Werk

Titel: Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen. I.

Autor: Harder, Günter

Jahr: 1965

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0090|log72

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

HARDER, G.
Math. Zeitschr. 90, 404–428 (1965)

Über die Galoiskohomologie halbeinfacher Matrizengruppen. I

Von
GÜNTER HARDER

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung der Galoiskohomologie (LANG und TATE [14], SERRE [16], [17], [18]) einiger halbeinfacher algebraischer Matrizengruppen, die über einem algebraischen Zahlkörper k definiert sind.

Ich möchte zunächst an die Bedeutung der Galoiskohomologie erinnern. In seinem Séminaire [4] hat CHEVALLEY die halbeinfachen, linearen algebraischen Gruppen, die über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k definiert sind, klassifiziert. Dabei wurde gezeigt, daß jede halbeinfache algebraische Matrizengruppe bis auf Isogenien direktes Produkt einfacher algebraischer Matrizengruppen ist. Die einfachen Gruppen – ich nenne in Zukunft (halb)-einfache algebraische Matrizengruppen abgekürzt (halb)einfache Gruppen – zerfallen in die Typen $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ und G_2. Diese Typen $A-G$ entsprechen genau den Typen der Cartan-Killing-Klassifikation bei Lie-Algebren.

Die nächste Aufgabe ist nun, die halbeinfachen Gruppen auch dann zu klassifizieren, wenn der Grundkörper k, über dem die Gruppen definiert sind, nicht algebraisch abgeschlossen ist. Für den Fall, daß k ein vollkommener Körper ist, kann dieses Problem der Galoiskohomologie umgewandelt werden. Es läßt sich zeigen (s. KNESER [11]), daß man sich beim Klassifikationsproblem auf absolut einfache, über k definierte Gruppen beschränken kann, d.h. auf solche, die über $\bar{k}$ einfach[1]) sind, wobei $\bar{k}$ wie üblich der algebraische Abschluß von k ist. Dann sieht das Problem so aus: Man beschreibe die Menge aller über k definierten und über k nicht isomorphen absolut einfachen Gruppen, die über $\bar{k}$ in einen vorgegebenen Typ X_y der Cartan-Killing-Klassifikation übergehen. Eine über k definierte, absolut einfache Gruppe G, die über $\bar{k}$ vom Typ X_y ist, nennt man auch eine k-Form vom Typ X_y. Das Problem ist also, die k-Formen vom Typ X_y zu klassifizieren. Die Gruppe der Automorphismen der k-Form G ist eine algebraische Gruppe, die wir mit $\mathrm{Aut}(G)$ bezeichnen wollen. Eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$ ist die Gruppe der inneren Automorphismen von G; diese Gruppe ist isomorph zur Gruppe G/Z, wobei Z das Zentrum von G ist. Wir haben also eine kanonische Abbildung von G in $\mathrm{Aut}(G)$.

$$G \to G/Z \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}(G).$$

[1]) „einfach" = „presque simple" in [4].

Ist G eine zusammenhängende Gruppe, so ist G/Z gerade die Zusammenhangskomponente der 1 von $\mathrm{Aut}(G)$, wobei Zusammenhang im Sinne der Zariskitopologie zu verstehen ist. In diesem Fall wollen wir $G/Z=\bar{G}$ setzen.

Satz 1. *Ist G eine k-Form vom Typ X_y, so entsprechen die k-Formen vom Typ X_y eineindeutig den Elementen der Menge*

$$H^1(k, \mathrm{Aut}(G))=H^1(\Gamma(\bar{k}/k), \mathrm{Aut}(G)).$$

Dieser Zusammenhang wird bei SERRE in [*16*], § 1; [*17*], Chap. X, § 2 und [*18*], Chap. III, § 1, erläutert. Die Gruppe $\bar{G}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(G)$, und die Gruppe $\mathrm{Aut}(G)/\bar{G}=A$ ist in jedem Fall genau bekannt. Betrachten wir die exakte Sequenz

$$1\to \bar{G} \xrightarrow{i} \mathrm{Aut}(G) \to A \to 1$$

und die sich daraus ergebende exakte Kohomologiesequenz

$$H^1(k, \bar{G}) \xrightarrow{i^*} H^1(k, \mathrm{Aut}(G)) \to H^1(k, A),$$

so sieht man, daß eine Kenntnis von $H^1(k, \bar{G})$ eine gute Information über die Menge der k-Formen liefert.

Um weitere Resultate zu erhalten, muß man den Grundkörper k spezialisieren. Man erhält folgende Sätze:

Satz von Lang [*12*]. *Ist k ein endlicher Körper und ist F eine beliebige über k definierte, zusammenhängende algebraische Gruppe, so ist $H^1(k, F)=0$.*

Die sich hieran anschließende Klassifikation von k-Formen findet man bei HERTZIG [*9*].

Man sagt, daß ein Körper k die kohomologische Dimension $\leqq 1$ hat, wenn für jede endliche Erweiterung K/k die Brauergruppe verschwindet, d.h. $\mathrm{Br}(K)=H^2(\bar{k}/K, \bar{k}^*)=0$ (vgl. [*5*], [*18*]). Dann gilt der

Satz von Steinberg. *k habe die kohomologische Dimension $\leqq 1$. Ist G eine zusammenhängende, reduktive algebraische Matrizengruppe über k, so ist $H^1(k, G)=0$.*

Dieser Satz ist eine einfache Folgerung aus dem Theorem von STEINBERG, das ich in 1.6 formulieren werde, und aus den Resultaten des Chap. X, § 7, in [*17*].

Nun sei k ein Körper der Charakteristik 0. Sei G eine halbeinfache k-Gruppe, die außerdem noch als zusammenhängend vorausgesetzt sei. $\tilde{G}$ sei ihre universelle Überlagerung; $\tilde{G}$ ist über k definiert. Wir betrachten die exakte Sequenz $1\to Z\to \tilde{G}\to \bar{G}\to 1$. Daraus ergibt sich die exakte Kohomologiesequenz

$$1-Z_k\to \tilde{G}_k\to \bar{G}_k\to H^1(k, Z)\to H^1(k, \tilde{G})\to H^1(k, \bar{G}) \xrightarrow{\delta} H^2(k, Z).$$

Dabei bedeutet G_k wie üblich die Gruppe der über k rationalen Punkte von G. Wir sehen, daß Aussagen über $H^1(k, \tilde{G})$ von großem Interesse sind, insbesondere dann, wenn sie die folgende Gestalt haben:

Satz von Kneser [*11*]. *$k=k_\mathfrak{p}$ sei ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, wobei $\mathfrak{p}$ eine nicht archimedische Bewertung sei. Dann ist $H^1(k_\mathfrak{p}, \tilde{G})=0$.*

Für einen algebraischen Zahlkörper als Grundkörper gab es in dieser Richtung bisher nur eine Vermutung, nämlich das sogenannte

Hasseprinzip. *Sei S_∞ die Menge der reellen Primstellen von k. Dann ist die folgende Abbildung*

$$\omega: H^1(k, \tilde{G}) \to \prod_{\mathfrak{p} \in S_\infty} H^1(k_\mathfrak{p}, \tilde{G})$$

eine Bijektion.

Diese Aussage war bislang nur für folgende Gruppentypen bekannt: die klassischen Gruppen A_n, B_n, C_n, D_n, wobei im Fall D_4 die trialitären Gruppen von Typ D_4 ausgeklammert werden mußten, und für die Gruppen vom Typ F_4 und G_2 (s. KNESER [*10*], SERRE [*18*]). Kürzlich hat SPRINGER auch die Gruppen vom Typ D_4 und die Formen mit Boreluntergruppen vom Typ E_6 und E_7 mit Erfolg behandeln können. VEISFEILER hat in [*21*] ein ähnliches Resultat angekündigt; er behandelt auch die Gruppen vom Typ E_8. Ich möchte in dieser Arbeit einen Beweis für alle Gruppen vom Typ D_4, E_6 und E_7 geben. Leider bleibt bei der Behandlung der E_8 noch eine Lücke. Wenn man das in [*21*] angekündigte Resultat heranzieht, kommt man aber auch in diesem Fall zu einem vollständigen Beweis des Hasseprinzips. Da es genügt, das Hasseprinzip für absolut einfache Gruppen zu beweisen, ist es damit vollständig bewiesen (s. KNESER [*11*], SERRE [*16*], § 1).

Im ersten Teil dieser Arbeit möchte ich mich auf den Fall beschränken, daß der Grundkörper total imaginär ist, also keine reellen Primstellen hat. Das wichtigste Resultat dieses Teiles ist also folgender

Hauptsatz. *Ist k ein total imaginärer algebraischer Zahlkörper und $\tilde{G}$ eine halbeinfache, einfach zusammenhängende, über k definierte, lineare algebraische Gruppe, die keine Faktoren vom Typ E_8 enthält, so ist*

$$H^1(k, \tilde{G})=0.$$

Beim Beweis dieses Satzes kann ich mich auf die Fälle D_4 und E beschränken.

Ich möchte mich bei den Herren J.-P. SERRE und J. TITS für einige Verbesserungsvorschläge bedanken. Besonderen Dank möchte ich Herrn M. KNESER aussprechen, der sich mit mir über die wesentlichen Punkte seiner Arbeit [*11*] unterhalten hat, von denen viele auch hier eine große Rolle spielen. Durch eine Idee von ihm konnte die Behandlung der Gruppen vom Typ D_4 wesentlich vereinfacht werden.

§ 1

Im folgenden Paragraphen sollen einige allgemeine Sätze und Definitionen zusammengestellt werden.

1.0. *Bezeichnungen.* k sei ein vollkommener Körper. G sei eine über k definierte halbeinfache, lineare algebraische Gruppe (kurz: halbeinfache k-Gruppe). Ferner wollen wir stets annehmen, daß G zusammenhängend sei. $\tilde{G}$ sei die universelle Überlagerung von G, sei Z das Zentrum von G, und $\bar{G}$ sei gleich G/Z, der adjungierten Gruppe von G. Mit π wollen wir die natürliche Abbildung $\pi\colon \tilde{G}\to G$ bezeichnen. G_k sei die Gruppe der über k rationalen Punkte. Wenn wir G schreiben, so sei stets die Gruppe der über $\bar{k}$ rationalen Punkte gemeint, also $G=G_{\bar{k}}$.

1.1. *Maximale Tori.* $T\subset G$ sei ein maximaler, über k definierter Torus von G, oder kurz ein maximaler k-Torus (von G). (Die Existenz solcher k-Tori ist nach GODEMENT [7], Corollaire zu Théorème 1, gesichert. Hat k die Charakteristik 0, so ist die Existenz maximaler k-Tori mit der Existenz von über k definierten Cartan-Algebren in einer halbeinfachen Lie-Algebra gleichwertig; diese ist aber leicht nachzuweisen.) Mit $\tilde{T}$ bezeichnen wir den k-Torus $\pi^{-1}(T)$ in G, entsprechend sei $\bar{T}=T/Z$. Unter $X(T)$ wollen wir den Charaktermodul des Torus verstehen, also $X(T)=\mathrm{Hom}(T, G_m)$, wobei G_m die multiplikative Gruppe $\bar{k}^*$ ist, die mit der Struktur einer algebraischen Gruppe versehen ist. Unter den Charakteren von T sind einige besonders ausgezeichnet, nämlich die Wurzeln von T in G (CHEVALLEY [4], Exp. 12, 13). Die Menge der Wurzeln sei $\Delta(T)=\Delta$. Jeder dieser Wurzeln $\alpha\in\Delta$ ist eine einparametrige Untergruppe $P_\alpha\subset G$ zugeordnet. P_α ist isomorph zur Gruppe $G_a=\bar{k}^+$, der additiven Gruppe des Körpers, und es gilt für $x\in P_\alpha$, $t\in T$ die Formel $t\,x\,t^{-1}=\alpha(t)\,x$ (CHEVALLEY [4], Exp. 13).

1.2. *Die Weylgruppe.* Es sei $N(T)$ der Normalisator von T in G. Da wir G als zusammenhängend vorausgesetzt hatten, ist $W=N(T)/T$ die Weylgruppe von G [4]. Die Gruppe W operiert auf $X(T)$ und läßt dabei die Menge der Wurzeln invariant. Die Gruppe $\overline{W}=\{w \mid w\in\mathrm{Hom}(X(T))\; w\,\Delta=\Delta\}$ wollen wir die „große" Weylgruppe nennen. Die Gruppe $\overline{W}/W=A$ ist die Gruppe der äußeren Automorphismen von G (s. Einleitung). A ist die Gruppe der Automorphismen des Dynkinschemas von G.

1.3. *Die verschränkten Formen.* Wir hatten in der Einleitung schon erwähnt, daß die k-Formen einer Gruppe vom Typ X_y eineindeutig den Elementen von $H^1(k, \mathrm{Aut}(G))$ entsprechen, wobei G eine beliebige k-Form vom Typ X_y ist. Ist $\xi\in H^1(k, \mathrm{Aut}(G))$, so bezeichnen wir die ξ entsprechende k-Form mit G^ξ; sie wird auch die mit ξ verschränkte Form genannt. Für jede k-Gruppe G gibt es eine kanonische Abbildung $\varphi\colon G\to\mathrm{Aut}(G)$ (s. Einleitung). Ist $\xi\in H^1(k, G)$, so sei G^ξ die mit $\varphi^*(\xi)\in H^1(k, \mathrm{Aut}(G))$ verschränkte k-Form.

Sei $G=G_0$ die Chevalleyform, d.h. diejenige k-Form, die einen maximalen k-Torus $T_0\subset G_0$ besitzt, der über k zerfällt. Wir wollen G_0 auch die zerfallende

Form nennen. Dann operiert $\Gamma(\bar{k}/k)$ auf $A=\mathrm{Aut}(G_0)/\bar{G}_0$ trivial; es ist $H^1(k,A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\Gamma(\bar{k}/k),A)$, wobei wir zwei konjugierte Homomorphismen als gleich ansehen. Durch die Abbildung

$$H^1(k,\underset{\sim}{\mathrm{Aut}}(G_0)) \xrightarrow{p^*} H^1(k,A)$$

wird jedem ξ ein Homomorphismus, besser eine Klasse von Homomorphismen, $p^*(\xi)=\psi_\xi\colon \Gamma(\bar{k}/k)\to A$ zugeordnet.

1.4. *Der $\Gamma(\bar{k}/k)$-Modul $X(T)$.* $\bar{k}$ sei der algebraische Abschluß von k. Die Galoisgruppe $\Gamma(\bar{k}/k)$ operiert auf $X(T)$ (ONO [15]). Man überlegt sich ferner leicht, daß die Menge Δ unter diesen Operationen invariant ist; also haben wir einen kanonischen Homomorphismus:

1.4.1. $\varphi\colon \Gamma(\bar{k}/k)\to \overline{W}$.

1.5. *Innere und äußere Formen.* Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \psi\colon \Gamma(\bar{k}/k) & \longrightarrow & \overline{W}/W=A \\ & {\scriptstyle\varphi}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle p} & \\ & \overline{W} & \end{array}$$

p sei die natürliche Projektion, das Diagramm sei kommutativ. Diese Abbildung hängt nicht von dem k-Torus $T\subset G$ ab, den wir ausgewählt haben, sondern nur von der Form G; denn ist $G=G_0^\xi$, so ist $\psi=p^*(\xi)$ im Sinne von 1.4.

Definition 1. G heißt eine innere Form, wenn ψ die triviale Abbildung ist, d.h. $\psi(\sigma)=1$ für alle $\sigma\in\Gamma(\bar{k}/k)$.

Anderenfalls heißt G eine äußere Form. Es gibt stets eine eindeutig bestimmte, normale Erweiterung K/k, über der G eine innere Form wird. $\Gamma(\bar{k}/K)$ ist der Kern von ψ. Die inneren Formen entsprechen den Elementen, die im Bild der Abbildung $H^1(k,\bar{G}_0)\to H^1(k,\mathrm{Aut}(\bar{G}_0))$ liegen.

1.5.1. Unter denjenigen k-Formen G_0, bei denen $p^*(\xi)=\psi$ ein bis auf Konjugierung vorgegebener Homomorphismus $\psi\colon \Gamma(\bar{k}/k)\to A$ ist, gibt es stets eine ausgezeichnete, nämlich diejenige, die eine über k definierte Borelgruppe besitzt (s. SERRE [16]; die Behauptung folgt aus Remarque 2, S. 63). Wir wollen diese k-Form die Form mit Borelgruppe über k nennen. Ist ψ trivial, so ist die zugehörige Form mit Borelgruppe gerade die Chevalleyform.

1.6. *Zerfällungsklassen.* G und G' seien zwei halbeinfache k-Formen desselben halbeinfachen Gruppentyps. T und T' seien zwei maximale k-Tori von G bzw. G'.

Definition 2. T und T' besitzen dieselbe Zerfällungsklasse über k, wenn es einen birationalen über $\bar{k}$ definierten Isomorphismus $f\colon G\to G'$ gibt, für den gilt:

(1) $f(T)=T'$,

(2) *$\mathrm{res}_T f\colon T\to T'$ ist über k definiert.*

Die Abbildung $f^{-1}\circ f^{\sigma}=\varphi_{\sigma}$ (σ durchläuft die Galoisgruppe $\Gamma(\bar{k}/k)$) ist dann ein Element aus $\mathrm{Aut}(G)$. Die Abbildung $\sigma\to\varphi_{\sigma}$ ist ein Kozyklus, mit dessen Kohomologieklasse ich G verschränken muß, um G' zu erhalten (s. SERRE [16]; [17], Chap. X; [18], Chap. I, 5.3). Wegen (2) bildet φ_{σ} den Torus T in sich ab und induziert dort sogar die Identität. Also ist φ_{σ} ein innerer Automorphismus von G, also $\varphi_{\sigma}(x)=t_{\sigma}\,x\,t_{\sigma}^{-1}$ mit $t_{\sigma}\in G$, und (2) liefert uns, daß $t_{\sigma}\in T$. Daraus erhalten wir

Satz 1.6.1. *$\xi\in H^1(k,\bar{G})$ liegt genau dann im Bild einer Abbildung $H^1(k,\overline{T})\to H^1(k,\bar{G})$, wobei $\overline{T}$ ein maximaler k-Torus ist, wenn es in der verschränkten k-Form $\bar{G}^{\xi}$ einen k-Torus T' gibt, der die gleiche Zerfällungsklasse wie $\overline{T}$ besitzt.*

An dieser Stelle wollen wir das schon in der Einleitung angekündigte Theorem von STEINBERG formulieren (s. [19], Th. 11.1).

Theorem von Steinberg. *Es sei G eine k-Form mit einer über k definierten Borelgruppe. Dann ist die Abbildung*

$$\bigcup_{T\ k\text{-Tori}} H^1(k,T)\to H^1(k,G)$$

surjektiv.

1.7. *Konstruktion von Untergruppen.* Wir wollen nun zwei einfache Verfahren angeben, wie man Untergruppen konstruieren kann.

1.7.0. G sei eine halbeinfache k-Gruppe. Sei $T\subset G$ ein maximaler k-Torus. Sei $\Delta\subset X(T)$ das System der Wurzeln, $\Delta_0\subset\Delta$ sei ein Teilsystem von Wurzeln mit folgenden Eigenschaften:

(1) Δ_0 ist unter $\Gamma(\bar{k}/k)$ (als Ganzes) invariant.

(2) Ist $\alpha\in\Delta_0$, so ist auch $-\alpha\in\Delta_0$.

(3) Sind $\alpha,\beta\in\Delta_0$ und ist $\alpha+\beta\in\Delta$, so ist $\alpha+\beta\in\Delta_0$.

Dann erzeugen die P_{α} (s. 1.1) mit $\alpha\in\Delta_0$ eine halbeinfache k-Untergruppe $H=H(\Delta_0)$. Das System der Wurzeln von H ist Δ_0. Untergruppen, die wir auf diese Art erhalten, wollen wir *spezielle* halbeinfache k-Untergruppen nennen. Eine reduktive k-Untergruppe heißt speziell, wenn ihr halbeinfacher Anteil speziell ist.

1.7.1. Nun sei $S\subset T$ ein k-Teiltorus von T. Mit $Z(S)$ ist der Zentralisator von S bezeichnet. $Z(S)$ ist eine zusammenhängende, über k definierte algebraische Gruppe (CHEVALLEY [4], Exp. 6, Théorème 6). Es sei Δ_S die Menge derjenigen Wurzeln von T, die eingeschränkt auf S konstant gleich 1 sind, d.h. $\Delta_S=\{\alpha\mid\alpha(S)=1\}$. Dann gehören die P_{α} (s. 1.1) mit $\alpha\in\Delta_S$ sicher zu $Z(S)$. Man zeigt leicht, daß diese P_{α} eine halbeinfache Untergruppe $Z^*(S)$ erzeugen (s. 1.7.0) und daß diese Untergruppe gerade die Kommutatorgruppe von $Z(S)$ ist. $Z(S)$ ist eine spezielle, reduktive Untergruppe; T ist ein maximaler Torus von $Z(S)$.

1.7.2. Die folgende Methode zur Erzeugung von maximalen Untergruppen stammt von KARPELEVIČ [6].

G_0 sei die Chevalleyform. T_0 sei ein zerfallender maximaler Torus. Π sei ein System einfacher Wurzeln von T_0 (CHEVALLEY [4], Exp. 13, racines fondamentales). Es sei $\alpha \in \Pi$ und $\Pi_\alpha = \Pi - \{\alpha\}$. Sei $G[\alpha]$ die von T, P_α und $P_{\pm\beta}$ mit $\beta \in \Pi_\alpha$ erzeugte Untergruppe von G. Sie ist maximal [6], wovon wir aber keinen Gebrauch machen werden. Offensichtlich enthält $G[\alpha]$ die von den P_γ mit $\gamma \in \Pi$ und T erzeugte Borelgruppe, $G[\alpha]$ ist also eine parabolische Untergruppe (GODEMENT [7]). Sie enthält die von den $P_{\pm\beta}$ erzeugte Untergruppe als maximale halbeinfache Untergruppe, die wir mit $G(\alpha)$ bezeichnen wollen. $G(\alpha)$ ist speziell. Alle diese Untergruppen sind über k definiert. Ist die Dimension einer Borelgruppe von G_0 gleich b, so gilt

1.7.3. $\dim G[\alpha] = b + \frac{1}{2}A$, wo A die Anzahl der Wurzeln von $G(\alpha)$ bedeutet.

1.7.4. G sei eine einfache Gruppe und alle Wurzeln von G seien gleich lang. $T \subset G$ sei ein maximaler Torus, $\alpha \in X(T)$ sei eine Wurzel von G, P_α sei die zugehörige einparametrige Untergruppe (s. 1.1). Wir wollen den Normalisator $N(P_\alpha)$ von P_α in G berechnen. Zu diesem Zweck ordnen wir die Wurzeln so an, daß α eine größte positive Wurzel wird (CHEVALLEY [3], Lemma 5). Dann sind alle P_β mit $\beta > 0$ in $N(P_\alpha)$ enthalten, ferner ist $T \subset N(P_\alpha)$. Es folgt, daß $N(P_\alpha)$ eine Boreluntergruppe enthält, $N(P_\alpha)$ ist eine parabolische Untergruppe, also ist $N(P_\alpha)$ zusammenhängend (s. [7]). Ferner sind noch die P_γ in $N(P_\alpha)$ enthalten, für die $\alpha \pm \gamma$ keine Wurzel ist, die also senkrecht auf α stehen. Man überlegt sich leicht, daß $N(P_\alpha)$ von diesen P_γ, P_β mit $\beta > 0$ und T erzeugt wird. Der halbeinfache Anteil von $N(P_\alpha)$ wird von den P_γ, für die γ senkrecht auf α steht, erzeugt. Für die Dimension von $N(P_\alpha)$ gilt auch die Formel 1.7.3.

1.8. *Das Theorem von* BOREL-TITS. Von nun an setzen wir voraus, daß k die Charakteristik 0 hat. Dann gilt der folgende Satz:

Theorem von Borel-Tits. *G sei eine halbeinfache k-Gruppe. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Es gibt in G_k ein unipotentes Element $u \neq 1$.*

(2) *Es gibt einen k-Torus $S \subset G$, der von 1 verschieden ist und der über k zerfällt.*

Ferner gilt: Sind S und S' über k zerfallende k-Tori und sind S und S' mit dieser Eigenschaft maximal, so gibt es ein $a \in G_k$ mit $a S a^{-1} = S'$.

Dieses Theorem ist eine Zusammenfassung von Théorème 9 und Corollaire 1 zum Théorème 6 aus dem Exposé 206, Séminaire BOURBAKI [7].

Ist $S \subset G$ ein zerfallender k-Torus und ist S mit dieser Eigenschaft maximal, so werden wir in Zukunft von einem maximalen zerfallenden Torus reden. Einen zerfallenden maximalen Torus gibt es nur in der Chevalleyform.

Wir wollen an das Theorem von BOREL-TITS noch einige Betrachtungen anschließen.

Satz 1.8.1. *S sei ein zerfallender k-Torus in G. Ist S regulär, d.h. ist $\Delta_S = \emptyset$ (s. 1.7.1), so besitzt G eine Borelgruppe über k.*

Beweis. Da S regulär ist, folgt, daß $Z(S)=T$ ein maximaler k-Torus von G ist. Der Modul $X^*(T)=\mathrm{Hom}(G_m,T)$ ist in kanonischer Weise zum $\boldsymbol{Z}$-dualen Modul von $X(T)$ isomorph, d.h. es gibt eine natürliche, nicht entartete Paarung

$$X^*(T)\times X(T)\to \boldsymbol{Z}$$

$$\chi\times\gamma\to\langle\chi,\gamma\rangle$$

(CHEVALLEY [4], Exp.9). Es gibt nun ein unter $\Gamma(\bar{k}/k)$ invariantes Element $\chi_0\in X^*(T)$, so daß $\chi_0(G_m)\subset S$ ein regulärer Teiltorus ist. Dann ist für alle Wurzeln α der Wert $\langle\chi_0,\alpha\rangle\neq 0$. Die Wurzeln α mit $\langle\chi_0,\alpha\rangle>0$ bilden ein unter $\Gamma(\bar{k}/k)$ invariantes System positiver Wurzeln.

1.8.2. Auf dem Modul $X(T)$ gibt es eine unter der Weylgruppe invariante, positiv definite Bilinearform (s. [4], Exp.11, 13, 14). Ist $Y\subset X(T)$ ein Teilmodul, dann sei $Y^\perp$ sein orthogonales Komplement bezüglich der Bilinearform. Dann ist $X\otimes\boldsymbol{Q}=Y\otimes\boldsymbol{Q}\oplus Y^\perp\otimes\boldsymbol{Q}$, und wir erhalten hierzu eine kanonische Zerlegung des Torus $T=T_1\cdot T_2$ (ONO [15]), wobei $T_1\cap T_2$ eine endliche Gruppe ist, deren Ordnung gleich dem Index von $(Y^\perp)^\perp\oplus Y^\perp$ in $X(T)$ ist. (Dies folgt alles aus der Dualität zwischen T und $X(T)$.)

Ist $Y\subset X(T)$ ein von Wurzeln erzeugter Teilmodul, so erzeugen die P_α mit $\alpha\in Y$ eine halbeinfache Untergruppe H (s. 1.7.0). Wir erhalten wie oben eine Zerlegung $T=T_1\cdot T_2$, wobei $T_2\subset H$ ein maximaler Torus ist. Das Zentrum von H enthält $T_1\cap T_2$.

§ 2

Die Argumentation bei der Berechnung von $H^1(k, G)$ wird in grober Näherung in zwei Schritten verlaufen.

I. Für $\xi\in H^1(k, G)$ suche man einen k-Torus T oder allgemeiner eine spezielle reduktive k-Untergruppe $H\subset G$, so daß ξ im Bild von $H^1(k,T)\to H^1(k,G)$ oder $H^1(k,H)\to H^1(k,G)$ liegt.

Unser Satz 1.6.1 ist eine erste Aussage in dieser Richtung (STEINBERGs Theorem natürlich auch).

II. Man studiere die Abbildung $H^1(k,T)\to H^1(k,G)$ bzw. $H^1(k,H)\to H^1(k,G)$.

In diesem Paragraphen sollen noch einige allgemeine Sätze zu den beiden Punkten bewiesen werden.

2.1. $\bar{G}$ sei eine innere Form der halbeinfachen Gruppen vom Typ X_y. Sei $S\subset\bar{G}$ ein zerfallender k-Torus. Der Zentralisator $Z(S)$ ist zusammenhängend (1.7.1), und es ist $Z(S)=T'\cdot Z^*(S)$, wobei T' die Zusammenhangskomponente der 1 des Zentrums von $Z(S)$ ist. Es ist $T'=S\cdot T_1$, wobei T_1 ein k-Torus und $S\cap T_1$ endlich ist. Nun sei $\bar{G}_0$ die Chevalleyform, $T_0\subset\bar{G}_0$ sei ein zerfallender maximaler k-Torus in G_0. Wir wählen in T_0 einen k-Torus S_0 aus, so daß es über $\bar{k}$ einen birationalen Isomorphismus $f\colon \bar{G}_0\to\bar{G}$ gibt, der S_0 auf S abbildet. Das ist sicher möglich, da maximale Tori über $\bar{k}$ konjugiert

sind. Für $\sigma\in\Gamma(\bar{k}/k)$ ist die Abbildung $f^{-1}\circ f^{\sigma}=\varphi_{\sigma}$ ein innerer Automorphismus von G_0, weil G eine innere Form ist. Wir schreiben $\varphi_{\sigma}(x)=a_{\sigma}\,x\,a_{\sigma}^{-1}$ mit $a_{\sigma}\in\bar{G}_0$. Der Kozyklus $\sigma\to a_{\sigma}$ repräsentiert die Kohomologieklasse, mit der ich $\bar{G}_0$ verschränken muß (s. SERRE [16], [17], [18]), um $\bar{G}$ zu erhalten. Ferner ist klar, daß $a_{\sigma}\in Z(S_0)$ liegen muß; denn die Abbildung $f\colon S_0\to S$ ist über k definiert (BOREL [2]). $Z(S_0)$ ist eine reduktive, spezielle Untergruppe von $\bar{G}_0$. Sie enthält einen über k zerfallenden maximalen k-Torus. Also ist die Zusammenhangskomponente der 1 des Zentrums von $Z(S_0)$, die wir Z nennen wollen, ein über k zerfallender k-Torus. $Z(S_0)/Z^*(S_0)=Z'$ ist ein zu Z isogener k-Torus, der also auch über k zerfällt. Wir betrachten die exakte Sequenz

$$1\to Z^*(S_0)\to Z(S_0)\to Z'\to 1.$$

Da $H^1(k,Z')=0$ ist (HILBERT, Satz 90), folgt, daß die Abbildung $H^1(k, Z^*(S_0))\to H^1(k, Z(S_0))$ surjektiv ist, also ist $\{\sigma\to a_{\sigma}\}\in\mathrm{Im}(H^1(k, Z^*(S_0))\to H^1(k, \bar{G}_0))$. Betrachten wir nun wieder die Gruppe $\bar{G}$, so sehen wir als erstes, daß auch T_1 zerfällt, und daraus folgt, daß T' über k zerfällt. Wenn wir den Torus $S_0\subset T_0$ einen zu $S\subset\bar{G}$ in der Chevalleyform korrespondierenden Torus nennen, so erhalten wir

Satz 2.1.1. *Es sei $\bar{G}$ eine innere k-Form. Sei $S\subset\bar{G}$ ein zerfallender k-Torus, und $S_0\subset T_0\subset\bar{G}_0$ sei ein korrespondierender Torus in der Chevalleyform $\bar{G}_0$. Dann ist die Zusammenhangskomponente der* 1 *des Zentrums von $Z(S)$ ein zerfallender Torus, und ist $\bar{G}=\bar{G}_0^{\xi}$ mit $\xi\in H^1(k, \bar{G}_0)$, so liegt ξ im Bild von $H^1(k, Z^*(S_0))\to H^1(k, \bar{G}_0)$. Da $Z^*(S_0)$ die Chevalleyform ist, folgt, daß $Z^*(S_0)$ eine innere Form ist.*

Korollar 2.1.2. *Ist $H^1(k, Z^*(S_0))=0$, so folgt, daß G die Chevalleyform ist.*

2.2. Wir wollen die oben angestellten Betrachtungen noch einmal variieren. Seien $\bar{G}$ und $\bar{G}'$ k-Formen von demselben Typ X_y, und sie seien ferner vom gleichen „äußeren Typ", d.h. die Homomorphismen $\psi\colon \Gamma(\bar{k}/k)\to A$ und $\psi'\colon \Gamma(\bar{k}/k)\to A$ seien konjugiert. Es seien S bzw. S' zerfallende k-Tori in G bzw. G', und es gebe einen über $\bar{k}$ definierten birationalen Isomorphismus $f\colon \bar{G}\to\bar{G}'$ mit $f(S)=S'$. Dann ist $\mathrm{res}_S f\colon S\to S'$ über k definiert. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}\circ f^{\sigma}=\varphi_{\sigma}$ ein innerer Automorphismus von $\bar{G}$. Wenn wir unsere Überlegungen wiederholen, erhalten wir, daß die Kohomologieklasse $\{\sigma\to\varphi_{\sigma}\}\in\mathrm{Im}(H^1(k, Z(S))\to H^1(k, \bar{G}))$. Sei nun $Z(S)=S\cdot T_1\cdot Z^*(S)$. Dann ist $H^1(k, T_1\cdot Z^*(S))\to H^1(k, Z(S))$ eine surjektive Abbildung.

Satz 2.2.1. *Unter den obigen Voraussetzungen sei $G^{\xi}=G'$. Dann ist $\xi\in\mathrm{Im}(H^1(k, T_1\cdot Z^*(S))\to H^1(k, \bar{G}))$.*

2.2.2. Der folgende Spezialfall wird eine wichtige Rolle spielen. Seien $\bar{G}$, $\bar{G}'$ k-Formen vom gleichen Typ X_y; es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

(1) X_y ist einfach,

(2) alle Wurzeln von X_y sind gleich lang,

(3) $\bar{G}$ und $\bar{G}'$ seien vom gleichen äußeren Typ,

(4) $\bar{G}$ und $\bar{G}'$ besitzen eine spezielle k-Untergruppe vom Typ A_1, die über k zerfällt.

Seien H bzw. H' in $\bar{G}$ bzw. $\bar{G}'$ spezielle zerfallende k-Untergruppen vom Typ A_1. Seien $S \subset H$ bzw. $S' \subset H'$ zerfallende maximale k-Tori von H bzw. H'. Wegen (1), (2) und (3) sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.1 erfüllt (CHEVALLEY [3], Lemma 5). Also gilt

Korollar 2.2.3. *Ist* $\bar{G}' = \bar{G}^{\xi}$ *mit* $\xi \in H^1(k, \bar{G})$, *so ist* $\xi \in \mathrm{Im}(H^1(k, Z(H)) \to H^1(k, \bar{G}))$, *wobei* $Z(H)$ *der Zentralisator von* H *in* G *ist.*

Beweis. Schreiben wir $Z(S)$ in der Form $S \cdot T_1 \cdot Z^*(S)$, so ist wegen (2) $Z(H) = T_1 \cdot Z^*(S)$. Die Behauptung ist dann ein Spezialfall von Satz 2.2.1.

2.3. *„Subtraktion" von Kohomologieklassen.* Wir stellen nun die folgende Frage: $u, \xi \in H^1(k, T)$, ξ lasse sich in G beranden, d.h. es ist $i^*(\xi) = 0$, wobei $i^*: H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ die natürliche Abbildung ist. Welche Aussage muß man über die Differenz $u - \xi$ (T ist kommutativ, $H^1(k, T)$ ist also eine abelsche Gruppe) machen, um auf $i^*(u) = 0$ schließen zu können? Diese Frage wird durch die folgende Überlegung beantwortet: ξ werde durch den Kozyklus $\sigma \to t_\sigma$ mit $\sigma \in \Gamma(\bar{k}/k)$ und $t_\sigma \in T$ repräsentiert. Es gibt ein $A \in G$, so daß $t_\sigma = A^{-1} A^\sigma$ für alle $\sigma \in \Gamma(\bar{k}/k)$. Wir setzen $T' = ATA^{-1}$, der Torus T' ist über k definiert, und die Abbildung $\varphi_A: t \to A\,tA^{-1}$ von T auf T' ist ein birationaler Isomorphismus zwischen T und T', der über k definiert ist. Nun lasse sich der Kozyklus $\eta = \varphi_A^*(u - \xi) \in H^1(k, T')$ beranden, also $\eta = \{\sigma \to t'_\sigma\}$ und $t'_\sigma = B^{-1} B^\sigma$. Dann ist $T'' = B\,T\,B^{-1} = BATA^{-1}B^{-1}$ ein k-Torus, und $\{\sigma \to (BA)^{-1}(BA)^\sigma\}$ ist ein 1-Kozyklus mit Werten in T, es ist $(BA)^{-1}(BA)^\sigma = A^{-1}B^{-1}B^\sigma A^\sigma = \varphi_A^{*-1}(t'_\sigma) \cdot t_\sigma$. Also gilt die Formel

2.3.1. $\{\sigma \to (BA)^{-1}(BA)^\sigma\} = u - \xi$.

Wir erhalten den

Satz 2.3.2. *Es sei* $u, \xi \in H^1(k, T)$ *und* $i^*(\xi) = 0$. *Es ist* $i^*(u) = 0$ *genau dann, wenn sich die Kohomologieklasse* $\varphi_A^*(u - \xi) \in H^1(k, T')$ *in* G *beranden läßt.*

Beweis. Die eine Richtung wird durch die oben angestellte Rechnung bewiesen, die andere ergibt sich, wenn man rückwärts rechnet.

2.3.3. Ist $T \subset G$ ein maximaler k-Torus, so sei $\mathfrak{Z}(T)$ die Menge aller maximalen k-Tori, die die gleiche *innere* Zerfällungsklasse wie T besitzen, d.h. T' ist genau dann in $\mathfrak{Z}(T)$, wenn es ein $A \in G$ mit den folgenden Eigenschaften gibt:

(1) $ATA^{-1} = T'$.

(2) Die Abbildung $t \to A\,tA^{-1}$ von T auf T' ist über k definiert.

2.3.4. Sei k ein beliebiger Körper, E/k sei eine zyklische Erweiterung vom Primzahlgrad p, deren Galoisgruppe wir mit Γ bezeichnen wollen. Sei T ein k-Torus, der über E zerfällt und der keinen echten über k zerfallenden

Teiltorus besitzt. Mit $X^*(T)=\mathrm{Hom}(G_m, T)$ bezeichnen wir den Modul der einparametrigen Untergruppen von T, die Galoisgruppe Γ operiert auf $X^*(T)$. Dieser Modul ist also ein $\boldsymbol{Z}[\Gamma]$-Modul; wegen unserer Voraussetzung über T operiert Γ ohne Fixpunkte auf $X^*(T)-\{0\}$. Daraus folgt, daß $X^*(T)$ sogar ein $\boldsymbol{Z}[\sqrt[p]{1}]$-Modul ist.

Nach ONO [15] gibt es einen kanonischen Γ-Isomorphismus φ: $X^*(T)\otimes E^* \tilde{\to} T_E$, man setze einfach $\varphi(\gamma\otimes x)=\gamma(x)$. Dann wird durch das Cupprodukt die folgende Abbildung Φ definiert:

$$\Phi: H^{-1}(\Gamma, X^*(T))\otimes H^2(E/k, E^*)\to H^1(E/k, T_E).$$

Lemma 2.3.4.1. *Unter den obigen Voraussetzungen ist Φ bijektiv.*

Beweis. Wir beginnen mit der folgenden Bemerkung: Sei α: $T'\to T$ eine über k definierte Isogenie, deren Grad prim zu p sei. Dann sind die induzierten Abbildungen α^*: $H^{-1}(\Gamma, X^*(T'))\to H^{-1}(\Gamma, X^*(T))$ und α^*: $H^1(E/k, T'_E)\to H^1(E/k, T_E)$ Bijektionen. Das ist leicht mit Hilfe einiger exakter Sequenzen nachzuweisen. Der Modul $X^*(T)$ ist als $\boldsymbol{Z}$-Modul frei, man kann leicht erreichen, daß

$$X^*(T')=\boldsymbol{Z}[\sqrt[p]{1}]\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}[\sqrt[p]{1}]$$

wird, und es genügt, unsere Behauptung für den Torus T' zu beweisen. Man kann sogar annehmen, daß $X^*(T')=\boldsymbol{Z}[\sqrt[p]{1}]$ ist. Nun gibt es eine exakte Sequenz

$$0\to\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}[\Gamma]\to\boldsymbol{Z}[\sqrt[p]{1}]\to 0,$$

und ist T_0 ein k-Torus mit $X^*(T_0)=\boldsymbol{Z}[\Gamma]$ (s. ONO [15]), so erhält man eine entsprechende Sequenz

$$1\to G_m\to T_0\to T'\to 1.$$

Nun ist $H^{-1}(\Gamma, \boldsymbol{Z}[\Gamma])=0$ und $H^1(E/k, T_{0,E})=0$. Nach Dimensionsverlagerung lautet unsere Behauptung:

Die Abbildung

$$\Phi': H^0(\Gamma, \boldsymbol{Z})\otimes H^2(E/k, E^*)\tilde{\to} H^2(E/k, E^*)$$

ist eine Bijektion. Das ist aber trivial.

2.3.5. G sei eine halbeinfache k-Gruppe. Sei $T\subset G$ ein maximaler k-Torus, der über einer zyklischen Erweiterung E/k vom Primzahlgrad p zerfalle. Seien $H_1 \ldots H_r$ spezielle halbeinfache k-Untergruppen, für die $S_i=H_i\cap T$ ein maximaler Torus sei. Seien π_i: $\tilde{H}_i\to H_i$ die universellen Überlagerungen der H_i und π'_i: $\tilde{S}_i\to S_i$ die entsprechenden Überlagerungen der Tori. Diese Überlagerungen induzieren Abbildungen φ_i: $X^*(\tilde{S}_i)\to X^*(T)$. Es seien die folgenden Tatsachen bekannt:

(1) Es ist $H^1(k, \tilde{H}'_i)=0$ für alle k-Formen von $\tilde{H}_i$.

(2) Es ist $H^{-1}(\Gamma, X^*(T))=\bigcup_{i=1}^{r}\varphi_i^*(H^{-1}(\Gamma, X^*(\tilde{S}_i)))$.

Lemma 2.3.5.1. *Unter den obigen Voraussetzungen ist die Abbildung* $H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ *die Nullabbildung.*

Beweis. Wir beginnen mit der Bemerkung, daß die oben formulierten Voraussetzungen für alle $T' \in \mathfrak{Z}(T)$ erfüllt sind. (2.3.3.) Nach Lemma 2.3.4.1. ist die Abbildung

$$\Phi\colon H^{-1}(\Gamma, X^*(T)) \otimes H^2(E/k, E^*) \to H^1(k, T)$$

ein Isomorphismus. (Es ist $H^1(k, T) \xrightarrow{\sim} H^1(E/k, T_E)$.)

Aus (1) und (2) folgt, daß sich die Elemente der Form $\Phi(\gamma \otimes \alpha)$ in G beranden lassen. Das allgemeine Element von $H^1(k, T)$ hat die Gestalt

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \otimes \alpha_i\right).$$

Die Behauptung folgt aus Satz 2.3.2 und der am Anfang des Beweises gemachten Bemerkung durch Induktion nach n.

§ 3

In diesem Paragraphen wollen wir noch einige weitere Resultate zusammenstellen, damit später der Gedankengang nicht gestört wird. Wir beginnen mit einigen Überlegungen zum Typ A_n.

Satz 3.1. *k sei ein vollkommener Körper. G sei eine innere k-Form vom Typ A_n. Es sei $T \subset G$ ein maximaler k-Torus. Dann gilt für $\xi \in H^1(k, T)$ die Relation $(n+1)^2 \xi = 0$.*

Beweis. Wir betrachten die Überlagerung

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \to & Z & \to & \tilde{G} & \to & \bar{G} \to 1 \\ & & \uparrow\wr & & \uparrow & & \uparrow \\ 1 & \to & Z & \to & \tilde{T} & \to & \bar{T} \to 1, \end{array}$$

wobei Z das Zentrum von G ist. Z ist zyklisch von der Ordnung $n+1$. Zu der Gruppe G gehört eine zentral einfache Algebra $\mathfrak{A}$ über k (s. SERRE [17], Chap. X). Die Gruppe $\bar{G}$ ist die über k definierte Gruppe der Automorphismen von $\mathfrak{A} \otimes_k \bar{k}$, und wenn man mit $(\mathfrak{A} \otimes_k \bar{k})^*$ die invertierbaren Elemente von $\mathfrak{A} \otimes_k \bar{k}$ bezeichnet, so gibt es einen natürlichen surjektiven Homomorphismus $(\mathfrak{A} \otimes_k \bar{k})^* \to \bar{G}$. Das Urbild von $\bar{T}$ unter diesem Homomorphismus sei die Gruppe S^*, dabei ist S^* die Gruppe der invertierbaren Elemente einer maximalen halbeinfachen kommutativen Unteralgebra von $\mathfrak{A} \otimes_k \bar{k}$. Nach Hilberts Satz 90 gilt $H^1(k, S^*) = 0$. Da man G als Normeinsgruppe in $(\mathfrak{A} \otimes_k \bar{k})$ einbetten kann, erhält man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^* & \longrightarrow & \bar{T} \\ \uparrow & \nearrow & \\ T & & \end{array}$$

Also ist $H^1(k, \tilde{T}) \to H^1(k, \bar{T})$ die Nullabbildung. Dann ist

$$H^1(k, \bar{T}) \xrightarrow{\delta} H^2(k, Z)$$

injektiv. Für $\xi \in H^2(k, Z)$ gilt $(n+1)\,\xi = 0$, also gilt dies auch für die Elemente aus $H^1(k, \bar{T})$. Der Rest folgt aus der exakten Kohomologiesequenz.

G sei wie oben. Wir betrachten die Abbildung $\mathfrak{A}_k^* \to \bar{G}_k$. Da $\mathfrak{A} = M_n(D)$, wobei D ein Schiefkörper ist, folgt

Satz 3.2. *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig*:

(1) *G_k hat keine unipotenten Elemente $\neq 1$.*

(2) *$\mathfrak{A}$ ist ein Schiefkörper.*

Ist (1) *oder* (2) *erfüllt und zerfällt G über K, so ist $n+1 \mid [K: k]$.*

Man nennt eine k-Form vom Typ D_4 *trialitär*, wenn das Bild der Galoisgruppe unter der Abbildung ψ (s. 1.5) von der Ordnung 3 oder 6 ist (s. 4.1.1.).

Satz 3.3. *k sei ein vollkommener Körper. Sei G eine k-Form vom Typ B_n, C_n, D_n; falls G vom Typ D_4 ist, sei G nicht trialitär. $T \subset G$ sei ein maximaler k-Torus von G. Dann ist $H^1(k, T)$ eine 2-Gruppe.*

Beweis. Zuerst möchte ich bemerken, daß es genügt, diesen Satz für einen maximalen Torus $\bar{T} \subset \bar{G}$ zu beweisen, da die Isogenie $\pi: \tilde{T} \to \bar{T}$ vom Grad 2 oder 4 ist. Nun betrachten wir die Darstellung des Wurzelgitters $X(\bar{T})$, wie sie im Séminaire CHEVALLEY [4] Exposé 19, S. 6 gegeben wird. Dort wird in $X(\bar{T}) \otimes \boldsymbol{Q}$ eine Basis $\omega_1 \ldots \omega_n$ angegeben, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) Sei $Y = \boldsymbol{Z}\,\omega_1 \otimes \boldsymbol{Z}\,\omega_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}\,\omega_n$ das von den ω_i erzeugte Gitter. Dann ist $X(\bar{T}) \subset Y$, und es ist $[Y: X(\bar{T})] = 2^f$ mit $f \in \boldsymbol{N}$.

(2) Ist G nicht vom Typ D_4, so operiert $\overline{W}$ auf Y durch $w \cdot \omega_i = \varepsilon(i) \cdot \omega_{\pi(i)}$, wobei $i \to \pi(i)$ eine Permutation der Indexmenge $1 \ldots n$ und $\varepsilon(i) = \pm 1$ ist.

Da wir die trialitären D_4 ausgeschlossen haben, können wir dasselbe auch für den Typ D_4 annehmen.

Nun operiert $\Gamma(\bar{k}/k)$ auf $X(\bar{T})$, also auch auf Y. Zu Y gibt es einen k-Torus T', der Y als Charaktermodul hat (ONO [15]). Nun folgt aus dem Lemma von SHAPIRO (s. [1]), daß $H^1(k, T')$ ein 2-Gruppe ist, wegen (1) folgt dann dasselbe für $H^1(k, \bar{T})$.

Satz 3.4. *G sei eine k-Form der E_6 oder E_7. Sei $T \subset G$ ein maximaler k-Torus. Dann besitzt die Gruppe $H^1(k, T)$ keine Elemente der Ordnung 5 oder 7. Die Gruppe $H^1(k, T)$ ist also direktes Produkt ihrer 2- und 3-Sylowgruppen. Ist G vom Typ E_8, so hat $H^1(k, T)$ keine Elemente der Ordnung 7.*

Beweis. E/k sei der minimale Zerfällungskörper von T. Es sei $\Gamma(E/F)$ eine 5-Sylowgruppe der Galoisgruppe $\Gamma(E/k)$. Wir haben zu zeigen, daß $H^1(E/F, T) = 0$ ist. Wieder können wir ohne Einschränkung $T = \bar{T}$ annehmen. Die Wurzelgitter der E_6 und der E_7 enthalten ein Untergitter, das von den

Wurzeln der D_5 erzeugt wird. Nun ist die 5-Sylowgruppe der Weylgruppe der D_5 gleich der 5-Sylowgruppe der Weylgruppen der E_6 und E_7. Also gibt es im $\Gamma(E/F)$-Modul $X(\bar{T})$ ein Untergitter Y, das unter $\Gamma(E/F)$ invariant ist und von den Wurzeln einer D_5 erzeugt wird. Es gibt also einen F-Teiltorus $T_0 \subset T$, der maximaler Torus einer über F definierten Untergruppe $H \subset G$ vom Typ D_5 ist. Zum Komplement $Y^\perp$ (s. 1.8.2) gehört ein F-Torus T_1, der über F zerfällt. Der Durchschnitt $T_1 \cap T_0$ ist eine 2-Gruppe, da diese Gruppe im Zentrum der Gruppe H liegt. Daraus und aus Satz 3.3 folgt die Behauptung unseres Satzes für die Primzahl 5. Ist nun $\Gamma(E/F)$ eine 7-Sylowgruppe, so muß die k-Form vom Typ E_7 oder E_8 sein. Die E_7 enthält eine Untergruppe vom Typ A_7 (s. DYNKIN [6], Table 12). Wenn wir dies beachten, führen uns die gleichen Argumente wie oben zum Ziel, wenn wir Satz 3.1 berücksichtigen.

k sei ein beliebiger vollkommener Körper, p sei eine Primzahl. Wir sagen, daß die p-kohomologische Dimension von $k \leqq 1$ ist – in Zeichen: $cd_p(k) \leqq 1$ –, wenn für jede endliche Erweiterung K/k die Brauergruppe $Br(K) = H^2(\bar{k}/K, \bar{k})$ keine Elemente der Ordnung p enthält. (s. SERRE [18]). Man kann nun leicht folgendes zeigen: k sei ein Körper mit $cd_p(k) \leqq 1$, T sei ein k-Torus, dann enthält $H^1(k, T)$ keine Elemente der Ordnung p. (s. SERRE [17], Chap. X, § 7). Aus dieser Überlegung, dem Theorem von STEINBERG (s. 1.6) und aus Satz 3.4 folgt nun

Satz 3.5. *k sei ein vollkommener Körper, es sei $cd_2(k) \leqq 1$, $cd_3(k) \leqq 1$. Ist G eine k-Form der E_6 oder E_7 mit Borelgruppe über k, so ist $H^1(k, G) = 0$. Daraus folgt, daß jede k-Form der E_6 oder E_7 eine Borelgruppe über k besitzt. Ist auch noch $cd_5(k) \leqq 1$, so folgt, daß jede Form der E_8 über k zerfällt.*

Nun sei k ein algebraischer Zahlkörper, n sei eine natürliche Zahl. Unter $\boldsymbol{k}_n$ wollen wir den Körper verstehen, den wir erhalten, wenn wir zu k alle n^r-ten Einheitswurzeln adjungieren, wobei r die natürlichen Zahlen durchläuft. Ist p eine Primzahl und $p \mid n$, so ist $cd_p(\boldsymbol{k}_n) \leqq 1$. Dies folgt aus dem Hasseprinzip für Algebren.

Aus Satz 3.5 folgt nun

Satz 3.6. *Ist k ein algebraischer Zahlkörper und G eine k-Form der E_6 oder E_7, so besitzt G über $\boldsymbol{k}_6$ eine Borelgruppe. Über $\boldsymbol{k}_{30}$ zerfällt jede Gruppe vom Typ E_8.*

3.7. k sei ein Körper der Charakteristik 0. Sei G eine halbeinfache k-Gruppe und G_k enthalte keine unipotenten Elemente $u \neq 1$. Ferner sei bekannt, daß G über einer quadratischen Erweiterung E/k eine Borelgruppe B besitzt. Sei $\sigma \neq 1$, $\sigma \in \Gamma(E/k)$, dann hat $B \cap B^\sigma$ mindestens die Dimension eines maximalen Torus; da diese Gruppe auflösbar ist und da G_k keine unipotenten Elemente hat, folgt, daß $B \cap B^\sigma$ ein maximaler k-Torus T von G ist. Zerfällt G über E, d.h. ist G über E die Chevalleyform, so sehen wir, daß T über E zerfällt, $\Gamma(E/k)$ operiert ohne Fixpunkte auf $X(T)$.

3.8. G sei halbeinfach, $P \subset G$ sei eine parabolische Untergruppe, $B \subset P$ sei eine Borelgruppe, $R \subset P$ sei das Radikal, und R_u sei das unipotente Radikal

von P. Die Gruppe P/R_u ist reduktiv, die Anzahl ihrer Wurzeln ist $2(\dim P - \dim B)$. Ihre Dimension ist also $\dim T + 2(\dim P - \dim B)$, wobei T ein maximaler Torus von G ist. Ferner gilt $\dim R_u + \dim T + 2(\dim P - \dim B) = \dim P$, also $\dim R_u + \dim P = 2 \cdot \dim B - \dim T = \dim G$. Die Kodimension von P in G ist also gleich der Dimension des unipotenten Radikals.

Nun sei G über k definiert, und G_k enthalte keine unipotenten Elemente $u \neq 1$. Ferner besitze G über einer speziellen quadratischen Erweiterung E/k eine parabolische Untergruppe P. Dann ist $P \cap P^\sigma$ eine reduktive Untergruppe, und da $\dim P \cap P + \dim R_u \geqq \dim P$ gilt, (s. oben) folgt, daß $P \cap P^\sigma$ isogen zu der Gruppe P/R_u ist.

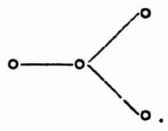
3.9. k sei ein total imaginärer algebraischer Zahlkörper. Sei G eine halbeinfache k-Gruppe. Die folgende Tatsache wird beim Beweis des Hauptsatzes mit herauskommen: Ist G nicht vom Typ $A \times \cdots \times A$, so besitzt G_k von 1 verschiedene unipotente Elemente. Diese Tatsache ist für die klassischen Gruppen bekannt; sie läßt sich auch aus dem Hauptsatz herleiten, der ja für die klassischen Gruppen bekannt ist.

3.10. Sei nun G halbeinfach, und unser Hauptsatz sei für Gruppen kleinerer Dimension als G bewiesen. Ferner sei bekannt, daß G_k von 1 verschiedene unipotente Elemente besitzt. Sei $S \subset G$ ein maximaler zerfallender k-Torus. Die spezielle Untergruppe $Z^*(S)$ ist dann vom Typ $A \times \cdots \times A$, da $Z^*(S)_k$ keine unipotenten Elemente $u \neq 1$ besitzen darf.

3.11. Nun sei G wie oben, aber zusätzlich sei vorausgesetzt, daß G eine innere Form ist und daß G über einer Erweiterung E/k vom Primzahlgrad p zerfällt. Dann ist nach Satz 2.1.1 $Z^*(S)$ eine innere k-Form, und nach dem Theorem von BOREL zerfällt $Z^*(S)$ über E. Also folgt nach Satz 3.2, daß $Z^*(S)$ vom Typ $A_d \times A_d \times \cdots \times A_d$ ist mit $d = p - 1$.

§ 4

4.1.1. *Die trialitären Formen der D_4.* Die Gruppe vom Typ D_4 hat das folgende Dynkinschema



Dieses Dynkinschema hat als Automorphismengruppe die Gruppe S_3, die volle symmetrische Gruppe in 3 Variablen, also ist $\bar{W}/W = S_3$ (s. 1.3). Man nennt eine k-Form der D_4 trialitär, wenn das Bild der Galoisgruppe $\Gamma(\bar{k}/k)$ unter der Abbildung ψ (s. 1.5) eine Gruppe mit der Ordnung 3 oder 6 ist. Es sei K/k die kleinste Körpererweiterung, über der G eine innere Form wird. $\Gamma(\bar{k}/K)$ ist der Kern von ψ. Die Trialität ist im wesentlichen durch die Erweiterung K/k bestimmt. Wir wollen mit $D(K/k)$ die Menge der trialitären k-Formen der D_4 bezeichnen, die über K eine innere Form werden.

4.1.2. Der Grundkörper k habe die Charakteristik 0. Es sei $G \in D(K/k)$ eine trialitäre k-Form der D_4. Es gebe in G_k ein unipotentes Element $u \neq 1$. Nach Borel-Tits gibt es dann auch einen nicht trivialen zerfallenden k-Torus. Sei $S \subset G$ ein maximaler zerfallender k-Torus. Wir fragen nach den Möglichkeiten, die für $Z^*(S)$ in Frage kommen. Nach Satz 1.8.1 ist klar, daß $Z^*(S)=1$ gleichwertig damit ist, daß G über k die k-Form mit Boreluntergruppe ist. Sei $Z^*(S) \neq 1$; wir schreiben wie in 2.2 $Z(S)=S \cdot T_1 \cdot Z^*(S)$. Dann sind offensichtlich nur die beiden folgenden Fälle möglich:

I. $\dim T_1 = 2$, $Z^*(S)$ vom Typ A_1,

II. $\dim S = 1$, $Z^*(S)$ vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$.

Daß keine anderen Fälle auftreten können, sieht man daran, daß G trialitär ist; man betrachte die Operationen der trialitären Automorphismen auf einen maximalen Torus von $Z(S)$. Im Fall I operieren die trialitären Automorphismen transitiv auf den Elementen der Ordnung 2 in T_1, also folgt $Z^*(S) \cap T_1 = 1$. Sei G_1 die k-Form mit Boreluntergruppe über k in $D(K/k)$. Sei S_1 ein zu S korrespondierender Torus (s. 2.2), dann ist $Z^*(S_1)$ die einfach zusammenhängende Chevalleyform. Also ist $H^1(k, Z^*(S_1))=0$; aus $T_1 \cap Z^*(S)=1$ folgt, daß auch $Z^*(S)$ die Chevalleyform über k ist (Satz 2.2.1). Das widerspricht der Maximalität von S; also bleibt nur der Fall II.

Wir nennen die Gruppe $Z^*(S)$ in diesem Fall H. Der Zentralisator von H ist eine spezielle Untergruppe H_0 vom Typ A_1. Der Torus S ist ein maximaler Torus von H_0. Sei $T_1 \subset H$ ein maximaler Torus, dann ist $T = S \cdot T_1 \subset G$ ein maximaler Torus. Das Wurzelgitter von $H_0 \cdot H$ hat im Wurzelgitter von G den Index 2. Ist $G = \bar{G}$ die adjungierte Gruppe, so ist demnach $S \cap T_1 = Z/2Z$ gleich den Zentren von H_0 und H (s. 1.8.2). Wir betrachten nun die vierblättrige Überlagerung $\pi: \tilde{G} \to \bar{G}$, dann ist auch $\pi: \tilde{T} \to T$ vierblättrig. Da H_0 einfach zusammenhängend ist, muß auch $\pi^{-1}(T_1) \to T_1$ vierblättrig sein. Daraus ergibt sich, daß $\pi^{-1}(H)$ einfach zusammenhängend ist, d.h. $\pi^{-1}(H) = \tilde{H}$. Wir haben also die exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \to & Z & \to & \tilde{H} & \to & H & \to & 1 \\ & & \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \to & Z & \to & \tilde{G} & \to & \bar{G} & \to & 1. \end{array}$$

Lemma 4.1.2.1. *$G \in D(K/k)$, G_k enthalte unipotente Elemente $u \neq 1$. G zerfalle über K, d.h. G sei über K die Chevalleyform. Dann ist G über k die Form mit Boreluntergruppe.*

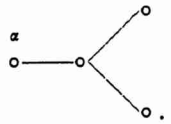
Beweis. Sei $S \subset G$ ein maximaler zerfallender Torus. Dann ist $Z^*(S)=H$ nach 4.1.2 vo Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$, wobei die Faktoren von den trialitären Automorphismen vertauscht werden. Unser Lemma folgt, wenn wir zeigen, daß H genau dann über K zerfällt, wenn H über k eine Boreluntergruppe besitzt. Die eine Richtung ist klar. Wir müssen also nur noch zeigen: Zerfällt H über K, so besitzt H über k eine Boreluntergruppe. Das ist auch klar, wenn $[K:k]=3$ ist. Ist $[K:k]=6$, so sei F die in K enthaltene quadratische Erweiterung

von k. Wir wissen schon, daß H über F eine Boreluntergruppe B besitzt. Sei $\sigma \in \Gamma(F/k)$ von 1 verschieden. Wir betrachten $B \cap B^\sigma$. Wenn H_k unipotente Elemente $u \neq 1$ besitzt, sind wir fertig. Andernfalls ist nach 3.7 $T = B \cap B^\sigma$ ein maximaler Torus, der über K zerfällt. Sei $K_1 \subset K$ eine Erweiterung mit $[K:K_1]=2$. Das von 1 verschiedene Element $\sigma \in \Gamma(K/K_1)$ operiert wie -1 auf $X(T)$. Dann muß aber $\Gamma(K/k)$ abelsch sein. Da $\Gamma(K/k)=S_3$ (s. 4.1.1) ist, erhalten wir einen Widerspruch zu der Annahme, daß H_k keine unipotenten Elemente $u \neq 1$ besitzt.

Unser Grundkörper k besitze die Eigenschaft, daß für eine innere k-Form H vom Typ A_2 gelte $H^1(k, \tilde{H})=0$. (Zum Beispiel k total imaginärer algebraischer Zahlkörper.)

Lemma 4.1.2.2. *k sei wie oben. $G \in D(K/k)$. Zerfällt G über K, so besitzt G über k eine Boreluntergruppe.*

Beweis. Wir können wegen des vorangehenden Lemmas annehmen, daß G_k keine unipotenten Elemente $u \neq 1$ besitzt. Sei $[K: k]=3$. Wir konstruieren über K nach 1.7.2 eine parabolische Untergruppe P; als α nehmen wir die Wurzel



Dann gilt wegen $\operatorname{codim} P=6$ für

$$H = \bigcap_{\sigma \in \Gamma(K/k)} P$$

die Dimensionsabschätzung $\dim H \geqq 10$. Wegen unserer Annahme muß H reduktiv sein. Der halbeinfache Anteil von H kann nicht vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$ sein, da der halbeinfache Anteil von P vom Typ A_3 ist. Weil G trialitär ist, folgt, daß der halbeinfache Anteil auch nicht vom Typ A_3 sein kann, man betrachte einfach die Operation der Galoisgruppe auf dem $X(T)$ eines maximalen Torus $T \subset H$. Also folgt, daß der halbeinfache Anteil H' vom Typ A_2 ist, wir haben $H = S \cdot H'$. Der Torus S zerfällt über K; da H' einfach zusammenhängend ist, folgt nach Korollar 2.1.2, daß H' über K zerfällt. Wir finden also in H einen maximalen k-Torus T, der über K zerfällt und der keinen echten zerfallenden k-Teiltorus enthält. Nun gibt es vier spezielle k-Untergruppen H_1, H_2, H_3, H_4 vom Typ A_2, für die $H_i \cap T = S_i$ ein maximaler k-Torus ist. Die H_i sind einfach zusammenhängend, also ist $H^1(k, H_i)=0$. (Die H_i bekommt man so: Sei $\sigma \in \Gamma(K/k)$ ein erzeugendes Element und $\alpha \in X(T)$ eine Wurzel. Dann gilt $\alpha + \alpha^\sigma + \alpha^{\sigma^2}=0$, also erzeugen $\alpha, \alpha^\sigma, \alpha^{\sigma^2}$ ein Unterdiagramm vom Typ A_2. Dadurch wird die behauptete Tatsache evident.) Die Voraussetzung (1) aus Lemma 2.3.4.1 ist damit erfüllt, und die Voraussetzung (2) erhält man auch leicht. (Siehe KNESER [11]; die in der obigen Klammer ausgeführten Überlegungen führen auch schnell zum Ziel.) Also folgt nach Lemma 2.3.4.1, daß die Abbildung $H^1(k, T) \to H^1(k, G)$ die Nullabbildung

ist. Satz 1.6.1 führt uns zum Ziel; denn man kann in der k-Form G_1, die eine k-Boreluntergruppe besitzt, einen k-Torus T_1 finden, der die gleiche Zerfällungsklasse wie T hat. Ist $[K:k]=6$, so sei $k\subset F\subset K$ mit $[F:k]=2$. Über F gibt es eine Boreluntergruppe B. Wenn es in G_k keine unipotenten Elemente $u\neq 1$ gibt, folgt sofort nach 3.7, daß $B\cap B^\sigma=T$ ein maximaler k-Torus ist. Wir schließen wie am Ende des Beweises von Lemma 4.1.2.1 und erhalten einen Widerspruch.

4.2.1. $G\in D(K/k)$, G_k enthalte keine unipotenten Elemente $u\neq 1$. Ferner sei bekannt, daß G über einer quadratischen Erweiterung E/k eine Boreluntergruppe besitzt. Wir wollen k-Tori konstruieren, die auf möglichst einfache Weise zerfallen. Dann ist nach den Überlegungen aus dem letzten Teil des Beweises von 4.1.2.1 sofort klar, daß $B\cap B^\sigma=T$ ein k-Torus ist. Die Operationen von $\Gamma(EK/E)$ auf $X(T)$ sind durch die Operationen der trialitären Automorphismen des Dynkinschemas gegeben, und $\Gamma(KE/K)$ operiert ohne Fixpunkte auf $X(T)$, d.h. der von 1 verschiedene Automorphismus operiert wie -1 auf $X(T)$.

4.2.2. Unser Grundkörper sei jetzt ein algebraischer Zahlkörper. Sei $G\in D(K/k)$ und $G=G_1^\xi$ mit $\xi\in H^1(k,\bar{G}_1)$. (Dabei ist G_1 eine k-Form mit Borelgruppe über k.) Wir betrachten die exakte Sequenz

$$H^1(k,\tilde{G}_1)\longrightarrow H^1(k,\bar{G}_1)\xrightarrow{\delta} H^2(k,Z).$$

Nun gibt es nach dem Fundamentalsatz für Algebren (Brauer-Hasse-Noether) (ARTIN-TATE [1], S. 105) eine quadratische Erweiterung E/k mit den folgenden Eigenschaften

(1) E ist total imaginär.

(2) $\mathrm{res}_{k/E}(\delta(\xi))=0$.

Dann ist $\mathrm{res}_{k/KE}(\xi)\in\mathrm{Im}(H^1(KE,\tilde{G}_1)\to H^1(KE,\bar{G}_1))$; also ist $\mathrm{res}_{k/KE}(\xi)=0$ wegen $H^1(KE,\tilde{G}_1)=0$ (KNESER [10]). G zerfällt also über KE. Enthält nun G_k keine unipotenten Elemente $\neq 1$, so sind die Voraussetzungen von 4.2.1 erfüllt, weil für E die Voraussetzungen von Lemma 4.1.2.2 erfüllt sind. Sei $T\subset G$ ein nach dem Schema von 4.2.1 konstruierter maximaler k-Torus von G. Der maximale k-Teiltorus $S\subset T$, der schon über E zerfällt, ist ein maximaler k-Torus einer speziellen Untergruppe H vom Typ A_2. Diese Untergruppe ist eine äußere Form.

Lemma 4.2.2.1. *Ist k total imaginär, so gibt es in jeder k-Form $G\in D(K/k)$ eine spezielle, zerfallende k-Untergruppe vom Typ A_1.*

Beweis. Wenn G_k unipotente Elemente $u\neq 1$ besitzt, sind wir nach 4.1.2 fertig. Andernfalls betrachten wir die oben konstruierte k-Untergruppe H vom Typ A_2. Weil k total imaginär ist, folgt, folgt nach dem Hasseprinzip für die A_2, daß H_k unipotente Elemente $u\neq 1$ besitzt. Widerspruch!

Nun ist es leicht, unseren Hauptsatz zu beweisen. Sei $\bar{G}\in D(K/k)$. Nach Lemma 4.2.2.1 besitzt $\bar{G}$ eine spezielle k-Untergruppe H_1 vom Typ A_1, die

über k zerfällt. Sei $H=Z(H_1)$. Nach Korollar 2.2.3 ist die Abbildung $H^1(k, H) \to H^1(k, \bar{G})$ surjektiv. Wir schreiben die aus den Sequenzen am Ende des Abschnitts 4.1.2 abgeleiteten Kohomologiesequenzen hin:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(k, Z) & \to & H^1(k, \tilde{H}) & \to & H^1(k, H) & \to & H^2(k, Z) \\ \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr \\ H^1(k, Z) & \to & H^1(k, \tilde{G}) & \to & H^1(k, \bar{G}) & \to & H^2(k, Z). \end{array}$$

Nach KNESER [10] ist $H^1(k, \tilde{H})=0$. Die Behauptung ergibt sich nach einer Wanderung durch das Diagramm.

Bemerkung. Das Ergebnis von 4.1.2 hat TITS in [20] mit anderen Methoden erhalten. Dasselbe gilt für analoge Resultate in späteren Paragraphen.

§ 5

5.1. *Die inneren Formen vom Typ E_6* [2].

5.1.1. k sei ein total imaginärer algebraischer Zahlkörper. Mit $E_6(k)$ wollen wir die Menge der inneren k-Formen vom Typ E_6 bezeichnen. Wir zeichnen eine Teilmenge spezieller Formen aus, von der wir dann zeigen werden, daß sie gleich $E_6(k)$ ist.

Definition. Mit $\boldsymbol{E}_6(k)$ bezeichnen wir die Menge der $G \in E_6(k)$, die eine spezielle, über k zerfallende Untergruppe vom Typ A_1 besitzen.

5.1.2. Sei $G \in \boldsymbol{E}_6(k)$, sei $H_0 \subset G$ eine spezielle k-Untergruppe vom Typ A_1, die über k zerfalle. S_0 sei ein maximaler zerfallender k-Torus von H_0. Die Gruppe $H_1=Z^*(S_0)$ ist vom Typ A_5 (DYNKIN [6], Table 12). Die Gruppe $H=H_0 \cdot H_1$ ist eine Untergruppe vom Typ $A_1 \times A_5$. Sei jetzt $G=\bar{G}$ die adjungierte Form, dann hat das von den Wurzeln der $A_1 \times A_5$ erzeugte Untergitter im Wurzelgitter der E_6 den Index 2, das Zentrum von H ist also zyklisch von der Ordnung 2, es ist der Durchschnitt von H_0 und H_1. Wir betrachten nun die universelle Überlagerung $\pi: \tilde{G} \to \bar{G}$. Dann ist die Überlagerung $\pi: \pi^{-1}(H_1) \to H_1$ dreiblättrig, also ist $\pi^{-1}(H_1)=\tilde{H}_1$ einfach zusammenhängend. (Man argumentiere wie in 4.1.2.)

Lemma 5.1.3. *Seien $G, G' \in \boldsymbol{E}_6(k)$. Dann ist $G'=G^{\xi}$ mit $\xi \in \mathrm{Im}(H^1(k, H_1) \to H^1(k, \bar{G}))$, wobei H_1 vom Typ A_5 ist wie in* 5.1.2.

Beweis. Dies folgt aus Korollar 2.2.3.

Lemma 5.1.4. *Sei $G \in \boldsymbol{E}_6(k)$ und $\xi \in H^1(k, \tilde{G})$. Es sei ferner $\tilde{G}^{\xi} \in \boldsymbol{E}_6(k)$. Dann folgt $\xi=0$.*

Beweis. Sei η das Bild von ξ in $H^1(k, \bar{G})$. Nach Lemma 5.1.3 ist

$$\eta \in \mathrm{Im}(H^1(k, H) \to H^1(k, \bar{G})).$$

---

[2] *Zusatz bei der Korrektur.* Die folgenden Überlegungen können durch ein Argument aus dem Anhang zu Teil II dieser Arbeit vereinfacht werden.

Wir betrachten die folgenden beiden exakten Kohomologiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(k,Z) & \to & H^1(k,\tilde{H}) & \to & H^1(k,H) & \xrightarrow{\delta} & H^2(k,Z) \\ \downarrow\wr & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\wr \\ H^1(k,Z) & \to & H^1(k,\tilde{G}) & \to & H^1(k,\bar{G}) & \xrightarrow{\delta} & H^2(k,Z). \end{array}$$

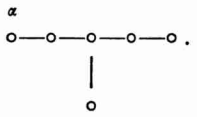
Die Behauptung ergibt sich nun sehr leicht aus $H^1(k,\tilde{H})=0$ (s. KNESER [*10*]).

Lemma 5.1.5. *Sei $G\in E_6(k)$, und G zerfalle über einer quadratischen Erweiterung $E|k$. Dann zerfällt G über k.*

Beweis. Ist $T\subset G$ ein maximaler Torus, so ist die Abbildung $\gamma\to-\gamma$ von $X(T)$ in $X(T)$ nicht in der Weylgruppe. Nach 3.7 folgt, daß G_k unipotente Elemente $u\neq 1$ besitzt. Sei S ein maximaler zerfallender k-Torus von G. Ist S kein maximaler Torus, so ist $Z^*(S)$ vom Typ A_1, $A_1\times A_1$ oder $A_1\times A_1\times A_1$ (s. 3.11). (Der Typ $A_1\times A_1\times A_1\times A_1$ kann nicht vorkommen, da diese Untergruppe in einer D_4 liegt (DYNKIN [*6*])). Diese Untergruppen sind einfach zusammenhängend, aus Korollar 2.1.2 folgt ein Widerspruch.

Lemma 5.1.6. *Sei $G\in E_6(k)$, G zerfalle über einer zyklischen Erweiterung $E|k$ vom Grad 3. Dann ist $G\in \mathbf{E}_6(k)$.*

Beweis. Zuerst nehmen wir an, daß G_k unipotente Elemente $u\neq 1$ enthält. Sei S ein maximaler zerfallender k-Torus von G, dann ist nach 3.11 $Z^*(S)=1$ oder $Z^*(S)$ vom Typ $A_2\times A_2$, denn der Typ A_2 kann wegen Korollar 2.1.2 nicht vorkommen. S ist dann ein maximaler zerfallender Torus einer A_2 (DYNKIN [*6*] und Satz 2.1.1), und daraus folgt die Behauptung. Wir werden nun zeigen, daß unter den Voraussetzungen des Lemmas 5.1.6 G_k von 1 verschiedene unipotente Elemente enthalten muß. Dann ist das Lemma bewiesen. Wir konstruieren über k nach dem Verfahren von 1.7.2 eine parabolische Untergruppe $G[\alpha]$, wobei wir für α die folgende Wurzel nehmen:



Dann ist $G(\alpha)$ vom Typ D_5. Die Kodimension von $G[\alpha]$ in G ist 16, es folgt

$$\bigcap_{\sigma\in\Gamma(E/k)} G[\alpha]^\sigma = H$$

hat die Dimension $\geqq 30$. Wenn G_k keine von 1 verschiedenen unipotenten Elemente enthält, folgt, daß H reduktiv ist. Wir setzen $H=S\cdot H'$, wobei S das Zentrum und H' der halbeinfache Anteil ist. Nun sind uns die folgenden Tatsachen bekannt:

(a) H' ist isogen zu einer Untergruppe der D_5.

(b) H'ist vom Typ $A_{d_1}\times A_{d_2}\times\cdots\times A_{d_s}$ (s. 3.10).

(c) $\sum d_i\leqq 5$.

(d) $\sum d_i+\dim S\leqq 6$.

Aus (a) und (b) folgt, daß H' nicht vom Typ A_5 ist. Es folgt dim $H' \leqq 27$, diese Dimension hat H', wenn sie vom Typ $A_1 \times A_4$ ist. Dann ist dim $H \leqq 28$. Es ergibt sich ein Widerspruch zu der Annahme, daß G_k keine unipotenten Elemente $\neq 1$ hat.

Lemma 5.1.7. *Sei $G_0 \in \boldsymbol{E}_6(k)$ die Chevalleyform. Dann ist $H^1(k, \tilde{G}_0)=0$.*

Beweis. Sei $\xi \in H^1(k, \tilde{G}_0)$, es genügt zu zeigen, daß $G_0^\xi \in \boldsymbol{E}_6(k)$ (Lemma 5.1.4). Nun zerfällt G_0^ξ über $\boldsymbol{k}_6$ (Satz 3.6), also auch über einer abelschen Erweiterung L/k vom endlichen Grad $n=2^r \cdot 3^s$. Sei n minimal. Ist $n \neq 1$, so gibt es einen Zwischenkörper $k \subset L_1 \subset L$ mit $[L:L_1]=2$ oder 3. Nach Lemma 5.1.5 und 5.1.6 folgt, daß die L_1-Form $G_0^{\mathrm{res}_{L_1}(\xi)}$ in $\boldsymbol{E}_6(L_1)$ enthalten ist. Daraus folgt nach Lemma 5.1.4, daß G_0^ξ über L_1 zerfällt. Widerspruch! Also ist $n=1$, und $G_0^\xi = G_0 \in \boldsymbol{E}_6(k)$.

5.1.8. Nun folgt sehr leicht unser

Hauptsatz. *k sei ein total imaginärer algebraischer Zahlkörper. G sei eine innere k-Form vom Typ E_6. Dann ist*

$$H^1(k, \tilde{G})=0.$$

Beweis. Sei $G=G_0^\xi$ mit $\xi \in H^1(k, \bar{G}_0)$. Wir betrachten den Kozyklus $\delta(\xi) \in H^2(k, Z)$. Es gibt eine zyklische Erweiterung E/k vom Grad 3, so daß $\mathrm{res}_{k|E}(\delta(\xi))=0$ gilt (ARTIN-TATE [1]). Dann folgt aus der exakten Kohomologiesequenz $\mathrm{res}_{k|E}(\xi) \in \mathrm{Im}(H^1(E, \tilde{G}_0) \to H^1(E, \bar{G}_0))$. Nach Lemma 5.1.7 zerfällt G über E, nach Lemma 5.1.6 folgt $G \in \boldsymbol{E}_6(k)$. Dann folgt aus Lemma 5.1.4 die Behauptung

5.2. *Die äußeren Formen vom Typ E_6.*

5.2.1. k sei ein total imaginärer algebraischer Zahlkörper, F/k sei eine quadratische Erweiterung. Mit $\boldsymbol{E}_6(F/k)$ bezeichnen wir die Menge der äußeren k-Formen vom Typ E_6, die über F innere Form werden, mit $\boldsymbol{E}_6(F/k)$ die Teilmenge derjenigen $G \in \boldsymbol{E}_6(F/k)$, die eine spezielle k-Untergruppe H_0 vom Typ A_1 besitzen, die über k zerfällt. Ist $S_0 \subset H_0$ ein zerfallender maximaler k-Torus, so ist $Z^*(S_0)=H_1$ vom Typ A_5. Diese H_1 ist eine äußere Form, die über F eine innere Form wird. Mit den Argumenten von 5.1.2 bis 5.1.4 folgt nun wieder, daß es genügt, $\boldsymbol{E}_6(F/k)=\boldsymbol{E}_6(F/k)$ zu beweisen. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen.

5.2.2. Wir zeigen, daß jedes $G \in \boldsymbol{E}_6(F/k)$ eine spezielle k-Untergruppe vom Typ D_4 besitzt. Dann sind wir nach Lemma 4.2.2.1 fertig.

5.2.2.1. Zuerst wollen wir voraussetzen, daß G über F zerfällt. Dann folgt aus 3.7 und 3.11, daß G einen maximalen k-Torus T besitzt, der über F zerfällt. Wenn T keinen zerfallenden Anteil besitzt, sind wir fertig. Sei also S ein maximaler zerfallender k-Torus in G, dann ist nach 3.11 $Z^*(S)$ vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$, $A_1 \times A_1$, A_1 oder $Z^*(S)=1$. Im letzten Fall folgt, daß G über k eine Borelgruppe besitzt, dann ist alles klar.

Wir betrachten den halbeinfachen Anteil H' des Zentralisators von $Z^*(S)$, es ist

H' vom Typ A_1, wenn $Z^*(S)$ vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$ ist,

H' vom Typ A_3, wenn $Z^*(S)$ vom Typ $A_1 \times A_1$ ist,

H' vom Typ A_5, wenn $Z^*(S)$ vom Typ A_1 ist.

H' muß wegen des Theorems von BOREL–TITS über F zerfallen, es folgt, daß man eine spezielle k-Untergruppe H'' vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ finden kann. Der Zentralisator von H'' ist ein zweidimensionaler Torus S'' mit $Z^*(S'')$ vom Typ D_4. Damit ist der Fall, daß G über F zerfällt, erledigt.

5.2.2.2. Nun setzen wir voraus, daß G nicht über F zerfällt. Besitzt G einen nicht-trivialen zerfallenden k-Torus S, so ist $Z^*(S)$ vom Typ A_5 oder $A_2 \times A_2$. Im ersten Fall folgt, daß S maximaler Torus einer k-Untergruppe vom Typ A_1 ist, im zweiten Fall folgt, daß die A_2 eine Borelgruppe besitzt, dann besitzt sie auch eine spezielle zerfallende k-Untergruppe vom Typ A_1.

Bleibt also der Fall, daß G_k keine unipotenten Elemente $u \neq 1$ besitzt. Über F besitzt G eine Untergruppe H_0' vom Typ A_1, sei α eine Wurzel von H_0' bezüglich eines zerfallenden F-Torus S_0' und P_α die zugehörige einparametrige Untergruppe (s. 1.1). Der Normalisator von P_α in G ist eine parabolische Untergruppe (s. 1.7.4), deren reduktiver Anteil vom Typ $S'' \cdot H_1''$ ist, wobei $\dim S'' = 1$ und H_1'' vom Typ A_5 ist. Also besitzt G eine reduktive k-Untergruppe $S \cdot H_1$, wobei S über F zerfällt und H_1 eine äußere Form der A_5 ist, die über F innere Form wird (s. 3.8). H_1 zerfällt über FK, wobei K eine geeignete zyklische Erweiterung vom Grad 3 ist. (s. 5.1.) Man findet in H_1 einen k-Torus T_1, der über FK zerfällt, und zwar so, daß $\Gamma(FK/K)$ auf $X(T_1)$ ohne Fixpunkte operiert. Wir betrachten den Torus $T = S \cdot T_1$. Dann ist S maximaler Torus einer A_1. Wähle in $X(T_1)$ eine Wurzel α mit $\alpha + \alpha^\sigma + \alpha^{\sigma^2} \neq 0$, wobei $\sigma \in \Gamma(FK/k)$ ein erzeugendes Element der 3-Sylowgruppe ist. Die $P_{\pm\alpha}, P_{\pm\alpha^\sigma}, P_{\pm\alpha^{\sigma^2}}$ erzeugen eine k-Untergruppe vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1$. Wir haben eine k-Untergruppe vom Typ $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ und sind fertig (s. 5.2.2.1).

5.3. *Die Formen vom Typ E_7.*

5.3.1. k sei unser total imaginärer algebraischer Zahlkörper, $E_7(k)$ sei die Menge der k-Formen der E_7. Sei $\boldsymbol{E}_7(k)$ die Teilmenge derjenigen $G \in E_7(k)$, die eine spezielle k-Untergruppe vom Typ A_1 besitzen, die über k zerfällt.

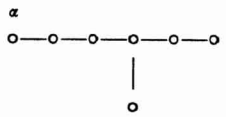
5.3.2. Sei $G \in \boldsymbol{E}_7(k)$ und H_0 eine spezielle, zerfallende k-Untergruppe vom Typ A_1. Der Zentralisator H_1 von H_0 ist eine spezielle Untergruppe vom Typ D_6 (DYNKIN [6]). Ist $G = \bar{G}$ die adjungierte Form, so hat $H = H_0 \cdot H_1 \subset \bar{G}$ ein Zentrum, und dieses ist zyklisch von der Ordnung 2; es ist der Durchschnitt von H_0 und H_1. Betrachtet man die Überlagerung $\pi\colon \tilde{G} \to \bar{G}$, so sieht man, daß $\pi\colon \pi^{-1}(H_1) \to H_1$ zweiblättrig ist, also ist $\pi^{-1}(H_1) = \tilde{H}_1$ (s. 4.1.2). Wie in 5.1 folgt nun

Lemma 5.3.3. *Seien G, $G' \in \boldsymbol{E}_7(k)$, $H_1 \subset G$ wie oben. Dann ist $G' = G^{\xi}$ mit $\xi \in \mathrm{Im}(H^1(k, H_1) \to H^1(k, \bar{G}))$.*

5.3.4. Unser Hauptsatz folgt genau wie in 5.1, wenn wir die beiden folgenden Lemmata bewiesen haben.

Lemma 5.3.5. *$G \in E_7(k)$. G zerfalle über einer zyklischen Erweiterung E/k vom Grad 3. Dann zerfällt G über k.*

Beweis. Mit der Wurzel α



konstruieren wir nach 1.7.2 eine parabolische Untergruppe $G[\alpha]$, die über E definiert ist. Es ist $\dim G[\alpha] = 106$, also ist

$$\dim \bigcap_{\sigma \in \Gamma(E/k)} G[\alpha] \geqq 52.$$

Dieser Durchschnitt kann, wie eine Dimensionsabschätzung zeigt, nicht reduktiv mit halbeinfachem Anteil $A \times \cdots \times A$ sein, also besitzt G_k unipotente Elemente $u \neq 1$, also nach dem Theorem von BOREL einen nicht trivialen zerfallenden k-Torus S. Sei S ein maximaler zerfallender k-Torus. Dann ist $Z^*(S) = 1$ oder vom Typ A_2 oder $A_2 \times A_2$ ($A_2 \times A_2 \times A_2 \subset E_6$, kann also nicht vorkommen). Die Gruppen vom Typ A_2 bzw. $A_2 \times A_2$ sind aber einfach zusammenhängend in $\bar{G}$; also folgt aus Korollar 2.1.2, daß $Z^*(S) = 1$ ist. Dann ist S ein maximaler Torus (Satz 1.8.1).

Lemma 5.3.6. *Ist $G \in E_7(k)$ und zerfällt G über einer quadratischen Erweiterung, so ist $G \in \boldsymbol{E}_7(k)$.*

Beweis. G besitzt über E eine Borelgruppe B. Also besitzt G_k entweder unipotente Elemente $u \neq 1$ oder einen k-Torus T, der über E zerfällt, und zwar so, daß $\Gamma(E/k)$ ohne Fixpunkte auf $X(T)$ operiert (s. 3.7). In beiden Fällen folgt die Existenz einer speziellen k-Untergruppe vom Typ A_1 (s. 3.11). Der Zentralisator dieser A_1 ist eine D_6, und diese besitzt eine Untergruppe mit der verlangten Eigenschaft. Wir sind fertig.

5.4. *Die Gruppen vom Typ E_8.*

Bei der Behandlung der Gruppen vom Typ E_8 bleibt leider eine Lücke. Ich hoffe aber, daß die folgende Vermutung richtig ist:

Vermutung. Sei k ein Körper der Charakteristik 0. Sei G eine k-Form vom Typ E_8, die über einer zyklischen Erweiterung K/k vom Grad 5 zerfällt. Dann gibt es eine quadratische Erweiterung E/k, so daß G eine über E definierte, echte halbeinfache Untergruppe H besitzt.

Wir wollen zeigen, daß unser Hauptsatz auch für die E_8 gilt, wenn die Vermutung richtig ist. k sei wieder ein total imaginärer algebraischer Zahlkörper.

Lemma 5.4.1. *G sei eine k-Form vom Typ E_8, die über einer Erweiterung $E|k$ vom Grad 2 oder 3 zerfalle. Dann zerfällt G auch über k.*

Beweis. Dies wird genauso wie die analogen Lemmata in 5.1 oder 5.3 bewiesen. Hierzu wird die Vermutung nicht benötigt.

Aus Lemma 5.4.1 folgt, daß eine k-Form der E_8, die über $\boldsymbol{k}_6$ zerfällt, schon über k zerfällt.

„Lemma 5.4.2." *G sei eine k-Form der E_8, die über einer zyklischen Erweiterung vom Grad 5 zerfällt. Dann zerfällt G über k.*

„Beweis". Zuerst nehmen wir an, daß G über einer normalen Erweiterung $L|k$ vom Grad 2^n unipotente Elemente $u \neq 1$ besitzt. Dann folgt leicht aus 3.11 und Korollar 2.1.2, daß G über L zerfällt. Aus Lemma 5.4.1 folgt dann, daß G über k zerfällt. In diesem Fall sind wir also fertig. Genauso erledigt sich der Fall, daß G über $\boldsymbol{k}_6$ unipotente Elemente besitzt. Liegt nun keiner der beiden Fälle vor, so greifen wir auf die Vermutung zurück. Sei H die echte halbeinfache k-Untergruppe, die über der quadratischen Erweiterung $L|k$ definiert sei. Es genügt, zu zeigen, daß G über L zerfällt. Wenn H über $\boldsymbol{L}_6$ unipotente Elemente $u \neq 1$ enthält, sind wir fertig. Andernfalls folgt, daß H vom Typ A_4 oder $A_4 \times A_4$ ist. Wir können wegen der Überlegungen am Anfang dieses Beweises annehmen, daß H eine innere Form ist. Es gibt dann einen über L definierten L-Torus T, der über KL zerfällt. Dieser Torus enthält keinen echten L-Teiltorus, der über L zerfällt. Nun gibt es sechs spezielle L-Untergruppen H_i vom Typ $A_4 \times A_4$ mit $H_i \supset T$ (s. KNESER [*11*]). Die H_i sind nicht einfach zusammenhängend, sondern besitzen noch eine fünfblättrige Überlagerung π_i: $\tilde{H}_i \to H_i$. Daraus erhält man Überlagerungen π_i': $\tilde{T}_i \to T$. Man zeigt (KNESER [*11*]), daß die Voraussetzungen von Lemma 2.3.5.1 erfüllt sind. Also ist die Abbildung $H^1(L, T) \to H^1(L, G)$ die Nullabbildung. Da wir in der Chevalleyform G_0 einen L-Torus T' finden können (z.B. in einer zerfallenden $A_4 \times A_4$ in G_0), der die gleiche Zerfällungsklasse wie T besitzt, folgt aus Satz 1.6.1, daß G über L zerfällt.

Damit ist der Hauptsatz für die E_8 modulo der Vermutung bewiesen.

In dem Spezialfall E_8 folgt der Hauptsatz auch direkt aus dem in [*21*] von VEISFEILER angekündigten Resultat, daß eine halbeinfache Gruppe, die an allen Stellen des Körpers k eine Boreluntergruppe hat, auch über k eine Boreluntergruppe besitzt.

Literatur

[*1*] ARTIN, E., and J. TATE: Class field theory. Lecture notes. Harvard 1961.

[*2*] BOREL, A.: Groupes linéaires algebriques. Ann. of Math. **64**, 20–82 (1956).

[*3*] CHEVALLEY, C.: Sur certaines groupes simples. Tohoku Math .Journal **7**, 14–66 (1955).

[*4*] — Classification des groupes de Lie algébriques. Séminaire ENS, 1956–1958, fasc. 1, 2.

[*5*] DOUADY, A.: Cohomologie des groupes compacts totalement discontinus. Sem. Bourbaki **12**, 59–60, exp. 189 (1959/60).

[*6*] DYNKIN, E.B.: Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras. American Math. Translations **6**, 111–244 (1957).

[7] GODEMENT, R.: Groupes linéaires algébriques sur un corps parfait. Sem. Bourbaki Exp. 206 (1960/61).
[8] HARDER, G.: Über die Galoiskohomologie der Tori. Diss. Hamburg 1963.
[9] HERTZIG, D.: Forms of algebraic groups. Proc. Amer. Math. Soc. **12**, 657—660 (1961).
[10] KNESER, M.: Einfach zusammenhängende algebraische Gruppen in der Arithmetik. Proc. Int. Congr. Stockholm 1962.
[11] — Galoiskohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über p-adischen Körpern, II. Math. Zeitschrift **89**, 250—272 (1965).
[12] LANG, S.: Algebraic groups over finite fields. Americ. Journ. of Math. **78**, 555—563 (1956).
[13] — Introduction to algebraic geometry. Interscience tracts, New York: Interscience 1956.
[14] —, and J. TATE: Principal homogeneous spaces over Abelian varieties. Am. Journal of Math. **80**, 659—684 (1958).
[15] ONO, T.: Arithmetic of algebraic tori. Ann. of Math. (2) **74**, 101—139 (1961).
[16] SERRE, J.P.: Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles, CBRM, p. 53—67.
[17] — Corps locaux. Paris: Hermann 1962.
[18] — Cohomologie galoisienne. Cours au Collège de France 1963.
[19] STEINBERG, R.: Regular elements of semisimple algebraic groups. Publications Mathématiques No 25, Inst. des Hautes Etudes Scient. Bures-sur-Yvette 1965.
[20] TITS, J.: Colloque sur la théorie des groupes algébriques, Bruxelles, CBRM, p. 137—147.
[21] VEISFEILER, B.J.: Classification of semisimple Lie algebras over p-adic fields. Doklady, Akad. Nauk. USSR **158**, 258—260 (1964); — Soviet Math. **5**, 1206—1208 (1964).
[22] WEIL, A.: Adeles and algebraic groups. Lecture Notes. Princeton 1960.
[23] — On algebraic groups and homogeneous spaces. Am. Journ. of Math. **77**, 493—512 (1955).

2 Hamburg 13, Mathematisches Seminar der Universität, Rothenbaumchaussee 67—69

(Eingegangen am 1. Juni 1965)