Werk

Titel: Biorthogonalentwicklungen analytischer Funktionen nach Eigenlösungen linearer Dif...

Autor: Mennicken, Reinhard; Sattler, Alfred

Jahr: 1966

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0093|log7

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

MENNICKEN, R., und A. SATTLER
Math. Zeitschr. 93, 1—36 (1966)

Biorthogonalentwicklungen analytischer Funktionen nach Eigenlösungen linearer Differentialgleichungen

REINHARD MENNICKEN und ALFRED SATTLER

Eingegangen am 24. Oktober 1965

Einleitung

In [7] hat SCHÄFKE aufgrund seiner Theorie der Eigenwertprobleme mit zwei Parametern — vgl. hierzu insbesondere [2] — ein allgemeines Entwicklungstheorem für die Hillsche Differentialgleichung

$$y''(t)+(\lambda+\Phi(t))\,y(t)=0$$

bewiesen. Durch systematische Transformation der Differentialgleichungen der speziellen Funktionen auf diese Differentialgleichung hat er hieran anschließend in [8] die Mehrzahl der bekannten Entwicklungen analytischer Funktionen nach den speziellen Funktionen als Biorthogonalreihen identifiziert.

SCHÄFKE hat dann in [9] sein Äquikonvergenzprinzip von der Theorie der Eigenwertprobleme mit zwei Parametern unabhängig dargestellt und gleichzeitig so verallgemeinert, daß sich unter anderem die Entwicklungen analytischer Funktionen in Neumannsche Reihen zweiter Art als Biorthogonalreihen erkennen ließen.

Ausgehend von der Hillschen Differentialgleichung in der Form

$$(D^2-\lambda E)\,u(x)+g(x)\,u(x)=0\,, \tag{1}$$

worin

$$D^k=\left(x\frac{d}{dx}\right)^k \qquad (k=1,2,\ldots)$$

ist und E den Einheitsoperator bezeichnet, haben wir in [3] die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$H(D^2-\lambda E)\,u(x)+G\,u(x)=0 \tag{2}$$

mit

$$H=D^2+h_1(x)\,D+h_0(x)\,E\,,$$

$$G=g_2(x)\,D^2+g_1(x)\,D+g_0(x)\,E$$

untersucht und im wesentlichen unter der Voraussetzung, daß $x=0$ singuläre Stelle der Bestimmtheit ist und die zugehörige Indexgleichung

$$(\rho^2+h_1(0)\,\rho+h_0(0))(\rho^2-\lambda)=0$$

lautet, einen entsprechenden Entwicklungssatz hergeleitet. Wie wir in [3, 4] im einzelnen gezeigt haben, läßt sich auf diesen Satz mit nur wenigen Ausnahmen die gesamte Theorie der Entwicklungen analytischer Funktionen nach Produkten spezieller Funktionen zurückführen. Nicht dazu gehören die Entwicklungen nach Produkten Mathieuscher Funktionen und der Sphäroidfunktionen, da die entsprechenden Differentialgleichungen der Form (2) in $x=0$ eine wesentliche Singularität haben.

Das Ziel dieser Arbeit ist in erster Linie die Herleitung eines umfassenden, sehr allgemeinen Entwicklungssatzes, einerseits nicht mehr beschränkt auf Differentialgleichungen zweiter oder vierter Ordnung, andererseits auch wesentliche Singularitäten zulassend.

Zu diesem Zweck machen wir zunächst in Abschnitt 1 einige nicht nur in diesem Rahmen nützliche Ergänzungen zu SCHÄFKEs Äquikonvergenzprinzip [9], wobei wir seine Bezeichnungen genau übernehmen, um unnötige Wiederholungen zu vermeiden.

Wie SCHÄFKE in [9] nachgewiesen hat, sind die Annahmen seines Prinzips für die zwei speziellen Systeme von Zahlen λ_n, λ_n', μ_{nk}, γ_k erfüllt, die dadurch gekennzeichnet sind, daß die Eigenwerte λ_n, λ_n' im wesentlichen Polynome ersten oder zweiten Grades in $(\xi+n)$ sind. Allgemeiner legen wir in 1.1 bei entsprechenden „Störparametern" μ_{nk}, γ_k für beliebiges $l=1, 2, \ldots$ Eigenwerte der Form

$$\lambda_n \sim (\xi+n)^l, \qquad \lambda_n' \sim (\xi+n)^l \tag{3}$$

zugrunde und zeigen die Gültigkeit der Annahmen, indem wir zunächst den für uns wichtigen Spezialfall

$$\lambda_n = (\xi+n)^l, \qquad \lambda_n' \sim (\xi+n)^l$$

untersuchen.

In 1.2 überlegen wir ergänzend, daß sich unter zusätzlichen, meist leicht nachprüfbaren Bedingungen die Existenz abzählbar unendlich vieler Eigenwerte λ_n' mit Hilfe der Störungsrechnung aufzeigen läßt.

In Abschnitt 2 beschäftigen wir uns in Kreisringen um $x=0$ mit Umlaufsrandwertaufgaben

$$\begin{gathered} Lu \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(x) D^\nu u(x) = 0, \\ u(x e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \xi} u(x) \end{gathered} \tag{4}$$

und den hierzu „adjungierten" Problemen

$$\begin{gathered} L^* v \equiv \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu D^\nu [a_\nu(x) v(x)] = 0, \\ v(x e^{2\pi i}) = e^{-2\pi i \xi} v(x) \end{gathered} \tag{4*}$$

sowie den entsprechenden inhomogenen Aufgaben. Durch Einführung geeigneter „Randbedingungen" können (4) und (4*) als Randwertprobleme im

üblichen Sinne aufgefaßt werden. Insbesondere zeigt sich, daß die Probleme (4) und (4*) in diesem Sinne adjungierte Randwertaufgaben sind. Aufgrund dessen erhält man in Analogie zur Theorie bei Differentialgleichungen im Reellen die von dorther bekannten Aussagen über die Gesamtheit der Lösungen von (4), (4*) und der zugehörigen inhomogenen Probleme sowie – damit verwandt – über die Invertierbarkeit des linearen Differentialoperators L. Entsprechend übertragen sich bei Auftreten eines Parameters in den Koeffizienten von L die Sätze bezüglich der Vielfachheit und Ordnung der Eigenwerte. Wie im Reellen sind die „normalen" Umlaufseigenwertprobleme durch die Übereinstimmung der Ordnung und Vielfachheit der Eigenwerte charakterisiert. Bei normalen, im Parameter linearen Umlaufseigenwertaufgaben existiert zu jedem Eigenwert ein normiertes Biorthogonalsystem von Eigenlösungen zu (4), (4*) und die Lösung der zugehörigen inhomogenen Aufgabe besitzt (im Parameter) höchstens Pole erster Ordnung mit den entsprechenden Residuen.

Wie bei der Herleitung der Entwicklungssätze für die Kapteynschen Reihen [8] und deren Verallgemeinerungen [3, 11] kann man unter recht allgemeinen Bedingungen eine Umlaufseigenwertaufgabe

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu(z)\, D^\nu y(z) + \lambda \sum_{\mu=0}^{m} b_\mu(z)\, D^\mu y(z) = 0 \qquad (0 \leqq m < n)$$

$$y(z\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \zeta} y(z) \not\equiv 0$$

auf die Form

$$H(D^l - \lambda E)\, u(x) + G\, u(x) = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

$$u(x\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \xi} u(x) \not\equiv 0 \tag{5}$$

transformieren, wobei – vgl. (1) und (2) –

$$H = D^m + h_{m-1}(x)\, D^{m-1} + \cdots + h_0(x)\, E\,,$$

$$G = g_s(x)\, D^s + g_{s-1}(x)\, D^{s-1} + \cdots + g_0(x)\, E \qquad (0 \leqq s \leqq m + l - 2)$$

ist. Dementsprechend bedeutet es keine wesentliche Einschränkung, wenn wir in Abschnitt 3 für die Entwicklungssätze (5) zugrunde legen.

Eine Umlaufseigenwertaufgabe in „Normalform" (5) ist dadurch ausgezeichnet, daß sie mit einem „ungestörten" Problem

$$H(D^l - \lambda E)\, u(x) = 0\,,$$

$$u(x\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \xi} u(x) \not\equiv 0$$

gekoppelt ist, dessen Eigenwerte und Eigenlösungen genau $\lambda_n = (\xi + n)^l$, $x_n = x^{\xi+n}$ sind, falls H als invertierbar vorausgesetzt wird. Hiervon gehen wir bei Herleitung unseres Entwicklungs-Hauptsatzes aus. Gestützt auf SCHÄFKEs Äquikonvergenzprinzip beweisen wir für das „gestörte" Problem (5) und die zugehörige adjungierte Aufgabe die Existenz abzählbar unendlich vieler Eigenwerte $\lambda'_n \sim (\xi + n)^l$ mit Eigenlösungen, die bezüglich der „Operatorbelegung H"

ein normiertes Biorthogonalsystem bilden, und vor allem die Entwickelbarkeit analytischer Funktionen mit ξ-Umlauf nach diesen Eigenfunktionen. Diskutiert wird dabei gesondert das Auftreten gleicher λ_n', also mehrfacher Eigenwerte von (5).

Abschließend wird in Verallgemeinerung von (2) insbesondere der Fall behandelt, daß die Differentialgleichung (5) bei $x=0$ eine Stelle der Bestimmtheit hat und die zugehörige Indexgleichung

$$(\rho^m+h_{m-1}(0)\rho^{m-1}+\cdots+h_0(0))(\rho^l-\lambda)=0$$

lautet, also die Eigenwerte des gestörten Problems (5) ebenfalls λ_n sind, und ein entsprechender Entwicklungssatz notiert.

1. Zu F. W. Schäfkes verallgemeinertem Äquikonvergenzprinzip

1.1. Zu den Annahmen (I) bis (V)

Allgemeiner als SCHÄFKE in [9], 2.7 betrachten wir im folgenden spezielle Systeme von Zahlen λ_n, λ_n', μ_{nk}, γ_k und zeigen, daß auch in diesen Fällen die Bedingungen (I) bis (V) erfüllt sind.

Es sei l eine natürliche Zahl, ϑ eine komplexe Zahl mit

$$0\leqq\mathfrak{Re}\,\vartheta\leqq\tfrac{1}{2}. \tag{1}$$

Die je für verschiedene n verschiedenen Eigenwerte seien

$$\begin{aligned}\lambda_n&=(\vartheta+n)^l\\ \lambda_n'&=(\vartheta+n)^l+c_n'\end{aligned}\qquad(n=\cdots,-1,0,+1,\ldots); \tag{2}$$

dabei mögen sich die c_n' mit gewissen $c>0$ und $s'\leqq l-2$ zu

$$|c_n'|\leqq c(|n|+1)^{s'}\qquad(n=\cdots,-1,0,+1,\ldots) \tag{3}$$

abschätzen lassen.

Für jedes $k=1,2,\ldots$ gelte mit geeigneten Konstanten μ_k und $r\leqq l-2$

$$|\mu_{nk}|\leqq\mu_k(|n|+1)^r\qquad(n=\cdots,-1,0,+1,\ldots). \tag{4}$$

Mit diesen μ_k und den Schranken γ_k in [9], 2.1 (9) sei dann

$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\mu_k=\gamma<\infty \tag{5}$$

erfüllt.

Für das weitere notieren wir zunächst

$$\sigma_0(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|\lambda-\lambda_n|^2}. \tag{6}$$

Aufgrund der Voraussetzung (4) haben wir

$$\sigma_k(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\mu_{nk}}{\lambda-\lambda_n}\right|^2\leqq\mu_k^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda-\lambda_n|^2}$$

und danach wegen (5)

$$\sigma(\lambda)\leqq\alpha\gamma\tau_r^{\frac{1}{2}}(\lambda) \tag{7}$$

mit

$$\tau_r(\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda-\lambda_n|^2}. \tag{8}$$

Schließlich gilt

$$\Sigma(\lambda)\leqq\alpha^2\gamma\sigma_0^{\frac{1}{2}}(\lambda)\tau_r^{\frac{1}{2}}(\lambda)\sum_{p=0}^{\infty}(\sigma(\lambda))^p. \tag{9}$$

Wegen $\sigma_0(\tau)=\tau_0(\lambda)$ ist demgemäß zum Nachweis der Eigenschaften (I) bis (V) nur $\tau_r(\lambda)$ zu untersuchen. Hierbei unterscheiden wir die beiden Fälle, daß l gerade bzw. ungerade ist.

A. l gerade.

Wir notieren als erstes einige Eigenschaften der Eigenwerte λ_n in

Hilfssatz 1.1. *Es ist*

$$\begin{aligned}\mathfrak{Re}\,\lambda_n&=P_1(\mathfrak{Re}\,\vartheta+n)\\ \mathfrak{Im}\,\lambda_n&=P_2(\mathfrak{Re}\,\vartheta+n),\end{aligned} \tag{10}$$

wobei $P_1(\xi)$ ein gerades Polynom l-ten Grades, $P_2(\xi)$ ein ungerades $(l-1)$-ten Grades in ξ bezeichnet.

Es existiert eine natürliche Zahl m_0, so daß für alle $m\geqq m_0$

$$\mathfrak{Re}\,\lambda_m\leqq\mathfrak{Re}\,\lambda_{-m-1}\leqq\mathfrak{Re}\,\lambda_{m+1} \tag{11}$$

gilt.

Beweis. Die erste Aussage ist mit

$$\lambda_n=\big((\mathfrak{Re}\,\vartheta+n)+i\,\mathfrak{Im}\,\vartheta\big)^l$$

klar. Danach existiert ein $m_0\geqq 1$, so daß $P_1(\xi)$ für $|\xi|\geqq\mathfrak{Re}\,\vartheta+m_0$ mit betraglich wachsendem Argument streng monoton wächst. Wegen

$$\mathfrak{Re}\,\vartheta\leqq 1-\mathfrak{Re}\,\vartheta\leqq 1+\mathfrak{Re}\,\vartheta,$$

also

$$m+\mathfrak{Re}\,\vartheta\leqq(m+1)-\mathfrak{Re}\,\vartheta\leqq(m+1)+\mathfrak{Re}\,\vartheta$$

gilt folglich für $m\geqq m_0$ auch die Behauptung (11).

Hilfssatz 1.2. *Für jedes $\lambda\neq\lambda_n$ ist $\tau_r(\lambda)$ endlich und stetig. Es gilt*

$$\tau_r(\lambda)\rightrightarrows 0\qquad(\mathfrak{Im}\,\lambda\to\pm\infty)$$

gleichmäßig für $\mathfrak{Re}\,\lambda\leqq\eta<\infty$.

Beweis. Die erste Aussage ist trivial, da die Reihenglieder $O(n^{-2(l-r)})$ sind. Für die zweite Aussage zerlegen wir

$$\tau_r(\lambda)=\sum_n \frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda-\lambda_n|^2}=\sum_{\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n\leqq\eta}+\sum_{\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n>\eta}.$$

Wegen

$$\frac{\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n}{n^l}\to 1 \qquad (n\to\pm\infty)$$

enthält die erste Summe höchstens endlich viele Glieder. Die zweite Summe kann wegen $\Re\mathfrak{e}\,\lambda\leqq\eta$ zu

$$\sum_{\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n>\eta}\frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda-\lambda_n|^2}\leqq\sum_{\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n>\eta}\frac{(|n|+1)^{2r}}{(\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n-\eta)^2+(\Im\mathfrak{m}\,\lambda-\Im\mathfrak{m}\,\lambda_n)^2}$$

abgeschätzt werden. Die letzte Reihe ist bezüglich $\Im\mathfrak{m}\,\lambda$ gleichmäßig konvergent, ihre Reihenglieder streben gegen Null für $\Im\mathfrak{m}\,\lambda\to\pm\infty$. Demnach hat man gleichmäßig in $\Re\mathfrak{e}\,\lambda\leqq\eta$

$$\sum_{\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n>\eta}\frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda-\lambda_n|^2}\Rightarrow 0 \qquad (\Im\mathfrak{m}\,\lambda\to\pm\infty),$$

also insgesamt die zweite Aussage bewiesen.

Hilfssatz 1.3. 1) *Es seien δ und σ nicht negative reelle Zahlen mit*

$$l\delta-\sigma>1. \tag{12}$$

Dann ist für $\kappa\neq\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n$

$$S(\kappa)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{|n|^\sigma}{|\kappa-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n|^\delta} \tag{13}$$

konvergent. Für $\kappa\to-\infty$ strebt $S(\kappa)\to 0$.

2) *Für $m=0, 1, 2, \ldots$ sei*

$$\kappa_m=\begin{cases}P_1(m+\frac{1}{2}) & (0\leqq\Re\mathfrak{e}\,\vartheta\leqq\frac{1}{4})\\ P_1(m+1) & (\frac{1}{4}<\Re\mathfrak{e}\,\vartheta\leqq\frac{1}{2}).\end{cases} \tag{14}$$

Wir behaupten: Es existiert ein $m_0\geqq 1$, so daß für alle $m\geqq m_0$ im ersten Fall

$$\Re\mathfrak{e}\,\lambda_m<\kappa_m<\Re\mathfrak{e}\,\lambda_{-m-1}\leqq\Re\mathfrak{e}\,\lambda_{m+1} \tag{15}$$

und im zweiten Fall

$$\Re\mathfrak{e}\,\lambda_m\leqq\Re\mathfrak{e}\,\lambda_{-m-1}<\kappa_m<\Re\mathfrak{e}\,\lambda_{m+1} \tag{15'}$$

gilt.

3) *Unter der (nur für $\delta>1$ zusätzlichen) Bedingung*

$$(l-1)\delta-\sigma\geqq 0 \tag{12'}$$

hat man für $m \to \infty$

$$S(\kappa_m) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{m^{(l-1)\delta-\sigma}}\right) & (\delta > 1) \\ O\left(\dfrac{1}{m^{(l-1)\delta-\sigma}} \log m\right) & (\delta = 1) \\ O\left(\dfrac{1}{m^{l\delta-\sigma-1}}\right) & (\delta < 1). \end{cases} \tag{16}$$

Vor dem Beweis notieren wir kurz zur Erläuterung: Es gilt offenbar

$$l\delta - \sigma - 1 \gtreqless (l-1)\delta - \sigma \tag{17}$$

je nachdem, ob $\delta \gtreqless 1$ ist.

Zu 1): Die Konvergenz der Reihe (13) ist klar, da die Reihenglieder $O(n^{-(l\delta-\sigma)})$ sind. Für

$$\kappa \leqq \kappa_0 < \min_n \mathfrak{Re}\, \lambda_n$$

ist $S(\kappa)$ sogar gleichmäßig konvergent. Ferner streben die Reihenglieder gegen Null für $\kappa \to -\infty$. Damit gilt aber

$$S(\kappa) \to 0 \qquad (\kappa \to -\infty).$$

Zu 2): Wegen

$$\mathfrak{Re}\, \vartheta < \tfrac{1}{2} < 1 - \mathfrak{Re}\, \vartheta \leqq 1 + \mathfrak{Re}\, \vartheta$$

bzw.

$$\mathfrak{Re}\, \vartheta \leqq 1 - \mathfrak{Re}\, \vartheta < 1 < 1 + \mathfrak{Re}\, \vartheta$$

folgt die Behauptung wie die Relation (11) in Hilfssatz 1.1.

Zu 3): Beim Beweis dieser Aussage beschränken wir uns auf den Fall $0 \leqq \mathfrak{Re}\, \vartheta \leqq \frac{1}{4}$; der andere Fall läßt sich völlig analog behandeln.

Aufgrund der Beziehung (15) schätzen wir zunächst für $m \geqq m_0$

$$\begin{aligned} S(\kappa_m) \leqq & \sum_{n=-m_0}^{m_0} \frac{|n|^\sigma}{|\kappa_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^\delta} + \\ & + 2 \sum_{n=m_0+1}^{m-1} \frac{(n+1)^\sigma}{|\mathfrak{Re}\, \lambda_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^\delta} + 2 \sum_{n=m+2}^{\infty} \frac{(n+1)^\sigma}{|\mathfrak{Re}\, \lambda_{m+1} - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^\delta} + \\ & + 2 \frac{(m+1)^\sigma}{|\kappa_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_m|^\delta} + 3 \frac{(m+2)^\sigma}{|\kappa_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_{-m-1}|^\delta} \end{aligned} \tag{18}$$

ab. Offenbar ist

$$\sum_{n=-m_0}^{m_0} \frac{|n|^\sigma}{|\kappa_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^\delta} = O\left(\frac{1}{m^l}\right) \qquad (m \to \infty). \tag{19}$$

Wegen

$$\kappa_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_m = (\tfrac{1}{2} - \mathfrak{Re}\, \vartheta)\, l\, m^{l-1} + O(m^{l-2})$$

gilt sicherlich für $m \to \infty$

$$\frac{(m+1)^\sigma}{|\kappa_m - \mathfrak{Re}\,\lambda_m|^\delta} = O\left(\frac{1}{m^{(l-1)\delta-\sigma}}\right); \tag{20}$$

ebenso zeigt man

$$\frac{(m+2)^\sigma}{|\kappa_m - \mathfrak{Re}\,\lambda_{-m-1}|^\delta} = O\left(\frac{1}{m^{(l-1)\delta-\sigma}}\right). \tag{20'}$$

Zur Abschätzung der beiden mittleren Reihen in (18) untersuchen wir für $m \to \infty$ das Verhalten der Summe

$$S_m = \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(n+1)^\sigma}{|\mathfrak{Re}\,\lambda_m - \mathfrak{Re}\,\lambda_n|^\delta}. \tag{21}$$

Es ist $\mathfrak{Re}\,\lambda_n$ ein Polynom l-ten Grades in n

$$\mathfrak{Re}\,\lambda_n = \sum_{\kappa=0}^{l} a_\kappa n^\kappa, \qquad (a_l = 1).$$

Damit wird

$$(*) \qquad \mathfrak{Re}\,\lambda_m - \mathfrak{Re}\,\lambda_n = \sum_{\kappa=1}^{l} a_\kappa (m^\kappa - n^\kappa) = (m-n) \sum_{\kappa=1}^{l} a_\kappa \sum_{\rho=0}^{\kappa-1} m^{\kappa-\rho-1} n^\rho.$$

Für $n, m = 0, 1, 2, \ldots$ läßt sich einerseits

$$\sum_{\rho=0}^{\kappa-1} m^{\kappa-\rho-1} n^\rho \leqq (m+n)^{\kappa-1} \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots, l-1),$$

andererseits mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$

$$\sum_{\rho=0}^{l-1} m^{\kappa-\rho-1} n^\rho \geqq c(m+n)^{l-1}$$

abschätzen. Wir wählen nun eine natürliche Zahl m_1, so daß für alle $m \geqq m_1$

$$\frac{c}{2} m^{l-1} - \sum_{\kappa=1}^{l-1} |a_\kappa| m^{\kappa-1} \geqq 0$$

ist. Nach (*) folgt so für alle $m \geqq m_1$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$|\mathfrak{Re}\,\lambda_m - \mathfrak{Re}\,\lambda_n| \geqq |m-n| \left(c(m+n)^{l-1} - \sum_{\kappa=1}^{l-1} |a_\kappa| (m+n)^{\kappa-1} \right)$$

$$\geqq \frac{c}{2} |m-n| (m+n)^{l-1}.$$

Schätzt man noch $(n+1)^\sigma \leqq (n+m)^\sigma$ ab, so erhält man für $m \geqq m_1$

$$S_m \leqq \left(\frac{2}{c}\right)^\delta \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{1}{|m-n|^\delta (m+n)^{(l-1)\delta-\sigma}}. \tag{22}$$

Diese letzte Summe zerlegen wir

$$\sum_{\substack{n=0\\(n\neq m)}}^{\infty} = \sum_{\substack{n=0\\(n\neq m)}}^{2m} + \sum_{n=2m+1}^{\infty}.$$

Wegen (12′) können wir

$$\sum_{\substack{n=0\\(n\neq m)}}^{2m} \leqq \frac{2}{m^{(l-1)\delta-\sigma}} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{\delta}}$$

abschätzen und gewinnen so für $m\to\infty$

$$(23)\qquad \sum_{\substack{n=0\\(n\neq m)}}^{2m} \frac{1}{|m-n|^{\delta}(n+m)^{(l-1)\delta-\sigma}} = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{m^{(l-1)\delta-\sigma}}\right) & (\delta>1)\\ O\left(\dfrac{1}{m^{(l-1)\delta-\sigma}}\log m\right) & (\delta=1)\\ O\left(\dfrac{1}{m^{l\delta-\sigma-1}}\right) & (\delta<1). \end{cases}$$

Abermals mit (12′) schätzen wir

$$\sum_{n=2m+1}^{\infty} \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{l\delta-\sigma}}$$

ab und erhalten

$$(23')\qquad \sum_{n=2m+1}^{\infty} \frac{1}{|m-n|^{\delta}(n+m)^{(l-1)\delta-\sigma}} = O\left(\frac{1}{m^{l\delta-\sigma-1}}\right) \qquad (m\to\infty).$$

Unter Berücksichtigung von (17) gewinnt man aus (18), (19), (20), (20′), (21), (22), (23) und (23′) genau die Relation (16).

Hilfssatz 1.4. *Es bezeichne für* $m=\cdots, -1, 0, +1, \ldots$

$$(24)\qquad d_m = \min_{n\neq m} |\lambda_m-\lambda_n|.$$

Dann gilt:

1) *mit einer geeigneten Konstanten* $c>0$

$$(25)\qquad d_m \geqq c(|m|+1)^{l-1} \qquad (m=0, \pm1, \ldots),$$

2) *auf dem Kreise* $|\lambda-\lambda_m|=d_m/2$ *gleichmäßig*

$$\tau_r(\lambda) = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{m^{2(l-r-1)}}\right) & (r\geqq -1)\\ O\left(\dfrac{1}{m^{2l}}\right) & (r\leqq -1). \end{cases}$$

Beweis. Es läßt sich m_0 in Hilfssatz 1.1 derart wählen, daß zusätzlich für alle $m\geqq m_0$

$$\Im\mathfrak{m}\,\lambda_m\geqq 0, \quad \Im\mathfrak{m}\,\lambda_{-m}\leqq 0 \qquad (\Im\mathfrak{m}\,\vartheta\geqq 0)$$

bzw.

$$\Im\mathfrak{m}\,\lambda_m \leqq 0, \quad \Im\mathfrak{m}\,\lambda_{-m} \geqq 0 \qquad (\Im\mathfrak{m}\,\vartheta \leqq 0)$$

gilt. Unter Benutzung der Relation (11) erhält man hiernach

$$0<|\lambda_m-\lambda_n| \leqq \begin{cases} |\lambda_m-\lambda_{-n}| & (n=m_0+1,\ldots,m-1) \\ |\lambda_m-\lambda_{-n-1}| & (n=m+1,\ldots), \end{cases} \tag{26}$$

also mit geeigneten Konstanten $c_1>0$, $c_2>0$

$$\begin{aligned} \sum_{n\neq m} \frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda_m-\lambda_n|^2} \leqq & \sum_{n=-m_0}^{m_0} \frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda_m-\lambda_n|^2} + \\ & + c_1 \sum_{n=m_0+1}^{m-1} \frac{(n+1)^{2r}}{|\lambda_m-\lambda_n|^2} + c_2 \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{(n+1)^{2r}}{|\lambda_m-\lambda_n|^2} + \\ & + \frac{(m+1)^{2r}}{|\lambda_m-\lambda_{-m}|^2} + \frac{(m+2)^{2r}}{|\lambda_m-\lambda_{-m-1}|^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Natürlich ist für $m\to\infty$ die endliche Summe $O(m^{-2l})$, wegen $\vartheta\neq 0, \neq\frac{1}{2}$ sind die beiden letzten Ausdrücke $O(m^{-2(l-r-1)})$. Zur Abschätzung der beiden mittleren Summen betrachten wir die Reihe

$$\tau'_m = \sum_{\substack{n=0 \\ (n\neq m)}}^{\infty} \frac{(n+1)^{2r}}{|\lambda_m-\lambda_n|^2}.$$

Wie in Hilfssatz 1.3 zeigt man: Es existiert ein m_1, so daß mit einem geeigneten $c>0$ für alle $m\geqq m_1$

$$\tau'_m \leqq c \sum_{\substack{n=0 \\ (n\neq m)}}^{\infty} \frac{(n+1)^{2r}}{(m-n)^2\,(m+n)^{2(l-1)}}$$

ist. Für $r\geqq -1$ schätzt man die letzte Reihe

$$\leqq \sum_{\substack{n=0 \\ (n\neq m)}}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2\,(m-n)^2\,(m+n)^{2(l-r-2)}}$$

ab. Wegen $l-r-2\geqq 0$ ist einerseits

$$\sum_{n=2m+1}^{\infty} \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2(l-r)}} = O\left(\frac{1}{m^{2(l-r)-1}}\right)$$

und andererseits

$$\sum_{\substack{n=0 \\ (n\neq m)}}^{2m} \leqq \frac{1}{m^{2(l-r-2)}} \sum_{\substack{n=0 \\ (n\neq m)}}^{2m} \frac{1}{(n+1)^2\,(n-m)^2} = O\left(\frac{1}{m^{2(l-r-1)}}\right),$$

also im Fall $r \geqq -1$

$$\tau'_m = O\left(\frac{1}{m^{2(l-r-1)}}\right) \qquad (m \to \infty).$$

Für $r \leqq -1$ läßt sich

$$\tau'_m \leqq \sum_{\substack{n=0 \\ (n \neq m)}}^{\infty} \frac{(n+1)^{-2}}{(m-n)^2 (m+n)^{2(l-1)}} = O\left(\frac{1}{m^{2l}}\right)$$

abschätzen. Insgesamt folgt daher für $m \to \infty$

$$\sum_{n \neq m} \frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda_m - \lambda_n|^2} = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{m^{2(l-r-1)}}\right) & (r \geqq -1) \\ O\left(\dfrac{1}{m^{2l}}\right) & (r \leqq -1). \end{cases} \tag{28}$$

Durch ähnliche Überlegungen zeigt man die Gültigkeit dieser Beziehung für $m \to -\infty$.

Speziell ist

$$\sum_{n \neq m} \frac{1}{|\lambda_m - \lambda_n|^2} = O\left(\frac{1}{m^{2(l-1)}}\right) \qquad (m \to \pm\infty),$$

also sicherlich

$$d_m^{-2} = \max_{n \neq m} |\lambda_m - \lambda_n|^{-2} = O\left(\frac{1}{m^{2(l-1)}}\right) \tag{29}$$

und damit (25) bewiesen.

Schließlich hat man für $|\lambda - \lambda_m| = d_m/2$

$$\tau_r(\lambda) = \frac{(|m|+1)^{2r}}{|\lambda - \lambda_m|^2} + \sum_{n \neq m} \frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda - \lambda_n|^2} \leqq 4 \frac{(|m|+1)^{2r}}{d_m^2} + 4 \sum_{n \neq m} \frac{(|n|+1)^{2r}}{|\lambda_m - \lambda_n|^2};$$

wegen (28) und (29) ist das genau die Behauptung (26).

Nach diesen Hilfsüberlegungen kommen wir zum eigentlichen Nachweis der Eigenschaften (I) bis (V):

Sei $\kappa \neq \mathfrak{Re}\, \lambda_n$. Zunächst können wir für $\mathfrak{Re}\, \lambda = \kappa$

$$\tau_r(\lambda) \leqq \sum_n \frac{(|n|+1)^{2(l-2)}}{|\kappa - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^2} \tag{30}$$

und insbesondere

$$\sigma_0(\lambda) \leqq \sum_n \frac{1}{|\kappa - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^2} \tag{30'}$$

abschätzen.

Weiter ist

$$I(\kappa) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_0^{\frac{1}{2}}(\lambda)\, \tau_r^{\frac{1}{2}}(\lambda)\, d\sigma \qquad (\lambda = \kappa + i\sigma) \tag{31}$$

zu untersuchen. Wir setzen

$$\rho=\max_n\left|\frac{\Im\mathfrak{m}\,\lambda_n}{\kappa-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n}\right|^2,\qquad \omega=\frac{1}{2\rho+1};$$

wegen $0\leqq\rho<\infty$ ist $0<\omega\leqq 1$. Hiermit läßt sich für alle $n=\cdots,-1,0,+1,\ldots$

$$|\lambda-\lambda_n|^2\geqq\omega\,\sigma^2+\tfrac{1}{2}\,a_n^2\qquad(a_n=\kappa-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n)$$

erreichen. Für $a\geqq\varepsilon>0$, $b>0$ und beliebige reelle positive Zahlen

$$p,q\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

gilt

$$\frac{1}{a+b}\leqq\frac{1}{a^{1/p}(b+\varepsilon)^{1/q}}.$$

Mit

$$a=a_n^2,\qquad b=2\omega\sigma^2,\qquad \varepsilon=\min_n a_n^2>0$$

erhält man aufgrund dieser Ungleichung

$$\frac{1}{2\omega\sigma^2+a_n^2}\leqq\frac{1}{a_n^{2/p}(2\omega\sigma^2+\varepsilon)^{1/q}}$$

und hiernach mit geeigneten p_1, q_1 und p_2, q_2

$$(32)\qquad I(\kappa)\leqq\left(\sum_n\frac{1}{|a_n|^{2/p_1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_n\frac{(|n|+1)^{2(l-2)}}{|a_n|^{2/p_2}}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\,d\sigma}{(2\omega\sigma^2+\varepsilon)^{\frac{1}{2}(1/q_1+1/q_2)}}.$$

Für die Konvergenz des Integrals ist

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}>1,$$

für die Konvergenz der beiden Summen

$$(*)\qquad\frac{1}{2l}<\frac{1}{p_1}\,(<1),\qquad\frac{2l-3}{2l}<\frac{1}{p_2}\,(<1)$$

zu fordern; wegen

$$\frac{1}{q_1}<1-\frac{1}{2l},\qquad\frac{1}{q_2}<\frac{3}{2l},\quad\text{also}\quad\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}<1+\frac{1}{l}$$

sind diese Bedingungen miteinander verträglich.

Aufgrund des Hilfssatzes 1.3 ($\delta=2$, $\sigma=2(l-2)$ bzw. $=0$) gilt nach (30) bzw. (30′) für $\Re\mathfrak{e}\,\lambda=\kappa_m$ gleichmäßig in $\Im\mathfrak{m}\,\lambda$

$$\tau_r(\lambda)=O\left(\frac{1}{m^2}\right),\qquad\sigma_0(\lambda)=O\left(\frac{1}{m^{2(l-1)}}\right)\qquad(m\to\infty).$$

Weiter folgt nach Hilfssatz 1.3 ($\delta=2$, $\sigma=2(l-1)$) für $m\to\infty$

$$\sum_n \left|\frac{\Im\mathfrak{m}\,\lambda_n}{\kappa_m-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n}\right|^2=O(1),$$

also insbesondere mit geeignetem $\hat\rho$ für alle (hinreichend großen) m

$$\rho_m=\max_n\left|\frac{\Im\mathfrak{m}\,\lambda_n}{\kappa_m-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n}\right|^2\leqq\hat\rho$$

und demgemäß

$$\omega_m=\frac{1}{2\rho_m+1}\geqq\frac{1}{2\hat\rho+1}=\hat\omega>0.$$

Erst recht hat man für alle (hinreichend großen) m

$$\varepsilon_m=\min_n(\kappa_m-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n)^2\geqq\hat\varepsilon>0.$$

Aufgrund dessen ist das Integral in (32) $O(1)$ für $m\to\infty$.

Statt (*) fordern wir stärker

$$(**)\qquad \frac{1}{2l}<\frac{1}{p_1}<\frac{1}{2},\qquad \frac{2l-3}{2(l-1)}<\frac{1}{p_2}(<1),$$

was wegen

$$\frac{1}{q_1}<1-\frac{1}{2l},\qquad \frac{1}{q_2}<\frac{1}{2(l-1)},\quad\text{also}\quad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}<1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{l-1}-\frac{1}{l}\right)$$

möglich ist. Abermals nach Hilfssatz 1.3 folgt dann mit $\delta=2/p_1<1$, $\sigma=0$

$$\sum_n\frac{1}{|\kappa_m-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n|^{2/p_1}}=O\left(\frac{1}{m^{l\frac{2}{p_1}-1}}\right)\to 0$$

und mit $\delta=2/p_2>1$, $\sigma=2(l-2)$

$$\sum_n\frac{(|n|+1)^{2(l-2)}}{|\kappa_m-\Re\mathfrak{e}\,\lambda_n|^{2/p_2}}=O\left(\frac{1}{m^{(l-1)\frac{2}{p_2}-2(l-2)}}\right)\to 0$$

für $m\to\infty$.

Schließlich ist es unter Benutzung der ersten Aussage in Hilfssatz 1.3 und nach Hilfssatz 1.2 möglich, Zahlen κ'_m und ι_m anzugeben, so daß insgesamt das aus den Strecken

$$\Re\mathfrak{e}\,\lambda=\kappa_m,\quad \Im\mathfrak{m}\,\lambda=\iota_m,\quad \Re\mathfrak{e}\,\lambda=\kappa'_m,\quad \Im\mathfrak{m}\,\lambda=-\iota_m$$

gebildete Rechteck die nachstehenden Eigenschaften hat:

a) Für alle hinreichend großen m, $m\geqq m_1$ werden genau die λ_n und λ'_n mit $-m-m'\leqq n\leqq m$ umschlossen; dabei ist $m'=0$ für $0\leqq\Re\mathfrak{e}\,\vartheta\leqq\frac{1}{4}$ und $m'=1$ für $\frac{1}{4}<\Re\mathfrak{e}\,\vartheta\leqq\frac{1}{2}$.

b) Bei gegebenem η $(0<\eta<1)$ ist auf $\mathfrak{C}_m$ für alle hinreichend großen m, $m\geqq m_1$

$$\sigma(\lambda)\leqq\eta\,.$$

c) Es gilt für $m\to\infty$

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_m}\sum(\lambda)\,|d\lambda|\to 0\,.$$

So ist die Annahme (IV) mit den Bedingungen (I), (II), (III) erfüllt. Zur Bestätigung von (V) wählen wir als $\mathfrak{K}_n$ den Kreis

$$|\lambda-\lambda_n|=\frac{d_n}{2}\,.$$

Mit geeigneten m_1 und η $(0<\eta<1)$ ergibt sich nach Hilfssatz 1.4 sofort:

a') Für alle $|n|\geqq m_1$ umschließt $\mathfrak{K}_n$ genau λ_n und λ_n'.

b') Auf $\mathfrak{K}_n$ gilt

$$\sigma(\lambda)\leqq\eta\qquad(|n|\geqq m_1)\,.$$

c') Für $n\to\pm\infty$ ist

$$\int\limits_{\mathfrak{K}_n}\sum(\lambda)\,|d\lambda|=\begin{cases}O\left(\dfrac{1}{n^{l-r-1}}\right) & (r\geqq -1)\\ O\left(\dfrac{1}{n^{l}}\right) & (r\leqq -1)\,.\end{cases}$$

Also ist auch (V) klar.

B. *l* ungerade.

Wir notieren zunächst die entsprechenden Hilfssätze, wobei wir auf die vollständige Durchführung der Beweise verzichten, jedoch kurz auf die wesentlichen Änderungen hinweisen.

Hilfssatz 1.1'. *Es ist*

$$\mathfrak{Re}\,\lambda_n=P_1(\mathfrak{Re}\,\vartheta+n)\,,\qquad \mathfrak{Im}\,\lambda_n=P_2(\mathfrak{Re}\,\vartheta+n)\,,$$

wobei $P_1(\xi)$ ein ungerades Polynom l-ten Grades, $P_2(\xi)$ ein gerades Polynom $(l-1)$-ten Grades in ξ bezeichnet.

Es existiert eine natürliche Zahl m_0, so daß für alle $m\geqq m_0$

$$\mathfrak{Re}\,\lambda_{-m-1}<\mathfrak{Re}\,\lambda_{-m}<0<\mathfrak{Re}\,\lambda_m<\mathfrak{Re}\,\lambda_{m+1}$$

gilt.

Hilfssatz 1.2'. *Für jedes $\lambda\neq\lambda_n$ ist $\tau_r(\lambda)$ endlich und stetig. Es gilt*

$$\tau_r(\lambda)\rightrightarrows 0\qquad(\mathfrak{Im}\,\lambda\to\pm\infty)$$

gleichmäßig in $|\mathfrak{Re}\,\lambda|\leqq\eta<\infty$.

Zum Beweis der zweiten Aussage zerlegt man hier

$$\tau_r(\lambda)=\sum_{|\mathfrak{Re}\,\lambda_n|\leqq\eta}+\sum_{\mathfrak{Re}\,\lambda_n>\eta}+\sum_{\mathfrak{Re}\,\lambda_n<-\eta}\,.$$

Hilfssatz 1.3′. 1) *Es seien δ und σ nicht-negative reelle Zahlen mit $l\delta-\sigma>1$. Dann ist für $\kappa \neq \mathfrak{Re}\,\lambda_n$*

$$S(\kappa)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{|n|^{\sigma}}{|\kappa-\mathfrak{Re}\,\lambda_n|^{\delta}}$$

konvergent.

2) *Für $m=0, 1, 2, \ldots$ sei $\kappa_m=P_1(m+\frac{3}{4})$, $\kappa'_m=-P_1(m+\frac{1}{4})$. Es existiert ein $m_0\geqq 1$, so daß für alle $m\geqq m_0$*

$$\mathfrak{Re}\,\lambda_{-m-1}<\kappa'_m<\mathfrak{Re}\,\lambda_{-m}<0<\mathfrak{Re}\,\lambda_m<\kappa_m<\mathfrak{Re}\,\lambda_{m+1}$$

gilt.

3) *Unter der (eventuell zusätzlichen) Bedingung $(l-1)\,\delta-\sigma\geqq 0$ hat man für $m\to\infty$*

$$\left.\begin{matrix}S(\kappa'_m)\\ S(\kappa_m)\end{matrix}\right\}=\begin{cases}O\left(\dfrac{1}{m^{(l-1)\,\delta-\sigma}}\right) & (\delta>1)\\ O\left(\dfrac{1}{m^{(l-1)\,\delta-\sigma}}\log m\right) & (\delta=1)\\ O\left(\dfrac{1}{m^{l\,\delta-\sigma-1}}\right) & (\delta<1)\,.\end{cases}$$

Die Aussagen 1) und 2) sind unmittelbar klar. Die Behauptung 3) bezüglich κ_m beweist man wie in Teil A mit der zweiten Aussage des Hilfssatzes 1.1′, die entsprechende bezüglich κ'_m analog, indem man noch beachtet, daß die Bedingung $0\leqq\mathfrak{Re}\,\vartheta\leqq\frac{1}{2}$ bei der Untersuchung der Reihe (21) nicht benutzt wurde.

Der Hilfssatz 1.4 bleibt unverändert bestehen und sei deshalb nicht noch einmal notiert. Zum Beweis vermerken wir:

Wir können in Hilfssatz 1.1′ m_0 so wählen, daß für alle $m\geqq m_0$ zusätzlich

$$0\leqq\mathfrak{Im}\,\lambda_m\leqq\mathfrak{Im}\,\lambda_{-m-1}\leqq\mathfrak{Im}\,\lambda_{m+1}\qquad(\mathfrak{Im}\,\vartheta\geqq 0)$$

bzw.

$$0\geqq\mathfrak{Im}\,\lambda_m\geqq\mathfrak{Im}\,\lambda_{-m-1}\geqq\mathfrak{Im}\,\lambda_{m+1}\qquad(\mathfrak{Im}\,\vartheta\leqq 0)$$

gilt. Mithin hat man wie in Teil A

$$0<|\lambda_m-\lambda_n|\leqq\begin{cases}|\lambda_m-\lambda_{-n}| & (n=m_0+1,\ldots,m-1)\\ |\lambda_m-\lambda_{-n-1}| & (n=m+1,\ldots)\end{cases}$$

und daher (27). Bei den daran anschließenden Überlegungen wird hier $\vartheta\neq 0, \pm\frac{1}{2}$ nicht benötigt.

Man wählt nun als $\mathfrak{C}_m$ das von

$$\mathfrak{Re}\,\lambda=\kappa_m,\quad \mathfrak{Im}\,\lambda=\iota_m,\quad \mathfrak{Re}\,\lambda=\kappa'_m,\quad \mathfrak{Im}\,\lambda=-\iota_m$$

mit genügend großem ι_m gebildete Rechteck. Dann gilt:

a) Für alle hinreichend großen m, $m \geqq m_1$ werden genau die λ_n und λ_n' mit $|n| \leqq m$ umschlossen.

b) Bei gegebenem η $(0<\eta<1)$ ist auf $\mathfrak{C}_m$ für alle hinreichend großen m, $m \geqq m_1$

$$\sigma(\lambda) \leqq \eta .$$

c) Es gilt für $m \to \infty$

$$\int_{\mathfrak{C}_m} \sum(\lambda)\, |d\lambda| \to 0 .$$

Für $l>1$ beweist man diese Aussage unter Benutzung der Hilfssätze 1.2′ und 1.3′ wie die entsprechende Aussage in Teil A. Im Fall $l=1$ ist die Forderung (**) sinnlos; man verlangt hier

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{p_1}<1$$

und wählt p_2, q_2 so, daß die Ungleichung

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}>1$$

erfüllt ist. Dann ist nach Hilfssatz 1.3′

$$\sum_n \frac{1}{|\kappa_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^{2/p_1}} = O(1) \qquad (m \to \infty);$$

ferner hat man

$$\sum_n \frac{1}{(|n|+1)^2\, |\kappa_m - \mathfrak{Re}\, \lambda_n|^{2/p_2}} = O\left(\frac{1}{m^{2/p_2}}\right) \qquad (m \to \infty).$$

Insgesamt gilt daher aufgrund der Abschätzung (32) $I(\kappa_m) \to 0$ $(m \to \infty)$. Ebenso zeigt man $I(\kappa_m') \to 0$ $(m \to \infty)$.

Folglich ist die Annahme (IV) mit (I), (II) und (III) auch in diesem Fall erfüllt; (V) bestätigt man wie in Teil A.

Zum Abschluß dieses Abschnittes vermerken wir: Die Annahmen (I) bis (V) sind auch dann noch erfüllt, wenn man statt der λ_n allgemeiner die für verschiedene n verschiedenen Zahlen $\tilde{\lambda}_n=(\vartheta+n)^l+c_n$ zugrunde legt; dabei sei mit einem gewissen $s \leqq l-2$ $c_n=O(n^s)$ $(n \to \pm\infty)$ und für gerades l zusätzlich $\vartheta \neq 0, \pm\frac{1}{2}$.

Hierzu überlegen wir kurz: Hilfssatz 1.2 bzw. 1.2′ bleibt natürlich auch hier gültig; ebenso die Aussage 1) in Hilfssatz 1.3 bzw. 1.3′. Anstelle der Relation (15) bzw. (15′) in Hilfssatz 1.3 hat man

$$\mathfrak{Re}\, \tilde{\lambda}_m < \kappa_m < \mathfrak{Re}\, \tilde{\lambda}_{-m-1},\ \mathfrak{Re}\, \tilde{\lambda}_{m+1}$$

bzw.

$$\mathfrak{Re}\, \tilde{\lambda}_m,\ \mathfrak{Re}\, \tilde{\lambda}_{-m-1} < \kappa_m < \mathfrak{Re}\, \tilde{\lambda}_{m+1}.$$

Dementsprechend ist der Beweis der dortigen Behauptung 3) abzuändern. In Hilfssatz 1.3′ bleibt die entsprechende Aussage 2) und daher der Beweis zur Behauptung 3) ohne Änderung richtig. Hilfssatz 1.4 ist auch in diesem

Falle gültig, da man mit geeigneten Konstanten $c_1>0$, $c_2>0$ für alle hinreichend großen n und m $(n, m \geqq m_0)$

$$|\lambda_m-\lambda_n| \leqq c_1 |\tilde{\lambda}_m-\tilde{\lambda}_n| \leqq c_2 \cdot \begin{cases} |\tilde{\lambda}_m-\tilde{\lambda}_{-n}| & (m_0<n<m) \\ |\tilde{\lambda}_m-\tilde{\lambda}_{-n-1}| & (m<n) \end{cases}$$

abschätzen kann.

1.2. Zu den Eigenwerten λ_n'

Die Voraussetzungen von SCHÄFKEs verallgemeinertem Äquikonvergenzprinzip [9], 2.1 seien gegeben mit Ausnahme der Forderungen bezüglich λ_n' – das sind die dortigen Beziehungen (4), (5), (7) und (13) – und der Annahmen über die analytischen Eigenschaften von $z_0(\lambda)$. Die dabei auftretenden Zahlen λ_n, μ_{nk}, γ_k mögen den Bedingungen des vorangehenden Abschnittes 1.1 genügen.

Zur Untersuchung der Eigenwertaufgabe

$$\begin{aligned} F y+\lambda H y &= G y \qquad (y \in \mathfrak{U},\ \neq 0) \\ F^* y^*+\lambda H^* y^* &= G^* y^* \qquad (y^* \in \mathfrak{U}^*,\ \neq 0) \end{aligned} \tag{33}$$

betten wir diese in die zweiparametrige Eigenwertaufgabe

$$\begin{aligned} F y+\lambda H y &= \mu G y \qquad (y \in \mathfrak{U},\ \neq 0) \\ F^* y^*+\lambda H^* y^* &= \mu G^* y^* \qquad (y^* \in \mathfrak{U}^*,\ \neq 0) \end{aligned} \tag{33}_\mu$$

ein und legen hierfür die nachstehenden Voraussetzungen zugrunde:

(A) Es gibt eine ganze Funktion $\Delta(\lambda, \mu)$ zweier komplexer Variablen derart, daß $\Delta(\lambda, \mu)=0$ für das Bestehen einer der Gleichungen $(33)_\mu$ notwendig, für das bestehen beider Gleichungen $(33)_\mu$ hinreichend ist.

Es ist somit (λ, μ) genau dann Eigenwertpaar zu $(33)_\mu$, wenn $\Delta(\lambda, \mu)=0$ gilt.

(B) Zu $\mu=0$ seien die λ_n sämtliche Eigenwerte, und zwar alle einfache Nullstellen von $\Delta(\lambda, 0)$.

Nach SCHÄFKE [9] 2.2 (16) ist für $\lambda \neq \lambda_n$

$$\| R_0(\lambda) G \| \leqq \sigma(\lambda); \tag{34}$$

aufgrund der Überlegungen in Abschnitt 1.1 kann dabei $\sigma(\lambda) \leqq \alpha \gamma \tau_r^{\frac{1}{2}}(\lambda) < \infty$ abgeschätzt werden.

Sei (λ, μ) Eigenwertpaar, $y \neq 0$ zugehörige Eigenlösung, also

$$F y+\lambda H y=\mu G y.$$

Schreibt man für $\lambda \neq \lambda_n$ $y=R_0(\lambda) G(\mu y)$, so folgt nach der obigen Relation (34) sofort $0<\|y\| \leqq \alpha \gamma \tau_r^{\frac{1}{2}}(\lambda) |\mu| \|y\|$. Verabreden wir zusätzlich $\tau_r^{-\frac{1}{2}}(\lambda_n)=0$, so ist damit für jedes Eigenwertpaar (λ, μ)

$$\tau_r^{-\frac{1}{2}}(\lambda) \leqq \alpha \gamma |\mu| \tag{35}$$

bewiesen.

Aufgrund dieser Ungleichung und unter Benutzung des obigen Hilfssatzes 1.4 gewinnt man fast wörtlich wie SCHÄFKE in [2, 6] bzw. [7] die folgenden allgemeinen Aussagen über die Gesamtheit der Eigenwertpaare:

Für jedes n läßt sich $\Delta(\lambda, \mu)=0$ um $\lambda=\lambda_n$, $\mu=0$ durch eine Potenzreihe

$$\lambda_n(\mu)=\lambda_n+\lambda_{n1}\mu+\lambda_{n2}\mu^2+\cdots \tag{36}$$

auflösen. Mit einer geeigneten Konstanten $c>0$ gilt für die Konvergenzradien ρ_n die Abschätzung

$$\rho_n \geqq c(|n|+1)^{\theta}, \quad \theta=\begin{cases} l-r-1 & (-1\leqq r\leqq l-2) \\ l & (r\leqq -1) \end{cases} \tag{37}$$

und mit

$$d_n=\min_{k\neq n}|\lambda_n-\lambda_k|$$

für die Koeffizienten

$$|\lambda_{np}|\leqq\frac{d_n}{2\rho_n^p} \qquad (p=1, 2, \ldots). \tag{38}$$

Daher ist für jedes μ bei $n\to\pm\infty$

$$\lambda_n(\mu)=\lambda_n+\lambda_{n1}\mu+\cdots+\lambda_{np}\mu^p+O\left(\frac{1}{n^{(p+1)\theta-l+1}}\right), \tag{39}$$

also insbesondere

$$\lambda_n(\mu)=\lambda_n+O(n^r) \qquad \text{im Falle } -1\leqq r\leqq l-2, \tag{40}$$

$$\lambda_n(\mu)=\lambda_n+O(n^{-1}) \qquad \text{für } r\leqq -1. \tag{40'}$$

Die so erhaltenen Funktionselemente lassen sich – Verzweigungen endlicher Ordnung zugelassen – längs jedes Weges der komplexen λ-Ebene analytisch fortsetzen. Man erhält so in den $(\lambda_n(\mu), \mu)$ die Gesamtheit der Eigenwertpaare.

Die Spurpunkte der Verzweigungsstellen besitzen keinen endlichen Häufungspunkt. Zieht man z. B. von jedem Verzweigungspunkt μ_0 (natürlich $\neq 0$) den Schnitt (bezüglich 0) radial nach ∞ und rechnet den Schnitt jeweils zu einem bestimmten Ufer, so sind hierdurch (Verbot der Überschreitung der Schnitte bei analytischer Fortsetzung) die Funktionen $\lambda_n(\mu)$ in der μ-Ebene eindeutig definiert.

Die „Ausnahmewerte" μ_0, für die einmal $\lambda_{n_1}(\mu_0)=\lambda_{n_2}(\mu_0)$ $(n_1\neq n_2)$ im eben definierten Sinne wird, haben keinen endlichen Häufungspunkt.

Im Hinblick auf das Eigenwertproblem (33) fordern wir:

(C) $\Delta(\lambda, 1)$ besitze höchstens einfache Nullstellen.

Aufgrund dessen sind sämtliche $\lambda_n'=\lambda_n(1)$ verschieden, also unter Berücksichtigung von (40) bzw. (40') dann auch in 1.1 die Voraussetzungen (2), (3) bezüglich λ_n' erfüllt.

2. Über lineare Differentialoperatoren

2.1. Umlaufsrandwertaufgaben

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{R}$ die Gesamtheit der im Kreisring

$$\Re=\{x\,|\,0\leqq r_1<|x|<r_2\leqq\infty\} \tag{1}$$

(nicht notwendig eindeutig) analytischen Funktionen und mit $\mathfrak{R}_\xi$ speziell den linearen Teilraum der dort analytischen Funktionen $u(x)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$u(x\,e^{2\pi i})=e^{2\pi i\xi}u(x)\,. \tag{2}$$

Sind die Funktionen $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ aus $\mathfrak{R}$, so ist mit

$$Ly=\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\,D^k y(x)\,,\qquad D=x\frac{d}{dx} \tag{3}$$

eine lineare Abbildung von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}$ definiert. Sind die Koeffizientenfunktionen aus $\mathfrak{R}_0$, also in $\Re$ eindeutig analytisch – dies sei im weiteren stets angenommen –, so ist L ein linearer Operator in $\mathfrak{R}_\xi$. Im folgenden sei zusätzlich $a_n(x)\neq 0$ in $\Re$.

Wir betrachten nun die homogene *Umlaufsrandwertaufgabe*

$$Lu=0\,,\qquad u\in\mathfrak{R}_\xi \tag{4}$$

und für $f\in\mathfrak{R}_\xi$, $\neq 0$ die zugehörige inhomogene

$$Lu=f,\qquad u\in\mathfrak{R}_\xi\,. \tag{4}_{\mathrm{I}}$$

Zu beliebigem, aber festem x_0 aus $\Re$ sei

$$U_j[u]=D^{j-1}u(x_0\,e^{2\pi i})-e^{2\pi i\xi}D^{j-1}u(x_0)\qquad(j=1,2,\ldots,n)\,. \tag{5}$$

Es ist dann offenbar $u(x)$ Lösung von (4) bzw. $(4)_{\mathrm{I}}$ genau dann, wenn $u(x)$ der „Randwertaufgabe"

$$Lu=0\,,\quad U_j[u]=0\qquad(j=1,2,\ldots,n) \tag{6}$$

bzw.

$$Lu=f,\quad U_j[u]=0\qquad(j=1,2,\ldots,n) \tag{6}_{\mathrm{I}}$$

genügt.

Sei $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ (aus $\mathfrak{R}$) ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung (Dgl)

$$Lu=0 \tag{7}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$D^{j-1}u_i(x_0)=\delta_{ij}\qquad(i,j=1,2,\ldots,n)$$

und $u_0(x)$ die Lösung (Lsg) der inhomogenen Dgl

$$Lu=f \tag{7}_{\mathrm{I}}$$

mit

$$D^{j-1}u_0(x_0)=0 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

Hiermit führen wir die sogenannte charakteristische Matrix

$$M_\xi=(U_j[u_i])_{(n,n)} \qquad (i,j=1,2,\ldots,n) \tag{8}$$

sowie die zugehörige charakteristische Determinante

$$\Delta_\xi=\det M_\xi \tag{9}$$

ein. Übergang zu einem anderen Fundamentalsystem von (4), also etwa zu einem anderen x_0 aus $\mathfrak{K}$ bedeutet Multiplikation der charakteristischen Matrix mit einer invertierbaren Matrix und folglich Multiplikation der charakteristischen Determinante mit einem von Null verschiedenen Faktor. Schließlich definieren wir noch die erweiterte Matrix

$$M_\xi^e=(U_j[u_i])_{(n+1,n)} \qquad (i=0,1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n). \tag{10}$$

Damit beweist man wie bei den üblichen Randwertproblemen im Reellen (vgl. KAMKE [1], p. 228) den

Satz 2.1. *Die Gesamtheit der Lsgn von* (4) *bildet einen linearen Teilraum* $\mathfrak{N}_\xi\subseteq\mathfrak{R}_\xi$ *endlicher Dimension:*

$$\dim\mathfrak{N}_\xi=n-\operatorname{rg}M_\xi \qquad (\text{rg}=\text{Rang}).$$

Die homogene Randwertaufgabe (4) *besitzt also nicht-triviale Lsgn genau dann, wenn* $\Delta_\xi=0$ *ist.*

Die inhomogene Randwertaufgabe $(4)_\text{I}$ *ist genau dann lösbar, wenn* $\operatorname{rg}M_\xi^e=\operatorname{rg}M_\xi$ *gilt. Ist* y_0 *eine spezielle Lsg von* $(4)_\text{I}$, *so ist* $\mathfrak{Y}_\xi=y_0+\mathfrak{N}_\xi$ *die Gesamtheit ihrer Lsgn; sie ist also eindeutig lösbar, wenn* Δ_ξ *nicht verschwindet.*

Im Fall $\Delta_\xi\neq0$ ist mithin L als linearer Operator in $\mathfrak{R}_\xi$ invertierbar. Wir geben im folgenden eine Darstellung des inversen (linearen) Operators L^{-1}, wobei wir zur Herleitung $a_n(x)\equiv1$ annehmen.

Wir betrachten demnach bei vorgegebenem $f\in\mathfrak{R}_\xi$ die Umlaufsrandwertaufgabe

$$D^n z(x)+a_{n-1}(x)D^{n-1}z(x)+\cdots+a_0(x)z(x)=f(x),$$

$$z(x\,e^{2\pi i})=e^{2\pi i\xi}z(x) \qquad (x\in\mathfrak{K}).$$

Dieses Problem ist mit

$$A(x)=\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \\ & & & 1 \\ -a_0(x) & \cdots & & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}_{(n,n)}, \qquad \mathfrak{f}(x)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

mittels der Substitution

$$\mathfrak{z}(x)=(z_k(x))_{(n,1)}, \qquad z_1(x)=z(x), \ldots, z_n(x)=D^{n-1}z(x)$$

äquivalent zu

$$D\mathfrak{z}(x)=A(x)\mathfrak{z}(x)+\mathfrak{f}(x),$$

$$\mathfrak{z}(x e^{2\pi i})=e^{2\pi i\xi}\mathfrak{z}(x) \qquad (x\in\mathfrak{R}).$$

Es bezeichne nun $W(x)$ die Wronski-Matrix des Fundamentalsystems $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$. Wegen

$$DW(x)=A(x)W(x), \qquad W(x_0)=E$$

hat man

$$W(x e^{2\pi i})=W(x)C, \qquad C=W(x_0 e^{2\pi i})$$

und daher insbesondere

$$M_\xi=(C-e^{2\pi i\xi}E).$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$D\mathfrak{z}(x)=A(x)\mathfrak{z}(x)+\mathfrak{f}(x), \qquad \mathfrak{z}(x_0)=0$$

gewinnt man wie bekannt mit der Methode der Variation der Konstanten. Man geht also mit dem Ansatz $\mathfrak{z}(x)=W(x)\,\mathfrak{c}(x)$ in das Dgl-System hinein und erhält

$$D\mathfrak{c}(x)=W^{-1}(x)\mathfrak{f}(x)$$

und hiernach durch Integration

$$\mathfrak{z}(x)=W(x)\int_{x_0}^{x}W^{-1}(t)\mathfrak{f}(t)\frac{dt}{t}.$$

Die Umlaufsbedingung wird von $\mathfrak{z}(x)$ genau dann erfüllt, wenn

$$M_\xi\int_{x_0}^{x}W^{-1}(t)\mathfrak{f}(t)\frac{dt}{t}=-C\int_{x}^{x e^{2\pi i}}W^{-1}(t)\mathfrak{f}(t)\frac{dt}{t}$$

und somit

$$\mathfrak{z}(x)=-W(x)M_\xi^{-1}C\int_{x}^{x e^{2\pi i}}W^{-1}(t)\mathfrak{f}(t)\frac{dt}{t}$$

gilt.

Bezeichnet $\{\mathfrak{a}\}_k$ die k-te Komponente des $(n, 1)$-Vektors $\mathfrak{a}$, so folgt

Satz 2.2. *Der Differentialoperator L ist in $\mathfrak{R}_\xi$ invertierbar genau dann, wenn Δ_ξ nicht verschwindet.*

Im Falle der Existenz des inversen Operators L^{-1} gilt

$$z(x)=(L^{-1}f)(x)=-\left\{W(x)M_\xi^{-1}C\int_{x}^{x e^{2\pi i}}a_n^{-1}(t)W^{-1}(t)\mathfrak{f}(t)\frac{dt}{t}\right\}_1$$

bzw. allgemeiner für $k=0, 1, \ldots, n-1$

$$D^k z(x)=D^k(L^{-1}f)(x)=-\left\{W(x)\,M_\xi^{-1}\,C\int_x^{x\,e^{2\pi i}} a_n^{-1}(t)\,W^{-1}(t)\,\mathfrak{f}(t)\,\frac{dt}{t}\right\}_{k+1}.$$

Aufgrund dieses Satzes ist speziell $L=D$ in $\mathfrak{R}_\xi \neq \mathfrak{R}_0$ invertierbar. Setzt man $S=D^{-1}$ – vgl. [3], p. 6 –, so folgt

$$(Sf)(x)=\frac{1}{e^{2\pi i\xi}-1}\int_x^{x\,e^{2\pi i}} f(t)\,\frac{dt}{t}.$$

Wir wählen nun $r_1<\rho_1<\rho_2<r_2$ und machen $\mathfrak{R}_\xi$ durch

$$\mathfrak{R}_1=\{x\,|\,\rho_1\leqq|x|\leqq\rho_2;\ |\arg x|\leqq\pi\},$$

$$\|u\|=\max\{|u(x)|\,|\,x\in\mathfrak{R}_1\}$$

zu einem linearen normierten Raum. Wie wir in [3], p. 11 gezeigt haben, ist der S-Operator in $\mathfrak{R}_\xi \neq \mathfrak{R}_0$ bezüglich dieser Norm beschränkt. Unter der Voraussetzung, daß L in $\mathfrak{R}_\xi$ invertierbar ist, beweisen wir hier allgemeiner den

Satz 2.3. *Für alle* $k, l=0, 1, 2, \ldots$ *mit* $k+l\leqq n$ *ist der lineare Operator* $(D^k L^{-1} D^l)$ *in* $\mathfrak{R}_\xi$ *bezüglich der Norm* $\|\ \|$ *beschränkt.*

Nachzuweisen ist die Existenz einer Konstanten $\gamma>0$, so daß für alle f aus $\mathfrak{R}_\xi$

$$\|(D^k L^{-1} D^l)f\|\leqq\gamma\,\|f\|$$

abschätzbar ist. Wie man sich überlegt, kann hierbei wieder $a_n(x)\equiv 1$ angenommen werden.

Im Fall $l=0$ gilt für $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$ nach Satz 2.2

$$(D^k L^{-1} f)(x)=-\left\{W(x)\,M_\xi^{-1}\,C\int_x^{x\,e^{2\pi i}} W^{-1}(t)\,\mathfrak{f}(t)\,\frac{dt}{t}\right\}_{k+1}.$$

Dies schätzt man ähnlich wie den S-Operator in [3], p. 11 ab; mit einer geeigneten Konstanten $\omega_1>0$ wird für alle $f\in\mathfrak{R}_\xi$

$$\|D^k L^{-1} f\|\leqq\omega_1\,\|f\|.$$

Aufgrund dessen erhält man unter Benutzung der zugehörigen Dgl mit einem gewissen $\omega_2>0$ in $\mathfrak{R}_\xi$

$$\|D^n L^{-1} f\|\leqq\omega_2\,\|f\|.$$

Damit ist der Fall $l=0$ erledigt. Wir können also

$$0\leqq k\leqq n-1,\quad 1\leqq l\leqq n,\quad k+l\leqq n$$

annehmen. Abermals nach Satz 2.2 gilt dann

$$(D^k L^{-1} D^l f)(x)=-\left\{W(x)\,M_\xi^{-1}\,C\int_x^{x\,e^{2\pi i}} W^{-1}(t)\,D^l\mathfrak{f}(t)\,\frac{dt}{t}\right\}_{k+1}.$$

Durch l-fache partielle Integration wird der Ausdruck in der geschweiften Klammer zu

$$\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^{i+1} W(x) D^i W^{-1}(x) \cdot D^{l-i-1}\mathfrak{f}(x) + \\ +(-1)^l W(x) M_\xi^{-1} C \int_x^{x e^{2\pi i}} D^l W^{-1}(t) \cdot \mathfrak{f}(t) \frac{dt}{t}.$$

Die Abschätzung der $(k+1)$-ten Komponente des letzten Termes und des letzten Gliedes der Summe ist klar. Wir behaupten, daß die $(k+1)$-te Komponente der restlichen Terme identisch in x verschwindet.

Hierzu betrachten wir für $0 \leqq i \leqq l-2$ den Vektor

$$(*) \qquad W(x) D^i W^{-1}(x) D^{l-i-1}\mathfrak{f}(x).$$

Setzt man

$$A_i(x) = W(x) D^i W^{-1}(x),$$

so folgt mit Hilfe der Differentialgleichung für $W(x)$

$$A_{i+1}(x) = D A_i(x) - A(x) A_i(x), \qquad A_0(x) = E.$$

Beachtet man die Struktur von A, so zeigt man durch vollständige Induktion: Ist $\mathfrak{a}$ ein $(n, 1)$-Spaltenvektor, dessen erste m Komponenten verschwinden, so sind mindestens die ersten $m-i$ Komponenten des Vektors $A_i\mathfrak{a}$ gleich Null. Demnach verschwinden in $(*)$ mindestens die ersten $n-l+1$ Komponenten. Aus der Bedingung $k+l \leqq n$ ergibt sich, daß unter diesen die $(k+1)$-te Komponente vorkommt.

2.2. Adjungierte Umlaufsrandwertprobleme

Der adjungierte Differentialoperator L^* zum Differentialoperator L ist durch

$$(11) \qquad L^* y = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k D^k\big(a_k(x)\, y(x)\big)$$

gegeben. Er ist wie L ein linearer Differentialoperator n-ter Ordnung in $\mathfrak{R}$. Zusammen mit L genügt er der Lagrangeschen Bilinearform

$$(12) \qquad L u \cdot v - u \cdot L^* v = D L[u, v] \qquad (u, v \in \mathfrak{R}),$$

wobei $L[u, v]$ in u, v bilinear ist und nur Ableitungen der Ordnung $\leqq n-1$ enthält. Genauer hat man

$$(13) \qquad L[u, v] = \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ \sum_{\kappa=0}^{\mu-1} (-1)^\kappa D^\kappa(a_\mu v) D^{\mu-\kappa-1} u \right\}.$$

Ferner gilt

$$L^{**} = L, \qquad (L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*, \qquad (L_1 L_2)^* = L_2^* L_1^*.$$

Es sei $\mathfrak{R}_\xi^* = \mathfrak{R}_{-\xi}$. Wir betrachten die zu (4) *adjungierte Umlaufsrandwertaufgabe*

$$L^* v = 0, \quad v \in \mathfrak{R}_\xi^*. \tag{14}$$

Die Gesamtheit ihrer Lösungen bildet einen linearen Raum $\mathfrak{N}_\xi^* \subseteq \mathfrak{R}_\xi^*$. Mit

$$V_j[v] = D^{j-1} v(x_0 e^{2\pi i}) - e^{-2\pi i \xi} D^{j-1} v(x_0) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{15}$$

ist (14) dem „Randwertproblem"

$$L^* v = 0, \quad V_j[v] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{16}$$

äquivalent.

Wir überlegen nun, daß die Bedingungen

$$V_j[v] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

als die im üblichen Sinne (vgl. KAMKE [1], p. 238) adjungierten Randbedingungen zu den

$$U_j[u] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

anzusehen sind. Hierzu gehen wir von der Relation (12) aus; danach hat man für beliebige u, v aus $\mathfrak{R}$

$$\int_{x_0}^{x_0 e^{2\pi i}} L u \cdot v \frac{dx}{x} = L[u, v]\Big|_{x_0}^{x_0 e^{2\pi i}} + \int_{x_0}^{x_0 e^{2\pi i}} u L^* v \frac{dx}{x}. \tag{17}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten $a_k(x)$ im Kreisring $\mathfrak{K}$ läßt sich

$$L[u, v]|_x^{x e^{2\pi i}} = L[u, v]|_{x e^{2\pi i}} - L[u, v]|_x$$

zu

$$L[u(x e^{2\pi i}) - e^{2\pi i \xi} u(x), v(x e^{2\pi i})] + L[e^{2\pi i \xi} u(x), v(x e^{2\pi i}) - e^{-2\pi i \xi} v(x)]$$

umformen. Unter Benutzung von (5) und (15) erhält man demgemäß

$$L[u, v]|_{x_0}^{x_0 e^{2\pi i}} = \sum_{\kappa=1}^{2n} U_\kappa[u] V_{2n-\kappa-1}[v], \tag{18}$$

wobei nach (13)

$$\begin{pmatrix} U_{n+1}[u] \\ U_{n+2}[u] \\ \vdots \\ U_{2n}[u] \end{pmatrix}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} a_n(x_0) e^{2\pi i \xi} & & \\ & \ddots & \\ & & a_n(x_0) e^{2\pi i \xi} \end{pmatrix}_{(n,n)} \begin{pmatrix} u(x_0) \\ D u(x_0) \\ \vdots \\ D^{n-1} u(x_0) \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

und entsprechend

$$\begin{pmatrix} V_{n+1}[v] \\ V_{n+2}[v] \\ \vdots \\ V_{2n}[v] \end{pmatrix}_{(n,1)} = \begin{pmatrix} a_n(x_0) & & \\ & \ddots & \\ & & (-1)^{n-1} a_n(x_0) \end{pmatrix}_{(n,n)} \begin{pmatrix} v(x_0 e^{2\pi i}) \\ D v(x_0 e^{2\pi i}) \\ \vdots \\ D^{n-1} v(x_0 e^{2\pi i})^i \end{pmatrix}_{(n,1)}$$

gilt. Folglich besitzt die $(2n, 2n)$-Matrix, welche die $U_1[u], U_2[u], \ldots, U_{2n}[u]$ aus den $2n$ „Randwerten"

$$D^{j-1}u(x_0), \quad D^{j-1}u(x_0 e^{2\pi i}) \qquad (j=1, 2, \ldots, n)$$

erzeugt, eine nicht verschwindende Determinante. Unter Berücksichtigung der Darstellung (18) ist daher unsere Behauptung bewiesen.

Bevor wir hieraus erste Folgerungen ziehen, führen wir für $u\in\mathfrak{R}_\xi$, $v\in\mathfrak{R}_\xi^*$ das bilineare Funktional

$$(u, v)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x_0}^{x_0 e^{2\pi i}} u(t)\, v(t)\frac{dt}{t}$$

ein, wobei der Integrationsweg ganz im Kreisring $\mathfrak{K}$ verlaufe. Da das Integral von x_0 unabhängig ist, läßt es sich auch in der Form

$$\oint_{\mathfrak{C}} u(t)\, v(t)\frac{dt}{t}$$

schreiben; dabei möge $\mathfrak{C}$ ein einfach geschlossener Weg in $\mathfrak{K}$ um $x=0$ sein. Dieses bilineare Funktional ist in scharfer Weise nicht trivial: Man hat

$$(u, v)=0$$

für alle $u\in\mathfrak{R}_\xi$ und ein $v\in\mathfrak{R}_\xi^*$ genau für $v=0$. Es folgt nämlich $v=0$ schon aus $v\in\mathfrak{R}_\xi$ und

$$(u_n, v)=0 \qquad (n=\cdots, -1, 0, +1, \ldots)$$

mit $u_n(x)=x^{\xi+n}$. Weiter ist nach (17) und (18) für alle $u\in\mathfrak{R}_\xi$, $v\in\mathfrak{R}_\xi^*$

$$(Lu, v)=(u, L^* v).$$

Wir notieren nun unter Berücksichtigung der entsprechenden Aussagen bei KAMKE [*1*], p. 241 den

Satz 2.4. *Es gilt* $\dim\mathfrak{R}_\xi=\dim\mathfrak{R}_\xi^*$. *Die inhomogene Umlaufsrandwertaufgabe* $(4)_I$ *ist genau dann lösbar, wenn für alle* $v\in\mathfrak{R}_\xi^*$ $(f, v)=0$ *ist; sie ist also immer lösbar, und zwar eindeutig, wenn* $\mathfrak{R}_\xi^*$ *nur* $v=0$ *enthält.*

2.3. Umlaufseigenwertaufgaben

Die Koeffizienten a_k des Differentialoperators L mögen außer von der komplexen Variablen x noch von einem komplexen Parameter λ abhängen, und zwar derart, daß die $a_k(x, \lambda)$ im „Bereich"

$$\mathfrak{B}=\{(x, \lambda)\,|\, r_1\leqq|x|\leqq r_2\,, |\lambda|<\infty\}$$

holomorph, bei festem λ bezüglich x im Kreisring $\mathfrak{K}$ eindeutig holomorph seien. Zusätzlich möge $a_n(x, \lambda)\neq 0$ in $\mathfrak{B}$ sein.

Es sind dann die Funktionen $u_1(x, \lambda), u_2(x, \lambda), \ldots, u_n(x, \lambda)$ des betrachteten Fundamentalsystems zu (7) in $\mathfrak{B}$ holomorph, somit insbesondere bei festem

$x=x_0$ ganze Funktionen in λ. Entsprechend hat man

$$\mathfrak{N}_\xi=\mathfrak{N}_\xi(\lambda), \quad M_\xi=M_\xi(\lambda), \quad \Delta_\xi=\Delta_\xi(\lambda);$$

dabei ist also $\Delta_\xi(\lambda)$ eine ganze Funktion in λ.

Wir nennen nun λ „*Eigenwert von L in* $\mathfrak{N}_\xi$" genau dann, wenn

$$\mathfrak{N}_\xi(\lambda)\neq\{0\}$$

ist, jedes $u\neq 0$ aus $\mathfrak{N}_\xi(\lambda)$ eine zugehörige *Eigenlösung*.

$$\nu(\lambda)=\dim\mathfrak{N}_\xi(\lambda)$$

bezeichnen wir wie sonst üblich als *Vielfachheit* des Eigenwertes λ und

$$o(\lambda)=\text{Ordnung von } \lambda \text{ als Nullstelle von } \Delta_\xi(\lambda)$$

als seine *Ordnung*.

Satz 2.5. *Es ist λ Eigenwert von L in $\mathfrak{N}_\xi$ genau dann, wenn $\Delta_\xi(\lambda)$ verschwindet. Es sind daher entweder alle λ Eigenwerte oder es gibt höchstens abzählbar viele Eigenwerte ohne endlichen Häufungspunkt. Es gilt $\nu(\lambda)\leqq o(\lambda)$.*

Die ersten Aussagen sind nach den vorangehenden Überlegungen klar. Für den Beweis der letzten Behauptung verweisen wir abermals auf KAMKE [*1*], p. 254.

Eine unmittelbare Folgerung aus Satz 2.2 ist der folgende

Satz 2.6. *Es sei $\Delta_\xi(\lambda)\not\equiv 0$. Dann ist die Lösung $z(x,\lambda)$ (aus $\mathfrak{N}_\xi$) der inhomogenen Umlaufseigenwertaufgabe $(4)_\mathrm{I}$ im „Bereich"*

$$\mathfrak{B}_1=\{(x,\lambda)\,|\,r_1<|x|<r_2\,,\,\Delta_\xi(\lambda)\neq 0\}$$

holomorph. Sie hat in einem Eigenwert λ_0 bezüglich λ höchstens einen Pol der Ordnung $o(\lambda_0)$ und besitzt um λ_0 eine Laurentdarstellung

$$z(x,\lambda)=\sum_{p=-o(\lambda_0)}^{\infty} z_p(x)(\lambda-\lambda_0)^p;$$

diese darf gliedweise nach x differenziert werden. Die Koeffizienten $z_p(x)$ sind Elemente von $\mathfrak{N}_\xi$.

Die letzten Aussagen gewinnt man dabei insbesondere aus der Koeffizientenformel

$$z_p(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{z(x,\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{p+1}}\,d\lambda\,.$$

Bezüglich der adjungierten Randwertaufgabe (14) notierten wir: Es ist $\mathfrak{N}_\xi^*=\mathfrak{N}_\xi^*(\lambda)$. Wir nennen λ „*Eigenwert von L* in* $\mathfrak{N}_\xi^*$" genau dann, wenn $\mathfrak{N}_\xi^*(\lambda)\neq\{0\}$ ist, jedes $v\neq 0$ aus $\mathfrak{N}_\xi^*(\lambda)$ eine zugehörige Eigenlösung; $\nu^*(\lambda)$ bezeichne seine Vielfachheit.

Aus Satz 2.4 folgt gemäß dieser Definition

Satz 2.7. *Es ist λ Eigenwert von L in $\mathfrak{N}_\xi$ genau dann, wenn λ Eigenwert von L^* in $\mathfrak{N}_\xi^*$ ist, und zwar mit gleicher Vielfachheit: $\nu(\lambda)=\nu^*(\lambda)$.*

Für das weitere bezeichne L_λ den durch

$$L_\lambda y=\sum_{k=0}^{n}\frac{\partial}{\partial\lambda}a_k(x,\lambda)\cdot D^k y(x)\qquad (y\in\mathfrak{N}) \tag{19}$$

erzeugten linearen Operator in $\mathfrak{N}$. Unter den gegebenen Voraussetzungen nennen wir analog zu [*1*], p. 266 die Umlaufseigenwertaufgabe (4) *normal* genau dann, wenn zu jedem Eigenwert λ und zu jeder zugehörigen Eigenlösung $u\in\mathfrak{N}_\xi(\lambda)$ eine Eigenlösung $v\in\mathfrak{N}_\xi^*(\lambda)$ existiert, so daß

$$(L_\lambda u, v)\not\equiv 0 \tag{20}$$

ist.

Satz 2.8. *Die Umlaufseigenwertaufgabe* (4) *ist genau dann normal, wenn für jeden Eigenwert λ $\nu(\lambda)=o(\lambda)$ gilt.*

Unter Benutzung der zweiten Aussage des Satzes 2.4 beweist man dieses Theorem wie das entsprechende Kriterium für normale Eigenwertaufgaben bei Dgln im Reellen (vgl. KAMKE [*1*], p. 267).

Abschließend beschäftigen wir uns insbesondere mit im Parameter λ *linearen* Umlaufseigenwertaufgaben. Wir nehmen also an, es sei $L=L_1+\lambda L_2$; dabei seien L_1 und L_2 lineare Differentialoperatoren des Typs (3) mit von λ unabhängigen Koeffizienten, die Ordnung von L_1 (gleich n) sei größer als die Ordnung von L_2 und der Koeffizient der höchsten Ableitung von L_1 (also von L) in $\mathfrak{K}$ von Null verschieden.

Als Normalitätsbedingung (20) haben wir natürlich hier

$$(L_2 u, v)\not\equiv 0\,. \tag{20'}$$

Für lineare normale Umlaufseigenwertaufgaben beweisen wir den für die Entwicklungssätze im folgenden Abschnitt bedeutsamen

Satz 2.9. *Zu jedem Eigenwert λ_0 mit der Vielfachheit ν_0 existiert ein System von ν_0 Funktionen $u_p(x)$ aus $\mathfrak{N}_\xi(\lambda_0)$ und ν_0 Funktionen $v_q(x)$ aus $\mathfrak{N}_\xi^*(\lambda_0)$ mit*

$$(L_2 u_p, v_q)=\delta_{p,q}\qquad (p,q=1,2,\ldots,\nu_0)\,.$$

Zu vorgegebenem $f\in\mathfrak{N}_\xi$ hat die Lösung $z(x,\lambda)$ von $(4)_1$

$$L_1 u+\lambda L_2 u=f,\qquad u\in\mathfrak{N}_\xi$$

an der Stelle $\lambda=\lambda_0$ (höchstens) einen einfachen Pol mit dem Residuum

$$\sum_{p=1}^{\nu_0}(f,v_p)\,u_p(x)\,.$$

Zum Beweis schließen wir uns teilweise den Überlegungen von SCHÄFKE in [*9*], 2.6 an. Wegen $\Delta_\xi(\lambda)\not\equiv 0$ besitzt $z(x,\lambda)$ in einer Umgebung von λ_0 die

Darstellung

$$z(x,\lambda)=\sum_{p=-o(\lambda_0)}^{\infty} z_p(x)(\lambda-\lambda_0)^p.$$

Sie darf nach x gliedweise differenziert werden; sämtliche $z_p(x)$ sind Funktionen aus $\mathfrak{N}_\xi$. Indem man $z(x,\lambda)$ in

$$L_1 u+\lambda_0 L_2 u+(\lambda-\lambda_0) L_2 u=f$$

einsetzt und hiernach die Koeffizienten der Potenzen von $(\lambda-\lambda_0)$ vergleicht, erhält man

$$L_1 z_{p+1}+\lambda_0 L_2 z_{p+1}+L_2 z_p=\begin{cases}0 & p\neq -1\\ f & p=-1,\end{cases} \tag{21}$$

wobei für $p<-o(\lambda_0)$ $z_p(x)\equiv 0$ zu setzen ist. Wir definieren

$$q=\min\{p \mid z_p(x)\not\equiv 0\}$$

und nehmen an, es sei $q<-1$.

Die Relation (21) liefert für $p=q$

$$L_1 z_{q+1}+\lambda_0 L_2 z_{q+1}+L_2 z_q=0 \tag{22}$$

und für $p=q-1$

$$L_1 z_q+\lambda_0 L_2 z_q=0. \tag{23}$$

Aufgrund dieser zweiten Gleichung ist z_p aus $\mathfrak{N}_\xi(\lambda_0)$, also insgesamt Eigenlösung zu λ_0 von L in $\mathfrak{N}_\xi$. Weiter sei $v\in\mathfrak{N}_\xi^*(\lambda_0)$ eine beliebige Eigenlösung von L^* in $\mathfrak{N}_\xi^*$: $L_1^* v+\lambda_0 L_2^* v=0$. Indem man diese Gleichung im Sinne des bilinearen Funktionals von vorn mit z_{q+1} und (22) von hinten mit v multipliziert und dann die entstehenden Gleichungen voneinander subtrahiert, erhält man $(L_2 z_q, v)=0$ im Widerspruch zur Normalität. Es hat mithin $z(x,\lambda)$ in λ_0 höchstens einen Pol erster Ordnung.

Nach KAMKE [1], p. 264 gibt es zu $\mathfrak{N}_\xi(\lambda_0)$ und $\mathfrak{N}_\xi^*(\lambda_0)$ je eine Basis von ν_0 Funktionen $u_p(x)$ und $v_q(x)$ mit

$$(L_2 u_p, v_q)=0 \qquad (p\neq q). \tag{24}$$

Wegen $z_{-1}\in\mathfrak{N}_\xi(\lambda_0)$ gilt also insbesondere

$$z_{-1}(x)=\sum_{p=1}^{\nu_0}\gamma_p u_p(x).$$

Zur Ermittlung der Koeffizienten ziehen wir die Gleichungen

$$L_1 z_0+\lambda_0 L_2 z_0+L_2 z_{-1}=f \qquad (z_0, z_{-1}\in\mathfrak{N}_\xi)$$

$$L_1^* v_q+\lambda_0 L_2^* v_q=0 \qquad (v_q\in\mathfrak{N}_\xi^*)$$

heran. Analog zu oben gewinnt man durch entsprechende Multiplikation im Sinne des bilinearen Funktionals $(L_2 z_{-1}, v_q)=(f, v_q)$ und daher nach (24)

für $q=1, 2, \ldots, \nu_0$

$$\gamma_q(L_2\, u_q, v_q)=(f, v_q)\,. \tag{25}$$

Da diese Relation für beliebige $f\in\mathfrak{R}_\xi$ gültig ist und das bilineare Funktional gemäß Abschnitt 2.2 nicht trivial ist, folgt $(L_2\, u_q, v_q)\neq 0$. Man kann mithin zu einem neuen System von Funktionen $u_p(x)$ und $v_q(x)$ übergehen, so daß die Biorthogonalitäts- und Normierungsrelationen $(L_2\, u_p, v_q)=\delta_{p,q}$ erfüllt sind. Dann hat man nach (25) $\gamma_p=(f, v_p)$, womit auch die zweite Behauptung vollständig bewiesen ist.

3. Entwicklungssätze

Es sei l eine natürliche Zahl. H und G seien lineare Differentialoperatoren vom Typ

$$\begin{aligned} H\,y &= \sum_{\mu=0}^{m} h_\mu(x)\, D^\mu\, y(x) \qquad (0\leqq m)\,,\\ G\,y &= \sum_{\mu=0}^{m+r} g_\mu(x)\, D^\mu\, y(x) \qquad (-m\leqq r\leqq l-2)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

deren Koeffizienten $h_\mu(x)$, $g_\mu(x)$ in einem gemeinsamen Kreisring $\mathfrak{K}$

$$r_1<|x|<r_2$$

eindeutig analytisch seien; insbesondere sei $h_m(x)\equiv 1$ in $\mathfrak{K}$.

Wie im vorangehenden Abschnitt 2 mögen H^* und G^* die zu H und G adjungierten Differentialoperatoren bezeichnen. $\mathfrak{R}_\xi$ sei wie dort die Gesamtheit der in $\mathfrak{K}$ holomorphen Funktionen mit

$$u(x\, e^{2\pi i})=e^{2\pi i\xi}\, u(x)\,,$$

$\mathfrak{R}_\xi^*$ analog die mit

$$v(x\, e^{2\pi i})=e^{-2\pi i\xi}\, v(x)\,.$$

Hiermit betrachten wir die Umlaufseigenwertaufgabe

$$H(D^l-\lambda\, E)\, u+G\, u=0 \qquad (u\in\mathfrak{R}_\xi,\ \neq 0) \tag{2}$$

und die hierzu adjungierte

$$(D^l-\lambda\, E)^*\, H^*\, v+G^*\, v=0 \qquad (v\in\mathfrak{R}_\xi^*,\ \neq 0)\,. \tag{2*}$$

In bezug auf ein beliebiges, aber festes x_0 aus $\mathfrak{K}$ sei $\Delta_\xi(\lambda)$ die zugehörige charakteristische Determinante der Eigenwertaufgabe (2).

Wir fordern nun noch:

① Für jede l-te Einheitswurzel $\varepsilon_l\neq 1$ und für alle ganze Zahlen m und n sei $(1-\varepsilon_l)\,\xi\neq m-\varepsilon_l\, n$.

② Der Differentialoperator H sei in $\mathfrak{R}_\xi$ invertierbar.

③ Die charakteristische Determinante $\Delta_\xi(\lambda)$ besitze keine mehrfachen Nullstellen.

Aufgrund der Forderung ① ist ξ insbesondere verschieden von allen ganzen Zahlen. Nach ③ hat jede charakteristische Determinante zu (2) höchstens einfache Nullstellen.

Unter den Bedingungen ①, ② und ③ beweisen wir den

Satz 3.1. *Das Umlaufseigenwertproblem* (2) *hat zugleich mit dem adjungierten* (2*) *abzählbar unendlich viele Eigenwerte* λ_n' $(n=0, \pm 1, \ldots)$, *die so numeriert werden können und im weiteren so numeriert seien, daß*

$$\lambda_n'=(\xi+n)^l+O(n^r) \qquad (-1\leqq r\leqq l-2)$$

bzw.

$$\lambda_n'=(\xi+n)^l+O(n^{-1}) \qquad (r\leqq -1)$$

gilt.

Zu den λ_n' *existieren bis auf konstante Faktoren eindeutig Eigenlösungen* $u_n(x)$ *von* (2) *und* $v_n(x)$ *von* (2*), *die so normiert werden können und so normiert seien, daß die Biorthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathfrak{C}} H\,u_n(x)\cdot v_m(x)\frac{dx}{x}=\delta_{n,m}$$

erfüllt sind; dabei bezeichne hier und im folgenden $\mathfrak{C}$ *einen einfach geschlossenen Weg um* $x=0$ *im Kreisring* $\mathfrak{K}$.

Für $n\to\pm\infty$ *hat man in kompakten Teilmengen des Kreisringes* $\mathfrak{K}$ *gleichmäßig die asymptotische Darstellung*

$$u_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathfrak{C}} H\,u_n(t)\cdot t^{-\xi-n}\frac{dt}{t}\,x^{\xi+n}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^{l-r-1}}\right)\right\} \qquad (-1\leqq r\leqq l-2)$$

bzw.

$$u_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathfrak{C}} H\,u_n(t)\cdot t^{-\xi-n}\frac{dt}{t}\,x^{\xi+n}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^{l}}\right)\right\} \qquad (r\leqq -1).$$

Ist $f(x)$ *aus* $\mathfrak{R}_\xi$, *also in* $\mathfrak{K}$ *holomorph mit*

$$f(x\,e^{2\pi i})=e^{2\pi i\xi}f(x),$$

so ist $f(x)$ *dort eindeutig in eine in kompakten Teilmengen absolut gleichmäßig konvergente Reihe*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,u_n(x)$$

mit den Koeffizienten

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathfrak{C}} H\,f(x)\cdot v_n(x)\frac{dx}{x}$$

entwickelbar.

Zum Beweis stützen wir uns auf SCHÄFKES Äquikonvergenzprinzip unter Berücksichtigung der Ergänzungen in Abschnitt 1 und auf die Überlegungen des vorangehenden Abschnittes 2.

Es sei $\mathfrak{U}=\mathfrak{R}_\xi$, $\mathfrak{U}^*=\mathfrak{R}_\xi^*$. Für $u\in\mathfrak{U}$, $v\in\mathfrak{U}^*$ betrachten wir das schon in 2.2 eingeführte bilineare Funktional

$$(u,v)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}} u(t)\cdot v(t)\frac{dt}{t}.$$

Zu H, G, H^*, G^* nehmen wir noch die Operatoren

$$F=-H\,D^l,\qquad F^*=-(-D)^l H^*$$

hinzu. Damit sind dann die entsprechenden Gln. 2.1(1) in [9] erfüllt.

Aufgrund unseres Satzes 2.2 ist mit H in $\mathfrak{U}$ auch H^* in $\mathfrak{U}^*$ invertierbar. Demnach bestehen mit

$$\lambda_n=(\xi+n)^l$$
$$x_n=x^{\xi+n},\qquad x_n^*=H^{*-1}x^{-\xi-n}$$

in [9] die Gln. 2.1 (2), (3) und (6).

Wir kommen nun zur Gewinnung von 2.1 (8) und (9) in [9]. Wegen

$$G^*x_n^*=(\xi+n)^r G^* H^{*-1}(-S)^r H^* x_n^*$$

ist dort offenbar mit

$$G_1^*=G^*H^{*-1}(-S)^r,\qquad G_k^*=O\qquad (k=2,3,\ldots)$$
$$\mu_{n1}=(\xi+n)^r,\qquad \mu_{nk}=0\qquad (k=2,3,\ldots)$$

die Relation 2.1 (8) erfüllt. Setzt man

$$G_1=S^r H^{-1}G,\qquad G_k=O\qquad (k=2,3,\ldots),$$

so gelten die Beziehungen

$$(G_k u,v)=(u,G_k v)\qquad (u\in\mathfrak{U},\ v\in\mathfrak{U}^*).$$

Als Norm in $\mathfrak{U}$ wählen wir die in unserem Abschnitt 2.1 definierte Norm für $\mathfrak{R}_\xi$:

$$\mathfrak{K}_1=\{x\,|\,\rho_1\leqq|x|\leqq\rho_2,\ |\arg x|\leqq\pi\}\qquad (r_1<\rho_1<\rho_2<r_2),$$
$$\|u\|=\max\{|u(x)|\,\big|\,x\in\mathfrak{K}_1\}.$$

Bezüglich dieser Norm ist der Operator G_1 in $\mathfrak{U}$ beschränkt. Hierzu überlegen wir, daß sich für u aus $\mathfrak{U}$

$$(Gu)(x)=\sum_{\kappa=0}^{m+r} D^\kappa[c_\kappa(x)\,u(x)]$$

schreiben läßt, wobei die $c_\kappa(x)$ im Kreisring $\mathfrak{K}$ eindeutig analytisch sind. Weiter hat man

$$G_1=\begin{cases}(H\,D^r)^{-1}G & (r\geqq 0)\\ D^{-r}H^{-1}G & (r<0)\end{cases}$$

und folglich nach unserem Satz 2.3 die Beschränktheit von G_1. Mit einem gewissen $\gamma_1>0$ und $\gamma_k=0$ für $k=2,3,\ldots$ ist somit die Beziehung 2.1 (9) in [9] erfüllbar.

Die Darstellung [9], 2.1 (10) ist klar, da jedes $f \in \mathfrak{U}$ eindeutig in eine Laurentreihe der Form

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^{\xi+n},$$

$$a_n=(f, x^{-\xi-n})=(H f, x_n^*)$$

entwickelbar ist, die in kompakten Teilmengen von $\mathfrak{R}$ absolut gleichmäßig konvergiert. Wie üblich folgt [9], 2.1 (11) dann mit Hilfe des Gutzmerschen Koeffizientensatzes.

Da die λ_n sämtliche Eigenwerte des „ungestörten" Problems

$$\begin{aligned} F u+\lambda H u&=0 \qquad (u \in \mathfrak{U}, \neq 0) \\ F^* v+\lambda H^* v&=0 \qquad (v \in \mathfrak{U}^*, \neq 0) \end{aligned} \tag{3}$$

sind, ist für $\lambda \neq \lambda_n$ nach Satz 2.1

$$F u+\lambda H u=f \qquad (f \in \mathfrak{U})$$

durch ein $z_0(\lambda)$ aus $\mathfrak{U}$ eindeutig lösbar. Für λ verschieden von sämtlichen möglichen Eigenwerten der „gestörten" Eigenwertaufgabe

$$\begin{aligned} F u+\lambda H u&=G u \qquad (u \in \mathfrak{U}, \neq 0) \\ F^* v+\lambda H^* v&=G^* v \qquad (v \in \mathfrak{U}^*, \neq 0) \end{aligned} \tag{4}$$

ist natürlich entsprechend

$$F u+\lambda H u=G u+f \quad (f \in \mathfrak{U})$$

durch ein $z_1(\lambda)$ aus $\mathfrak{U}$ eindeutig lösbar. Insgesamt sind dies im wesentlichen in [9] die Forderungen zu 2.1 (11) und (12).

Durch eine geeignete Substitution

$$\xi \to \pm \vartheta+k, \qquad n \to \pm n-k \qquad (k \text{ ganz})$$

erreicht man, daß bezüglich λ_n, μ_{nk}, γ_k alle Bedingungen unseres Abschnittes 1.1 erfüllt sind.

Zur Gewinnung einer Aussage über die Gesamtheit der Eigenwerte von (4) stützen wir uns auf unsere Bemerkungen in 1.2. Wir betten demgemäß (4) in das zweiparametrige Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} F y+\lambda H y&=\mu G y \qquad (y \in \mathfrak{U}, \neq 0) \\ F^* y^*+\lambda H^* y^*&=\mu G^* y^* \qquad (y^* \in \mathfrak{U}^*, \neq 0) \end{aligned} \tag{5}$$

ein. Als $\Delta(\lambda, \mu)$ wählen wir die zugehörige charakteristische Determinante $\Delta_\xi(\lambda, \mu)$, so daß $\Delta_\xi(\lambda, 1)=\Delta_\xi(\lambda)$ ist. Damit sind die Bedingungen 1.2 (A) und (C) sofort klar. Zum Nachweis von 1.2 (B) überlegen wir: Die Vielfachheit der Eigenwerte λ_n von (3) ist eins; für sämtliche zugehörigen Eigenlösungen x_n, x_n^* gilt $(Hx_n, x_n^*) \neq 0$, mithin ist (3) ein normales Umlaufseigenwertproblem und daher aufgrund unseres Satzes 2.8 die Ordnung jedes Eigenwertes λ_n eins.

Gemäß 1.2 folgt die Existenz abzählbar unendlich vieler Eigenwerte λ_n' mit den behaupteten Eigenschaften und so insbesondere die Gültigkeit der Annahmen (I) bis (V) in [9].

Wegen $v(\lambda_n')=o(\lambda_n')=1$ $(n=0, \pm 1, \ldots)$ ist wieder nach unserem Satz 2.8 die Umlaufseigenwertaufgabe (4) normal. Folglich existiert aufgrund des Satzes 2.9 zu jedem λ_n' ein Eigenlösungspaar $u_n(x)$, $v_n(x)$ aus $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^*$ mit $(Hu_n, v_m)=\delta_{n,m}$. Demnach sind in [9] auch noch die Relationen 2.1 (4), (5) und (7) erfüllt.

Ebenfalls nach Satz 2.9 gelten die analytischen Eigenschaften von $z_0(\lambda)$ und $z_1(\lambda)$: Im Sinne von [9], 2.1 sind $z_0(\lambda)$ und $z_1(\lambda)$ für $\lambda \neq \lambda_n$ bzw. $\lambda \neq \lambda_n'$ analytisch und haben in den λ_n bzw. λ_n' jeweils (höchstens) einfache Pole mit den Residuen $(f, x_n^*)\, x_n$ bzw. $(f, v_n)\, u_n$.

Schließlich läßt sich die Gültigkeit der Annahme (VI) in [9] durch die Wahl geeigneter Normen bestätigen. Man setzt dazu mit

$$r_1 < \rho_{11} < \rho_{12} < \rho_{21} < \rho_{22} < r_2$$

für $s=1, 2$

$$\mathfrak{K}_s = \{x \mid \rho_{1s} \leqq |x| \leqq \rho_{2s};\ |\arg x| \leqq \pi\}$$

und entsprechend

$$\|u\|_s = \max\{|u(x)| \mid x \in \mathfrak{K}_s\}.$$

Damit sind alle Voraussetzungen und Annahmen von SCHÄFKEs verallgemeinerten Äquikonvergenzprinzip [9] erfüllt. Hieraus fließen die noch nicht bewiesenen Behauptungen unseres Satzes, wenn man zu [9], 2.4 noch beachtet, daß nach unseren Überlegungen in 1.1 für $n \to \pm\infty$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi} \oint_{\mathfrak{K}_n} \sum(\lambda)\, |d\lambda| = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{l-r-1}}\right) & (-1 \leqq r \leqq l-2) \\ O\left(\dfrac{1}{n^l}\right) & (r \leqq -1) \end{cases}$$

gilt.

Bemerkungen

1) *Die Voraussetzung, daß $\Delta_\xi(\lambda)$ keine mehrfachen Nullstellen habe, kann man durch die schwächere Forderung ersetzen, daß das zugrunde liegende Umlaufseigenwertproblem* (2) *normal ist.*

Die Existenz abzählbar unendlich vieler Eigenwerte

$$\lambda_n' = \begin{cases} \lambda_n + O(n^r) & (-1 \leqq r \leqq l-2) \\ \lambda_n + O(n^{-1}) & (r \leqq -1) \end{cases}$$

von (2), (2*) bleibt nach unseren Überlegungen in 1.2 weiterhin gültig. Wegen

$$d_n = \min_{k \neq n} |\lambda_n - \lambda_k| \geqq c(|n|+1)^{l-1} \qquad (n=0, \pm 1, \ldots)$$

sind die λ_n' für alle hinreichend großen $|n|$, $|n| \geqq n_0$, paarweise verschieden, also einfache Nullstellen der charakteristischen Determinante. Aufgrund dessen lassen sich insbesondere wie bisher die Annahmen (I) bis (V) erfüllen.

Bei mehrfachen Nullstellen von $\Delta_\xi(\lambda)$ garantiert unser Satz 2.9 ein System entsprechend vieler biorthogonaler und normierter Eigenlösungen. In diesem Sinne sind in SCHÄFKEs Äquikonvergenzprinzip [9] die Voraussetzungen bezüglich λ_n' abzuändern.

2) *Eine Umlaufseigenwertaufgabe der Form*

$$L_1 y + \lambda L_2 y = 0 \qquad y(z\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \zeta}\, y(z) \not\equiv 0 \tag{6}$$

mit

$$L_1 y = \sum_{k=0}^{n} a_k(z)\, D^k y(z) \qquad (0 < n,\ a_n(z) \equiv 1)$$

$$L_2 y = \sum_{k=0}^{m} b_k(z)\, D^k y(z) \qquad (0 \leqq m < n)$$

läßt sich im allgemeinen durch eine Transformation

$$x = x(z), \qquad \frac{z}{x} \cdot \frac{dx}{z} = b(z), \qquad y(z) = a(z)\, u(x)$$

auf die „Normalform" (2) bringen.

Derartige Transformationen sind speziell bei gewissen Differentialgleichungen zweiter und vierter Ordnung zur Gewinnung von Entwicklungssätzen für die Kapteynschen Reihen und deren Verallgemeinerungen von SCHÄFKE [8], p. 165, SCHNEIDER [11], p. 215 und MENNICKEN-SATTLER [4], p. 366 durchgeführt worden.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, läßt sich unmittelbar folgendes feststellen: Das Ziel der Transformation zwingt unter anderem zu der Forderung $[b(z)]^{n-m} = -b_m(z)$. Es ist also die Argumenttransformation ausschließlich durch den Koeffizienten $b_m(z)$ bestimmt. Entsprechend ist für das Ausgangsproblem (6) das mögliche Entwicklungsgebiet im wesentlichen durch diesen Koeffizienten festgelegt. Dieses Gebiet wird meistens kein Kreisring, sondern ein allgemeines Ringgebiet um Null sein. Sicher ist es im Fall $b_m(z) \equiv \text{const}$ ein Kreisring, da man dann durch eine Substitution $c\lambda \to \lambda$ sogar $b_m(z) \equiv -1$ erreichen und daher als Argumenttransformation die Identität wählen kann.

Abschließend beschäftigen wir uns noch einmal mit der Normalform (2). Wir betrachten den Spezialfall, daß die Koeffizienten $h_\mu(x)$, $g_\mu(x)$ im Kreise $0 \leqq |x| < r \leqq \infty$ (eindeutig) analytisch sind und zusätzlich

$$g_\mu(0) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m+r)$$

gilt.

Satz 3.2. *Für jede l-te Einheitswurzel* $\varepsilon_l \neq 1$ *und für alle ganzen Zahlen m und n sei* $(1-\varepsilon_l)\,\xi \neq m - \varepsilon_l n$.

Die Wurzeln der Indexgleichung zu $Hu=0$

$$\rho^m+h_{m-1}(0)\,\rho^{m-1}+\cdots+h_0(0)=0$$

seien $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$. *Für* $i=1, 2, \ldots, m$ *gelte* $\rho_i-\xi \neq$ ganz.

Unter diesen Voraussetzungen besitzt in jedem Kreisring $0\leqq r_1<|x|<r_2\leqq r$ *die Umlaufseigenwertaufgabe* (2), (2*) *genau die Eigenwerte*

$$\lambda_n=(\xi+n)^l \qquad (n=\cdots, -1, 0, +1, \ldots).$$

Zu jedem Eigenwert λ_n *existieren bis auf konstante Faktoren eindeutig Eigenlösungen*

$$u_n(x)=x^{\xi+n}\,\Phi_{\xi,n}(x), \qquad v_n(x)=x^{-\xi-n}\,\Phi^*_{\xi,n}(x),$$

wobei die $\Phi_{\xi,n}(x)$, $\Phi^*_{\xi,n}(x)$ *im Kreis* $0\leqq|x|<r$ *eindeutig analytisch sind und*

$$\Phi_{\xi,n}(0)\neq 0, \qquad \Phi^*_{\xi,n}(0)\neq 0$$

gilt. Die Eigenlösungen $u_n(x)$, $v_n(x)$ *bilden ein Biorthogonalsystem; mit*

$$N_n=[(\xi+n)^m+h_{m-1}(0)\,(\xi+n)^{m-1}+\cdots+h_0(0)]\,\Phi_{\xi,n}(0)\,\Phi^*_{\xi,n}(0)\neq 0$$

hat man für $n, m=0, \pm 1, \ldots$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathfrak{C}} H\,u_n(x)\cdot v_m(x)\,\frac{dx}{x}=N_n\,\delta_{n,m}.$$

$\mathfrak{C}$ *ist dabei ein einfach geschlossener Weg um* $x=0$ *im betrachteten Kreisring.*

Ist $f(x)$ *in einem Kreisring*

$$0\leqq r_1<|x|<r_2\leqq r$$

holomorph und erfüllt die Umlaufsbedingung

$$f(x\,e^{2\pi i})=e^{2\pi i\xi}\,f(x),$$

so ist $f(x)$ *dort eindeutig in eine in kompakten Teilmengen absolut gleichmäßig konvergente Reihe*

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,u_n(x)$$

mit den Koeffizienten

$$c_n=\frac{1}{2\pi i\,N_n}\oint\limits_{\mathfrak{C}} H\,f(x)\cdot v_n(x)\,\frac{dx}{x}$$

entwickelbar.

Für $n\to\pm\infty$ *gilt in kompakten Teilmengen des Gebietes* $0<|x|<r$ *gleichmäßig die asymptotische Darstellung*

$$u_n(x)=\Phi_{\xi,n}(0)\,x^{\xi+n}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^{l-r-1}}\right)\right\} \qquad (-1\leqq r\leqq l-2)$$

bzw.

$$u_n(x)=\Phi_{\xi,n}(0)\,x^{\xi+n}\left\{1+O\left(\frac{1}{n^{l}}\right)\right\} \qquad (r\leqq -1).$$

Beweis. Wir stützen uns auf den vorangehenden Satz 3.1.

Die Forderung ① ist unmittelbar erfüllt. Aufgrund der Voraussetzung $\rho_i - \xi \neq$ ganz $(i=1, 2, \ldots, m)$ ist nach [3], p. 5 H in $\mathfrak{R}_\xi$ invertierbar, also ② gültig.

Wegen derselben Voraussetzung abermals nach [3], p. 5 folgt aus der Indexgleichung

$$(*) \qquad (\rho^m + h_{m-1}(0)\,\rho^{m-1} + \cdots + h_0(0))(\rho^l - \lambda) = 0$$

zur Differentialgleichung in (2), daß das Eigenwertproblem (2), (2*) genau die Eigenwerte $\lambda_n' = \lambda_n = (\xi+n)^l$ hat. Nimmt man ① hinzu, so ergibt sich, daß die Vielfachheit jedes Eigenwertes eins ist. Wie behauptet existieren zu jedem λ_n bis auf konstante Faktoren eindeutig Eigenlösungen

$$u_n(x) = x^{\xi+n}\,\Phi_{\xi,n}(x), \qquad v_n(x) = x^{-\xi-n}\,\Phi^*_{\xi,n}(x)$$

von (2) bzw. (2*). Wegen $(Hu_n, v_n) = N_n \neq 0$ ist das Umlaufseigenwertproblem (2) normal und infolgedessen auch ③ erfüllt.

Schließlich hat man

$$(H u_n, x_n^*) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{C}} u_n(x)\, x^{-\xi-n}\, \frac{dx}{x} = \Phi^*_{\xi,n}(0),$$

womit insgesamt alle Behauptungen bewiesen sind.

Literatur

[1] KAMKE, E.: Differentialgleichungen. I. Leipzig: Geest & Portig 1962.

[2] MEIXNER, J., u. F.W. SCHÄFKE: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954.

[3] MENNICKEN, R., u. A. SATTLER: Biorthogonalentwicklungen analytischer Funktionen nach Produkten spezieller Funktionen. I. Math. Z. **89**, 1—29 (1965).

[4] — Biorthogonalentwicklungen analytischer Funktionen nach Produkten spezieller Funktionen. II. Math. Z. **89**, 365—394 (1965).

[5] NEUMARK, M.A.: Lineare Differentialoperatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1960.

[6] SCHÄFKE, F.W.: Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern. Math. Nachr. **6**, 110—124 (1951).

[7] — Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. I. Math. Z. **74**, 436—470 (1960).

[8] — Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. II. Math. Z. **75**, 154—191 (1961).

[9] — Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. III. Math. Z. **80**, 400—442 (1963).

[10] — Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1963.

[11] SCHNEIDER, A.: Eine Verallgemeinerung der Kapteynschen Reihen. Math. Z. **83**, 212—236 (1963).

Köln, Institut für Angewandte Mathematik der Universität