

Werk

Titel: Lösungstypen von Differenzialgleichungen und Summengleichungen in normierten abel...

Autor: SCHÄFKE, F.W.

Jahr: 1965

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0088|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Lösungstypen von Differenzengleichungen und Summengleichungen in normierten abelschen Gruppen

Von
F. W. SCHÄFKE

0. Einleitung

POINCARÉ [1] hat lineare Differenzengleichungen r -ter Ordnung

$$u_{n+r} + a_{n,r-1} u_{n+r-1} + \dots + a_{n,0} u_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

mit $a_{n,0} \neq 0$ betrachtet, bei denen

$$a_{n,\rho} \rightarrow a_\rho \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\rho=0, 1, \dots, r-1)$$

gilt und das Polynom

$$x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \dots + a_0$$

r Wurzeln λ_ρ mit verschiedenen Beträgen besitzt. Er zeigt, daß für jede nicht-triviale Lösung u_{n+1}/u_n gegen eine der Wurzeln λ_ρ strebt.

PERRON hat in [2] erstmals nachgewiesen, daß zu *jeder* Wurzel λ_ρ eine Lösung u_n mit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda_\rho \quad (n \rightarrow \infty)$$

existiert.

In weiteren Arbeiten [4], [10] hat PERRON diese Resultate, entsprechend abgeschwächt zu

$$\limsup \sqrt[n]{|u_n|} = |\lambda_\rho|,$$

auf den Fall betragslich gleicher, auch mehrfacher Wurzeln ausgedehnt.

An diese Resultate schließen PERRON [5], [6] und in einer wichtigen Arbeit KREUSER [11] an, die allgemeiner in n rationale Koeffizienten bzw.

$$a_{n,\rho} = A_\rho n^{k_\rho} (1 + o(1))$$

zulassen. KREUSER erhält eine entsprechend differenziertere Aufspaltung.

Aussagen über asymptotische Reihen für die Lösungen Poincaréscher Differenzengleichungen, falls für die Koeffizienten solche Reihen gegeben sind, macht HORN [12]. Verwandt ist die Arbeit von ERB [10] und die ausführliche Untersuchung von FORD [13], [14] die unter zusätzlichen Voraussetzungen über $a_{n,\rho} \rightarrow a_\rho$ schärfere Aussagen über das asymptotische Verhalten der u_n liefert.

Die Untersuchungen von KREUSER greift PERRON [9] auf. Mit Hilfe gewisser Sätze über Summengleichungen, wie PERRON sie in [7] gewann, gelingt ein vereinfachter Beweis.

In neuerer Zeit haben JEWGRAFW [15] und FREIMAN [16] vereinfachte Beweise des ersten Satzes von PERRON gegeben, von denen der erste auch in MESCHKOWSKI [17] dargestellt ist.

Hieran haben gewisse weitere Untersuchungen angeschlossen. GELFOND und KUBENSKAJA [18] erhalten eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \lambda_\rho,$$

falls für $a_{v,\rho} \rightarrow a_\rho$ entsprechende Voraussetzungen gemacht werden. ALJANČIĆ [19] macht über das asymptotische Verhalten von $a_{v,\rho} - a_\rho$ geeignete Annahmen und erhält eine entsprechende Aussage für

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda_\rho.$$

Auch JEWGRAFW [20] macht schärfere Annahmen über $a_{v,\rho} \rightarrow a_\rho$, und erhält entsprechende Resultate über die u_n ; ganz ähnlich wie früher FORD.

Die vorliegende Untersuchung schließt an diesen Problemkreis der Sätze von POINCARÉ, PERRON und KREUSER an. Sie umfaßt ihn, gibt weitgehende Verallgemeinerungen, Ergänzungen, Vereinfachungen und Verschärfungen.

Vor allem wird deutlich, daß als Ursprung der Resultate dieses Problemkreises ein sehr einfacher Satz über „Differenzengleichungen“

$$x_{n+1} = A_n x_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

für Folgen $\{x_n\}$ von Elementen einer normierten abelschen Gruppe mit gegebenen additiven Abbildungen A_n angesehen werden kann. Dabei ergibt Abschnitt 1 eine Aufspaltung in zwei Lösungstypen entsprechend einer Zerlegung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^1 + \mathfrak{G}^2$ als direkte Summe zweier Untergruppen schon auf Grund gewisser Ungleichungen, also ohne eine Konvergenzannahme wie bei POINCARÉ und PERRON. Man erhält für $x_n = x_n^1 + x_n^2$ ($x_n^1 \in \mathfrak{G}^1$, $x_n^2 \in \mathfrak{G}^2$) die beiden Lösungstypen

$$\text{Typ I: } |x_n^1| > \sigma_n |x_n^2| \quad (n \geq m),$$

$$\text{Typ II: } |x_n^1| \leq \sigma_n |x_n^2| \quad (n \geq 0)$$

zu einer festen Zahlenfolge $\sigma_n > 0$. Dies Resultat bedeutet speziell für eine lineare Differenzengleichung r -ter Ordnung, daß z.B. schon eine bestimmte Nachbarschaft zu einer Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten eine entsprechende Aufspaltung in Lösungstypen ermöglicht.

Ein spezielles Resultat dieser Art findet sich bei MEIXNER und SCHÄFKE [22]. Abschnitt 1.8. Dort wird für

$$y_{n+1} - D_n y_n + y_{n-1} = 0$$

nur unter der Annahme

$$|D_n| \geq 2$$

eine entsprechende Typeneinteilung der Lösungen erhalten, nebst Abschätzungen, Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen. Eine Verallgemeinerung und verschärfte Abschätzungen zum Satze von POINCARÉ bringt kürzlich MENNICKEN [21].

Abschnitt 2 notiert einige einfache Sätze über die Gruppe der Lösungen $\mathfrak{L}$, die natürlich zu $\mathfrak{G}$ isomorph ist mittels $\{x_n\} \leftrightarrow x_0$.

Abschnitt 3 bringt einfache, aber relativ scharfe Abschätzungen über das Verhalten der Lösungen vom Typ I und vom Typ II. Dazu sei vermerkt, daß Satz 3.17 in Verbindung mit Satz 3.40 und Formel (9.8) fast unmittelbar den Beweis einer Verallgemeinerung und Verschärfung des Satzes von GELFOND und KUBENSKAJA [18] liefern. Das wird jedoch unten nicht ausgeführt. Man vgl. hierzu auch MENNICKEN [21].

Abschnitt 4 gibt einfache hinreichende Bedingungen für die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen vom Typ II durch x_0^2 und für die Eigenschaft der Lösungen vom Typ II, eine Untergruppe $\mathfrak{L}_{II}$ von $\mathfrak{L}$ zu bilden.

Abschnitt 5 enthält nun zwei Existenzsätze für Lösungen vom Typ II – entsprechend der Existenzaussage der Sätze von PERRON. Diese Sätze benötigen allerdings relativ stark einschränkende Annahmen über $\mathfrak{G}$ und die A_n . Zwar sind diese Annahmen durchweg bei den Problemen der zitierten Arbeiten erfüllt, nicht jedoch etwa bei analogen funktionalanalytischen Gegebenheiten. Beachtenswert ist, daß der zweite Existenzsatz mit einem praktisch wichtigen konstruktiven Verfahren zur Bestimmung der Lösungen vom Typ II verbunden ist, für das sogleich eine geeignete Fehlerabschätzung bereitsteht. Die Lösungen vom Typ II bilden hier eine zu $\mathfrak{G}^2$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{L}_{II}$. Ist $\mathfrak{L}^1$ die Untergruppe der Lösungen $\{x_n\}$ mit $x_0^2=0$, so ist $\mathfrak{L}$ direkte Summe von $\mathfrak{L}^1$ und $\mathfrak{L}_{II}$.

Abschnitt 6 entwickelt einen dritten Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Er gibt die eben genannten Resultate ohne stark einschränkende Annahmen über $\mathfrak{G}$ und die A_n . Statt dessen wird eine Verschärfung der in 1 zugrunde gelegten Ungleichung benutzt. Das Beweisverfahren beruht auf dem bekannten Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen und stellt eine weitere praktisch-konstruktive Methode der Berechnung der Lösungen vom Typ II dar. Dabei ist dieser Existenz- und Eindeutigkeitssatz etwa auch bei „Differenzengleichungen“ anwendbar, die mit Integraloperatoren in Funktionenräumen gebildet werden.

Das gleiche Verfahren liefert in 7 die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewisser „Summengleichungen“ in normierten abelschen Gruppen, die bestimmte von PERRON behandelte Summengleichungen verallgemeinern.

In Abschnitt 8 wird gezeigt, daß sich solche Summengleichungen sofort als Differenzengleichungen auffassen lassen, und, wie gegebenenfalls die für

eine Einteilung in Lösungstypen entsprechend 1 bis 6 benötigten Ungleichungen erhalten werden können.

Der kurze Abschnitt 9 behandelt eine weitere Zerfällung der Gruppe der Lösungen entsprechend einer Aufspaltung von $\mathfrak{G}$ als direkte Summe mehrerer Untergruppen.

Abschnitt 10 bringt die Einordnung der Sätze von POINCARÉ und PERRON. Dabei werden, wie schon im Spezialfall bei FREIMAN [16], allgemeiner Matrix-Differenzengleichungen erster Ordnung betrachtet. Zugleich wird eine Verschärfung der $\lim \sup$ -Aussagen bei betragsgleichen Wurzeln bzw. Eigenwerten notiert, wie sie spezieller auch LETTENMEYER [26] gibt.

Entsprechend werden in 11 Verallgemeinerungen und Verschärfungen der Sätze von PERRON und KREUSER bewiesen, im Anschluß an 7 und 8.

Vielleicht sollte hier betont werden, daß z.B. für den Beweis des ersten Satzes von PERRON nicht etwa sämtliche Ausführungen der Kapitel 1 bis 9 benötigt werden. Ein vollständiger Beweis, etwa mit Hilfe der Idee von Satz 5.5, könnte wohl gut auf 3 bis 4 Druckseiten notiert werden.

Abschnitt 12 schließt noch einmal an 1 bis 6 an. Bei Erfülltsein von einfachen zusätzlichen Voraussetzungen ergibt sich eine praktisch wichtige Konvergenzaussage und zugleich ein Kriterium für die Zugehörigkeit einer Lösung zum Typ I oder Typ II. Dies stellt eine Verallgemeinerung der Überlegungen dar, die SCHÄFKE [23] und SCHÄFKE, EBERT, GROH [24] benutzen, um für die Mathieusche Differentialgleichung über die dreigliedrigen Rekursionen das im Augenblick wohl schnellste und zugkräftigste direkte Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten zu gewinnen. Abschnitt 12 bildet die Grundlage für entsprechende Verallgemeinerungen.

Beispiele und Anwendungen bringt Abschnitt 13. Zuerst wird der wichtige Fall von n unabhängiger Abschätzungsgrößen für die Ungleichungen von 1 diskutiert. Es folgt die Einordnung und Verallgemeinerung der von MEIXNER und SCHÄFKE [22] betrachteten dreigliedrigen Rekursionen. Zum Schluß wird in Verallgemeinerung der von SCHÄFKE [23], SCHÄFKE, EBERT, GROH [24] sowie MENNICKEN [21] betrachteten Rekursionen die Differenzengleichung

$$u_{n+2} = (1 + w + e_n) u_{n+1} + (-w + d_n) u_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

mit $|w| < 1$ und sich verschärfenden Annahmen über die e_n und d_n behandelt. Hiermit gelingt z.B. die Entwicklung von Methoden zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der verallgemeinerten Mathieuschen Differentialgleichung

$$(1 + 2\gamma \cos 2x) y'' + (\lambda - 2h^2 \cos 2x) y = 0.$$

Vgl. hierzu eine in Kürze erscheinende Note von MENNICKEN.

Schon PINCHERLE [25] hat darauf hingewiesen, daß die zur kleinsten Wurzel gehörende Lösung einer Poincaré-Perronschen Differenzengleichung eine Verallgemeinerung der Kettenbrüche darstellt. In entsprechend umfassenderem Sinne trifft das für die hier betrachteten Lösungen vom Typ II zu. Wenn man

einerseits die Bedeutung der Kettenbrüche, gerade auch in der modernen numerischen Mathematik, andererseits die Wichtigkeit der linearen Differenzgleichungen und ihrer Verallgemeinerungen für viele Gebiete der reinen und der angewandten Mathematik bedenkt, sollte man einen weiten Anwendungsbereich der hier entwickelten Theorie erwarten; dies vor allem deshalb, weil — im Gegensatz zu den bisher gegebenen reinen Existenzbeweisen für die Sätze von PERRON, KREUSER u. a. — hier sogleich zwei verschiedenartige, in vielen praktischen Fällen rasch konvergente Methoden zur Berechnung der Lösungen vom Typ II nebst zugehörigen recht scharfen Abschätzungen zur Verfügung stehen.

1. Differenzgleichungen. Typen von Lösungen

$\mathfrak{G}$ sei eine abelsche Gruppe — in additiver Schreibweise. Für die Elemente $x \in \mathfrak{G}$ sei eine reelle Norm $|x|$ erklärt, mit den Eigenschaften

$$(1.1) \quad \begin{cases} |x| \geq 0, & |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ |-x| = |x|, & |x+y| \leq |x| + |y|. \end{cases}$$

Dann gilt auch

$$|x \pm y| \geq ||x| - |y||;$$

und $\mathfrak{G}$ ist mit dem Abstand

$$\delta(x, y) = |x - y|$$

ein metrischer Raum.

$\mathfrak{G}$ sei direkte Summe der beiden Untergruppen $\mathfrak{G}^1$ und $\mathfrak{G}^2$. Für $x \in \mathfrak{G}$ werde notiert

$$x = x^1 + x^2 \quad (x^1 \in \mathfrak{G}^1, x^2 \in \mathfrak{G}^2).$$

Für $n=0, 1, 2, \dots$ seien A_n additive (homomorphe) Abbildungen von $\mathfrak{G}$ in sich. Ist

$$y = A_n x, \quad x = x^1 + x^2, \quad y = y^1 + y^2,$$

so bezeichnen wir

$$(1.2) \quad \begin{cases} y^1 = A_{n1}^1 x^1 + A_{n2}^1 x^2, \\ y^2 = A_{n1}^2 x^1 + A_{n2}^2 x^2. \end{cases}$$

Offenbar ist stets A_{ni}^j eine additive (homomorphe) Abbildung von $\mathfrak{G}^i$ in $\mathfrak{G}^j$.

Wir fordern

$$(1.3) \quad \begin{cases} |A_{n1}^1 x^1| \leq \alpha_{n1}^1 |x^1| \\ |A_{n1}^2 x^1| \leq \alpha_{n1}^2 |x^1| \end{cases} \quad (x^1 \in \mathfrak{G}^1),$$

$$\begin{cases} |A_{n2}^1 x^2| \leq \alpha_{n2}^1 |x^2| \\ |A_{n2}^2 x^2| \leq \alpha_{n2}^2 |x^2| \end{cases} \quad (x^2 \in \mathfrak{G}^2).$$

Für die notierten nichtnegativen Konstanten und eine Zahlenfolge

$$\sigma_n > 0$$

soll gelten

$$(1.4) \quad 0 < \alpha_{n+1}^1 - \sigma_{n+1} \alpha_{n+1}^2 \geq \frac{1}{\sigma_n} (\alpha_n^1 + \sigma_{n+1} \alpha_n^2) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Wir betrachten nun Folgen $x_n \in \mathfrak{G}$ mit

$$(1.5) \quad x_{n+1} = A_n x_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

d.h. „Lösungen“ der (verallgemeinerten) „Differenzengleichung“ (1.5).

Spaltet man eine Lösung x_n von (1.5) entsprechend $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^1 \dot{+} \mathfrak{G}^2$ auf und schätzt mit (1.2), (1.3) ab, so erhält man

$$|x_{n+1}^1| - \sigma_{n+1} |x_{n+1}^2| \geq (\alpha_{n+1}^1 - \sigma_{n+1} \alpha_{n+1}^2) |x_n^1| - (\alpha_n^1 + \sigma_{n+1} \alpha_n^2) |x_n^2|.$$

Mit der zweiten Ungleichung (1.4) folgt sofort

$$(1.6) \quad |x_{n+1}^1| - \sigma_{n+1} |x_{n+1}^2| \geq (\alpha_{n+1}^1 - \sigma_{n+1} \alpha_{n+1}^2) (|x_n^1| - \sigma_n |x_n^2|).$$

Da der erste Faktor rechts wegen der ersten Forderung (1.4) positiv ist, gilt

Satz 1.7. *Ist für ein $m \geq 0$*

$$|x_m^1| > \sigma_m |x_m^2|,$$

so gilt

$$|x_n^1| > \sigma_n |x_n^2| \quad (n \geq m).$$

Umgekehrt: Ist für ein $m > 0$

$$|x_m^1| \leq \sigma_m |x_m^2|,$$

so gilt

$$|x_n^1| \leq \sigma_n |x_n^2| \quad (n < m).$$

Demgemäß unterscheiden wir zwei Typen von Lösungen:

Lösungen vom Typ I. Es gibt ein $m \geq 0$ mit

$$|x_n^1| > \sigma_n |x_n^2| \quad (n \geq m).$$

Lösungen vom Typ II. Für alle $n=0, 1, 2, \dots$ ist

$$|x_n^1| \leq \sigma_n |x_n^2|.$$

2. Die Gruppe der Lösungen

Da die A_n additive Abbildungen sind, ist mit einer Lösung $\{x_n\}_0^\infty$ auch

$$-\{x_n\}_0^\infty = \{-x_n\}_0^\infty$$

und mit zwei Lösungen $\{x_n\}_0^\infty$ und $\{y_n\}_0^\infty$ auch

$$\{x_n\}_0^\infty + \{y_n\}_0^\infty = \{x_n + y_n\}_0^\infty$$

Lösung von (1.5). Eine Lösung ist ferner durch x_0 eindeutig bestimmt. In diesem Sinne gilt der (triviale)

Satz 2.1. Die Gesamtheit der Lösungen, $\mathfrak{Q}$, bildet eine abelsche Gruppe. $\mathfrak{Q}$ ist durch die Zuordnung

$$\{x_n\}_0^\infty \leftrightarrow x_0$$

isomorph zu $\mathfrak{G}$.

Da nach (1.1) $|-x|=|x|$ gefordert wurde, gilt selbstverständlich

Satz 2.2. Mit $\{x_n\}$ ist zugleich $-\{x_n\}$ vom Typ I bzw. vom Typ II.

Aus Satz 1.7 folgt ferner sofort

Satz 2.3. Die gemäß Satz 2.1 $\mathfrak{G}^1$ entsprechende Untergruppe von Lösungen, $\mathfrak{Q}^1$, d.h. die Gesamtheit der Lösungen mit $x_0 \in \mathfrak{G}^1$ bzw. $x_0^2 = 0$, besteht, abgesehen von der 0-Lösung, aus Lösungen vom Typ I.

Die Existenz entsprechend vieler Lösungen vom Typ I ist daher gesichert, sowie nicht der triviale Fall $\mathfrak{G}^1 = (0)$ vorliegt.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen (vgl. Abschnitt 4) läßt sich zeigen, daß die Lösungen vom Typ II eine Untergruppe von $\mathfrak{Q}$ bilden. Hierzu notieren wir

Satz 2.4. Falls die Lösungen vom Typ II eine Untergruppe $\mathfrak{Q}_{II}$ von $\mathfrak{Q}$ bilden, so ist $\mathfrak{Q}_{II}$ mit der Zuordnung

$$\{x_n\} \leftrightarrow x_0^2$$

isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{G}^2$.

Es gibt nämlich in diesem Falle keine zwei verschiedenen Lösungen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ vom Typ II mit $x_0^2 = y_0^2$. Ihre Differenz $\{x_n - y_n\}$ müßte zugleich $\mathfrak{Q}_{II}$ und $\mathfrak{Q}^1$ angehören.

Unter weiteren Voraussetzungen (vgl. Abschnitte 5 und 6) läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{Q}_{II}$ im Sinne von Satz 2.4 zu $\mathfrak{G}^2$ selbst isomorph ist, was für $\mathfrak{G}^2 \neq (0)$ die Existenz genügend vieler nicht-trivialer Lösungen vom Typ II bedeutet. Hierzu gilt

Satz 2.5. Falls die Lösungen vom Typ II eine gemäß Satz 2.4 zu $\mathfrak{G}^2$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{Q}_{II}$ bilden, so wird $\mathfrak{Q}$ direkte Summe

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}^1 + \mathfrak{Q}_{II}.$$

Sei nämlich $\{x_n\} \in \mathfrak{Q}$, so bilde man die eindeutig bestimmte Lösung $\{z_n\} \in \mathfrak{Q}_{II}$ mit $z_0^2 = x_0^2$. Dann ist $\{y_n\} = \{x_n - z_n\} \in \mathfrak{Q}^1$ und $\{x_n\} = \{y_n\} + \{z_n\}$ eine Darstellung der gewünschten Art. Sie ist eindeutig, da $\mathfrak{Q}^1$ und $\mathfrak{Q}_{II}$ Untergruppen mit $\mathfrak{Q}^1 \cap \mathfrak{Q}_{II} = (0)$ sind.

3. Abschätzungen

Im folgenden stellen wir einige unten gelegentlich angewandte Abschätzungen für Lösungen vom Typ I und vom Typ II zusammen. Sie beruhen neben

$$(1.4) \quad 0 < (\alpha_{n1}^1 - \sigma_{n+1} \alpha_{n1}^2) \geq \frac{1}{\sigma_n} (\alpha_{n2}^1 + \sigma_{n+1} \alpha_{n2}^2)$$

allein auf den beiden Ungleichungen

$$(3.1) \quad \begin{cases} |x_{n+1}^1| \geq \alpha_{n1}^1 |x_n^1| - \alpha_{n2}^1 |x_n^2|, \\ |x_{n+1}^2| \leq \alpha_{n1}^2 |x_n^1| + \alpha_{n2}^2 |x_n^2|, \end{cases}$$

sind also reine Abschätzungen für entsprechende Zahlenfolgen.

Typ I. Die Zahlen $\rho_{m,n}^{(\varepsilon)}$. Sei $m \geq 0$ und $|x_m^1| > \sigma_m |x_m^2|$, also

$$(3.2) \quad |x_n^1| > \sigma_n |x_n^2| \quad (n \geq m).$$

Dann ist für $n \geq m$ sowohl $|x_n^1|$ als auch die rechte Seite der ersten Ungleichung (3.1) positiv. Durch Division entsteht

$$(3.3) \quad \sigma_{n+1} \frac{|x_{n+1}^2|}{|x_{n+1}^1|} \leq f_n \left(\sigma_n \frac{|x_n^2|}{|x_n^1|} \right) \quad (n \geq m),$$

wenn wir für $n=0, 1, 2, \dots$ die Funktionen

$$(3.4) \quad f_n(\xi) = \sigma_{n+1} \frac{\alpha_{n1}^2 + \alpha_{n2}^2 \frac{1}{\sigma_n} \xi}{\alpha_{n1}^1 - \alpha_{n2}^1 \frac{1}{\sigma_n} \xi}$$

eingeführen. Dies sind wegen (1.4) Funktionen, die in $0 \leq \xi < 1$ monoton nicht abnehmen und Werte $0 \leq f_n(\xi) < 1$ annehmen. Ist daher

$$(3.5) \quad \sigma_m \frac{|x_m^2|}{|x_m^1|} \leq \varepsilon < 1$$

und bildet man

$$(3.6) \quad \rho_{m,m}^{(\varepsilon)} = \varepsilon, \quad \rho_{m,n+1}^{(\varepsilon)} = f_n(\rho_{m,n}^{(\varepsilon)}) \quad (n \geq m),$$

so hat man

$$(3.7) \quad \sigma_n \frac{|x_n^2|}{|x_n^1|} \leq \rho_{m,n}^{(\varepsilon)} < 1 \quad (n \geq m).$$

Hiermit ergibt die erste Zeile von (3.1)

$$(3.8) \quad \begin{cases} |x_{n+1}^1| \geq \left(\alpha_{n1}^1 - \alpha_{n2}^1 \frac{1}{\sigma_n} \rho_{m,n}^{(\varepsilon)} \right) |x_n^1| & (n \geq m), \\ |x_n^1| \geq \prod_{v=m}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{m,v}^{(\varepsilon)} \right) |x_m^1| & (n \geq m). \end{cases}$$

Abschätzungen der $\rho_{m,n}^{(\varepsilon)}$. Für $n \geq m$ sei $\hat{f}_n(\xi)$ eine in $0 \leq \xi \leq 1$ definierte Funktion mit

$$(3.9) \quad 0 \leq f_n(\xi) \leq \hat{f}_n(\xi) \leq 1.$$

Definiert man dann Zahlen $\hat{\rho}_{m,n}^{(\eta)}$ ($0 \leq \eta \leq 1$) durch

$$(3.10) \quad \hat{\rho}_{m,m}^{(\eta)} = \eta, \quad \hat{\rho}_{m,n+1}^{(\eta)} = \hat{f}_n(\hat{\rho}_{m,n}^{(\eta)}) \quad (n \geq m),$$

so gilt

$$(3.11) \quad \rho_{m,n}^{(\varepsilon)} \leq \hat{\rho}_{m,n}^{(\eta)} \leq 1 \quad (n \geq m),$$

falls nur $0 \leq \varepsilon \leq \eta < 1$. Denn aus

$$\rho_{m,k}^{(\varepsilon)} \leq \hat{\rho}_{m,k}^{(\eta)} \leq 1$$

folgt wegen (3.9) und der Monotonie von $f_k(\xi)$

$$\rho_{m,k+1}^{(\varepsilon)} = f_k(\rho_{m,k}^{(\varepsilon)}) \leq f_k(\hat{\rho}_{m,k}^{(\eta)}) \leq \hat{f}_k(\hat{\rho}_{m,k}^{(\eta)}) = \hat{\rho}_{m,k+1}^{(\eta)} \leq 1.$$

Ist z. B.

$$(3.12) \quad \begin{cases} \hat{f}_n(\xi) = \beta_n \xi + \gamma_n, \\ 0 \leq \beta_n \leq 1 - \gamma_n \leq 1, \end{cases}$$

so wird für $m \leq r \leq n$

$$(3.13) \quad \begin{cases} \hat{\rho}_{m,n+1}^{(\eta)} = \beta_n \beta_{n-1} \cdots \beta_r \hat{\rho}_{m,r}^{(\eta)} + \\ + \beta_n \cdots \beta_{r+1} \gamma_r + \beta_n \cdots \beta_{r+2} \gamma_{r+1} + \cdots + \beta_n \gamma_{n-1} + \gamma_n. \end{cases}$$

Beachtet man

$$(3.14) \quad \sum_{v=n}^r \gamma_v \prod_{\mu=n}^{v+1} (1 - \gamma_\mu) = 1 - \prod_{v=r}^n (1 - \gamma_v) \leq 1,$$

so entsteht die Abschätzung ($m \leq r \leq n$)

$$(3.15) \quad \hat{\rho}_{m,n+1}^{(\eta)} \leq \prod_{v=r}^n \beta_v + 1 - \prod_{v=r}^n (1 - \gamma_v).$$

Hierin liegt der Beweis von

Satz 3.16. Es sei für $v \geq n_0$

$$\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} > 0, \quad \beta_v = \sigma_{v+1} \frac{\alpha_{v2}^2 \frac{1}{\sigma_v}}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v}}, \quad \gamma_v = \sigma_{v+1} \frac{\alpha_{v1}^2}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v}}.$$

Gibt es dann für $n \geq n_0$ eine Folge r_n mit

$$n_0 \leq r_n \leq n, \quad r_n \rightarrow \infty, \quad \prod_{v=r_n}^n \beta_v \rightarrow 0, \quad \prod_{v=r_n}^n (1 - \gamma_v) \rightarrow 1,$$

so gilt für jede Lösung vom Typ I

$$\sigma_n \frac{|x_n^2|}{|x_n^1|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dies gilt speziell, wenn

$$\beta_v \leq \beta < 1 \quad (v \geq n_0), \quad \gamma_v \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow \infty),$$

oder wenn

$$\prod_{v=r}^{\infty} \beta_v = 0 \quad (r \geq n_0), \quad \sum_{v=n_0}^{\infty} \gamma_v < \infty.$$

(3.12), (3.13) ergeben weiter fast unmittelbar

Satz 3.17. *Es sei für $v \geq n_0$*

$$\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} > 0, \quad \sigma_{v+1} \frac{\alpha_{v2}^2 \frac{1}{\sigma_v}}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v}} \leq \beta, \quad \sigma_{v+1} \frac{\alpha_{v1}^2}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v}} \leq \gamma_v,$$

$$\beta < 1, \quad 0 < \gamma_v \leq 1 - \beta$$

und

$$\beta \frac{\gamma_v}{\gamma_{v+1}} \leq \beta_0 < 1.$$

Dann gilt für eine Lösung vom Typ I, falls $\max(n_0, m) = r < n$,

$$\sigma_n \frac{|x_n^2|}{|x_n^1|} \leq \beta^{n-r} + \gamma_n \frac{1 - \beta_0^{n-r}}{1 - \beta_0}.$$

Typ II. Die Zahlen τ_n . Für eine Lösung vom Typ II gilt

$$|x_n^1| \leq \sigma_n |x_n^2|.$$

Wir schließen hier einmal solche Lösungen aus, die schließlich trivial sind, $x_n = 0$ ($n \geq n_0$), setzen also

$$(3.18) \quad 0 < \sigma_n |x_n^2| \geq |x_n^1| \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

voraus. Die beiden Ungleichungen (3.1) zeigen, daß eine solche Lösung nur existieren kann, wenn

$$(3.19) \quad \alpha_{n2}^2 + \alpha_{n1}^2 > 0, \quad \alpha_{n2}^2 + \alpha_{n1}^2 > 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Durch Division folgt nun aus (3.1)

$$(3.20) \quad \frac{|x_{n+1}^1|}{|x_{n+1}^2|} \geq \frac{\alpha_{n1}^1 \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} - \alpha_{n2}^1}{\alpha_{n2}^2 + \alpha_{n1}^2 \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|}} \quad (n \geq 0).$$

Multipliziert man mit dem positiven Nenner und dividiert durch

$$\alpha_{n1}^1 - \alpha_{n1}^2 \frac{|x_{n+1}^1|}{|x_{n+1}^2|},$$

was nach (1.4) und (3.18) positiv ist, so entsteht

$$(3.21) \quad \frac{1}{\sigma_n} \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} \leq g_n \left(\frac{1}{\sigma_{n+1}} \frac{|x_{n+1}^1|}{|x_{n+1}^2|} \right) \quad (n \geq 0)$$

mit den Funktionen

$$(3.22) \quad g_n(\xi) = \frac{1}{\sigma_n} \frac{\alpha_{n2}^1 + \alpha_{n2}^2 \sigma_{n+1} \xi}{\alpha_{n1}^1 - \alpha_{n1}^2 \sigma_{n+1} \xi} \quad (n \geq 0),$$

die wegen (1.4) und (3.19) in $0 \leq \xi \leq 1$ streng monoton wachsen bei $0 \leq g_n(\xi) \leq 1$.

Für $m=1, 2, 3, \dots$ definieren wir nun Folgen $\tau_{m,n}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) durch

$$(3.23) \quad \tau_{m,n} = 1 \quad (n \geq m), \quad \tau_{m,n} = g_n(\tau_{m,n+1}) \quad (n < m).$$

Wegen der genannten Eigenschaften von $g_n(\xi)$ gilt

$$(3.24) \quad \frac{1}{\sigma_n} \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} \leq \tau_{m,n} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$(3.25) \quad 0 \leq \tau_{m+1,n} \leq \tau_{m,n} \leq 1.$$

Daher existieren Zahlen τ_n mit

$$(3.26) \quad \tau_{m,n} \searrow \tau_n \quad (m \rightarrow \infty) \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Die Folge τ_n ist die *maximale Lösung* von

$$(3.27) \quad \tau_n = g_n(\tau_{n+1}), \quad 0 \leq \tau_n \leq 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Denn sei auch τ'_n Lösung von (3.27) und $\tau'_k > \tau_k$, so gäbe es ein $m > k$ mit $\tau'_k > \tau_{m,k}$ gemäß (3.26). Mit der Monotonie von $g_n(\xi)$ lieferten nun (3.23) und (3.27) (für τ'_n) $\tau'_n > \tau_{m,n}$ ($n \geq k$), also für $k=m$ auch $\tau'_m > 1$, was unmöglich ist. (3.24) und (3.26) ergeben nun

$$(3.28) \quad \frac{1}{\sigma_n} \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} \leq \tau_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Mit der zweiten Ungleichung (3.1) folgt daraus

$$(3.29) \quad \begin{cases} |x_{n+1}^2| \leq (\alpha_{n+2}^2 + \alpha_{n+1}^2 \sigma_n \tau_n) |x_n^2| & (n=0, 1, 2, \dots), \\ |x_{n+1}^2| \leq \prod_{v=k}^n (\alpha_{v+2}^2 + \alpha_v^2 \sigma_v \tau_v) |x_k^2| & (n \geq k). \end{cases}$$

Abschätzungen der τ_n . Für $n=0, 1, 2, \dots$ seien $\hat{g}_n(\xi)$ in $0 \leq \xi \leq 1$ monoton nicht abnehmende Funktionen mit

$$(3.30) \quad 0 \leq g_n(\xi) \leq \hat{g}_n(\xi) \leq 1.$$

Ist dann $\hat{\tau}_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) die *maximale Lösung* von

$$(3.31) \quad \hat{\tau}_n = \hat{g}_n(\hat{\tau}_{n+1}), \quad 0 \leq \hat{\tau}_n \leq 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

so gilt

$$(3.32) \quad \tau_n \leq \hat{\tau}_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Zum Beweise benutzt man analog

$$(3.33) \quad \begin{cases} \hat{\tau}_{m,n} = 1 & (n \geq m), \quad \hat{\tau}_{m,n} = \hat{g}_n(\hat{\tau}_{m,n+1}) & (n < m), \\ \hat{\tau}_{m,n} \searrow \hat{\tau}_n & (m \rightarrow \infty) & (n=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Dann braucht man nur

$$(3.34) \quad \tau_{m,n} \leq \hat{\tau}_{m,n}$$

zu zeigen. Das aber ist für $n \geq m$ trivial; für $n < m$ folgt es durch absteigende Induktion: ist $\tau_{m,k+1} \leq \hat{\tau}_{m,k+1}$, so

$$\tau_{m,k} = g_k(\tau_{m,k+1}) \leq g_k(\hat{\tau}_{m,k+1}) \leq \hat{g}_k(\hat{\tau}_{m,k+1}) = \hat{\tau}_{m,k}.$$

Ist z. B.

$$(3.35) \quad \hat{g}_n(\xi) = \beta'_n \xi + \gamma'_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

etwa mit

$$(3.36) \quad \beta'_n = \frac{1}{\sigma_n} \frac{\alpha_{n2}^2 \sigma_{n+1}}{\alpha_{n1} - \alpha_{n1}^2 \sigma_{n+1}}, \quad \gamma'_n = \frac{1}{\sigma_n} \frac{\alpha_{n2}^1}{\alpha_{n1} - \alpha_{n1}^2 \sigma_{n+1}},$$

so wird mit (3.33)

$$(3.37) \quad \hat{\tau}_n = \prod_{v=n}^{\infty} \beta'_v + \gamma'_n + \gamma'_{n+1} \beta'_n + \gamma'_{n+2} \beta'_n \beta'_{n+1} + \dots.$$

Analog zu (3.13), (3.14), (3.15) folgt hierfür ($\hat{\tau}_{m+1} \leq 1$)

$$(3.38) \quad \hat{\tau}_n \leq \prod_{v=n}^m \beta'_v + 1 - \prod_{v=n}^m (1 - \gamma'_v) \quad (m > n).$$

Darin liegt der Beweis von

Satz 3.39. *Es existiere eine Folge $m_n > n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) mit*

$$\prod_{v=n}^{m_n} \beta'_v \rightarrow 0, \quad \prod_{v=n}^{m_n} (1 - \gamma'_v) \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dann gilt für jede Lösung $x_n \neq 0$ vom Typ II

$$\frac{1}{\sigma_n} \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Dies gilt speziell, wenn

$$\beta'_n \leq \beta' < 1 \quad (n \geq n_0), \quad \gamma'_n \rightarrow 0,$$

oder wenn

$$\prod_{v=n}^{\infty} \beta'_v = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad \sum_{v=0}^{\infty} \gamma'_v < \infty.$$

Zusätzlich vermerken wir

Satz 3.40. *Ist $\beta'_n \leq \beta' < 1$ für $n \geq n_0$, so*

$$\frac{1}{\sigma_n} \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} \leq \frac{1}{1 - \beta'} \sup_{v \geq n} \gamma'_v \quad (n \geq n_0).$$

Die Zahlen $\tau_{k,n}^{(\varepsilon)}$. Es sei x_n eine Lösung von (1.5) mit

$$(3.41) \quad |x_k^2| > 0, \quad \frac{1}{\sigma_k} \frac{|x_k^1|}{|x_k^2|} \leq \varepsilon \leq 1$$

für ein gewisses $k > 0$. Dann gilt nach Satz 1.7

$$(3.42) \quad \frac{1}{\sigma_n} \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} \leq 1, \quad |x_n^2| > 0 \quad (n=0, 1, \dots, k).$$

Hier bildet man

$$(3.43) \quad \tau_{k,k}^{(\varepsilon)} = \varepsilon, \quad \tau_{k,n}^{(\varepsilon)} = g(\tau_{k,n+1}^{(\varepsilon)}) \quad (n < k)$$

und hat dann – wie oben –

$$(3.44) \quad \frac{1}{\sigma_n} \frac{|x_n^1|}{|x_n^2|} \leq \tau_{k,n}^{(\varepsilon)} \leq 1 \quad (n \leq k).$$

Die obigen Überlegungen zur Abschätzung dieser Zahlen $\tau_{k,n}^{(\varepsilon)}$ gelten analog.

4. Eindeutigkeitsatz. Untergruppensatz

Es mögen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ vom Typ II, $\{z_n\} = \{x_n + y_n\}$ vom Typ I sein. Zu $\{z_n\}$ seien m und $\rho_{m,n}^{(\varepsilon)}$ geeignet gewählt. Dann hat man nach (3.28) und (3.29)

$$\begin{aligned} 0 &< |z_m^1| \prod_{v=m}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{m,v}^{(\varepsilon)} \right) \leq |z_n^1|, \\ |z_n^1| &\leq |x_n^1| + |y_n^1|, \\ |x_n^1| &\leq \sigma_n \tau_n |x_n^2| \leq |x_m^2| \sigma_n \tau_n \prod_{v=m}^{n-1} (\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v), \\ |y_n^1| &\leq \sigma_n \tau_n |y_n^2| \leq |y_m^2| \sigma_n \tau_n \prod_{v=m}^{n-1} (\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v), \end{aligned}$$

also

$$0 < \prod_{v=m}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{m,v}^{(\varepsilon)} \right) \leq \frac{|x_m^2| + |y_m^2|}{|z_m^1|} \sigma_n \tau_n \prod_{v=m}^{n-1} (\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v).$$

Hieraus fließen mit Satz 2.2 die beiden folgenden Sätze

Satz 4.1 (Eindeutigkeitsatz). *Unter der Voraussetzung*

$$\sigma_n \tau_n \prod_{v=0}^{n-1} \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{0,v}^{(0)}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

gibt es zu jedem $a^2 \in \mathbb{G}^2$ höchstens eine Lösung $\{x_n\}$ vom Typ II mit $x_0^2 = a^2$.

Satz 4.2 (Untergruppensatz). *Unter der Voraussetzung, daß*

$$\sigma_n \tau_n \prod_{v=m}^{n-1} \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{m,v}^{(\varepsilon)}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

für jedes $m \geq 0$ und ε ($0 \leq \varepsilon < 1$) gilt, bilden die Lösungen vom Typ II eine Untergruppe $\mathfrak{L}_{II}$ von $\mathfrak{L}$, die gemäß Satz 2.4 zu einer Untergruppe von $\mathbb{G}^2$ isomorph ist.

5. Erster und zweiter Existenzsatz

In diesem Abschnitt fordern wir

Voraussetzung 5.1. Für $x = x^1 + x^2$, $x^1 \in \mathbb{G}^1$, $x^2 \in \mathbb{G}^2$ gilt

$$\max(|x^1|, |x^2|) \leq |x|.$$

Voraussetzung 5.2. Die Abbildungen A_n ($n=0, 1, 2, \dots$) bilden $\mathfrak{G}$ eindeutig additiv (isomorph) und in beiden Richtungen stetig auf sich ab.

Voraussetzung 5.3. $\mathfrak{G}^2$ läßt sich nicht eineindeutig additiv und in beiden Richtungen stetig auf eine echte Untergruppe von $\mathfrak{G}^2$ abbilden.

Voraussetzung 5.4. $\mathfrak{G}^1$ ist als metrischer Raum mit dem Abstand $\delta(x, y) = |x - y|$ perfekt.

Dann zeigen wir zunächst

Satz 5.5 (Erster Existenzsatz). *Gelten die Voraussetzungen 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, ist ferner in $\mathfrak{G}^1$ jede Menge $\{x \mid |x| \leq \gamma < \infty\}$ kompakt, dann gibt es zu jedem $a^2 \in \mathfrak{G}^2$ mindestens eine Lösung $\{x_n\}$ vom Typ II mit $x_0^2 = a^2$.*

Wir betrachten zu gegebenem $k > 0$ die Untergruppe derjenigen Lösungen $\{y_n\}$ mit $y_k^1 = 0$. Ist $y_k^2 \neq 0$, so gilt nach (3.41)–(3.44)

$$(5.6) \quad y_n^2 \neq 0, \quad \frac{1}{\sigma_n} \frac{|y_n^1|}{|y_n^2|} \leq \tau_{k,n}^{(0)} \quad (n \leq k).$$

Nach Voraussetzung 5.2 ist nun eine solche Lösung durch das entsprechende y_0^2 eindeutig bestimmt. Dabei ist unter Benutzung von Voraussetzung 5.1 die Zuordnung $y_k^2 \leftrightarrow y_0^2$ eine eineindeutige additive und in beiden Richtungen stetige Abbildung von $\mathfrak{G}^2$ auf eine Untergruppe von $\mathfrak{G}^2$, also wegen Voraussetzung 5.3 auf $\mathfrak{G}^2$ selbst.

Danach gibt es also für jedes $a^2 \in \mathfrak{G}^2$ und jedes $k > 0$ eine Lösung $y_n(k)$ mit $y_0^2(k) = a^2$, $y_k^1(k) = 0$. Für sie ist nach (5.6) sicher

$$|y_0^1(k)| \leq \sigma_0 |a^2|.$$

Nach Voraussetzung des Satzes besitzt die Folge $y_0^1(k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) mindestens einen Häufungspunkt $a^1 \in \mathfrak{G}^1$.

Wir betrachten jetzt die Lösung $\{x_n\}$ mit $x_0 = a^1 + a^2$ und zeigen, daß sie vom Typ II ist. Wäre nämlich für ein m

$$|x_m^1| > \sigma_m |x_m^2|,$$

so müßte wegen der Stetigkeit der A_n und nach Voraussetzung 5.1, wonach die x^1, x^2 stetig von x abhängen, für beliebig große k immer wieder

$$|y_m^1(k)| > \sigma_m |y_m^2(k)|$$

gelten, was aber für $k \geq m$ einen Widerspruch zu (5.6) darstellt. —

Dies Beweisverfahren ist dann „konstruktiv“, wenn der Eindeutigkeitsatz 4.1 gilt. Dann ist nämlich kein zweiter Häufungspunkt neben a^1 vorhanden; also gilt dann

$$(5.7) \quad y_0^1(k) \rightarrow a^1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Das legt nahe, einen Existenzbeweis ohne die bei Satz 5.5 geforderte Kompaktheitsvoraussetzung zu führen, wenn man statt dessen die Voraussetzung von Satz 4.1 heranzieht. Dabei sollte zugleich eine Fehlerabschätzung erwartet werden können.

Wir betrachten dazu entsprechend dem ersten Teil des Beweises von Satz 5.5, der nur die Voraussetzungen 5.1, 5.2, 5.3 benutzt, zu gegebenem $a^2 \in \mathfrak{G}^2$ und $k=1, 2, 3, \dots$ die Lösungen $y_n(k)$ mit $y_0^2(k)=a^2$, $y_k^1(k)=0$.

Sei $l > k$. Dann ist $y_n(l) - y_n(k)$ entweder triviale Lösung oder vom Typ I, also jedenfalls mit $y_k^1(k)=0$ nach (3.8)

$$|y_0^1(l) - y_0^1(k)| \prod_{v=0}^{k-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{0,v}^{(0)} \right) \leq |y_k^1(l)|.$$

Andererseits gilt für $y_n(l)$ wegen $l > k$ nach (5.6)

$$|y_k^1(l)| \leq \sigma_k \tau_{l,k}^{(0)} |y_k^2(l)|$$

und entsprechend (5.6) und (3.1) analog zu (3.29)

$$|y_k^2(l)| \leq \prod_{v=0}^{k-1} (\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_{l,v}^{(0)}) |a^2|.$$

Nun ist wegen der Monotonie der $g_n(\xi)$ sicher $\tau_{l,r}^{(0)} \leq \tau_v$. Also hat man tatsächlich

$$(5.8) \quad |y_0^1(l) - y_0^1(k)| \leq \sigma_k \tau_k \prod_{v=0}^{k-1} \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{0,v}^{(0)}} |a^2| \quad (l > k);$$

und entsprechend dem letzten Beweisteil zu Satz 5.5 folgt

Satz 5.9 (Zweiter Existenzsatz). *Gelten die Voraussetzungen 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, ferner*

$$\sigma_n \tau_n \prod_{v=0}^{n-1} \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \rho_{0,v}^{(0)}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

so gibt es zu jedem $a^2 \in \mathfrak{G}^2$ genau eine Lösung $\{x_n\}$ vom Typ II mit $x_0^2 = a^2$. Die Lösungen vom Typ II bilden eine Untergruppe $\mathfrak{L}_{II}$ von $\mathfrak{L}$, die zu $\mathfrak{G}^2$ isomorph ist. Man hat

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^1 + \mathfrak{L}_{II}.$$

Die Gruppeneigenschaft der Lösungen vom Typ II folgt dabei so: zu $a^2 \in \mathfrak{G}^2$ gehöre, wie oben, $y_n(k)$, zu $b^2 \in \mathfrak{G}^2$ gehöre entsprechend $z_n(k)$, dann offenbar zu $a^2 + b^2$ die Lösungen $y_n(k) + z_n(k)$. Nun gilt aber

$$y_0^1(k) + z_0^1(k) \rightarrow a^1 + b^1 \quad (k \rightarrow \infty),$$

wo dann $y_0 = a^1 + a^2$, $z_0 = b^1 + b^2$ und $y_0 + z_0$ Lösungen vom Typ II erzeugen, letztere, wie zu zeigen, zu $a^2 + b^2 \in \mathfrak{G}^2$ gehörend. Darin liegt mit Satz 2.2 die Gruppeneigenschaft dieser Lösungen.

Hier ist also die verschärfte Forderung des Untergruppensatzes 4.2 überflüssig.

6. Dritter Existenzsatz

Die in 5 bewiesenen Sätze bezüglich der Existenz (und Eindeutigkeit) von Lösungen vom Typ II benötigen sowohl bezüglich der A_n (Voraussetzung 5.2) als auch bezüglich $\mathfrak{G}$, insbesondere über $\mathfrak{G}^2$ (Voraussetzung 5.3) stark einschränkende Voraussetzungen. Im folgenden beweisen wir einen dritten Existenzsatz (und Eindeutigkeitssatz), der ohne wesentlich einschränkende Voraussetzungen über die A_n und $\mathfrak{G}$ auskommt, allerdings eine stärkere Annahme über die α_{ni}^j und σ_n macht.

Wir gehen aus von folgender Bemerkung:

Satz 6.1. *Es gelte*

$$\sigma_n \tau_n \prod_{v=0}^{n-1} \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v}{\alpha_{v1}^1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

x_n sei eine Lösung vom Typ II derart, daß sich die x_n^1 in der Form

$$x_n^1 = A_{n-1,1}^1 A_{n-2,1}^1 \dots A_{0,1}^1 v_n, \quad v_n \in \mathfrak{G}^1 \quad (n \geq n_0)$$

darstellen lassen. Dann gilt

$$v_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Der Beweis liegt in den Ungleichungen

$$\prod_{v=0}^{n-1} \alpha_{v1}^1 |v_n| \leq |x_n^1| \leq \sigma_n \tau_n |x_n^2| \leq \sigma_n \tau_n \prod_{v=0}^{n-1} (\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v) |x_0^2|.$$

Beachtet man nun

$$(*) \quad x_{n+1}^1 = A_{n1}^1 x_n^1 + A_{n2}^1 x_n^2,$$

so ergibt sich

Satz 6.2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1 lassen sich*

$$A_{n2}^1 x_n^2 = A_{n1}^1 A_{n-1,1}^1 \dots A_{01}^1 w_n, \quad w_n \in \mathfrak{G}^1 \quad (n \geq n_0)$$

darstellen. Es gilt

$$v_n = - \sum_{v=n}^{\infty} w_v \quad (n \geq n_0).$$

Der Beweis folgt mit (*), was sofort

$$w_n = v_{n+1} - v_n \quad (n \geq n_0)$$

liefert; $v_n \rightarrow 0$ zieht dann die Reihendarstellung von v_n nach sich. —

In diesen Sätzen ist bei einer Lösung vom Typ II die Folge $\{x_n^1\}$ mit (*) voll durch die Folge $\{x_n^2\}$ bestimmt. Zieht man

$$x_{n+1}^2 = A_{n1}^2 x_n^1 + A_{n2}^2 x_n^2$$

heran, so kann die Folge $\{x_n^2\}$ als Fixpunkt einer Abbildung aufgefaßt werden. So wird man erwarten, durch Anwendung eines Fixpunktsatzes einen Existenzbeweis für Lösungen vom Typ II mit gegebenem x_0^2 führen zu können.

Dies gelingt unter den folgenden

Voraussetzungen:

① Die beiden Untergruppen $\mathfrak{G}^1, \mathfrak{G}^2$ seien je als metrische Räume mit dem Abstand $\delta(x, y) = |x - y|$ perfekt.

② Die Abbildungen A_{n1} ($n=0, 1, 2, \dots$) von $\mathfrak{G}^1$ in sich sind Isomorphismen. Es existieren also – in ganz $\mathfrak{G}^1$ erklärt – $(A_{n1}^1)^{-1}$ mit

$$(6.3) \quad |(A_{n1}^1)^{-1} x^1| \leq (\alpha_{n1}^1)^{-1} |x^1|.$$

(3) Mit einer Konstanten ω , $0 \leq \omega < 1$, gelte in Verschärfung von (1.4)

$$(6.4) \quad \alpha_{n1}^2 + \alpha_{n2}^2 \frac{1}{\sigma_n} \leq \frac{\omega}{\sigma_{n+1}} \left(\alpha_{n1}^1 - \alpha_{n2}^1 \frac{1}{\sigma_n} \right).$$

Bemerkung. (6.4) ist stärker als die Voraussetzung des Untergruppensatzes 4.2 wegen

$$\frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \frac{\sigma_v \tau_v}{\rho_{m,v}^{(\varepsilon)}}}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v}} \leq \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \frac{\sigma_v}{\sigma_{v+1}}}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v}} \leq \omega \frac{\sigma_v}{\sigma_{v+1}}.$$

Die Voraussetzung 4.2 wiederum ist stärker als die erste Voraussetzung 6.1 wegen

$$\frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \frac{\sigma_v \tau_v}{\rho_{m,v}^{(\varepsilon)}}}{\alpha_{v1}^1} \leq \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \frac{\sigma_v \tau_v}{\rho_{m,v}^{(\varepsilon)}}}{\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{\rho_{m,v}^{(\varepsilon)}}{\sigma_v}}.$$

Mit dem Ziel der Anwendung des Fixpunktsatzes für kontrahierende Abbildungen bilden wir nun

$$\mathfrak{M} = \left\{ z \mid z = \{z_n\}_0^\infty, \ z_n \in \mathfrak{G}^2, \ \exists \zeta \mid |z_n| \leq \zeta \frac{1}{\sigma_n} \prod_{v=0}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \right) \right\}.$$

Wir definieren in $\mathfrak{M}$ dann $\|z\|$ als das kleinste mögliche derartige ζ , ferner natürlich

$$-z = \{-z_n\}, \quad x + y = \{x_n + y_n\}.$$

Es gilt hierzu

Satz 6.5. $\mathfrak{M}$ ist abelsche Gruppe und $\|z\|$ in $\mathfrak{M}$ eine Norm mit

$$\|z\| \geq 0, \quad \|z\| = 0 \iff z = 0,$$

$$\|-z\| = \|z\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Mit dem Abstand

$$\delta(x, y) = \|x - y\|$$

ist $\mathfrak{M}$ perfekter metrischer Raum.

Der Nachweis der ersten Eigenschaften ist naheliegend. Wir führen nur den Beweis der Perfektheit.

Sei also bekannt für $z^k = \{z_n^k\}_0^\infty \in \mathfrak{M}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)

$$\delta(z^k, z^l) \rightarrow 0 \quad (k, l \rightarrow \infty).$$

Dann hat man nach Definition für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$(*) \quad |z_n^k - z_n^l| \leq \delta(z^k, z^l) \frac{1}{\sigma_n} \prod_{v=0}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \right).$$

Danach sind die z_n^k für $k \rightarrow \infty$ in $\mathfrak{G}^2$ Cauchy-konvergent; man hat also wegen ① $z_n^l \rightarrow z_n^0 \in \mathfrak{G}^2$ für jedes n . Aus (*) folgt mit $l \rightarrow \infty$

$$|z_n^k - z_n^0| \leq \sup_{l > k} \delta(z^k, z^l) \frac{1}{\sigma_n} \prod_{v=0}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \right);$$

also gilt

$$z^k - z^0 \in \mathfrak{M}, \quad z^0 \in \mathfrak{M}$$

und

$$\delta(z^k, z^0) \leq \sup_{l > k} \delta(z^k, z^l) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty),$$

wie zu zeigen war.

Wir bemerken

Satz 6.6. Ist x_n als Lösung von (1.5) vom Typ II, so gilt

$$\{x_n^2\}_0^\infty \in \mathfrak{M}.$$

Man hat nämlich schon mit (1.4)

$$|x_n^2| \leq |x_0^2| \prod_{v=0}^{n-1} (\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v) \leq |x_0^2| \sigma_0 \frac{1}{\sigma_n} \prod_{v=0}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \right),$$

kann also $\zeta = |x_0^2| \sigma_0$ wählen.

Entsprechend Satz 6.2 gilt

Satz 6.7. Für jedes $z = \{z_v\} \in \mathfrak{M}$ sind die Reihen ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$y_n = - \sum_{v=n}^{\infty} (A_{n1}^1)^{-1} (A_{n+1,1}^1)^{-1} \dots (A_{v1}^1)^{-1} A_{v2}^1 z_v$$

in $\mathfrak{G}^1$ konvergent. Man hat

$$|y_n| \leq \|z\| \prod_{v=0}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \right).$$

und

$$(A_{01}^1)^{-1} \dots (A_{n-1,1}^1)^{-1} y_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Bildet man

$$u_0 = z_0, \quad u_{n+1} = A_{n1}^2 y_n + A_{n2}^2 z_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

so gilt

$$u = \{u_n\}_0^\infty \in \mathfrak{M}$$

und für $n = 0, 1, 2, \dots$

$$|u_{n+1}| \leq \omega \|z\| \frac{1}{\sigma_{n+1}} \prod_{v=0}^n \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \right).$$

Zum Beweise schätzt man mit Beachtung von (6.3) die Reihenglieder ab:

$$|(A_{n1}^1)^{-1} \dots (A_{v1}^1)^{-1} A_{v2}^1 z_v| \leq \|z\| \prod_{\mu=0}^{n-1} \left(\alpha_{\mu 1}^1 - \alpha_{\mu 2}^1 \frac{1}{\sigma_{\mu}} \right) \frac{\alpha_{v2}^1}{\sigma_v \alpha_{v1}^1} \prod_{\mu=n}^{v-1} \left(1 - \frac{\alpha_{\mu 2}^1}{\sigma_{\mu} \alpha_{\mu 1}^1} \right).$$

Man hat nun

$$\sum_{v=n}^{\infty} \frac{\alpha_{v2}^1}{\sigma_v \alpha_{v1}^1} \prod_{\mu=n}^{v-1} \left(1 - \frac{\alpha_{\mu 2}^1}{\sigma_{\mu} \alpha_{\mu 1}^1} \right) = 1 - \prod_{v=n}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha_{v2}^1}{\sigma_v \alpha_{v1}^1} \right).$$

Daraus folgen mit ①, ② und (6.3) die Aussagen über y_n . Weiter hat man dann

$$|u_{n+1}| \leq \|z\| \left(\alpha_{n1}^2 + \alpha_{n2}^2 \frac{1}{\sigma_n} \right) \prod_{v=0}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{1}{\sigma_v} \right).$$

Das liefert mit ③ bzw. (6.4) die Aussagen über u .

Satz 6.8. Setzt man gemäß 6.7

$$u = Tz,$$

so ist T eine additive Abbildung von $\mathfrak{M}$ in sich. Für jedes $a^2 \in \mathbb{G}^2$ ist T eine kontrahierende Abbildung des perfekten metrischen Raumes

$$\mathfrak{M}(a^2) = \{z \mid z \in \mathfrak{M}, z_0 = a^2\}$$

in sich:

$$\delta(Tz^1, Tz^2) \leq \omega \delta(z^1, z^2) \quad (z^1, z^2 \in \mathfrak{M}(a^2)).$$

Die ersten Aussagen sind klar auf Grund von Satz 6.7 und der Additivität der A_{ni}^j . Für die letzte Aussage braucht nun nur noch in $\mathfrak{M}(0)$

$$\|u\| \leq \omega \|z\|$$

gezeigt zu werden. Das aber folgt unmittelbar aus der letzten Abschätzung in Satz 6.7 mit $u_0 = 0$.

Damit wird nun ein Existenz- und Eindeigkeitssatz erhalten.

Satz 6.9. Unter den Voraussetzungen ①, ②, ③ besitzt für jedes $a^2 \in \mathbb{G}^2$ die Differenzengleichung (1.5) genau eine Lösung x_n vom Typ II mit $x_0^2 = a^2$.

Man schließt an Satz 6.8 an. Nach dem bekannten (elementaren) Fixpunktsatz für kontrahierende Abbildungen hat dann T in jedem $\mathfrak{M}(a^2)$ genau einen Fixpunkt.

Nach den Sätzen 6.6, 6.1, 6.2 ist nun einerseits für eine Lösung x_n vom Typ II mit $x_0^2 = a^2$ die Folge $\{x_n^2\}$ Fixpunkt von T in $\mathfrak{M}(a^2)$.

Andererseits: ist z ein Fixpunkt von T in $\mathfrak{M}(a^2)$, so wird mit Satz 6.7

$$x_n = y_n + z_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

Lösung vom Typ II mit $x_0^2 = a^2$. Denn danach hat man zunächst

$$y_{n+1} = A_{n1}^1 y_n + A_{n2}^1 z_n,$$

$$z_{n+1} = A_{n1}^2 y_n + A_{n2}^2 z_n,$$

also mit $x_n^1 = y_n$, $x_n^2 = z_n$,

$$x_{n+1} = A_n x_n.$$

So braucht nur noch (Typ II)

$$(\times) \quad |y_n| \leq \sigma_n |z_n| \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

gezeigt zu werden. Das ergibt sich durch folgende Schlußweise:

Sei ζ_n minimal mit

$$(*) \quad |z_v| \leq \zeta_n \frac{1}{\sigma_v} \prod_{\mu=0}^{v-1} \left(\alpha_{\mu 1}^1 - \alpha_{\mu 2}^1 \frac{1}{\sigma_{\mu}} \right) \quad (v \geq n),$$

so ergibt sich entsprechend der Schlußweise für Satz 6.7

$$(**) \quad |y_v| \leq \zeta_n \prod_{\mu=0}^{v-1} \left(\alpha_{\mu 1}^1 - \alpha_{\mu 2}^1 \frac{1}{\sigma_{\mu}} \right) \quad (v \geq n)$$

und ($u=z$)

$$|z_v| \leq \omega \zeta_n \frac{1}{\sigma_v} \prod_{\mu=0}^{v-1} \left(\alpha_{\mu 1}^1 - \alpha_{\mu 2}^1 \frac{1}{\sigma_{\mu}} \right) \quad (v \geq n+1).$$

Daher gilt in (*) für $v=n$ das Zeichen $\leq$ (ζ_n minimal). (**) für $v=n$ gibt dann ($\times$).

Ergänzend fassen wir noch einmal Satz 2.5 und Satz 6.9 zusammen:

Satz 6.10 (Dritter Existenzsatz). *Unter den Voraussetzungen ①, ②, ③ bilden die Lösungen x_n vom Typ II eine Untergruppe $\mathfrak{L}_{II}$ der Gruppe der Lösungen $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}_{II}$ ist mit*

$$\{x_n\}_0^\infty \leftrightarrow x_0^2$$

isomorph zu $\mathfrak{G}^2$. Ist $\mathfrak{L}^1$ die Untergruppe der Lösungen mit $x_0 \in \mathfrak{G}^1$, so ist $\mathfrak{L}$ direkte Summe

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^1 + \mathfrak{L}_{II}.$$

7. Summengleichungen. Existenzsatz

Die in Abschnitt 6 benutzte Methode läßt sich leicht unter allgemeineren Voraussetzungen durchführen.

Wir nehmen hierzu an:

$\mathfrak{G}$ sei normierte abelsche Gruppe (vgl. 1); $\mathfrak{G}$ sei als metrischer Raum perfekt.

Für $n=0, 1, 2, \dots$ und $v=0, 1, 2, \dots$ seien A_{nv} additive Abbildungen von $\mathfrak{G}$ in sich mit

$$(7.1) \quad |A_{nv} x| \leq \alpha_{nv} |x| \quad (x \in \mathfrak{G}).$$

ϑ_n ($n=0, 1, 2, \dots$) seien positive Konstanten, $0 \leq \omega < 1$. Man habe

$$(7.2) \quad \sum_{v=0}^{\infty} \alpha_{vn} \vartheta_v \leq \omega \vartheta_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Ferner seien mit $\delta \geq 0$

$$(7.3) \quad d_n \in \mathfrak{G}, \quad |d_n| \leq \delta \vartheta_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Dann gilt

Satz 7.4. *Die Gleichung*

$$x_{n+1} = \sum_{v=0}^{\infty} A_{nv} x_v + d_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

besitzt für jedes $x_0 \in \mathfrak{G}$ genau eine Lösung $\{x_n\}_0^\infty$ derart, daß

$$|x_n| \leq \xi \vartheta_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

mit einer Zahl $\xi \geq 0$ gilt.

Man betrachtet analog zu 6

$$\mathfrak{M} = \{z \mid z = \{z_n\}_0^\infty, z_n \in \mathfrak{G}, \exists \zeta \mid |z_n| \leq \zeta \vartheta_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)\}$$

mit $\|z\| = \min \zeta$ als normierte abelsche Gruppe und perfekten metrischen Raum. Dann zeigt man wie in 6, daß die durch

$$u_0 = z_0, \quad u_{n+1} = \sum_{v=0}^{\infty} A_{nv} z_v + d_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

definierte Abbildung $u = Tz$ $\mathfrak{M}$ in sich abbildet und additiv ist, ferner, daß sie den perfekten metrischen Raum

$$\mathfrak{M}(x_0) = \{z \mid z \in \mathfrak{M}, z_0 = x_0\}$$

in sich abbildet und dort eine kontrahierende Abbildung darstellt; letzteres wegen

$$\left| \sum_{v=0}^{\infty} A_{nv} z_v \right| \leq \omega \|z\| \vartheta_{n+1} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Die eindeutige Existenz eines Fixpunktes für

$$\mathfrak{M}(x_0) \xrightarrow{T} \mathfrak{M}(x_0) \quad (x_0 \in \mathfrak{G})$$

ist dann genau die Aussage unseres Satzes.

Fordert man schärfer (wie in 6 erfüllt ist)

$$(7.5) \quad A_{nv} = 0 \quad (v < n),$$

so hat man ergänzend

Satz 7.6. *Für eine Lösung x_n der homogenen Gleichung*

$$x_{n+1} = \sum_{v=n}^{\infty} A_{nv} x_v \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

in $\mathfrak{M}$ gilt

$$\frac{1}{\vartheta_{n+1}} |x_{n+1}| \leq \omega \frac{1}{\vartheta_n} |x_n|.$$

Zum Beweise sei ξ_n ($n=0, 1, 2, \dots$) minimal durch

$$(*) \quad |x_v| \leq \xi_n \vartheta_v \quad (v \geq n)$$

festgelegt. Dann erhält man offenbar $\xi_{n+1} \leq \omega \xi_n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) und damit in $(*)$ für $v=n$ das Zeichen gleich. Das liefert die Behauptung.

8. Summengleichungen als Differenzengleichungen

Unter den Voraussetzungen von 7 [einschließlich (7.5)] werde die homogene Summengleichung

$$(8.1) \quad x_{n+1} = \sum_{v=n}^{\infty} A_{nv} x_v \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

betrachtet.

Entsprechend Satz 7.4 gilt nun

Satz 8.2. Für jedes $x_n \in \mathfrak{G}$ besitzt

$$x_{m+1} = \sum_{v=m}^{\infty} A_{mv} x_v \quad (m=n, n+1, \dots)$$

genau eine Lösung $\{x_m\}_0^{\infty}$, für die mit geeignetem $\xi_n \geq 0$

$$|x_m| \leq \xi_n \vartheta_m \quad (m=n, n+1, \dots)$$

gilt.

Wir ordnen nun jedem $x_n \in \mathfrak{G}$ das hierdurch eindeutig bestimmte $x_{n+1} \in \mathfrak{G}$ zu und schreiben diese Zuordnung

$$x_{n+1} = A_n x_n.$$

A_n ist eine additive Abbildung von $\mathfrak{G}$ in sich. Die Summengleichung (8.1) wird hiermit äquivalent zur Differenzengleichung

$$x_{n+1} = A_n x_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Auf diese Differenzengleichung kann nun gegebenenfalls die Theorie der Abschnitte 1 bis 6 angewendet werden.

Hierzu kommt es vor allem auf Abschätzungen (1.3) bezüglich einer Zerfällung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^1 + \mathfrak{G}^2$ an. Solche Abschätzungen erhält man insbesondere leicht unter folgenden Annahmen: Es sei

$$(8.3) \quad |x| \geq \max(|x^1|, |x^2|) \quad (x = x^1 + x^2, x^i \in \mathfrak{G}^i),$$

$$(8.4) \quad A_{nn} = A'_n + A''_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Die Zerlegung von A'_n , entsprechend (1.2) sei

$$(8.5) \quad A'_n = \begin{pmatrix} A'_{n1} & A'_{n2} \\ A'_{n1} & A'_{n2} \end{pmatrix}.$$

Hierfür gelte mit Konstanten α'_{ni}

$$(8.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} |A'_{n1} x^1| \leq \alpha'_{n1} |x^1| \\ |A'_{n2} x^1| \leq \alpha'_{n1} |x^1| \end{array} \right\} \quad (x^1 \in \mathfrak{G}^1),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |A'_{n1} x^2| \leq \alpha'_{n2} |x^2| \\ |A'_{n2} x^2| \leq \alpha'_{n2} |x^2| \end{array} \right\} \quad (x^2 \in \mathfrak{G}^2).$$

Man habe ferner

$$(8.7) \quad |A''_n x| \leq \alpha''_n |x| \quad (x \in \mathfrak{G}).$$

Setzt man dann

$$(8.8) \quad \gamma_n = \alpha_n'' + \frac{1}{g_n} \sum_{v=n+1}^{\infty} \alpha_{nv} g_v \omega^{v-n} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

so kann

$$(8.9) \quad \begin{cases} \alpha_{n1}^1 = \alpha_{n1}'^1 - \gamma_n \\ \alpha_{n1}^2 = \alpha_{n1}'^2 + \gamma_n \\ \alpha_{n2}^1 = \alpha_{n2}'^1 + \gamma_n \\ \alpha_{n2}^2 = \alpha_{n2}'^2 + \gamma_n \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

für (1.3) gesetzt werden.

Denn: verfährt man für $x_n = x_n^1$ entsprechend Satz 8.2, so hat man entsprechend Satz 7.6

$$(8.10) \quad \frac{1}{g_{v+1}} |x_{v+1}| \leq \omega \frac{1}{g_v} |x_v| \leq \omega^{v-n} \frac{1}{g_n} |x_n^1| \quad (v \geq n).$$

Damit kann

$$(8.11) \quad \left| A_n'' x_n^1 + \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{nv} x_v \right| \leq \gamma_n |x_n^1|$$

abgeschätzt werden. Wegen (8.3) sind damit zugleich die Komponenten des betrachteten Elementes in $\mathfrak{G}^1$ bzw. $\mathfrak{G}^2$ abgeschätzt. So wird mit

$$x_{n+1} = A_n' x_n^1 + \left[A_n'' x_n^1 + \sum_{v=n+1}^{\infty} A_{nv} x_v \right]$$

sofort

$$|A_{n1}^1 x_n^1| = |x_{n+1}^1| \geq \alpha_{n1}'^1 |x_n^1| - \gamma_n |x_n^1|$$

und

$$|A_{n1}^2 x_n^1| = |x_{n+1}^2| \leq \alpha_{n1}'^2 |x_n^1| + \gamma_n |x_n^1|.$$

Analog für α_{n2}^1 und α_{n2}^2 . —

9. Mehrere Untergruppen. Weitere Zerfällung

Im folgenden sei die natürliche Zahl $k \geq 2$. Wir nehmen an:

1) Die normierte abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ sei direkte Summe von k Untergruppen

$$(9.1) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2 + \dots + \mathfrak{G}_k.$$

Für $s = 1, 2, \dots, k-1$ setzen wir

$$\mathfrak{G}_s^1 = \mathfrak{G}_1 + \dots + \mathfrak{G}_s,$$

$$\mathfrak{G}_s^2 = \mathfrak{G}_{s+1} + \dots + \mathfrak{G}_k$$

und haben dann natürlich

$$(9.2) \quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_s^1 + \mathfrak{G}_s^2.$$

2) Bezüglich der Differenzgleichung

$$x_{n+1} = A_n x_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

in $\mathfrak{G}$ seien für $s=1, 2, \dots, k-1$ je die Voraussetzungen von 1 mit $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}_s^1$, $\mathfrak{G}^2 = \mathfrak{G}_s^2$ und geeigneten, von s abhängigen, Konstanten erfüllt. Wir bezeichnen dann: Typ I_s, Typ II_s.

3) Für jedes $s=1, 2, \dots, k-1$ mögen – vgl. Satz 5.9 oder Satz 6.10 – die Lösungen vom Typ II_s eine zu $\mathfrak{G}_s^2$ isomorphe Untergruppe $\mathfrak{Q}_{s, \text{II}}$ der Gruppe $\mathfrak{Q}$ der Lösungen bilden.

Dann gilt

Satz 9.3. $\mathfrak{Q}$ ist direkte Summe

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \dots + \mathfrak{Q}_k$$

der k Untergruppen

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{Q}_1^1, \quad \mathfrak{Q}_k = \mathfrak{Q}_{k-1, \text{II}},$$

$$\mathfrak{Q}_s = \mathfrak{Q}_s^1 \cap \mathfrak{Q}_{s-1, \text{II}} \quad (s=2, 3, \dots, k-1)$$

mit

$$\mathfrak{Q}_1 + \dots + \mathfrak{Q}_s = \mathfrak{Q}_s^1 \quad (s=1, 2, \dots, k-1),$$

wenn für $s=1, 2, \dots, k-1$ mit $\mathfrak{Q}_s^1$ die Untergruppe der Lösungen x_n mit $x_0 \in \mathfrak{G}_s^1$ bezeichnet.

Offenbar ist für $s=2, 3, \dots, k$ gerade $\mathfrak{Q}_s$ die Untergruppe der Lösungen x_n vom Typ II_{s-1} mit

$$x_0 \in \mathfrak{G}_s^1 = \mathfrak{G}_1 + \dots + \mathfrak{G}_s.$$

Bei der zu $s-1$ gehörenden Aufspaltung ist also $x_0^2 \in \mathfrak{G}_s$.

Der Beweis ergibt sich damit, daß aus

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{s-1}^1 + \mathfrak{Q}_{s-1, \text{II}} \quad (s=2, 3, \dots, k)$$

und

$$\mathfrak{Q}_1^1 \subset \mathfrak{Q}_2^1 \subset \dots \subset \mathfrak{Q}_{k-1}^1$$

folgt

$$\mathfrak{Q}_s^1 = \mathfrak{Q}_{s-1}^1 + (\mathfrak{Q}_s^1 \cap \mathfrak{Q}_{s-1, \text{II}}) \quad (s=2, 3, \dots, k-1),$$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{k-1}^1 + \mathfrak{Q}_{k-1, \text{II}}.$$

Fordert man zusätzlich z. B.

4) Für jedes $s=1, 2, \dots, k-1$ sei in (1.4)

$$\sigma_n = 1 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

5) Für

$$a_\kappa \in \mathfrak{G}_\kappa \quad (\kappa=1, 2, \dots, k)$$

sei

$$|a_1 + \dots + a_s| = \max_{\kappa=1}^s |a_\kappa| \quad (s=2, \dots, k-1)$$

und

$$|a_s + \dots + a_k| = \max_{\kappa=s}^k |a_\kappa| \quad (s=2, \dots, k-1).$$

Dann gilt ergänzend zu Satz 9.3.

Satz 9.4. In der Zerlegung von Satz 9.3 ist

$$\mathfrak{L}_{s, \Pi} = \mathfrak{L}_{s+1} + \dots + \mathfrak{L}_k \quad (s=1, 2, \dots, k-1).$$

Dazu ist offenbar nur

$$\mathfrak{L}_{s, \Pi} \subset \mathfrak{L}_{s-1, \Pi} \quad (s=2, 3, \dots, k-1)$$

zu zeigen: Sei

$$x_n = x_n^1 + \dots + x_n^k, \quad x_n^k \in \mathfrak{G}_k$$

eine Lösung vom Typ Π_s ; dann ist nach 4), 5)

$$|x_n^s| \leq \max_{\kappa=1}^s |x_n^\kappa| \leq \max_{\kappa=s+1}^k |x_n^\kappa|,$$

also auch

$$\max_{\kappa=1}^{s-1} |x_n^\kappa| \leq \max_{\kappa=s}^k |x_n^\kappa|,$$

d.h. x_n vom Typ Π_{s-1} . –

Schreibt man für

$$(9.5) \quad \begin{cases} x = x^1 + x^2 + \dots + x^k & (x^\kappa \in \mathfrak{G}_\kappa), \\ y = y^1 + y^2 + \dots + y^k & (y^\kappa \in \mathfrak{G}_\kappa), \end{cases}$$

$$y = A_n x$$

die Darstellung

$$(9.6) \quad y^i = \sum_{j=1}^k \hat{A}_{nj}^i x^j \quad (i=1, 2, \dots, k)$$

mit additiven Abbildungen $\hat{A}_{nj}^i$ von $\mathfrak{G}_j$ in $\mathfrak{G}_i$ und hat man

$$(9.7) \quad |\hat{A}_{nj}^i x^j| \leq \hat{\alpha}_{nj}^i |x^j| \quad (i \neq j),$$

so kann man für jede Lösung x_n offenbar

$$(9.8) \quad |x_{n+1}^s - \hat{A}_{ns}^s x_n^s| \leq \left[\left(\sum_{j=1}^{s-1} \hat{\alpha}_{nj}^s \right) \left(\max_{j=1}^{s-1} \frac{|x_n^j|}{|x_n^s|} \right) + \left(\sum_{j=s+1}^k \hat{\alpha}_{nj}^s \right) \left(\max_{j=s+1}^k \frac{|x_n^j|}{|x_n^s|} \right) \right] |x_n^s|$$

abschätzen. Dies ist insbesondere für

$$\{x_n\} \in \mathfrak{L}_{s1} \cap \mathfrak{L}_{s-1, \Pi}$$

im Falle der Annahmen 4) und 5) von Interesse. Dann kann nämlich für $s=2, 3, \dots, k$

$$(9.9) \quad \max_{j=1}^{s-1} \frac{|x_n^j|}{|x_n^s|} = \frac{|x_{s-1, n}^1|}{|x_{s-1, n}^2|} \leq \tau_{s-1, n} \leq 1$$

auf Grund der Formeln für Typ Π_{s-1} und für $s=1, 2, \dots, k-1$ und $n \geq m$

$$(9.10) \quad \max_{j=s+1}^k \frac{|x_n^j|}{|x_n^s|} = \frac{|x_{sn}^2|}{|x_{sn}^1|} \leq \rho_{s, m, n}^{(e)} < 1$$

auf Grund der Formeln für Typ I_s abgeschätzt werden. Dabei wurde natürlich

$$(9.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{sn}^1 = x_n^1 + \dots + x_n^s \\ x_{sn}^2 = x_n^{s+1} + \dots + x_n^k \end{array} \right\} \quad (s=1, 2, \dots, k-1)$$

gesetzt.

10. Poincaré-Perronsche Differenzengleichungen

$\mathfrak{R}_r$ sei im folgenden der komplexe r -dimensionale lineare Vektorraum. Für

$$x = (\xi_1, \dots, \xi_r) \in \mathfrak{R}_r$$

werde

$$(10.1) \quad |x| = \max_{v=1}^r |\xi_v|$$

gesetzt. Entsprechend setzen wir für eine (r, r) -Matrix D

$$(10.2) \quad |D| = \max \{|Dx| \mid |x| = 1\};$$

dies ist offenbar die maximale Zeilenbetragssumme von D .

Es sei nun C eine (r, r) -Matrix; sie besitze k Gruppen je betragslich gleicher Eigenwerte. Ihrer Ordnung nach gezählt, mögen je m_k den Betrag ρ_k besitzen:

$$\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_k (\geq 0),$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = r.$$

D_n sei eine Folge von (r, r) -Matrizen ($n=0, 1, 2, \dots$) mit

$$|D_n| \rightarrow 0.$$

Wir setzen

$$(10.3) \quad C_n = C + D_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

und fordern, daß *alle* Matrizen C_n invertierbar sind. Wir betrachten dann in $\mathfrak{R}_r$ die Differenzengleichung

$$(10.4) \quad y_{n+1} = C_n y_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Für eine Lösung y_n gilt entweder $y_n \neq 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$) oder $y_n \equiv 0$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen. Je r linear unabhängige Lösungen bilden ein Fundamentalsystem: jede Lösung ist eindeutig als Linearkombination der r Lösungen des Fundamentalsystems darstellbar. Für die lineare Abhängigkeit von Lösungen

$$\{y_n^{(1)}\}, \dots, \{y_n^{(p)}\}$$

ist die lineare Abhängigkeit der Vektoren

$$y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(p)}$$

für ein einzelnes n notwendig und hinreichend (C_n invertierbar).

Es gilt

Satz 10.5. (10.4) besitzt ein Fundamentalsystem von r Lösungen $y_n^{(v)}$, das aus k Gruppen von $m_1, m_2, \dots, m_k$ Lösungen gebildet wird, von folgender Art: Ist $y_n \neq 0$ eine beliebige Lösung und s die größte natürliche Zahl derart, daß y_n Linearkombination der letzten $m_s + m_{s+1} + \dots + m_k$ Lösungen des Fundamentalsystems ist, so gilt

$$\sqrt[n]{|y_n|} \rightarrow \rho_s \quad (n \rightarrow \infty).$$

Zusatz 10.6. Für $s = 1, 2, \dots, k$ gibt es je m_s Indizes

$$\sigma_{s1}, \dots, \sigma_{sm_s},$$

allein abhängig von C , derart daß für obiges $y_n = (\eta_{n1}, \dots, \eta_{nr})$ sogar

$$\sqrt[n]{|\eta_{n\sigma_{s1}}| + \dots + |\eta_{n\sigma_{sm_s}}|} \rightarrow \rho_s$$

gilt. Ist speziell $m_s = 1$, λ_s einziger Eigenwert (von der Ordnung 1) mit $|\lambda_s| = \rho_s$, so gilt schärfer

$$\frac{\eta_{n+1, \sigma_{s1}}}{\eta_{n, \sigma_{s1}}} \rightarrow \lambda_s \quad (n \rightarrow \infty).$$

Zum Beweise sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß

$$\rho_\kappa - \rho_{\kappa+1} > 2\varepsilon \quad (\kappa = 1, 2, \dots, k-1).$$

Dann sei $T = T_\varepsilon$ eine Matrix aus geeigneten Eigen- und Hauptvektoren von C , so daß

$$T^{-1} C T = A$$

Jordansche Normalform mit Kästchen

$$\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \varepsilon \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

erhält. Für

$$B_n = T^{-1} D_n T$$

hat man

$$|B_n| \leq |T^{-1}| |T| |D_n| \rightarrow 0$$

und mit

$$(10.7) \quad y_n = T x_n$$

wird (10.4) zu

$$(10.8) \quad x_{n+1} = A_n x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

mit

$$(10.9) \quad A_n = A + B_n.$$

Man identifiziere nun

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{R}_r, \quad \mathfrak{G}_1 = \{(\xi_1, \dots, \xi_{m_1}, 0, \dots, 0)\}, \dots$$

Dann sind, falls $k \geq 2$, für genügend große n ($\geq n_0$) sämtliche Voraussetzungen von Abschnitt 9, d.h. 1) bis 5) gegeben. Eine Lösung x_n aus der Untergruppe $\mathfrak{L}_s + \dots + \mathfrak{L}_k$ mit maximalem s ist dann nach 9 zugleich vom Typ I_s und vom Typ II_{s-1} , wobei ersteres für $s=k$, letzteres für $s=1$ entfällt. So gilt wegen $|B_n| \rightarrow 0$ nach Abschnitt 3

$$(10.10) \quad |x_n| = \max \{ |\xi_{n\sigma}| \mid m_1 + \dots + m_{s-1} < \sigma \leq m_1 + \dots + m_s \}$$

und

$$(10.11) \quad \frac{|\xi_{n\sigma}|}{|x_n|} \rightarrow 0 \quad \sigma \leq m_1 + \dots + m_{s-1} \quad \text{oder} \quad \sigma > m_1 + \dots + m_s.$$

Es ist (9.8) anwendbar und liefert für jedes $\varepsilon' > \varepsilon$ bei genügend großem n

$$(\rho_s - \varepsilon') |x_n| \leq |x_{n+1}| \leq (\rho_s + \varepsilon') |x_n|,$$

also

$$(10.12) \quad \rho_s - \varepsilon \leq \liminf \sqrt[n]{|x_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|x_n|} \leq \rho_s + \varepsilon.$$

Ist speziell $m_s = 1$, λ_s einziger Eigenwert mit $|\lambda_s| = \rho_s$, so gilt für

$$\rho = m_1 + \dots + m_{s-1} + 1$$

schärfer

$$(10.13) \quad \frac{\xi_{n+1, \rho}}{\xi_{n, \rho}} \rightarrow \lambda_s.$$

Transformiert man nun mit (10.7) zurück, so entsteht für die y_n , die den betrachteten Lösungen x_n entsprechen,

$$(10.14) \quad \rho_s - \varepsilon \leq \liminf \sqrt[n]{|y_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|y_n|} \leq \rho_s + \varepsilon.$$

Jetzt beachtet man, daß die Einteilung $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \dots + \mathfrak{G}_k$ von ε unabhängig ist: ein Übergang von $T = T_\varepsilon$ zu $T = T_{\varepsilon_1}$ wird nämlich allein durch Multiplikation gewisser Spalten mit positiven Faktoren erreicht. Damit hat man die Unabhängigkeit der y_n -Lösungsgruppen von ε ; und (10.14) gibt für die $\mathfrak{L}_s$ entsprechende Gruppe

$$\sqrt[n]{|y_n|} \rightarrow \rho_s \quad (n \rightarrow \infty).$$

Damit ist Satz 10.5 bewiesen.

Der Zusatz 10.6 ergibt sich aus (10.10), (10.11), (10.13). Die

$$\sigma_{s1}, \dots, \sigma_{sm_s}$$

sind dabei Zeilenindizes derart, daß man aus den Spalten von T , die den σ -Werten von (10.10) entsprechen, eine reguläre (m_s, m_s) -Matrix erhält.

Wir betrachten speziell eine lineare homogene Differenzgleichung der Ordnung r für eine Zahlenfolge u_n ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$(10.15) \quad u_{n+r} + c_{n1} u_{n+r-1} + \dots + c_{nr} u_n = 0.$$

Wir nehmen

$$(10.16) \quad \begin{cases} c_{n\rho} = c_n + d_{n\rho}, & d_{n\rho} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \\ c_{nr} \neq 0 \end{cases}$$

an, haben also eine Poincarésche Differenzgleichung. Ihre Theorie wird mit

$$(10.17) \quad y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix}, \quad C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ -c_{nr} & & & \dots & -c_{n1} \end{pmatrix}$$

in den vorstehenden Rahmen eingeordnet. In Satz 10.5 und dem Zusatz 10.6 sind so die klassischen Sätze von POINCARÉ und PERRON enthalten. Dabei kann man in diesem Falle offenbar

$$(6.18) \quad \sigma_{sv} = v \quad (v=1, 2, \dots, m_s)$$

wählen.

11. Perron-Kreusersche Differenzgleichungen

$\mathfrak{R}_r$ sei der komplexe r -dimensionale lineare Vektorraum. $|x|$ für $x \in \mathfrak{R}_r$ und $|D|$ für (r, r) -Matrizen seien durch (10.1), (10.2) definiert.

Im folgenden seien C und D_{nv} ($n=0, 1, 2, \dots$; $v=n, n+1, \dots$) (r, r) -Matrizen. Wir nehmen an

$$(11.1) \quad |C| = \gamma,$$

$$(11.2) \quad \gamma < \omega \gamma' < \gamma'',$$

$$(11.3) \quad \sum_{v=n}^{\infty} |D_{nv}| \gamma'^{v-n} \leq \omega \gamma' - \gamma,$$

letzteres für $n=0, 1, 2, \dots$.

Dann gilt

Satz 11.4. Die Summengleichung

$$(11.4.1) \quad y_{n+1} = C y_n + \sum_{v=n}^{\infty} D_{nv} y_v \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

besitzt zu jedem $y_0 \in \mathfrak{R}_r$ genau eine, also r linear unabhängige Lösungen, für die mit geeignetem η eine Abschätzung

$$(11.4.2) \quad |y_n| \leq \eta \gamma'^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

möglich ist. Für eine Lösung gilt schärfer

$$(11.4.3) \quad |y_{n+1}| \leq \omega \gamma' |y_n| \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Das ist fast unmittelbar Folgerung aus Satz 7.4 und Satz 7.5, und zwar mit

$$\alpha_{nn} = \gamma + |D_{nn}|, \quad \alpha_{nv} = |D_{nv}| \quad (v > n), \quad \vartheta_n = \gamma'^n.$$

Im folgenden setzen wir

$$(11.5) \quad \sum_{v=n}^{\infty} |D_{nv}| (\omega \gamma')^{v-n} = \gamma_n.$$

Aus (9.4.1), (9.4.3) folgt dann unmittelbar

$$(11.6) \quad |y_{n+1} - C y_n| \leq \gamma_n |y_n| \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Im folgenden nehmen wir zusätzlich

$$(11.7) \quad \begin{cases} \gamma_n \rightarrow 0 & (n \rightarrow \infty) \\ C + D_{nn} \text{ invertierbar} & (n = 0, 1, 2, \dots) \end{cases}$$

an. Es ergibt sich dann mit 8 entsprechend zu 10 eine Klasseneinteilung der Lösungen von Satz 11.4 und eine Korrespondenz der Lösungsklassen zu den Gruppen betraglich gleicher Eigenwerte.

Es besitze also C k Gruppen je betraglich gleicher Eigenwerte. Ihrer Ordnung nach gezählt, mögen je m_k den Betrag ρ_k besitzen:

$$\begin{aligned} \rho_1 &> \rho_2 > \dots > \rho_k (\geq 0), \\ m_1 + m_2 + \dots + m_k &= r. \end{aligned}$$

Dann gilt

Satz 11.8. Die Lösungen von (11.4.1), (11.4.2) besitzen ein Fundamentalsystem von r Lösungen $y_n^{(v)}$, das aus k Gruppen von $m_1, m_2, \dots, m_k$ Lösungen gebildet wird, von folgender Art: Ist $y_n \neq 0$ eine beliebige Lösung und s die größte natürliche Zahl derart, daß y_n Linearkombination der letzten $m_s + \dots + m_k$ Lösungen des Fundamentalsystems ist, so gilt

$$\sqrt[n]{|y_n|} \rightarrow \rho_s \quad (n \rightarrow \infty).$$

Zusatz 11.9. Für $s = 1, 2, \dots, k$ gibt es je m_s Indizes

$$\sigma_{s1}, \dots, \sigma_{sm_s},$$

allein abhängig von C , derart, daß für obiges $y_n = (\eta_{n1}, \dots, \eta_{nr})$ sogar

$$\sqrt[n]{\max_{j=1}^{m_s} |\eta_{n\sigma_{sj}}|} \rightarrow \rho_s$$

gilt. Ist speziell $m_s = 1$, λ_s einziger Eigenwert (von der Ordnung 1) mit $|\lambda_s| = \rho_s$, so gilt schärfer

$$\frac{\eta_{n+1, \sigma_{s1}}}{\eta_{n, \sigma_{s1}}} \rightarrow \lambda_s \quad (n \rightarrow \infty).$$

Der Beweis ist dadurch gegeben, daß man mit 8, (11.5), (11.6) unmittelbar eine Reduktion auf die Überlegungen von 10 erhält.

Wir betrachten jetzt speziell eine Perronsche homogene lineare Summengleichung

$$(11.10) \quad \sum_{v=0}^{\infty} c_{nv} u_{n+v} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

für Zahlenfolgen, mit den Annahmen

$$(11.11) \quad \begin{cases} c_{nv} \rightarrow c_v & (v=0, 1, \dots, r-1), \\ c_{n,r} \rightarrow -1, \\ c_n \rightarrow 0 & (v=r+1, r+2, \dots), \\ c_{n0} \neq 0 & (n=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Sie kann unter entsprechenden Voraussetzungen durch

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+r-1} \end{pmatrix} = y_n, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ c_0 & c_1 & & & c_{r-1} \end{pmatrix} = C,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ d_{n0} & \dots & d_{n,r-1} \end{pmatrix} = D_{n,n},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \\ d_{n,r} & \dots & d_{n,2r-1} \end{pmatrix} = D_{n,n+r}, \dots$$

und $D_{nv}=0$ für $v \neq n+mr$ ($m=0, 1, 2, \dots$), wobei

$$\begin{aligned} d_n &= c_{nv} - c_v & (v=0, 1, \dots, r-1), \\ d_{n,r} &= c_{n,r} + 1, \\ d_{nv} &= c_{nv} & (v=r+1, r+2, \dots) \end{aligned}$$

gesetzt wurde, in den Rahmen der obigen Theorie eingeordnet werden. In diesem Falle kann – entsprechend 10 –

$$(11.12) \quad \sigma_{sv} = v \quad (v=1, 2, \dots, m_s)$$

gewählt werden.

Für gewisse Differenzgleichungen endlicher Ordnung kann man weitgehende Aussagen machen, wenn durch mehrere geeignete Transformationen

je eine Zurückführung auf eine Perronsche Summengleichung (11.10), (11.11) gelingt. Dabei sind dann jeweils für jedes n nur endlich viele D_{nv} von 0 verschieden, so daß (11.3) und (11.4) bequem für genügend große n erreicht werden können.

Wir betrachten die lineare homogene Differenzengleichung m -ter Ordnung

$$(11.13) \quad \begin{cases} f_{nm} v_{n+m} + f_{n, m-1} v_{n+m-1} + \dots + f_{n0} v_n = 0, \\ f_{n0} \neq 0, \quad f_{nm} \neq 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Man habe j Transformationen

$$(11.14) \quad \begin{cases} v_n = p_n^{(i)} u_n, & p_n^{(i)} \neq 0, \\ f_{nv} p_{n+v}^{(i)} = q_n^{(i)} c_{nv}^{(i)}, & q_n^{(i)} \neq 0, \\ (i=1, 2, \dots, j; \quad n=0, 1, 2, \dots; \quad v=0, 1, 2, \dots, m), \end{cases}$$

derart, daß für $i=1, 2, \dots, j$

$$(11.15) \quad \sqrt[n]{\left| \frac{p_n^{(i+1)}}{p_n^{(i)}} \right|} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$(11.16) \quad m = r_1 > r_2 > \dots > r_j > r_{j+1} = 0,$$

$$(11.17) \quad c_{nv}^{(i)} \rightarrow c_v^{(i)} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (v=0, 1, 2, \dots, m),$$

$$(11.18) \quad c_v^{(i)} = \begin{cases} 0 & (v > r_i) \\ 1 & (v = r_i) \\ \neq 0 & (v = r_{i+1}). \end{cases}$$

Wir erhalten dann

Satz 11.19. Die Differenzengleichung (11.13) hat ein Fundamentalsystem von m Lösungen folgender Art: es zerfällt zunächst in j Klassen von je $(r_i - r_{i+1})$ Lösungen ($i=1, 2, \dots, j$). Für $i=1, 2, \dots, j$ habe die Gleichung

$$(*) \quad \xi^{r_i - r_{i+1}} + c_{r_i-1}^{(i)} \xi^{r_i - r_{i+1} - 1} + \dots + c_{r_{i+1}}^{(i)} = 0$$

k_i Gruppen je betraglich gleicher Wurzeln; entsprechend der Ordnung gezählt, mögen je $m_k^{(i)}$ den Betrag $\rho_k^{(i)}$ besitzen:

$$\begin{aligned} \rho_1^{(i)} > \rho_2^{(i)} > \dots > \rho_{k_i}^{(i)} > 0, \\ m_1^{(i)} + m_2^{(i)} + \dots + m_{k_i}^{(i)} &= r_i - r_{i+1}. \end{aligned}$$

Dann zerfällt die i -te Klasse von Lösungen des Fundamentalsystems in k_i Unterklassen. Ist v_n eine nichttriviale Lösung von (11.13), so seien t und danach s

je maximal so bestimmt, daß v_n schon Linearkombination der letzten

$$m_s^{(t)} + \dots + m_{k_t}^{(t)} + r_{t+1}$$

Lösungen des Fundamentalsystems ist. Dann gilt

$$\max_{v=1}^{m_s^{(t)}} \sqrt[n+v]{\frac{1}{p_{n+v}^{(t)}} |v_{n+v}|} \rightarrow \rho_s^{(t)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ist speziell $m_s^{(t)}=1$, $\lambda_s^{(t)}$ einzige Wurzel von (*) mit dem Betrage ρ_t^s (von der Ordnung 1), so gilt schärfer

$$\frac{p_n^{(t)}}{p_{n+1}^{(t)}} \frac{v_{n+1}}{v_n} \rightarrow \lambda_s^{(t)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Zum Beweise führt man zunächst die letzte Transformation ($i=j$) aus. Man erhält hier zunächst die r_j Lösungen der letzten Klasse, die entsprechende Aufteilung in die genannten Unterklassen und die Eigenschaften der Linearkombinationen dieser r_j Lösungen. $\rho_k^{(j)} > 0$ folgt dabei aus (11.8), das $c_0^{(j)} \neq 0$ ergibt.

Danach betrachtet man die vorletzte Transformation ($i=j-1$), falls $j \geq 2$. Man erhält entsprechend der Gleichung

$$(*) \quad \xi^{r_{j-1}} + c_{r_{j-1}-1}^{(j-1)} \xi^{r_{j-1}-1} + \dots + c_m^{(j-1)} = 0$$

r_{j-1} linear unabhängige Lösungen mit den entsprechenden Aussagen über die

$$\sqrt[n]{\frac{1}{p_n^{(j-1)}} |v_n|}.$$

Wegen (11.15) haben nun die schon aufgezählten r_j linear unabhängigen Lösungen die Eigenschaft, hier den Grenzwert 0 zu liefern. Unsere algebraische Gleichung (*) hat mithin mindestens die r_j -fache Wurzel 0. Dann hat aber 0 genau die Ordnung r_j , wegen (11.18), das $c_{r_j}^{(j-1)} \neq 0$ ergibt. So kann man also die schon erhaltenen r_j Lösungen durch $r_{j-1} - r_j$ Lösungen (Klasse $j-1$) so ergänzen, daß r_{j-1} linear unabhängige Lösungen entstehen, deren Linearkombinationen die behaupteten Eigenschaften besitzen. Man betrachtet weiter die Transformation $i=j-2$, falls $j \geq 3$, und verfährt entsprechend So erhält man, bis zu $i=1$ analog fortfahrend, die volle Aussage des Satzes.

Die Voraussetzungen (11.14) bis (11.18) sind sicher in folgendem Falle gegeben: Es sei p_n ($n=0, 1, 2, \dots$) eine Folge positiver Zahlen mit den Eigenschaften

$$(11.20) \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} \rightarrow +\infty,$$

$$(11.21) \quad \frac{p_{n+1}^2}{p_n p_{n+2}} \rightarrow 1.$$

Für die Koeffizienten von (11.13) gelte mit reellen Zahlen k_v und komplexen Zahlen d_v ($v=0, 1, 2, \dots$)

$$(11.22) \quad f_{n,v} = \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{k_v} d_v (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty),$$

und dabei formal $k_v = -\infty$, falls $d_v = 0$. Speziell ist wegen $f_{n,0} \neq 0$, $f_{n,m} \neq 0$

$$(11.23) \quad d_0 \neq 0, \quad d_m \neq 0.$$

In diesem Falle setzen wir

$$(11.24) \quad q_1 = \max_{v=0}^{m-1} \frac{k_v - k_m}{m - v}, \quad r_1 = m$$

und

$$(11.25) \quad r_2 = \min \left\{ v \mid 0 \leq v < m, \frac{k_v - k_m}{m - v} = q_1 \right\},$$

ferner

$$(11.26) \quad p_n^{(1)} = p_n^{q_1}.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} f_{n,v} p_{n+v}^{q_1} &= \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{k_m} \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{\frac{k_v - k_m}{m-v} (m-v)} p_{n+v}^{q_1} d_v (1 + o(1)) \\ &= \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{k_m} p_{n+m}^{q_1} \left(\frac{p_{n+m}}{p_{n+v}} \right)^{\frac{k_v - k_m}{m-v} - q_1} d_v (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Mit

$$(11.27) \quad q_n^{(1)} = \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{k_m} p_{n+m}^{q_1} d_m$$

hat man so (11.14) für $i=1$ mit (11.17), (11.18), wobei sofort auch $c_v^{(1)} = 0$ für $v < r_2$ wegen (11.25) erkennbar ist.

Man setzt nun weiter, falls $r_2 > 0$,

$$(11.28) \quad q_2 = \max_{v=0}^{r_2-1} \frac{k_v - k_{r_2}}{r_2 - v}.$$

Dann ist wegen (11.24), (11.25)

$$(11.29) \quad q_2 < q_1.$$

Man bestimmt analog

$$(11.30) \quad r_3 = \min \left\{ v \mid 0 \leq v < r_2, \frac{k_v - k_{r_2}}{r_2 - v} = q_2 \right\},$$

$$(11.31) \quad p_n^{(2)} = p_n^{q_2}.$$

Dann wird

$$f_{n,v} p_{n+v}^{q_2} = \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{k_{r_2}} p_{n+r_2}^{q_2} \left(\frac{p_{n+r_2}}{p_{n+v}} \right)^{\frac{k_v - k_{r_2}}{r_2 - v} - q_2} d_v (1 + o(1)).$$

Mit

$$(11.32) \quad q_n^{(2)} = \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{k_{r_2}} p_{n+r_2}^{q_2} d_{r_2}$$

hat man so (11.14) für $i=2$ mit (11.17), (11.18). Dabei ist

$$\frac{k_v - k_{r_2}}{r_2 - v} - q_2 > 0 \quad (v > r_2)$$

zu beachten. Das folgt aus

$$k_v - k_m \leq q_1(m - v),$$

$$k_{r_2} - k_m = q_1(m - r_2),$$

was

$$k_v - k_{r_2} \leq q_1(r_2 - v),$$

und somit

$$\frac{k_v - k_{r_2}}{r_2 - v} \geq q_1 > q_2 \quad (v > r_2)$$

gibt. Wegen (11.30) ist sofort auch wieder $c_v^{(2)} = 0$ für $v < r_3$ erkennbar.

So erfährt man, falls $r_3 > 0$, weiter fort und erhält schließlich

$$q_1 > q_2 > \dots > q_j,$$

$$m = r_1 > r_2 > \dots > r_j > r_{j+1} = 0$$

und mit

$$\left. \begin{aligned} p_n^{(i)} &= p_n^{q_i} \\ q_n^{(i)} &= \left(\frac{p_{n+1}}{p_n} \right)^{r_i} p_{n+r_i}^{q_i} d_{r_i} \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, j)$$

die gewünschten Transformationen (11.14) mit den Eigenschaften (11.15) bis (11.18).

Speziell für

$$(11.33) \quad f_{nv} = (n+1)^{k_v} d_v(1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

kann man

$$(11.34) \quad p_n = n!$$

wählen, und (11.20), (11.21), (11.23) sind erfüllt. In diesem Spezialfalle stellt Satz 11.29 eine Verschärfung eines Satzes von KREUSER [11] und PERRON [9] dar.

12. Ein Konvergenzsatz. Kriterium

Wir knüpfen an die Abschnitte 1 bis 6, insbesondere an die Sätze 6.1, 6.2 an. Wir legen im folgenden die Voraussetzungen ①, ② von 6 zugrunde.

Zusätzlich fordern wir (vgl. Satz 6.1)

$$(12.1) \quad \sigma_n \tau_n \prod_{v=0}^{n-1} \frac{\alpha_{v2}^2 + \alpha_{v1}^2 \sigma_v \tau_v}{\alpha_{v1}^1} = 0,$$

$$(12.2) \quad |A_{n1}^1 x^1| \leq \tilde{\alpha}_{n1}^1 |x^1| \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

und für diese Konstanten $\tilde{\alpha}_{n1}^1 (\geq \alpha_{n1}^1)$

$$(12.3) \quad \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n1}^1}{\tilde{\alpha}_{n1}^1} > 0;$$

schließlich möge für jedes $m \geq 0$ und ε ($0 \leq \varepsilon < 1$) mit den Konstanten (3.4), (3.6) gelten

$$(12.4) \quad \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha_{n2}^1}{\alpha_{n1}^1} \frac{\rho_{m,n}^{(\varepsilon)}}{\sigma_n} < \infty.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt

Satz 12.5. *Setzt man für eine Lösung x_n von (1.5)*

$$v_n = (A_{01}^1)^{-1} \dots (A_{n-1,1}^1)^{-1} x_n^1 \in \mathfrak{G}^1 \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

so gilt stets mit einem $v \in \mathfrak{G}^1$

$$v_n \rightarrow v \quad (n \rightarrow \infty).$$

Es ist dabei $v=0$ genau dann, wenn x_n vom Typ II ist.

Zunächst zeigt mit (12.1) und ② der Satz 6.1, daß für eine Lösung vom Typ II $v_n \rightarrow 0$ gilt. — Ist andererseits x_n vom Typ I, so gilt — vgl. Satz 6.2 — für

$$w_n = (A_{01}^1)^{-1} \dots (A_{n1}^1)^{-1} A_{n2}^1 x_n^2$$

mit geeignetem m und ε die Abschätzung

$$(+) \quad |w_n| \leq (\alpha_{01}^1 \dots \alpha_{m-1,1}^1)^{-1} \frac{\alpha_{n2}^1}{\alpha_{n1}^1} \frac{\rho_{m,n}^{(\varepsilon)}}{\sigma_n} \prod_{v=m}^{n-1} \frac{\tilde{\alpha}_{v1}^1 + \alpha_2^1 \frac{\rho_{m,v}^{(\varepsilon)}}{\sigma_v}}{\alpha_{v1}^1} |x_m^1|$$

mit den Konstanten (12.2) aus

$$|x_{v+1}^1| \leq \tilde{\alpha}_{v1}^1 |x_v^1| + \alpha_{v2}^1 |x_v^2| \quad (v=m, \dots, n-1).$$

(+) zeigt nun mit (12.3), (12.4) die Konvergenz der Reihe mit den Gliedern

$$w_n = v_{n+1} - v_n,$$

also die Konvergenz der Folge v_n in $\mathfrak{G}^1$. Wegen ① existiert v mit $v_n \rightarrow v$. Es bleibt zu zeigen, daß v für eine Lösung vom Typ I nicht 0 ist. Das zeigt die

Abschätzung

$$|v_n| \prod_{v=0}^{n-1} \tilde{\alpha}_{v1}^1 \geq |x_n^1| \geq \prod_{v=0}^{n-1} \left(\alpha_{v1}^1 - \alpha_{v2}^1 \frac{\rho_{m,v}^{(e)}}{\sigma_v} \right) |x_m^1| > 0$$

zusammen mit (12.3), (12.4).

13. Beispiele und Anwendungen

A. Sind in (1.3)

$$(13.1) \quad \alpha_{n1}^1 = \alpha_1^1 > 0, \quad \alpha_{n1}^2 = \alpha_1^2, \quad \alpha_{n2}^1 = \alpha_2^1, \quad \alpha_{n2}^2 = \alpha_2^2$$

von n unabhängig, so kann (1.4) mit von n unabhängigem

$$(13.2) \quad \sigma_n = \sigma$$

genau dann erfüllt werden, wenn

$$(13.3) \quad \sigma > 0, \quad \alpha_1^1 - \alpha_1^2 \sigma > 0, \quad \alpha_2^1 - (\alpha_1^1 - \alpha_2^2) \sigma + \alpha_1^2 \sigma^2 \leq 0$$

möglich ist. Ein solches σ aber existiert genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

$$(13.4) \quad \alpha_1^1 - \alpha_2^2 = \alpha_2^1 = \alpha_1^2 = 0,$$

$$(13.5) \quad \alpha_1^1 - \alpha_2^2 > 0, \quad 4 \alpha_1^2 \alpha_2^1 \leq (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2.$$

Die stärkere für den dritten Existenzsatz benutzte und für Satz 4.2 sicher hinreichende Bedingung (6.4) bedeutet hier, daß

$$(13.6) \quad \alpha_2^1 - (\alpha_1^1 - \alpha_2^2) \sigma + \alpha_1^2 \sigma^2 < 0,$$

was mit $\sigma > 0$, $\alpha_1^1 - \alpha_1^2 \sigma > 0$ genau dann erfüllbar ist, wenn

$$(13.7) \quad \alpha_1^1 - \alpha_2^2 > 0, \quad 4 \alpha_1^2 \alpha_2^1 < (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2.$$

Von Interesse ist, abgesehen von (13.7) und dem trivialen Fall (13.4) noch der kritische Fall

$$(13.8) \quad \alpha_1^1 - \alpha_2^2 > 0, \quad 4 \alpha_1^2 \alpha_2^1 = (\alpha_1^1 - \alpha_2^2)^2.$$

Hier hat

$$(13.9) \quad \alpha_2^1 - (\alpha_1^1 - \alpha_2^2) \sigma + \alpha_1^2 \sigma^2 = 0$$

genau eine Wurzel $\sigma > 0$ (mit $\alpha_1^1 - \alpha_1^2 \sigma > 0$). (13.8), (13.9) geben

$$(13.10) \quad \alpha_1^2 \sigma = \alpha_2^1 \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{2} (\alpha_1^1 - \alpha_2^2).$$

Die in 3 definierten τ_n sind hier sämtlich 1 ($n=0, 1, 2, \dots$). Für die $\rho_{m,n}^{(e)}$ ($n=m, m+1, \dots$) gemäß (3.4), (3.6) hat man hier

$$\rho_{m,n+1}^{(e)} = \varphi(\rho_{m,n}^{(e)}) \quad (n \geq m)$$

mit der Funktion

$$\varphi(\xi) = \frac{\alpha_2^2 \xi + \alpha_1^2 \sigma}{\alpha_1^1 - \alpha_2^1 \frac{1}{\sigma} \xi}.$$

Setzt man

$$(13.11) \quad \vartheta = \frac{\sigma}{\alpha_2^1} (\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \sigma),$$

so wird für $k \geq \vartheta$ wegen (13.10) gerade

$$\varphi\left(1 - \frac{\vartheta}{k}\right) = 1 - \frac{\vartheta}{k+1}.$$

Bestimmt man also k durch

$$(13.12) \quad 1 - \frac{\vartheta}{k} = \varepsilon,$$

so wird

$$(13.13) \quad \rho_{m,n}^{(\varepsilon)} = 1 - \frac{\vartheta}{k+n-m} \quad (n \geq m).$$

Damit aber gilt in diesem Falle noch

$$(13.14) \quad \prod_{v=m}^n \frac{\alpha_2^2 + \alpha_1^2 \sigma}{\alpha_1^1 - \alpha_2^1 \frac{\rho_{m,v}^{(\varepsilon)}}{\sigma}} = \prod_{v=m}^n \left(1 + \frac{1}{k+v-m}\right)^{-1} = \frac{k}{k+n-m+1} \rightarrow 0.$$

Es bilden also auch in diesem Falle nach Satz 4.2 die Lösungen vom Typ II eine Untergruppe von $\mathfrak{L}$. Auch ist jedenfalls die im zweiten Existenzsatz benutzte Bedingung erfüllt.

B. MEIXNER und SCHÄPFKE [22] betrachten dreigliedrige lineare Rekursionen

$$y_{n+1} - D_n y_n + y_{n-1} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

und erhalten für

$$|D_n| \geq 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

eine Aufspaltung in Typen, entsprechende Abschätzungen und Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen. Diese Theorie kann verallgemeinert und unter die Überlegungen der Abschnitte 1 bis 6 subsumiert werden.

Wir betrachten

$$(13.15) \quad y_{n+2} = D_n y_{n+1} + E_n y_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

und schreiben dies in der Form

$$(13.16) \quad \begin{pmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_n & E_n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Wir fordern

$$(13.17) \quad 0 < (|D_n| - 1) \geq |E_n|.$$

Dann ist mit

$$\begin{aligned} \alpha_{n1}^1 &= |D_n|, & \alpha_{n2}^1 &= |E_n|, & \sigma_n &= 1, \\ \alpha_{n1}^2 &= 1, & \alpha_{n2}^2 &= 0, \end{aligned}$$

sinngemäß (1.3), (1.4) gegeben und man hat die Typeneinteilung

$$(I) \quad |y_{n+1}| > |y_n| \quad (n \geq m),$$

$$(II) \quad |y_{n+1}| \leq |y_n| \quad (n \geq 0)$$

entsprechend Satz 1.7. (1.6) gibt für den Typ I schärfer

$$(13.18) \quad |y_{n+2}| - |y_{n+1}| \geq (|D_n| - 1)(|y_{n+1}| - |y_n|),$$

was nach sich zieht, daß z.B. im Falle $|D_n| \geq 2$ die Lösungen vom Typ I nicht beschränkt sind. Daher bilden in diesem Falle sicher die Lösungen vom Typ II eine Untergruppe von Ω .

Für die Abschätzungen von 3 hat man hier die Funktionen

$$f_n(\xi) = \frac{1}{|D_n| - |E_n| \xi}$$

und

$$g_n(\xi) = \frac{|E_n|}{|D_n| - \xi}$$

zu betrachten und damit die entsprechenden $\rho_{m,n}^{(e)}$ bzw. τ_n zu bilden. Man erhält hierfür offenbar abbrechende bzw. unendliche Kettenbrüche.

Ist $E_{n_0} = 0$, n_0 minimal, so gilt

$$y_{n_0+2} = D_{n_0} y_{n_0+1};$$

ist also $y_{n_0+1} \neq 0$, so wird $|y_{n_0+2}| > |y_{n_0+1}|$, mithin y_n Lösung vom Typ I. Für eine Lösung vom Typ II ist also $y_n = 0$ ($n \geq n_0 + 1$). Umgekehrt kann man $y_{n_0+1} = 0$ und y_{n_0} beliebig annehmen und daraus mit (13.15) eine Lösung vom Typ II mit entsprechend beliebigem y_0 eindeutig bestimmen. In diesem Falle gilt also sicher: $\Omega = \Omega^I \dot{+} \Omega_{II}$.

Ist $E_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), so kann für

$$\frac{1}{|D_n| - |E_n|} \leq \omega < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Satz 6.10 herangezogen werden, um $\Omega = \Omega^I + \Omega_{II}$ zu erhalten.

Gibt es kein solches ω , so liefert Satz 5.5 noch die Existenz mindestens einer Lösung vom Typ II für jedes y_0 . Die dort gemachten Voraussetzungen

sind offenbar erfüllt. Für die Untergruppeneigenschaft muß gegebenenfalls Satz 4.2, etwa unter Benutzung von 13.A, oder, für $|D_n| \geq 2$, (13.18) herangezogen werden.

Ein Existenzbeweis unter Verwendung von Kettenbrüchen findet sich im angegebenen Spezialfall bei MEIXNER-SCHÄFKE [22]. Für die Eindeutigkeit wird (13.18) benutzt.

Eine andere Möglichkeit zur Behandlung von (13.15) gibt die Transformation

$$(13.18) \quad y_n = \left(\prod_{v=0}^{n-1} D_v \right) u_n \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Man erhält

$$(13.19) \quad u_{n+2} = u_{n+1} + d_n u_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

mit

$$(13.20) \quad d_n = \frac{E_n}{D_n D_{n+1}}.$$

Insbesondere für

$$(13.21) \quad |D_n| \geq 2, \quad |E_n| \leq 1,$$

sicher also im Falle der bei MEIXNER-SCHÄFKE [22] betrachteten Rekursion wird

$$(13.22) \quad |d_n| \leq \frac{1}{4}.$$

In diesem Falle kann unsere Theorie in einer anderen Weise angewandt werden.

C. (13.19) ist Spezialfall von

$$(13.23) \quad u_{n+2} = (1 + e_n) u_{n+1} + d_n u_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

das unter entsprechenden Voraussetzungen von SCHÄFKE [23], [24] untersucht wird. Auch diese Überlegungen können verallgemeinert und unter die Theorie der Abschnitte 1 bis 6 und 12 subsumiert werden.

Wir betrachten allgemeiner, wie MENNICKEN [21],

$$(13.24) \quad u_{n+2} = (1 + w + e_n) u_{n+1} + (-w + d_n) u_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

und nehmen w als komplexe Zahl mit

$$(13.25) \quad |w| < 1$$

an. Die Gleichung

$$\xi^2 = (1 + w) \xi - w$$

hat nun die Wurzeln 1 und w . Entsprechend schreiben wir (13.24)

$$(13.26) \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w + d_n & 1 + w + e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

und transformieren

$$(13.27) \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{pmatrix} x_n, \quad x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix}.$$

Es wird

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w+d_n & 1+w+e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{d_n+e_n}{1-w} & \frac{d_n+w e_n}{1-w} \\ -\frac{d_n+e_n}{1-w} & w - \frac{d_n+w e_n}{1-w} \end{pmatrix},$$

also (13.26) mit (13.27) zu

$$(13.28) \quad \begin{cases} x_{n+1} = A_n x_n & (n=0, 1, 2, \dots), \\ A_n = \begin{pmatrix} 1 + \frac{d_n+e_n}{1-w} & \frac{d_n+w e_n}{1-w} \\ -\frac{d_n+e_n}{1-w} & w - \frac{d_n+w e_n}{1-w} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Wir fordern nun

$$(13.29) \quad 0 < 1 - 2 \left| \frac{d_n+e_n}{1-w} \right| \geq |w| + 2 \left| \frac{d_n+w e_n}{1-w} \right|,$$

im Falle (13.19) also (13.22). Dann bedeutet dies gerade (1.4) mit

$$(13.30) \quad \begin{cases} \alpha_{n1}^1 = 1 - \left| \frac{d_n+e_n}{1-w} \right|, & \alpha_{n2}^1 = \left| \frac{d_n+w e_n}{1-w} \right|, \\ \alpha_{n1}^2 = \left| \frac{d_n+e_n}{1-w} \right|, & \alpha_{n2}^2 = |w| + \left| \frac{d_n+w e_n}{1-w} \right|, \\ \sigma_n = 1. \end{cases}$$

Entsprechend hat man die Typeneinteilung gemäß Satz 1.7.

Fordert man schärfer

$$(13.31) \quad \max \left(\left| \frac{d_n+e_n}{1-w} \right|, \left| \frac{d_n+w e_n}{1-w} \right| \right) \leq \delta = \frac{1}{4}(1 - |w|),$$

so kann entsprechend 13, A

$$\alpha_1^1 = 1 - \delta, \quad \alpha_2^1 = \alpha_1^2 = \delta, \quad \alpha_2^2 = |w| + \delta$$

gewählt werden. In diesem Falle bilden also sicher die Lösungen vom Typ II eine Untergruppe $\mathfrak{L}_{II}$ von $\mathfrak{L}$ mit $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^I + \mathfrak{L}_{II}$ wegen Satz 5.9.

Die Lösungen vom Typ II konvergieren sicher gegen 0 wegen

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \delta + (|w| + \delta) = 1 - 2\delta < 1$$

gemäß (3.29).

Hat man noch schärfer

$$(13.32) \quad \max \left(\left| \frac{d_n + e_n}{1 - w} \right|, \left| \frac{d_n + w e_n}{1 - w} \right| \right) \leq \delta' < \delta = \frac{1}{4}(1 - w),$$

so wird

$$(13.33) \quad \frac{\delta' + (|w| + \delta')}{1 - 2\delta'} = \omega < 1,$$

und mit (6.4) sind die Voraussetzungen des Satzes 6.10 gegeben.

Satz 5.9 und Satz 6.10 waren zugleich mit entsprechenden konstruktiven Verfahren verbunden.

Im folgenden fordern wir zusätzlich

$$(13.34) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (|e_n| + |d_n|) < \infty.$$

Dann sind mit (13.30) und

$$(13.35) \quad \tilde{\alpha}_{n1}^1 = 1 + \left| \frac{d_n + e_n}{1 - w} \right|$$

die Voraussetzungen von 12, insbesondere (12.1) bis (12.4) gegeben. Es gilt dann

Satz 13.36. *Jede Lösung x_n von (13.28) ist konvergent, also auch jede Lösung u_n von (13.24). Dabei gilt für Lösungen beider Typen*

$$x_n^2 = \frac{u_n - u_{n+1}}{1 - w} \rightarrow 0.$$

Man hat ferner

$$x_n^1 = \frac{u_{n+1} - w u_n}{1 - w} \rightarrow 0$$

und äquivalent $u_n \rightarrow 0$ genau dann, wenn x_n vom Typ II ist. Für eine Lösung vom Typ I gilt

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

für eine Lösung vom Typ II, falls $u_n \neq 0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow w.$$

Die letzten Aussagen folgen dabei schon ohne (13.24), allein mit $e_n \rightarrow 0$, $d_n \rightarrow 0$ auf Grund von Satz 10.5. Daß auch für eine Lösung vom Typ I $x_n^2 \rightarrow 0$ strebt, ergibt z. B. Satz 3.16. Die verbleibenden Konvergenzaussagen liefert Satz 12.5.

Zugleich sind hiermit Aussagen über die *Konvergenzgüte* und Möglichkeiten zur *Konvergenzverbesserung* für die Praxis gegeben. Für eine Lösung vom Typ II

gilt

$$(13.37) \quad |x_n^1| \leq |x_n^2| \leq \prod_{v=0}^{n-1} \left[|w| + \left| \frac{e_v + d_v}{1-w} \right| + \left| \frac{d_v + w e_v}{1-w} \right| \right] |x_0^2|.$$

Für eine Lösung vom Typ I ist nach Abschnitt 12 die Folge

$$(13.38) \quad \prod_{v=0}^{n-1} \left(1 + \frac{d_v + e_v}{1-w} \right)^{-1} x_n^1 = v_n$$

im allgemeinen rascher konvergent als die Folge x_n^1 . Es ist nämlich

$$w_n = v_{n+1} - v_n$$

mit einer geeigneten Konstanten γ durch

$$|w_n| \leq \gamma \alpha_n^1 \rho_{m,n}^{(e)}$$

abschätzbar. Ist etwa mit $k_1 > 1$, $k_2 > 1$

$$(13.39) \quad |d_n + e_n| = O(n^{-k_1}), \quad |d_n + w e_n| = O(n^{-k_2}),$$

so wird demnach (vgl. Satz 3.17)

$$(13.40) \quad |v_{n+1} - v_n| = O(n^{-(k_1+k_2)}),$$

während nach (11.38) nur

$$(13.41) \quad |x_{n+1}^1 - x_n^1| = O(n^{-k_1})$$

gilt. Hierin liegt z. B. der Ursprung der Konvergenzverbesserungen bei SCHÄFKE [23], SCHÄFKE, EBERT und GROH [24] und MENNICKEN [21].

Literatur

- [1] POINCARÉ, H.: Sur les equations lineaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. Amer. J. math. **7**, 213–217, 237–258 (1885).
- [2] PERRON, O.: Über einen Satz des Herrn Poincaré. J. reine angew. Math. **136**, 17–37 (1909).
- [3] — Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen. Math. Ann. **66**, 446–487 (1909).
- [4] — Über die Poincarésche lineare Differenzengleichung. J. reine angew. Math. **137**, 6–64 (1910).
- [5] — Über das Verhalten der Integrale linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Jahresber. deutsch. Math.-Ver. **19**, 129–137 (1910).
- [6] — Über lineare Differenzengleichungen. Acta math. **34**, 109–137 (1910).
- [7] — Zur Theorie der Summengleichungen. Math. Z. **8**, 159–170 (1920).
- [8] — Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen. Math. Ann. **84**, 1–15 (1921).
- [9] — Über lineare Differenzengleichungen und eine Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten. Math. Z. **72**, 16–24 (1959).
- [10] ERB, TH.: Über die asymptotische Darstellung der Integrale linearer Differenzengleichungen durch Potenzreihen. Dissertation (München) Pirmasens 1913.
- [11] KREUSER, P.: Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Dissertation (Tübingen) Borna-Leipzig 1914.

- [12] HORN, J.: Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. Math. Ann. **53**, 177—192 (1900).
- [13] FORD, W. B.: Sur les equations lineaires aux differences finies. Ann. mat. pura appl. (3) **13**, 263—328 (1907).
- [14] — On the integration of the homogeneous linear difference equation of second order. Trans. Amer. math. Soc. **10**, 319—336 (1909).
- [15] JEWGRAFOV, M. A.: Ein neuer Beweis des Perronschen Satzes. Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., Ser. Mat. **17**, 77—82 (1953) [Russisch].
- [16] FREĬMAN, G. A.: Über die Sätze von Poincaré und Perron. Uspechi Mat. Nauk. N. S. **12** no. 3 (75), 241—246 (1957) [Russisch].
- [17] MESCHKOWSKI, H.: Differenzengleichungen. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1959.
- [18] GELFOND, A. O., u. I. M. KUBENSKAJA: Über den Perronschen Satz in der Theorie der Differenzengleichungen. Izvestiya Akad. Nauk. SSSR., Ser. Mat. **17**, 83—86 (1953) [Russisch].
- [19] AJANČIĆ, S.: Über den Perronschen Satz in der Theorie der linearen Differenzengleichungen. Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. **13**, 47—56 (1959).
- [20] JEWGRAFOV, M. A.: Das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser Differenzengleichungen. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **121**, 26—29 (1958) [Russisch].
- [21] MENNICKEN, R.: Zur Theorie Poincaré-Perronscher Differenzengleichungen. Archiv der Math. (im Druck).
- [22] MEIXNER, J., u. F. W. SCHÄFKE: Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954.
- [23] SCHÄFKE, F. W.: Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieschen Differentialgleichung. I. Num. Math. **3**, 30—38 (1961).
- [24] —, R. EBERT u. H. GROH: Ein Verfahren zur Berechnung des charakteristischen Exponenten der Mathieschen Differentialgleichung. II. Num. Math. **4**, 1—7 (1962).
- [25] PINCHERLE, S.: Sur la génération des systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. Acta math. **16**, 341—363 (1892).
- [26] LETTENMEYER, F.: Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differenzengleichungen und Systemen von solchen. Sitzungsberichte München 1930, 73—100.

5 Köln, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. Juni 1964)