 1.2 g) gilt auch

$$C(U)\,S(A)+S(A\,C(U))=S(A)\,C(U)+S(C(U)\,A). \tag{2.11}$$

[2] Für $s=2$ und $d=1$ rechnet man leicht dim $V(\mathfrak{D})=3$ nach.

In (2.10) setzen wir $A=\mathrm{Id}$ und finden mit $S(\mathrm{Id})=d/4(ee^*-s\,\mathrm{Id})$ und $S(D)=(\frac{1}{2}+(s-2)\,d/8)\,D$ für $D\in\mathfrak{D}$ (vgl. Lemma 1.2)

$$(2.12)\qquad (\tfrac{1}{2}-(s+2)\,d/8)\,C(U)=\sum C_i[U,E_i]=\sum[C_i,U]\,E_i\,.$$

Die Gleichung auf der rechten Seite bedeutet

$$\sum(C_i\,U\,E_i-C_i\,E_i\,U)=\sum(C_i\,U\,E_i-U\,C_i\,E_i)\qquad\text{für alle } U\in\mathfrak{D}\,,$$

d.h. $\sum C_iE_i$ ist mit allen Derivationen vertauschbar; nach Satz 2.3 folgt, wenn wir von nun an den Fall $d=1$, $s=2$ ausschließen, $\sum C_iE_i=\alpha\,\mathrm{Id}+\beta ee^*$ mit gewissen $\alpha,\beta\in K$. Dann gilt wegen $Ue=0$

$$(2.13)\qquad (\tfrac{1}{2}-(s+2)\,d/8)\,C(U)=\sum C_i\,U\,E_i-\alpha\,U\,.$$

Aus (2.10) erhalten wir für $A=V\in\mathfrak{D}$ wegen $S(V)=(\frac{1}{2}+(s-2)\,d/8)\,V$

$$(\tfrac{1}{2}+(s-2)\,d/8)\,C(U)\,V+S(VC(U))=\sum[U,C_i]\,VE_i\,.$$

Multiplizieren wir (2.12) von rechts mit V, erhalten wir

$$-(\tfrac{1}{2}-(s+2)\,d/8)\,C(U)\,V=\sum[U,C_i]\,E_i\,V.$$

Subtraktion der beiden letzten Gleichungen ergibt

$$(2.14)\qquad (1-d/2)\,C(U)\,V+S(VC(U))=\sum[U,C_i][V,E_i]\,.$$

Weiter folgt aus (2.10) in Verbindung mit (2.11)

$$(\tfrac{1}{2}+(s-2)\,d/8)\,VC(U)+S(C(U)\,V)=\sum C_i\,V[E_i,U]\,.$$

Wir multiplizieren (2.12) von links mit V, das ergibt

$$-(\tfrac{1}{2}-(s+2)\,d/8)\,VC(U)=\sum VC_i[E_i,U]\,.$$

Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$(1-d/2)\,VC(U)+S(C(U)\,V)=\sum[V,C_i][U,E_i]\,.$$

Hierin vertauschen wir U mit V; es folgt

$$(1-d/2)\,U\,C(V)+S(C(V)\,U)=\sum[U,C_i][V,E_i]\,.$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit (2.14), ersehen wir

$$(1-d/2)\,C(U)\,V+S(VC(U))=(1-d/2)\,U\,C(V)+S(C(V)\,U)\,.$$

Dies ist äquivalent mit

$$(2.15)\qquad S(VC(U)-C(V)\,U)=(d/2-1)(C(U)\,V-U\,C(V))\,.$$

Nun gilt nach (2.7) $[U,C(V)]=[C(U),V]$ bzw. $UC(V)-C(U)\,V=C(V)\,U-VC(U)$, d.h. die Transformation

$$A:=VC(U)-C(V)\,U$$

ist selbstadjungiert. (2.15) bedeutet nun

$$S(A)=(d/2-1)\,A\,.$$

Wir zeigen nun, daß hieraus $A=0$ folgt, falls nicht $d=1$ und $s=4$ oder $d=3$ und $s=2$ gilt.

Nach Lemma 1.2 b) folgt aus $S(A)=(d/2-1)\,A$, $A=A^*$, daß

$$T(A)=(d-2)\,A+L(f(A)) \tag{2.16}$$

gilt. Hiervon bilden wir f und erhalten für die rechte Seite wegen $\sigma(f(A))=$ Spur $A=\mathrm{Spur}(VC(U)-C(V)\,U)=0$, da C selbstadjungiert vorausgesetzt ist, mit (1.1) und (1.7)

$$(1-d/2)f(A)=(d-2)f(A)+\big(1+(s-2)\,d/4\big)f(A)\,,$$

d.h.

$$(2-d-ds/4)f(A)=0\,.$$

Es ist aber $2-d=ds/4$ äquivalent mit $8=d(s+4)$; diese Gleichung ist nur für $d=1$ und $s=4$ lösbar, für alle anderen Fälle folgt $f(A)=0$. Aus (2.16) folgt jetzt $T(A)=(d-2)\,A$. Nun hat aber nach (1.2) die Beschränkung von T auf den symmetrischen Transformationen nur die Eigenwerte 1 und $-d/2$. Sei also $d-2=1$, dann folgt $d=3$. Dieser Fall kann aber nur für $s=2$ eintreten (vgl. [4], Seite 64). Der Fall $d-2=-d/2$ kann nicht eintreten, da d ganz ist.

Wenn wir also die Fälle $d=3$, $s=2$ und $d=1$, $s=4$ ausschließen, dann gilt in jedem anderen Fall $A=0$; d.h.

$$VC(U)=C(V)\,U\,.$$

In dieser Gleichung setzen wir $V=D_i$, multiplizieren von rechts mit E_i und summieren über i. Das ergibt

$$\sum D_i\,C(U)\,E_i=\sum C_i\,U\,E_i\,.$$

Nun beachten wir Lemma 1.2 c) und f) und finden, da $C(U)\in\mathfrak{D}$,

$$\sum C_i\,U\,E_i=S\big(C(U)\big)=\big(\tfrac{1}{2}+(s-2)\,d/8\big)\,C(U)\,.$$

Dies tragen wir in (2.13) ein. Wir erhalten $ds/4\;C(U)=\alpha\,U$, also

$$C(U)=\alpha'\,U,\qquad \alpha'\in K\,.$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz 2.4. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine zentral-einfache Jordan-Algebra über dem Körper K der Charakteristik Null, für die nicht $d=1$, $s=4$ oder $d=1$, $s=2$ oder $d=3$, $s=2$ gilt, dann besteht die Menge der bezüglich der Spurform selbstadjungierten Transformationen C von $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$, für die $C([U,V])=[U,C(V)]$ für alle U, $V\in\mathfrak{D}$ gilt, nur aus den skalaren Vielfachen der Identität.*

Als wichtige Anwendung dieses Satzes erhalten wir das

Korollar 1. *Sei* $\mathfrak{A}$ *wie in Satz* 2.4, *dann ist* $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ *eine einfache Lie-Algebra*[3].

Beweis. Nach ((Satz 5.5)) ist $\mathfrak{D}$ halbeinfach. Wir können daher $\mathfrak{D}$ als direkte Summe einfacher Ideale darstellen, die bezüglich der Killing-Form in $\mathfrak{D}$ und wegen ((Satz 5.4)) auch bezüglich der Spurform in $\mathfrak{D}$ orthogonal sind. Sei also

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1+\mathfrak{D}_2$$

eine solche Zerlegung. Wir betrachten nun P: $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$, die Projektion von $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{D}_1$, also

$$P(D)=D_1 \quad \text{wenn} \quad D=D_1+D_2\,.$$

Zunächst gilt, da $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$ orthogonal sind,

$$\text{Spur } P(U)\,V=\text{Spur } U_1\,V=\text{Spur } U_1\,V_1$$

und

$$\text{Spur } U\,P(V)=\text{Spur } U\,V_1=\text{Spur } U_1\,V_1\,;$$

damit ist P selbstadjungiert. Weiter gilt

$$P([U,V])=P([U_1,V_1]+[U_2,V_2])=[U_1,V_1]$$
$$[U,P(V)]=[U,V_1]=[U_1,V_1]\,.$$

Die Projektion P genügt also den Voraussetzungen des Satzes 2.4, daraus folgt $P=\pi\,\mathrm{Id}$, $\pi\in K$, und es ist dann $\mathfrak{D}_1$ oder $\mathfrak{D}_2$ die Nullalgebra, also $\mathfrak{D}$ einfach.

Die Anwendung auf die Derivationen der Ausnahmealgebra formulieren wir als

Korollar 2. *Die Derivationsalgebra der Ausnahme-Jordan-Algebra ist eine einfache Lie-Algebra vom Typ* F_4.

Beweis. Nach dem Korollar 1 ist $\mathfrak{D}$ einfach. Nach ((Satz 5.3)) ist $\mathfrak{D}$ 52-dimensional. Nun gibt es aber unter den einfachen Lie-Algebren der Dimension 52 nur solche vom Typ F_4[4]. Damit ist das Korollar bewiesen.

§ 3. Die Lie-Algebra der linksregulären Darstellungen

Es ist wohlbekannt, daß die Menge der linksregulären Darstellungen $L(\mathfrak{A})=\{L(x), x\in\mathfrak{A}\}$ ein Lie-Tripel-System (=L.T.-System) bildet und die einhüllende Lie-Algebra $\mathfrak{L}$ von $L(\mathfrak{A})$ sich darstellt als

$$\mathfrak{L}=[L(\mathfrak{A}),L(\mathfrak{A})]+L(\mathfrak{A})$$

[3] Für die Fälle $d=1$, $s=4$ und $d=3$, $s=2$ wissen wir bereits aus [2], daß $\mathfrak{D}$ dann nicht einfach ist. Wir wollen auf eine gesonderte Behandlung dieser Fälle verzichten und verweisen auf [2]. Im Falle $d=1$, $s=2$ ist $\mathfrak{D}$ eindimensional, also nicht halbeinfach (vgl. [4], S. 70).

[4] Dieser Schluß ist bereits in [1] verwendet.

(vgl. [2, 3] und die in [3] angegebene Literatur). Da sich $\mathfrak{A}$ nach ((Satz 6.2)) schreiben läßt als direkte Vektorraumsumme

$$\mathfrak{A} = K e + \mathfrak{A}',$$

wobei $\mathfrak{A}'$ der Assoziatorraum von $\mathfrak{A}$ ist, sieht man unmittelbar, daß auch $L(\mathfrak{A}')$ ein L.T.-System bildet, dessen einhüllende Lie-Algebra $\mathfrak{L}'$ sich darstellt als

$$\mathfrak{L}' = [L(\mathfrak{A}'), L(\mathfrak{A}')] + L(\mathfrak{A}').$$

Wir beweisen zunächst:

Satz 3.1. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine zentral-einfache Jordan-Algebra, dann ist $L(\mathfrak{A}')$ ein einfaches L.T.-System.*

Beweis. Es sei $L(\mathfrak{B})$, $\mathfrak{B}$ Unterraum von $\mathfrak{A}'$, ein Ideal im L.T.-System $L(\mathfrak{A}')$, d.h.

$$[[L(\mathfrak{B}), L(\mathfrak{A}')], L(\mathfrak{A}')] \subset L(\mathfrak{B}). \tag{3.1}$$

Da in $\mathfrak{A}$ die Identität

$$[[L(x), L(y)], L(z)] = L(x(yz) - y(xz)) \qquad \text{für alle } x, y, z \text{ aus } \mathfrak{A}$$

gilt [vgl. ((1.5))], ist (3.1) äquivalent damit, daß für b aus $\mathfrak{B}$ auch $b(yz) - y(bz)$ zu $\mathfrak{B}$ gehört; daß also $\mathfrak{B}$ invariant unter allen Transformationen der Form $L(x)L(y) - L(xy)$, $x, y \in \mathfrak{A}$, ist. Wegen $S(xy^*) = L(x)L(y) - L(xy)$ folgt hieraus mit Lemma 1.3, daß $\mathfrak{B}$ invariant unter allen Transformationen der Form $A - L(Ae)$, $A = A^* \in \mathfrak{E}$, ist. Für A setzen wir $xy^* + yx^*$ ein und erhalten, daß für $b \in \mathfrak{B}$

$$\sigma(y, b)x + \sigma(x, b)y - \sigma(x)yb - \sigma(y)xb \in \mathfrak{B} \qquad \text{für alle } x, y \in \mathfrak{A} \tag{3.2}$$

gilt.

Für $b \in \mathfrak{B}$ ist $\sigma(b) = 0$, da $\mathfrak{B}$ Unterraum von $\mathfrak{A}'$ ist. Setzen wir nun in (3.2) a) $y = x$ und b) $y = e$ ein, folgt mit $\sigma(e) = s$ für $b \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \sigma(x, b)x - \sigma(x)xb \in \mathfrak{B}, \\ &\text{b)} \quad \sigma(x, b)e - sxb \in \mathfrak{B}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wir multiplizieren (3.3) a) mit s und (3.3) b) mit $\sigma(x)$ und subtrahieren die entstehenden Gleichungen voneinander. Es folgt

$$s\sigma(x, b)x - \sigma(x)\sigma(x, b)e \in \mathfrak{B}.$$

Aus der Invarianz von $\mathfrak{B}$ bei $L(u)L(v) - L(uv)$, $u, v \in \mathfrak{A}$, folgt hieraus

$$\sigma(x, b)[u(vx) - (uv)x] \in \mathfrak{B} \qquad \text{für } b \in \mathfrak{B} \text{ und } u, v, x \in \mathfrak{A}. \tag{3.4}$$

Für x setzen wir $x + y$ in (3.4) ein und finden

$$\begin{aligned} &\sigma(y, b)[u(vx) - (uv)x] + \sigma(x, b)[u(vy) - (uv)y] \in \mathfrak{B} \\ &\qquad \text{für } b \in \mathfrak{B} \text{ und } x, y, u, v \in \mathfrak{A}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wenn $\mathfrak{B} \neq 0$ ist, dann gibt es ein $x \in \mathfrak{A}$ und ein $b \in \mathfrak{B}$ mit $\sigma(x, b) \neq 0$. Für dieses x ist nach (3.4) der Assoziator $u(vx) - (uv)x \in \mathfrak{B}$, aus (3.5) folgt nun,

daß $u(vy)-(uv)\,y\in\mathfrak{B}$ für alle $u, v, y\in\mathfrak{A}$, das bedeutet $\mathfrak{B}=\mathfrak{A}'$ [5]. Damit sind 0 und $L(\mathfrak{A}')$ die einzigen Ideale des L.T.-Systems $L(\mathfrak{A}')$ und der Satz ist bewiesen.

Nun verwenden wir den Satz 2.13 aus [3] [6], der besagt, daß die einhüllende Lie-Algebra eines einfachen L.T.-Systems einfach oder direkte Summe von 2 einfachen Lie-Algebren gleicher Dimension ist. Dieses Ergebnis kann man in unserem Fall leicht mit der in [3] benutzten Methode direkt beweisen. Dem Beweis aus [3] entnimmt man, daß $\mathfrak{L}'$ direkte Summe zweier einfacher Lie-Algebren nur dann sein kann, wenn $\dim\mathfrak{L}'=2\dim L(\mathfrak{A}')$. Nun ist

$$[L(\mathfrak{A}'), L(\mathfrak{A}')]=[L(\mathfrak{A}), L(\mathfrak{A})]=\mathfrak{D}$$

(vgl. ((Satz 5.2))) und somit wegen ((Satz 5.3))

$$\dim\mathfrak{L}'=\dim\mathfrak{D}+\dim L(\mathfrak{A}')=\frac{s(n-s)(n-1)}{n(s-2)+s^2}+n-1.$$

Die angegebene Bedingung ist nun offensichtlich äquivalent mit $s^2=n$ [7].

Zum Satz 3.1 haben wir also das

Korollar 1. *Für eine zentral-einfache Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ ist die Lie-Algebra $\mathfrak{L}'=[L(\mathfrak{A}'), L(\mathfrak{A}')]+L(\mathfrak{A}')$ einfach oder direkte Summe zweier gleichdimensionaler einfacher Algebren. Der letzte Fall kann nur auftreten, wenn $n=s^2$ ist.*

Die Anwendung auf die Ausnahme-Algebra formulieren wir in

Korollar 2. *Für die Ausnahme-Jordan-Algebra $\mathfrak{A}$ ist $[L(\mathfrak{A}'), L(\mathfrak{A}')]+L(\mathfrak{A}')$ eine einfache Lie-Algebra vom Typ E_6.*

Beweis. Für $\mathfrak{A}$ gilt $s=3$ und $n=27$, also ist die betrachtete Lie-Algebra nach dem Korollar 1 einfach. Aus ((Satz 5.3)) folgt, daß ihre Dimension 78 ist. Nun schließt man weiter wie in [1]. Es ist $\mathfrak{A}$ ein 27-dimensionaler irreduzibler $\mathfrak{L}'$-Modul, und unter den einfachen 78-dimensionalen Lie-Algebren besitzen nur solche vom Typ E_6 einen 27-dimensionalen irreduziblen Modul.

Literatur

[1] Chevalley, C., and R.D. Schafer: The exeptional simple Lie algebras F_4 and E_6. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **36**, 137–141 (1950).

[2] Jacobson, N.: Derivation algebras and multiplication algebras of semi simple Jordan algebras. Ann Math. **50**, 866–874 (1949).

[3] Lister, W.G.: A structure theory of Lie triple systems. Trans. Am. Math. Soc. **72**, 217–242 (1952).

[4] Meyberg, K.: Über die Killing-Form in Jordan-Algebren. Math. Zeitschr. **89**, 52–73 (1965).

Mathematisches Institut der Universität, 8 München, Schellingstr. 2–8

[5] Mit gleicher Methode zeigt man, daß 0, Ke, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}$ die einzigen Unterräume von $\mathfrak{A}$ sind, die bei den Transformationen $L(x)\,L(y)-L(x\,y)$ invariant sind.

[6] Den Hinweis auf diesen Satz verdanke ich Herrn O. Loos.

[7] Man kann sich nun noch überlegen, daß in diesem Fall die Lie-Algebra $\mathfrak{L}'$ auch wirklich zerfällt (vgl. [2]).