Werk

Titel: Bestimmung der Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe.

Autor: Helling, Heinz

Jahr: 1966

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0092|log42

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

HELLING, H.
Math. Zeitschr. 92, 269—280 (1966)

Bestimmung der Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe

HEINZ HELLING

Eingegangen am 16. September 1965

Einleitung

Die Hilbertsche Modulgruppe zu einem algebraischen Zahlkörper $\mathfrak{K}$ ist in verschiedenen Richtungen mehrfach untersucht worden (vgl. etwa [*1*, *2*, *6*, *8*]). Es erhebt sich die Frage nach dem Ausmaß ihrer Kommensurabilitätsklasse (s. [*10*, *11*]). Es mag überraschen, daß man auf sie eine befriedigende Antwort findet. In der vorliegenden Arbeit werde ich ein System $\gamma_{\mathfrak{K}}$ von abzählbar vielen, mit der Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{K}$ kommensurablen Gruppen linear-gebrochener Substitutionen der Zahlenkugel angeben, das die Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe in folgendem Sinne vollständig erschöpft: Jede mit der Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{K}$ kommensurable Gruppe linear-gebrochener Substitutionen ist nach geeigneter Transformation in einer Gruppe des Systems $\gamma_{\mathfrak{K}}$ als Untergruppe von endlichem Index enthalten. Mit anderen Worten: Es werden in dieser Mitteilung sämtliche Möglichkeiten bestimmt, die in der Hilbertschen Modulgruppe mit endlichem Index enthaltenen Untergruppen „quer" zu ihr erweitern. (Dabei wird natürlich aus jeder Klasse konjugierter Gruppen nur ein Exemplar aufgezählt.) Als Teilergebnis kommt das Resultat von MAASS ([*8*]) heraus; ferner ergeben sich Berührpunkte mit einer Fragestellung von PETERSSON (vgl. [*9*]), auf die an dieser Stelle nur hingewiesen werden soll.

Das System $\gamma_{\mathfrak{K}}$ wird von den Gruppen $\Gamma[\mathfrak{v}; \mathfrak{f}]$ in Nr. 3 gebildet. Sie tragen ein sehr einfaches Koeffizientengesetz. In einem Spezialfall sind einige dieser Gruppen aus der Literatur her geläufig: Für den rationalen Zahlkörper als Grundkörper $\mathfrak{K}$ sind gewisse $\Gamma[\mathfrak{v}; \mathfrak{f}]$ bei FRICKE ([*4*]) unter den sog. Klassengruppen enthalten.

Die zur Verwendung kommenden Schlüsse sind sämtlich rein algebraisch-arithmetischer Natur und durchweg elementar. Sie stützen sich auf die Grundlagen für die Arithmetik in hyperkomplexen Systemen über einem algebraischen Zahlkörper (s. dazu [*3*]). Einige zusätzliche Vorbereitungen aus der Matrizenarithmetik werden in Nr. 1 gebracht. Sie werden erforderlich, weil der Bau der Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{K}$ von der Idealtheorie, genauer gesagt von der Anzahl der Geschlechter in $\mathfrak{K}$ abhängt.

In Nr. 2 werden die zweireihige Matrizenalgebra und die linearen Substitutionsgruppen über $\mathfrak{K}$ miteinander in Verbindung gesetzt und grundsätzliche Kommensurabilitätsfragen diskutiert. In Nr. 3 definiere und untersuche ich die

oben erwähnten Gruppen $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$, mit Hilfe derer die Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{R}$ überschaubar wird. Nr. 4 dient der Herleitung des eingangs wiedergegebenen Hauptergebnisses. Eine wesentliche Rolle im Beweis spielt dabei eine Art Gruppenring $\mathfrak{D}_\Gamma$ zu einer gegebenen Substitutionsgruppe Γ über $\mathfrak{R}$.

Die Diskussion habe ich im Spezialfall der rationalen Modulgruppe noch weitergetrieben. Über diese und Verallgemeinerungen in Richtung auf andere diskontinuierliche Gruppen linear-gebrochener Transformationen, wie sie schon bei FRICKE-KLEIN ([5], S. 446–584) aufgeführt sind, gedenke ich später zu berichten[1].

Über den Grundkörper $\mathfrak{R}$ werden keinerlei Realitätsforderungen angestellt; diese sind für die Gruppentheorie irrelevant und erst für die Funktionentheorie von Belang.

In bezug auf Sprechweise und Bezeichnungen halte ich mich durchweg an die folgenden Verabredungen:

Ich unterscheide streng zwischen Matrizen und linear-gebrochenen Transformationen. Ist $\mathfrak{L}$ ein beliebiger komplexer Zahlkörper, so bedeutet $\mathfrak{L}_2$ die Matrizenalgebra vom Grad 2 über $\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}^\times$ und $\mathfrak{L}_2^\times$ sind Abkürzungen für GL $(1;\mathfrak{L})$ bzw. GL $(2;\mathfrak{L})$. $\mathfrak{L}$ wird als $\mathfrak{L}E$ (E die Einheitsmatrix) in $\mathfrak{L}_2$ eingebettet gedacht. Jedes Element der Faktorgruppe

$$\Gamma(\mathfrak{L})=\mathfrak{L}_2^\times/\mathfrak{L}^\times$$

heißt (linear-gebrochene) Substitution über $\mathfrak{L}$, jede Untergruppe von $\Gamma(\mathfrak{L})$ Substitutionsgruppe über $\mathfrak{L}$. Die Substitutionsgruppen, nicht Matrizengruppen, bilden den Gegenstand dieser Arbeit. Von der Möglichkeit, aus Substitutionsgruppen durch Normierung aller Matrizen auf die Determinante Eins Matrizengruppen herzustellen, wird kein Gebrauch gemacht, um lästige und unnötige Irrationalitäten zu vermeiden. Ist S eine nichtsinguläre Matrix über $\mathfrak{L}$, so bedeutet $\bar{S}=S\mathfrak{L}^\times$ die ihr kanonisch zugehörige Substitution über $\mathfrak{L}$. Ich sage: S erzeugt $\bar{S}$, ebenso für $G\subset\mathfrak{L}_2^\times$: G erzeugt $\bar{G}=\{\bar{S}: S\in G\}$. Sonst brauche ich für Substitutionen kleine griechische Buchstaben (σ, τ, $\varepsilon=\bar{E}$).

Ist

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine komplexe Matrix, so bedeutet $\tilde{S}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{sp}(S)=S+\tilde{S}$, $|S|=S\tilde{S}=\tilde{S}S$ sind Spur und Determinante von S.

[1] Es handelt sich um Resultate aus meiner Dissertation: „Konstruktion arithmetischer Grenzkreisgruppen von erster Art durch die Einheiten der rationalen Quaternionenalgebren", die im Januar 1965 von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster angenommen worden ist.

Analog dem Symbol $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ für das kartesische Produkt zweier Moduln $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verwende ich bei vier gegebenen Moduln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die nicht mißzuverstehende Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a} & \mathfrak{b} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{d} \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ bedeuten den Körper der rationalen bzw. komplexen Zahlen.

1. Die Typen von Maximalordnungen in $\mathfrak{R}_2$

Es sei $\mathfrak{R}$ ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades über $\mathbb{Q}$ mit der Hauptordnung $\mathfrak{o}$. $\mathfrak{f} \neq (0)$ sei ganzes, quadratfreies, $\mathfrak{v} \neq (0)$ beliebiges $\mathfrak{o}$-Ideal in $\mathfrak{R}$.

$$\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; \mathfrak{f}] = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{v}^{-1}\mathfrak{f} \\ \mathfrak{v} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$$

ist Ordnung in $\mathfrak{R}_2$; $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ ist Maximalordnung. Die inneren Automorphismen von $\mathfrak{R}_2$ stellen eine Äquivalenzrelation innerhalb der Menge der Ordnungen in $\mathfrak{R}_2$ her. Jede Äquivalenzklasse heißt Typ jeder in ihr enthaltenen Ordnung. Über die Typen von Maximalordnungen ist folgendes bekannt:

Satz 1. *Jeder Typ von Maximalordnungen enthält ein* $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ *mit passendem* $\mathfrak{v}$, *und* $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ *und* $\mathfrak{O}[\mathfrak{w}; 1]$ *gehören genau dann zum gleichen Typ, wenn* $\mathfrak{v}$ *und* $\mathfrak{w}$ *zum gleichen Idealgeschlecht in* $\mathfrak{R}$ *gehören.*

Es gibt also genauso viele Typen von Maximalordnungen in $\mathfrak{R}_2$ wie Idealgeschlechter in $\mathfrak{R}$.

Beweisskizze zu Satz 1. Jedes Gitter M, d.h. jeder endlich erzeugte zweigliedrige $\mathfrak{o}$-Modul in $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$, besitzt einen Stabilisator $\mathfrak{O}_M$, bestehend aus allen $S \in \mathfrak{R}_2$ mit $MS \subset M$. In einer geeigneten Basis x, y von $(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ hat M die Gestalt $M = \mathfrak{o}x + \mathfrak{v}^{-1}y$ mit einem geeigneten $\mathfrak{o}$-Ideal $\mathfrak{v} \neq (0)$ in $\mathfrak{R}$. Der Stabilisator von MT ($T \in \mathfrak{R}_2$, $|T| \neq 0$) ist $\mathfrak{O}_{MT} = T^{-1}\mathfrak{O}_M T$. Bestimmt man T so, daß $xT = (1, 0)$, $yT = (0, 1)$, so wird $MT = (\mathfrak{o}, \mathfrak{v}^{-1})$ und damit $\mathfrak{O}_{MT} = \mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$. Also ist der Stabilisator von M Maximalordnung, und sein Typ enthält eine Ordnung $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$. Umgekehrt ist jede Maximalordnung $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{R}_2$ Stabilisator eines geeigneten Gitters $M_{\mathfrak{O}} \subset (\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$. Jede Maximalordnung $\mathfrak{O} \subset \mathfrak{R}_2$ bestimmt das Gitter $M_{\mathfrak{O}}$, zu dem es Stabilisator ist, bis auf einen Idealfaktor aus $\mathfrak{R}$ eindeutig. Demnach gehören $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ und $\mathfrak{O}[\mathfrak{w}; 1]$ genau dann zum gleichen Typ, wenn $(\mathfrak{o}, \mathfrak{v}^{-1})\, U = \mathfrak{a}(\mathfrak{o}, \mathfrak{w}^{-1})$ mit einem geeigneten $U \in \mathfrak{R}_2$ mit $|U| \neq 0$ und einem Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ in $\mathfrak{R}$ gilt. Das ist nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Gitter über Dedekindschen Ringen genau dann richtig, wenn $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ im gleichen Idealgeschlecht von $\mathfrak{R}$ liegen.

2. Substitutionsgruppen, Kommensurabilität

Definition. Eine Substitution über $\mathfrak{R}$ heißt unimodular, wenn sie durch eine Einheit aus $\mathfrak{R}_2$, das ist eine Matrix mit ganzer Spur und einer Einheit als Determinante, erzeugt werden kann. Eine Substitutionsgruppe über $\mathfrak{R}$ heißt unimodular, wenn sie durch Einheiten erzeugt werden kann.

Zum Beispiel erzeugt die Menge $G^0[1;1]$ aller Einheiten aus $\mathfrak{O}[1;1]$ eine unimodulare Substitutionsgruppe über $\mathfrak{R}$, die sog. inhomogene (erweiterte) Hilbertsche Modulgruppe zu $\mathfrak{R}$, bezeichnet mit $\Gamma^0[1;1]$. $G^0[1;1]$ ist selbst eine Matrizengruppe, die sog. homogene (erweiterte) Hilbertsche Modulgruppe zu $\mathfrak{R}$.

Jede Einheitengruppe in $\mathfrak{R}_2$ erzeugt eine unimodulare Substitutionsgruppe über $\mathfrak{R}$. Umgekehrt bildet die Gesamtheit aller Einheiten in $\mathfrak{R}_2$, die die Substitutionen einer gegebenen unimodularen Gruppe erzeugen, eine Gruppe.

Jede Matrizengruppe und jede Substitutionsgruppe über $\mathfrak{R}$ läßt sich auf natürliche Weise als Matrizengruppe bzw. Substitutionsgruppe über $\mathbb{C}$ auffassen. Demnach ist es sinnvoll, von der Kommensurabilität zwischen Matrizengruppen bzw. Substitutionsgruppen über nicht notwendig identischen Zahlkörpern zu sprechen.

Definition: Die Matrizengruppen G, G' oder die Substitutionsgruppen Γ, Γ' über den komplexen Zahlkörpern Ω bzw. Ω' heißen direkt kommensurabel, wenn sie als Matrizen- bzw. Substitutionsgruppen über $\mathbb{C}$ direkt kommensurabel sind, d.h. wenn ihr Durchschnitt in beiden Komponenten mit endlichem Index enthalten ist. Sie heißen kommensurabel, wenn sie spätestens nach Transformation einer von beiden mit einer geeigneten komplexen Matrix bzw. komplexen Substitution direkt kommensurabel sind.

Kommensurable Einheitengruppen über $\mathfrak{R}$ erzeugen kommensurable Substitutionsgruppen über $\mathfrak{R}$. Umgekehrt sind die Gruppen sämtlicher Einheiten aus $\mathfrak{R}_2$, die zwei kommensurable unimodulare Gruppen über $\mathfrak{R}$ erzeugen, miteinander kommensurabel.

Der folgende Sachverhalt ist wohlbekannt:

Satz 2. *Die vollen Einheitengruppen je zweier Ordnungen in $\mathfrak{R}_2$ sind miteinander direkt kommensurabel.*

Demnach ist die Frage nach der Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe gleichbedeutend mit der Frage nach der Kommensurabilitätsklasse der vollen unimodularen Substitutionsgruppe zu irgendeiner Ordnung in $\mathfrak{R}_2$.

Es ist zu klären, wie wesentlich sich die volle Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{R}$ innerhalb $\Gamma(\mathbb{C})$ von der Teilklasse der schon in $\Gamma(\mathfrak{R})$ gelegenen Gruppen unterscheidet. Die Auskunft darüber gibt der folgende

Satz 3. *Γ sei Substitutionsgruppe über $\mathbb{C}$, kommensurabel mit der Hilbertschen Modulgruppe $\Gamma^0[1;1]$ zu $\mathfrak{R}$. Dann läßt Γ sich mit Hilfe einer komplexen Substitution in eine Gruppe Γ^* transformieren, die durch Matrizen über $\mathfrak{R}$ erzeugt werden kann.*

Das heißt: Jede mit der Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{R}$ kommensurable komplexe Substitutionsgruppe ist bis auf Transformation schon Substitutionsgruppe über $\mathfrak{R}$.

Beweis. Γ werde mit Hilfe einer komplexen Substitution in eine Substitutionsgruppe Γ^* transformiert, die mit $\Gamma^0[1;1]$ direkt kommensurabel ist. Γ^* hat

die gleichen Spitzen wie $\Gamma^0[1;1]$, nämlich ganz $\mathfrak{K}$ unter Einschluß von ∞. Jedes $\sigma \in \Gamma^*$ induziert einen inneren Automorphismus von Γ^*, bildet also die Spitzenmenge von Γ^* bijektiv auf sich ab. Demnach ist jede Matrix S mit $\bar{S}=\sigma$ bis auf einen komplexen Faktor schon in $\mathfrak{K}_2$ gelegen. Das war zu beweisen.

3. Die Gruppen $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$

$\mathfrak{v} \neq (0)$ sei beliebiges, $\mathfrak{f}$ ganzes, quadratfreies Ideal in $\mathfrak{K}$. Ist $\mathfrak{t}$ Teiler von $\mathfrak{f}$, so sei aus jeder Idealklasse in $\mathfrak{K}$, deren Quadrat die Klasse von $\mathfrak{t}^{-1}$ ist, ein ganzes Ideal als Vertreter ausgewählt; das System dieser Vertreter heiße $\mathfrak{R}(\mathfrak{t})$. Die Hauptidealklasse werde immer durch (1) vertreten. Dann definiere ich zu der in Nr. 1 eingeführten Ordnung $\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$:

$$G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]=\bigcup_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \bigcup_{\mathfrak{r}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{t})} \left\{ S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{r}\,\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{f}] \colon (|S|)=\mathfrak{r}^2\mathfrak{t},\ a\equiv d\equiv 0 \bmod \mathfrak{r}\mathfrak{t} \right\},$$

und

$$G^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]=\{S\in G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}] \colon (|S|)=(1)\}.$$

$\mathfrak{R}(\mathfrak{t})$ ist genau dann leer, wenn $\mathfrak{t}$ nicht zum Hauptgeschlecht von $\mathfrak{K}$ gehört.

Satz 4. *$G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ und $G^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ erzeugen Substitutionsgruppen über $\mathfrak{K}$, genannt $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ bzw. $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$. $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ ist mit $\Gamma^0[1;1]$, der inhomogenen (erweiterten) Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{K}$, direkt kommensurabel. $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ ist die Untergruppe aller unimodularen Substitutionen von $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$. $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ ist Normalteiler in $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$; die Faktorgruppe ist endlich und vom Typ* (2, 2, ..., 2).

Bemerkung. Jedes

$$\mathfrak{r}\in\bigcup_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}}\mathfrak{R}(\mathfrak{t})$$

darf innerhalb seiner Klasse ohne Einfluß auf $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ abgeändert werden. Das geschieht in Nr. 4 aus Gründen der Vereinfachung des Beweisganges zum Hauptsatz. Ein Wechsel von $\mathfrak{v}$ innerhalb seines Geschlechtes bedeutet Transformation von $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$. Letzteres wird in Nr. 4 mit herauskommen.

Beweis von Satz 4. Zuerst werde $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ auf Gruppenstruktur hin untersucht.

Die Einheitsmatrix liegt in $G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$, ebenso mit S die Matrix $\tilde{S}$, die die zu $\bar{S}$ inverse Substitution erzeugt. Für

$$S_i\in G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}] \qquad (i=1,2) \quad \text{mit} \quad (|S_i|)=\mathfrak{r}_i^2\,\mathfrak{t}_i \qquad (\mathfrak{t}_i|\mathfrak{f},\ \mathfrak{r}_i\in\mathfrak{R}(\mathfrak{t}_i))$$

gilt

$$(|S_1 S_2|)=((\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2)\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2)^2\,\mathfrak{t} \tag{1}$$

mit $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{t}_2(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2)^{-2}$. $\mathfrak{t}$ ist Teiler von $\mathfrak{f}$ und liegt mit $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ im Hauptgeschlecht von $\mathfrak{K}$. Da das Quadrat der Idealklasse von $(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2)\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2$ und die Idealklasse von $\mathfrak{t}$ invers zueinander sind, gibt es ein Hauptideal $(r)\neq(0)$ und ein $\mathfrak{r}\in\mathfrak{R}(\mathfrak{t})$ mit

$$(\mathfrak{t}_1+\mathfrak{t}_2)\,\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2=r\,\mathfrak{r}. \tag{2}$$

Eine kurze Rechnung lehrt, daß die Matrix

$$S=\frac{1}{r}S_1 S_2,$$

die $\bar{S}_1\,\bar{S}_2$ erzeugt, in $G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ enthalten ist. Folglich ist $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ eine Gruppe. Daran seien noch zwei Bemerkungen angefügt.

Erstens: Ist S_2 Einheit, so $\mathfrak{r}_2=\mathfrak{t}_2=(1)$, also $\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_1$ und $r\,\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1$. Also vertreten $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$, die beide in $\mathfrak{R}(\mathfrak{t}_1)$ liegen, die gleiche Idealklasse, sind demnach gleich. Das bedeutet $(r)=(1)$. Entsprechendes gilt, wenn S_1 Einheit ist. Das heißt: Ist S_1 oder S_2 Einheit, so liegt $S_1\,S_2$ in $G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$.

Zweitens: Ist $(|S_1|)=(|S_2|)$, so folgt $\mathfrak{t}=(1)$ und (s. Gl. (2)) $r\,\mathfrak{r}=\mathfrak{t}_1\,\mathfrak{r}_1^2=(|S_1|)$. Demnach vertritt $\mathfrak{r}$ die Hauptidealklasse, ist also verabredungsgemäß gleich $\mathfrak{o}$. Daraus folgt $(r)=(|S_1|)$. Das bedeutet:

$$\frac{1}{|S_1|}S_1 S_2\in G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}].$$

Da diese Matrix als Determinante eine Einheit hat, ist sie sogar in $G^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ enthalten.

$G^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ besteht aus allen Einheiten in $\mathfrak{D}[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$. Also sind $G^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ und $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ Gruppen. $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ ist nach Nr. 2 mit der (inhomogenen) Hilbertschen Modulgruppe zu $\mathfrak{R}$ direkt kommensurabel. Das gleiche gilt für $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ selbst. Denn nach dem Vorausgehenden sieht man ohne weiteres, daß zwei Substitutionen aus $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ genau dann zur gleichen Rechtsnebenklasse nach $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ gehören, wenn die Determinanten der sie erzeugenden Matrizen aus $G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ als Ideale gleich sind. Da es nur endlich viele Teiler von $\mathfrak{f}$ gibt und alle $\mathfrak{R}(\mathfrak{t})$ $(\mathfrak{t}|\mathfrak{f})$ endlich sind, ist die Menge der als Determinanten auftretenden Hauptideale bei $G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ endlich. Das bedeutet $[\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]:\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]]<\infty$.

Damit ist die behauptete Kommensurabilität bewiesen.

Für $S\in G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$, $S_0\in G^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ gilt nach der ersten Zusatzbemerkung oben $SS_0\in G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$; und wegen $(|SS_0|)=(|\tilde{S}|)$ wird $\overline{SS_0\tilde{S}}$ nach der zweiten Zusatzbemerkung unimodular. Also ist $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ Normalteiler in $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$.

Daß für $\sigma\in\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ σ^2 unimodular ist, wurde oben bewiesen. Also ist die Faktorgruppe von $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ nach $\Gamma^0[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ abelsch und vom Typ $(2, 2, \ldots, 2)$.

Damit ist Satz 4 völlig bewiesen.

4. Der Hauptsatz

Das Ziel dieser Arbeit besteht im Beweis des folgenden Satzes:

Hauptsatz. *$\Gamma\subset\Gamma(\mathbb{C})$ sei eine mit der Hilbertschen Modulgruppe $\Gamma^0[1;1]$ zu $\mathfrak{R}$ kommensurable Substitutionsgruppe. Dann ist Γ in eine Untergruppe einer Gruppe $\Gamma[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ mit geeigneten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{f}$ transformierbar.*

Das Ausmaß der Kommensurabilitätsklasse der Hilbertschen Modulgruppe wird also durch zwei Parameter beschrieben. Der erste, $\mathfrak{v}$, ist dabei, wie sich zeigen wird, auf endlich viele Möglichkeiten zu beschränken, nämlich auf ein

Vertretersystem der Geschlechter in $\mathfrak{K}$. Der zweite, $\mathfrak{f}$, läuft über eine abzählbare Menge von Möglichkeiten.

Beweis des Hauptsatzes.

I. Γ werde in eine Substitutionsgruppe über $\mathfrak{K}$ transformiert, die mit $\Gamma^0[1;1]$ direkt kommensurabel ist (s. dazu Satz 3). Die erhaltene Gruppe werde durch Matrizen über $\mathfrak{K}$ erzeugt und wieder mit Γ bezeichnet.

II. Jedem $\sigma\in\Gamma$ wird ein gewisser eindimensionaler $\mathfrak{o}$-Modul $\mathfrak{m}_\sigma$ auf folgendem Wege zugeordnet: Für $S\in\mathfrak{K}_2$ mit $\bar{S}=\sigma$ zerlege man die Determinante $|S|$ als Hauptideal $(|S|)$ multiplikativ in quadratischen Bestandteil und quadratfreien Kern: $(|S|)=\mathfrak{r}_S^2\,\mathfrak{t}_S$ ($\mathfrak{r}_S$, $\mathfrak{t}_S$ Ideale in $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{t}_S$ ganz und quadratfrei). $\mathfrak{r}_S$ und $\mathfrak{t}_S$ sind durch S eindeutig bestimmt. Die Relationen

$$\mathfrak{r}_{aS}=a\,\mathfrak{r}_S,\qquad \mathfrak{t}_{aS}=\mathfrak{t}_S$$

für $a\in\mathfrak{K}$, $a\neq 0$, sind trivial. Die Gegenstände $\mathfrak{m}_S=\mathfrak{r}_S^{-1}S$ und $\mathfrak{t}_S$ sind also schon durch σ, nicht erst durch S eindeutig bestimmt und werden deshalb mit $\mathfrak{m}_\sigma$, $\mathfrak{t}_\sigma$ bezeichnet. Ist σ unimodular, so ist $\mathfrak{t}_\sigma=(1)$.

An der Beziehung

$$\mathfrak{t}_\sigma\,\mathfrak{t}_\tau=\mathfrak{t}_{\sigma\tau}(\mathfrak{t}_\sigma+\mathfrak{t}_\tau)^2 \qquad (\sigma,\tau\in\Gamma) \tag{3}$$

liest man ab

$$\mathfrak{m}_\sigma\,\mathfrak{m}_\tau=(\mathfrak{t}_\sigma+\mathfrak{t}_\tau)\,\mathfrak{m}_{\sigma\tau}.$$

Das heißt: Es gilt für $\sigma,\tau\in\Gamma$

$$\mathfrak{m}_\sigma\,\mathfrak{m}_\tau\subset\mathfrak{m}_{\sigma\tau}, \tag{4}$$

und das Gleichheitszeichen steht hier genau dann, wenn $\mathfrak{t}_\sigma$ und $\mathfrak{t}_\tau$ teilerfremd sind.

Ich definiere: $\mathfrak{O}_\Gamma$ sei der von allen $\mathfrak{m}_\sigma$ mit $\sigma\in\Gamma$ aufgespannte $\mathfrak{o}$-Modul in $\mathfrak{K}_2$.

III. **Satz 5.** *$\mathfrak{O}_\Gamma$ ist eine Ordnung.*

Beweis. Man hat folgende vier Eigenschaften zu verifizieren:

a. $\mathfrak{o}\subset\mathfrak{O}_\Gamma$,

b. $\mathfrak{O}_\Gamma$ ist ein Ring,

c. $\mathfrak{O}_\Gamma$ enthält vier über $\mathfrak{K}$ linear unabhängige Elemente,

d. $\mathfrak{O}_\Gamma$ besteht aus ganzen Größen.

Punkt a. gilt wegen $\mathfrak{m}_\varepsilon=\mathfrak{o}$ (ε die Identität aus Γ). Punkt b. ist durch Gl. (4) erledigt. Zu den Punkten c. und d. betrachte man $\Gamma'=\Gamma\cap\Gamma^0[1;1]$. Für $\Gamma^0[1;1]$ anstelle von Γ sind c. und d. trivial; denn es ist $\mathfrak{O}_{\Gamma^0[1;1]}=\mathfrak{O}[1;1]$. Daraus folgt zunächst, daß c. und d. für Γ' anstelle von Γ zutreffen. Denn erstens besteht $\mathfrak{O}_{\Gamma'}\subset\mathfrak{O}[1;1]$ nur aus ganzen Größen. Zweitens ist $\mathfrak{O}_{\Gamma'}$ volldimensional. Dazu betrachte man die drei parabolischen Substitutionen $\pi_0,\pi_1,\pi_\infty\in\Gamma^0[1;1]$, erzeugt durch

$$P_0=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\qquad P_1=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&0\end{pmatrix},\qquad P_\infty=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},$$

die sämtlich in $\mathfrak{O}[1;1]$ liegen und zusammen mit

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

über $\mathfrak{K}$ linear unabhängig sind. Wegen $[\Gamma^0[1;1]:\Gamma']<\infty$ gilt $\pi_0^{k_0}, \pi_1^{k_1}, \pi_\infty^{k_\infty}\in\Gamma'$ mit gewissen hinreichend großen natürlichen Exponenten k_0, k_1, k_∞. Die diese parabolischen Substitutionen erzeugenden Matrizen $P_0^{k_0}, P_1^{k_1}, P_\infty^{k_\infty}$ sind in $\mathfrak{O}_{\Gamma'}$ gelegen und wieder mit E zusammen über $\mathfrak{K}$ linear unabhängig.

Daraus folgt die Gültigkeit von c. unmittelbar. Punkt d. ergibt sich auf folgendem Wege: Ich beweise in Verschärfung von a.: $\mathfrak{O}_\Gamma\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{o}$.

Dazu zerlege man Γ in Nebenklassen nach Γ':

$$\Gamma=\bigcup_{\nu=1}^{k}\tau_\nu\Gamma'.$$

k ist eine natürliche Zahl. Jedes der $\mathfrak{m}_{\tau_\nu}$, $1\leqq\nu\leqq k$, kann, da $\mathfrak{O}_{\Gamma'}$ Ordnung ist, mit Hilfe eines ganzen Ideals $\mathfrak{a}_\nu\neq(0)$ in $\mathfrak{O}_{\Gamma'}$ hineinmultipliziert werden: $\mathfrak{a}_\nu\mathfrak{m}_{\tau_\nu}\subset\mathfrak{O}_{\Gamma'}$. Bedeutet $\mathfrak{a}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der $\mathfrak{a}_\nu$, $1\leqq\nu\leqq k$, so gilt $\mathfrak{a}\,\mathfrak{O}_\Gamma\subset\mathfrak{O}_{\Gamma'}$. Denn für jedes $\sigma\in\Gamma$ in der Zerlegung $\sigma=\tau_\nu\sigma'$, $1\leqq\nu\leqq k$, $\sigma'\in\Gamma'$, erhält man

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_\sigma=\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_{\tau_\nu\sigma'}=\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_{\tau_\nu}\mathfrak{m}_{\sigma'},$$

letzteres, da $\mathfrak{t}_{\sigma'}=(1)$. Also gilt

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_\sigma=(\mathfrak{a}\,\mathfrak{m}_{\tau_\nu})\,\mathfrak{m}_{\sigma'}\subset O_{\Gamma'}O_{\Gamma'}\subset O_{\Gamma'}.$$

Daraus folgt, daß die Nenner der Zahlen des Grundkörpers $\mathfrak{K}$, die in $\mathfrak{O}_\Gamma$ liegen, durch $\mathfrak{a}$ beschränkt sind:

$$\mathfrak{O}_\Gamma\cap\mathfrak{K}\subset\mathfrak{a}^{-1}.$$

Da $\mathfrak{O}_\Gamma$ ein Ring ist, dürfen demnach überhaupt keine Nenner auftreten:

$$\mathfrak{O}_\Gamma\cap\mathfrak{K}=\mathfrak{o}. \tag{5}$$

Wegen $\bar{\tilde{S}}=\bar{S}^{-1}$ und $|S|=|\tilde{S}|$ $(\bar{S}=\sigma\in\Gamma)$ gilt $\mathfrak{m}_{\tilde{S}}=\mathfrak{m}_{\sigma^{-1}}$, also $\tilde{\mathfrak{O}}_\Gamma=\mathfrak{O}_\Gamma$. Hieraus folgt zusammen mit (5) für alle $S\in\mathfrak{O}_\Gamma$:

$$S+\tilde{S}\in\mathfrak{o},\qquad S\tilde{S}\in\mathfrak{o},$$

und das ist die Aussage unter Punkt d. Damit ist Satz 5 bewiesen.

An Satz 5 schließen sich unmittelbar die folgenden Korollare an, deren Begründungen auf der Hand liegen:

Korollar 1. *$S\in\mathfrak{K}_2$ mit $\bar{S}\in\Gamma$ sei gegeben. Dann sind für jedes (ganze oder gebrochene) Ideal $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{K}$ die Aussagen $|S|\in\mathfrak{r}^2$ und $S\in\mathfrak{r}O_\Gamma$ gleichbedeutend. Dieser Sachverhalt bleibt bei Gruppentransformation erhalten.*

Korollar 2. *$\bar{S}\in\Gamma$ ist genau dann unimodular, wenn $(|S|)$ Hauptidealquadrat ist.*

Korollar 3. *Die unimodularen Substitutionen in Γ bilden eine Gruppe Γ^0. Γ^0 ist Normalteiler in Γ mit endlicher Faktorgruppe.*

IV. Man zerlege Γ in Nebenklassen nach Γ^0, dem Normalteiler aller unimodularen Substitutionen in Γ:

$$\Gamma = \bigcup_{l=1}^{n} \sigma_l \Gamma^0. \tag{6}$$

n ist eine natürliche Zahl. Sind σ und τ in der gleichen Nebenklassen von Γ nach Γ^0 gelegen, so gilt $\mathfrak{t}_\sigma = \mathfrak{t}_\tau$. Die Menge der $\mathfrak{t}_\sigma$ ($\sigma \in \Gamma$) ist also endlich. Ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches heiße $\mathfrak{f}$. $\mathfrak{f}$ ist ganzes Ideal ohne quadratischen Idealteiler.

V. Γ werde mit Hilfe eines geeigneten $\sigma = \bar{S} \in \Gamma(\mathfrak{R})$ so transformiert, daß $\mathfrak{O}_{\sigma\Gamma\sigma^{-1}} = S\,\mathfrak{O}_\Gamma\,S^{-1}$ enthalten ist in $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ mit geeignetem $\mathfrak{v}$, das noch innerhalb seines Geschlechtes beliebig vorgeschrieben werden kann (s. Satz 1). Ich mache über $\mathfrak{v}$ die Voraussetzung, ganz und zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd zu sein. Das geschieht aus Gründen der Vereinfachung der folgenden Diskussion; im Endergebnis kann diese Spezialisierung wieder heraustransformiert werden. Die transformierte Gruppe $\sigma\,\Gamma\,\sigma^{-1}$ wird wieder mit Γ bezeichnet.

VI. **Satz 6.** *Sei $S \in \mathfrak{R}_2$ gegeben mit $\bar{S} \in \Gamma$. Es gilt* $\mathrm{sp}(S) \in \mathfrak{r}_S\,\mathfrak{t}_S$.

Beweis. Die Aussage dieses Satzes ist wegen $\mathfrak{r}_{aS} = a\,\mathfrak{r}_S$ ($a \neq 0$, $a \in \mathfrak{R}$ beliebig) für S und aS gleichzeitig richtig oder gleichzeitig falsch. Deshalb ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Annahme „$\mathfrak{r}_S$ ganz und $(\mathfrak{r}_S, \mathfrak{f}) = 1$“ erlaubt.

Da $\mathfrak{r}_S^{-1} S \subset \mathfrak{O}_\Gamma$ aus lauter ganzen Größen besteht, folgt

$$\mathrm{sp}(S) \in \mathfrak{r}_S. \tag{7}$$

Ist $\mathfrak{p}$ Primidealteiler von $\mathfrak{t}_S$, so also erstens Teiler des ganzen Hauptideals $(|S|)$:

$$|S| \in \mathfrak{p}\,\mathfrak{O}_\Gamma.$$

Da auch $\bar{S}^2$ in Γ liegt und $|S^2| \in \mathfrak{p}^2$ gilt, ist Korollar 1 anwendbar:

$$S^2 \in \mathfrak{p}\,\mathfrak{O}_\Gamma.$$

Wegen $S^2 - \mathrm{sp}(S)\,S + |S| = 0$ folgt $\mathrm{sp}(S)\,S \in \mathfrak{p}\,\mathfrak{O}_\Gamma$ und daraus durch Spurbildung $(\mathrm{sp}(S))^2 \in \mathfrak{p}$, also $\mathrm{sp}(S) \in \mathfrak{p}$. Wegen $(\mathfrak{r}_S, \mathfrak{t}_S) = 1$ folgt zusammen mit (7) die Behauptung des Satzes.

VII. In einem letzten Schritt wird gezeigt, daß $\mathfrak{O}_\Gamma$ nicht nur in $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$, sondern sogar in $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; \mathfrak{f}]$ hinein transformierbar ist. Daran anschließend ergibt sich die Erzeugbarkeit von Γ durch eine Teilmenge von $G[\mathfrak{v}; \mathfrak{f}]$.

Zu jedem Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{f}$ wähle man ein $\sigma_\mathfrak{p} \in \Gamma$ mit $\mathfrak{p} | \mathfrak{t}_{\sigma_\mathfrak{p}}$. Das ist nach Konstruktion von $\mathfrak{f}$ möglich. Ferner sei für jedes solche $\mathfrak{p}$ ein

$$S_\mathfrak{p} = \begin{pmatrix} a_\mathfrak{p} & b_\mathfrak{p} \\ c_\mathfrak{p} & d_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}_{\sigma_\mathfrak{p}}$$

hergenommen; über $S_\mathfrak{p}$ setze ich voraus:

$$S_\mathfrak{p} \in \mathfrak{O}[1;1], \quad (\mathfrak{r}_{S_\mathfrak{p}}, \mathfrak{f}) = 1.$$

Das ist gleichzeitig möglich, da die Nenner der Elemente der Matrizen aus $\mathfrak{O}_\Gamma$ $\mathfrak{v}$ teilen und $(\mathfrak{v}, \mathfrak{f}) = 1$ vorausgesetzt ist. Das System linearer Kongruenzen

$$a_\mathfrak{p} x + c_\mathfrak{p} y \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$$

$$b_\mathfrak{p} x + d_\mathfrak{p} y \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$$

ist simultan für alle $\mathfrak{p} | \mathfrak{f}$ in ganzen, teilerfremden x, y lösbar. Wegen $(\mathfrak{v}, \mathfrak{f}) = 1$ läßt sich auch $(x, \mathfrak{v}) = 1$ erreichen. Das Paar x, y läßt sich als erste Zeile einer Hilbertschen Modulmatrix T auffassen:

$$T = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathfrak{O}[1;1], \quad |T| = 1,$$

über die wegen $(x, \mathfrak{v}) = 1$ außerdem noch $u \in \mathfrak{v}$ erreicht werden kann. Als Einheit aus $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ transformiert T diese Ordnung in sich:

$$T \mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1] T^{-1} = \mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1].$$

T transformiert aber $\mathfrak{O}_\Gamma$ in $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; \mathfrak{f}]$. Um das einzusehen, betrachte man für $\mathfrak{p} | \mathfrak{f}$ die oben eingeführten Matrizen $S_\mathfrak{p}$. Es gilt laut Konstruktion von T:

$$S_\mathfrak{p}^* = T S_\mathfrak{p} T^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\mathfrak{p} & b_\mathfrak{p} \\ c_\mathfrak{p} & d_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & -y \\ -u & x \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_\mathfrak{p}^* & d_\mathfrak{p}^* \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{p}.$$

Die Anwendung von Satz 6 liefert $d_\mathfrak{p}^* \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$, also gilt

$$S_\mathfrak{p}^* \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_\mathfrak{p}^* & 0 \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{p}, \tag{8}$$

und es ist $c_\mathfrak{p}^*$ sicher nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar, da sonst $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{r}_{S_\mathfrak{p}}$ steckte. T transformiert aber sogar ganz $\mathfrak{m}_{\sigma_\mathfrak{p}}$ in Matrizen vom Kongruenzwert

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \bmod \mathfrak{p}$$

(was jetzt für die obere rechte Komponente im Sinne von Kongruenzen für gebrochene Zahlen zu verstehen ist). Denn $S \in \mathfrak{m}_{\sigma_\mathfrak{p}}$ hat die Gestalt $S = a S_\mathfrak{p}$ mit einem $a \in \mathfrak{R}$, dessen Nenner in $\mathfrak{r}_{S_\mathfrak{p}}$ aufgeht, also zu $\mathfrak{f}$ teilerfremd ist.

$$T a S_\mathfrak{p} T^{-1} = a S_\mathfrak{p}^*$$

liegt in $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$, da $a S_\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}_{\sigma_\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ gilt und T Einheit von $\mathfrak{O}[\mathfrak{v}; 1]$ ist, und der Faktor a an $S_\mathfrak{p}^*$ zerstört die Kongruenz (8), jetzt als Kongruenz mod $\mathfrak{p}$ zwischen gebrochenen Zahlen, nicht.

Bis jetzt ist für alle $\mathfrak{p}|\mathfrak{f}$ erreicht:

$$T\,\mathfrak{m}_{\sigma_\mathfrak{p}}\,T^{-1}\subset\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{p}].$$

Jetzt sei ein beliebiges $\sigma\in\Gamma$ gegeben. Für

$$S^*=T\,S\,T^{-1}=\begin{pmatrix}a^* & b^*\\ c^* & d^*\end{pmatrix}\qquad(S\in\mathfrak{m}_\sigma)$$

erhält man unter Beachtung von $S^*\in\mathfrak{O}[\mathfrak{v};1]$:

$$S^*\,S^*_\mathfrak{p}\equiv\begin{pmatrix}b^*\,c^*_\mathfrak{p} & *\\ * & 0\end{pmatrix}\bmod\mathfrak{p}.$$

Wegen $\sigma\,\sigma_\mathfrak{p}\in\Gamma$ und $S^*\,S^*_\mathfrak{p}\in T\,\mathfrak{m}_{\sigma\,\sigma_\mathfrak{p}}\,T^{-1}$ liefert die Anwendung von Satz 6: $b^*\,c^*_\mathfrak{p}\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$, also, da $c^*_\mathfrak{p}\not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$,

$$b^*\equiv 0\bmod\mathfrak{p},$$

was wieder für b^* als gebrochene Zahl zu verstehen ist. Das bedeutet

$$T\,\mathfrak{m}_\sigma\,T^{-1}\subset\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{p}]$$

für alle $\sigma\in\Gamma$. Da diese Aussage für alle Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{f}$ gültig ist, folgt

$$T\,\mathfrak{m}_\sigma\,T^{-1}\subset\bigcap_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}}\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{p}]=\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$$

für alle $\sigma\in\Gamma$ und damit

$$T\,\mathfrak{O}_\Gamma\,T^{-1}\subset\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{f}].$$

Ich bezeichne die transformierte Gruppe $\tau\,\Gamma\,\tau^{-1}$ $(\tau=\overline{T})$ wieder mit Γ. Für jedes $\sigma=\overline{S}\in\Gamma$ ist erreicht:

$$S=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathfrak{r}_S\,\mathfrak{O}[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]\tag{9}$$

und damit $a\equiv d\equiv 0 \bmod \mathfrak{r}_S$. Wie im Beweis zu Satz 6 sei die die Allgemeinheit nicht einschränkende Annahme „$\mathfrak{r}_S$ ganz und $(\mathfrak{r}_S,\mathfrak{f})=1$“ gemacht.

Für jeden Primidealteiler $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{t}_S$ wird, da $\mathfrak{p}$ in $b\in\mathfrak{r}_S\,\mathfrak{v}^{-1}\,\mathfrak{f}$ wegen $(\mathfrak{v},\mathfrak{f})=1$ in positiver Potenz steckt und $c\in\mathfrak{v}$ ganz ist,

$$|S|=a\,d-b\,c\equiv a\,d\equiv 0\bmod\mathfrak{p},$$

also $a\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ oder $d\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$. Satz 6 liefert $a\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ und $d\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ und damit

$$a\equiv d\equiv 0\bmod\mathfrak{r}_S\,\mathfrak{t}_S.\tag{10}$$

(9) und (10) bleiben erhalten, wenn man S durch eine proportionale Matrix ersetzt. Wählt man den Proportionalitätsfaktor so, daß $\mathfrak{r}_S$ in das vorgegebene System $\mathfrak{R}(\mathfrak{t}_S)$ fällt (s. Nr. 3), so ist Γ durch eine Teilmenge von $G[\mathfrak{v};\mathfrak{f}]$ erzeugt. Damit ist der Hauptsatz bewiesen.

Literatur

[1] BLUMENTHAL, O.: Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen I. Math. Ann. **56**, 509—548 (1903).
[2] — Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen II. Math. Ann. **58**, 497—527 (1904).
[3] DEURING, M.: Algebren. Erg.-Ber. Math. u. ihrer Grenzgeb. **4**, 1, 1—143 (1935).
[4] FRICKE, R.: Lehrbuch der Algebra, dritter Band: Algebraische Zahlen. Braunschweig 1928.
[5] —, u. F. KLEIN: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. 1. Leipzig 1897.
[6] GUNDLACH, K.-B.: Die Fixpunkte einiger Hilbertscher Modulgruppen. Math. Ann. **157**, 369—390 (1965).
[7] MAASS, H.: Über Gruppen von hyperabelschen Transformationen. Sitz.-Ber. Heidelberg. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., Abhandl. 1940, Heft 2.
[8] — Über die Erweiterungsfähigkeit der Hilbertschen Modulgruppe. Math. Zeitschr. **51**, 255—261 (1948).
[9] PETERSSON, H.: Über die eindeutige Bestimmung und die Erweiterungsfähigkeit von gewissen Grenzkreisgruppen. Hamburger Abhandlungen **12**, 180—199 (1938).
[10] RAMANATHAN, K. G.: Discontinuous Groups I. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **21**, 293—323 (1963).
[11] — Discontinuous Groups II. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. **13**, 145—164 (1964).

Math. Institut der Universität, 44 Münster, Ludgeristr. 93—109