Werk

Label: Periodical issue

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0086|log30

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mathematische Zeitschrift

Herausgegeben von **H. Wielandt**, Tübingen

unter Mitwirkung von **B. Eckmann**, Zürich
E. Heinz, München
R. Nevanlinna, Helsinki
K. Zeller, Tübingen

Wissenschaftlicher Beirat A. E. Ingham, Cambridge
H. Kneser, Tübingen
W. Magnus, New York
O. Perron, München
G. Pickert, Gießen

Band 86 · Heft 3 · 1964

Springer-Verlag
Berlin · Göttingen · Heidelberg · New York

Niedersächsische Staats- u
Universitätsbibliothek
Göttingen

Math. Z. Abgeschlossen am 30. November 1964 A 21 267 E

10. Dez. 1964

Die **Mathematische Zeitschrift**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

*

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind, Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedrucken Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule
E. Heinz, 8 München, Schellingstraße 2—8
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Aurorankatu 16-20 C, Inst. f. angew. Math.
H. Wielandt, 74 Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b
K. Zeller, 74 Tübingen, Math. Inst. d. Universität

*

Springer-Verlag OHG

1 Berlin 31 (Wilmersdorf), Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301,
Fernschreibnummer 01-83319,
69 Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 49101, Fernschreibnummer 04-61723

FOULSER, D.A.
Math. Zeitschr. 86, 191—204 (1964)

Solvable flag transitive affine groups*

By
DAVID A. FOULSER

1. Introduction

Let π be a finite affine plane of order n. A collineation group G of π is defined to be *flag transitive* on π if G is transitive on the incident point-line pairs, or *flags*, of π. A flag transitive group G is *sharply flag transitive* on π if G_F, the subgroup of G fixing a flag F of π, is the identity group.

HUPPERT [*15*] has classified all finite, solvable, doubly transitive permutation groups. He has shown that, with a finite number of exceptions, such groups are subgroups of the full collineation group of a finite Desarguesian affine line (these subgroups are determined explicitly in [*10*; Proposition 15.3]). This note extends HUPPERT's classification to include solvable flag transitive affine groups, with the following similar result (2.1):

Theorem. *With a finite number of exceptions, a solvable flag transitive group of a finite affine plane is a subgroup of a one-dimensional Desarguesian affine group.*

The exceptions consist of three groups in addition to HUPPERT's 13 exceptional doubly transitive groups. The proof is an adaptation of HUPPERT's proof with the addition of the information provided by Lemma 3.1. Lemma 3.1 seems essential to the proof of Theorem 2.1, and it enables some simplification of HUPPERT's proof in the doubly transitive case. Therefore, it seems worthwhile to include HUPPERT's theorem in the proof of Theorem 2.1.

The proof of Theorem 2.1 does not indicate which subgroups of the one-dimensional affine groups are flag transitive groups. Moreover, the proof yields no information about the existence of non-Desarguesian flag transitive affine planes. Theorem 2.1 does enable the explicit description of the sharply flag transitive affine groups (Corollary 2.2). In fact, these groups are exactly the sharply flag transitive groups of the Desarguesian affine planes. It is not known whether sharply flag transitive non-Desarguesian affine planes exist.

In sections 5 and 6, three non-Desarguesian flag transitive affine planes are discussed, namely the nearfield plane of order 9 and two planes of order 25 (previously unknown to the author). All three planes have solvable flag transitive collineation subgroups which also act flag transitively on the corresponding Desarguesian affine planes.

* Part of this research was supported by a NATO Fellowship at Oxford University.

2. Solvable flag transitive affine groups

Let G be a flag transitive collineation group of a finite affine plane π of order n. A. WAGNER [18] has shown that π is a translation plane so that $n=p^r$ for some prime p. Hence π can be represented by a vector space V of dimension $f=2r$ over $GF(p)$; that is, the points of π can be represented by the elements of V, and the lines of π can be represented by the cosets of certain r-dimensional subspaces of V over $GF(p)$. WAGNER also has shown that G contains T, the translation group of π. Since T is a normal subgroup of G which permutes the points of π transitively, it follows that $G=T\cdot G_0$ is the split extension of T by G_0, the subgroup of G fixing the point 0 of V. Moreover, G_0 is a group of linear transformations of V over $GF(p)$.

Next, let G be a solvable doubly transitive permutation group of a finite set S. Let T be a minimal normal abelian subgroup of G, so that T is an elementary abelian group of order p^f, for some prime p and integer f. Since G is doubly transitive and hence primitive on S, it follows that T is transitive on S and that $|T|=|S|=p^f$. Thus $G=T\cdot G_0$ is the split extension of T by G_0, the subgroup of G fixing a point of S. Moreover, it is possible to make S into a vector space V of dimension f over $GF(p)$ by inducing the group addition of T in V. Then T and G_0 act as the group of translations of V, and as a group of linear transformations of V over $GF(p)$, respectively.

Finally, let the vector space V of dimension f over $GF(p)$ be represented by $GF(p^f)$. Let ω be a primitive root of $GF(p^f)$, and let α be the automorphism of $GF(p^f)$ of order f defined by $\alpha(x)=x^p$. The linear transformations of V over $GF(p)$, $x\to\omega x$, and $x\to\alpha(x)$ will be denoted by ω and α, respectively. If T is the translation group of V, then $\langle T, \omega, \alpha\rangle$ is the full collineation group of V regarded as the Desarguesian affine line of order p^f.

2.1. Theorem. *Let G be a solvable flag transitive collineation group of a finite affine translation plane π of order $n=p^r$. Then with a finite number of exceptions, G is isomorphic to a subgroup of the semilinear affine group $\langle T, \omega, \alpha\rangle$.*

The exceptions are as follows:

1. A total of thirteen exceptional groups, ten of which are doubly transitive, occur on the Desarguesian planes of orders 3, 5, 7, 11, and 23. Each group can be mapped homomorphically either onto A_4 or onto S_4, the alternating and symmetric groups, respectively, of degree 4.

2. Three exceptional groups, all doubly transitive, occur on the nearfield plane of order 9.

The exceptional flag transitive groups are listed in [10; Table 2 and Lemma 8.1] and in section 5 below; cf. [15; pp. 126–127].

2.2. Corollary. *Let G be a sharply flag transitive collineation group of π. Then $p=2$, and G is isomorphic to a group of the form $T\cdot\langle\omega^d, \omega^e\alpha^s\rangle$, where d, e, and s are positive integers satisfying the following conditions:*

1. $2r \equiv 0 \pmod{s}$ *and* $n+1 \equiv 0 \pmod{2r/s}$;
2. *The primes of* $2r/s$ *divide* 2^s-1;
3. $d=\dfrac{2r}{s}(n-1)$;
4. $0 \leqq e<d$, *and* $e\left(\dfrac{2^{2r}-1}{2^s-1}\right) \equiv 0 \pmod{d}$;
5. $(2r/s, e)=1$.

Conversely, every group of this form is a sharply flag transitive group of a Desarguesian affine plane.

2.3. Theorem (HUPPERT [*15*]). *Let G be a solvable doubly transitive permutation group of degree p^f. Then with a finite number of exceptions, G is isomorphic to a subgroup of the semilinear affine group $\langle T, \omega, \alpha\rangle$.*

The exceptional groups are exactly the thirteen doubly transitive exceptional groups of Theorem 2.1; they occur for f even and $p^{f/2}=3$, 5, 7, 9, 11 and 23.

3. Proof of Theorems 2.1 and 2.3

If A and B are subgroups of a group X, let $\mathfrak{C}_A(B)$, $\mathfrak{N}_A(B)$, and $\mathfrak{Z}(B)$ denote the centralizer and normalizer of B in A, and the center of B, respectively. Further, let $\langle \eta, \nu, \ldots\rangle$ denote the subgroup generated by the elements $\eta, \nu, \ldots$ of X; let $|X|$ denote the order of X. If a, b and c are integers and p is a prime, let $b \mid c$ denote that $c \equiv 0 \pmod{b}$, and let $p^a \| c$ denote that $p^a \mid c$ but $p^{a+1} \nmid c$.

The proof of Theorems 2.1 and 2.3 is essentially the same as HUPPERT's proof [*15*], with the addition of the information provided by the following lemma.

3.1. Lemma ([*3*]; Corollary 2, p. 358 and [*5*]). *Let p be a prime and t a positive integer. Then there exists a prime u which satisfies the following conditions:*

1. $u \mid p^t-1$; 2. $u \nmid t$; 3. $u \nmid p^k-1$, *for* $0<k<t$;

except in the following cases:

(i) $t=2$ *and* $p+1=2^x$ *for some* x; (ii) $p^t=64$.

As before, let V be a vector space of dimension f over $GF(p)$, and let $G=T \cdot H$, with $H=G_0$, be either a solvable flag transitive collineation group of an affine plane π of order $n=p^{f/2}$ (represented by V), or a solvable doubly transitive permutation group of V.

3.2. Lemma. *If there exists an irreducible normal abelian subgroup A of H, then G is isomorphic to a subgroup of $\langle T, \omega, \alpha\rangle$.*

Proof. Let $GL(V)$ be the group of automorphisms of V. By SCHUR's lemma [*16*; p. 271], $\mathfrak{C}_{GL(V)}(A)$ is the multiplicative group of a field K, which includes A. Since A is irreducible, $K=GF(p^f)$, and hence $\mathfrak{C}(A)$ is conjugate in $GL(V)$ to $\langle\omega\rangle$. Assume $\mathfrak{C}(A)=\langle\omega\rangle$. Then $H \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{C}(A))=\langle\omega, \alpha\rangle$, by [*10*; Lemma 13.5], and hence $G \subseteq \langle T, \omega, \alpha\rangle$ (cf. [*15*; Hilfssatz 2]).

It remains to consider the case in which every normal abelian subgroup of H is reducible. If G is a flag transitive group, then $p^{f/2}+1 \mid\mid H|$, since H is transitive on the $p^{f/2}+1$ lines of π which contain 0. If G is a doubly transitive group, then $p^f-1 \mid\mid H|$. Therefore except in cases (i) and (ii), there exists a prime u satisfying conditions (2) and (3) of Lemma 3.1 for $t=f$, such that $u \mid\mid H|$. The existence of u together with HUPPERT's proof [*15*] imply that $p^{f/2}=5, 9, 11$, or 23. Finally, the cases (i) and (ii) can be treated separately.

3.3. Proposition. *Let H contain no irreducible abelian normal subgroup. Further, let H contain an element β of order u, where u is a prime which satisfies the conditions* (2) *and* (3) *of Lemma 3.1, with $t=f$. Then f is even (let $f=2r$). Moreover, $p^r=5, 9, 11$, or 23.*

Proof. The proof is a consequence of the following lemmas.

3.4. Lemma. *H is an irreducible and primitive group of linear transformations.*

Proof. V is irreducible under β, from condition (3). If V is imprimitive under H, then $V=V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, where $S=\{V_i\}$ $(1 \leqq i \leqq k)$ is a set of two or more subspaces of V which are permuted by H and hence by β [*8*; p. 536]. Moreover, β acts transitively on S, so $|V_1|=\cdots=|V_k|$, $k|f$, $u=k$, and hence $u|f$, contrary to condition (2).

Let $A \neq 1$ be a maximal abelian normal subgroup of H; A is reducible by assumption. Since H is irreducible and primitive, it follows from [*8*; Theorem 1 and 2] that A completely decomposes V into t equivalent irreducible subspaces, $V_1, \ldots, V_t$, where $t>1$ and $t|f$ (also see [*15*; Hilfssatz 3]). The equivalence of the representations implies that A acts faithfully on each V_i. From SCHUR's lemma [*16*, p. 271], A operates on each V_i as scalar multiplication by elements of $GF(p^k)$, where $kt=f$; thus in particular, A is cyclic and $|A| \mid p^k-1$. Moreover, A is contained in no proper subfield of $GF(p^k)$. Therefore, each V_i and hence V is a vector space over $GF(p^k)$, under the action of A. It follows that $\mathfrak{C}_H(A)$ and $H=\mathfrak{N}_H(A)$ operate on V as groups of linear and semi-linear transformations, respectively, over $GF(p^k)$. Thus $[H\colon \mathfrak{C}_H(A)]$ divides k, and so condition (2) implies $\beta \in \mathfrak{C}_H(A)$ and $\beta \notin A$ (cf. [*15*; Schritt 4, p. 135]). Hence $\mathfrak{C}_H(A) \neq A$.

Since A is maximal, $\mathfrak{C}_H(A)$ is a non-abelian normal subgroup of H. Therefore, there exists a minimal non-abelian subgroup N of $\mathfrak{C}_H(A)$ which is normal in H. Then from [*14*; Hilfssatz I and II, p. 486], N is a nilpotent q-group of class 2, for some prime q, $N' \subseteq \mathfrak{Z}(N) \subseteq A$, $q \mid p^k-1$, and $W=N/\mathfrak{Z}(N)$ is an elementary abelian group of order q^{2m}, for some integer m. Note that $q \neq u$, by condition (3). Moreover, from [*14*; Hilfssatz III.2], every faithful, absolutely irreducible representation ρ of N has degree q^m. This last fact implies the following result.

3.5. Lemma. *$q^m \mid t$.*

Proof. N is a group of linear transformation of V over $GF(p^k)$. Since $q \neq p$, there exists a finite extension field K of $GF(p^k)$ over which V is completely reduced by N to a sum of absolutely irreducible subspaces W_i. Then the repre-

sentation ρ_i of N on W_i is faithful, as follows. If $M \neq 1$ is the kernel of ρ_i in N, then $M \cap \mathfrak{Z}(N) \neq 1$, (e.g., [*20*; Theorem 14, p. 144]). However, $\mathfrak{Z}(N) \subseteq A$ and hence ρ_i maps $\mathfrak{Z}(N)$ faithfully onto a group of scalar transformations of W_i. Thus, $M=1$. Therefore, the degree of ρ_i is q^m for each i, and hence $q^m \mid t$.

3.6. Lemma. *$f=q^m$, $u=q^m+1$, and $q=2$.*

Proof. Since β is in $\mathfrak{C}_H(A)$, β centralizes $\mathfrak{Z}(N)$ and hence acts as a non-trivial automorphism of $W=N/\mathfrak{Z}(N)$. For if β acts trivially on W, then from [*14*; Hilfssatz II.2], β centralizes N. But the centralizer of β is cyclic from SCHUR's lemma and the irreducibility of β, while N has class 2.

Now let W_1 be an irreducible subspace of W under β, which has no non-zero points fixed by β. W_1 exists, since $u \neq q$ implies W is completely reducible under β. If $|W_1|=q^b$ for some b, then $u \mid q^b-1$. Moreover, conditions (1) and (3) imply $f \mid u-1$. Further, $q^m \mid f$, so $q^m \mid u-1$ and hence $m<b \leqq 2m$. Let $u=hq^m+1$ and $q^b=gu+1$, for positive integers g and h. Then $q^b=g(hq^m+1)+1=ghq^m+g+1$. Since $m<b$, $q^m \mid g+1$, and hence $g \geqq q^m-1$. Therefore, $q^b \geqq (q^m-1)(q^m+1)+1=q^{2m}$. Since $b \leqq 2m$, it follows that $b=2m$, $h=1$, $u=q^m+1$, and $f=q^m$. Since u is prime, $q=2$, and hence f is even. Note that $k=1$ and hence H centralizes A.

3.7. Corollary. *W is irreducible under β, and the holomorph of β over W is a Frobenius group.*

3.8. Corollary. *V is absolutely irreducible under N.*

The situation described in the hypothesis of Proposition 3.3 has been reduced to HUPPERT's case (A) with $q=2$. We proceed as in [*15*; Schritt 3, p. 133], recalling that $p^{f/2}+1 \mid\mid H|$.

Since N is irreducible and A is maximal, SCHUR's lemma implies $\mathfrak{C}_H(N)=A$. Further, $\mathfrak{C}_H(\mathfrak{Z}(N))=H$ since H centralizes A. Therefore, [*15*; Hilfssatz II.2 and 3] implies that $\mathfrak{C}_H(W)/A$ is isomorphic to a subgroup of the direct product of $\mathfrak{Z}(N)$ with itself $2m$ times, and $H/\mathfrak{C}_H(W)$ is isomorphic to a subgroup of the symplectic group $C(2m, 2)$ of degree $2m$ over $GF(2)$. Let $|\mathfrak{Z}(N)|=2^j$. Then [*15*; Hilfssatz I.5] implies $j=1$ or 2 and $2^j \mid p-1$. From [*4*; p. 147], $|C(2m, 2)| = 2^{m^2} \prod_{i=1}^{m} (2^{2i}-1)$. Therefore $|H|=|H/\mathfrak{C}_H(W)| \cdot |\mathfrak{C}_H(W)/A| \cdot |A|$, and hence p and m satisfy the condition:

$$p^{2^{m-1}}+1 \mid 2^{m^2+2jm}(p-1)\prod_{i=1}^{m}(2^{2i}-1). \tag{3.9}$$

If $m=1$, then $p+1 \mid 48$, so that $p=5$, 11 or 23 (if $p=3$ or 7 then u does not exist). If $m \neq 1$, then $2 \| p^{2^{m-1}}+1$, so

$$p^{2^{m-1}}+1 \mid 2\prod_{i=1}^{m}(2^{2i}-1).$$

In particular, if $m=2$ then $p=3$ and $p^{f/2}=9$. Define v to be the maximum integer such that $3^v \leqq p$; then $v \geqq 1$. Since $2(2^2-1)(2^4-1)(2^6-1)<3^8$ and since $2^3<3^2$, it follows from $m \geqq 3$ that $v2^{m-1}<(2/3)(m^2+m)$, so that $m \leqq 5$,

$v=1$, and $p=3$, 5, or 7. Since $u=2^m+1$ is a prime, it follows that $m=4$. But if $p=3$, 5, or 7 and $m=4$, then $(p^8+1, 3\cdot 5\cdot 7)=1$, and hence $p^8+1 \nmid 2\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 17$. Therefore no cases which satisfy (3.9) occur for $m=4$. This completes the proof of Proposition 3.3.

From Proposition 3.3 and Lemmas 3.1 and 3.2, if G is a solvable group which is doubly transitive of degree p^f or flag transitive on a plane of order $p^{f/2}$, and if G is not contained in the appropriate affine group $\langle T, \omega, \alpha\rangle$, then one of the following cases applies:

1. $f=2$, $p=5$, 11, or 23;
2. $f=2$, $p+1=2^x$;
3. $p^f=3^4$;
4. $p^f=64$.

Cases 1 and 2 can be discussed together. Since $f=2$, H is a collineation group of the Desarguesian affine plane π of order p. Let ρ be the homomorphism of H into the collineation group of L_∞, the line at infinity of π. Then $\rho(H)$ is transitive on L_∞. From [*9*; § 260, p. 285] and [*17*; pp. 209–210], it follows that since $G \nleq \langle T, \omega, \alpha\rangle$, $\rho(H)$ is isomorphic to A_4 or S_4, the alternating and symmetric groups, respectively, of degree 4, and $p=3$, 5, 7, 11, or 23. Moreover, it is not difficult to decide which of the groups $G=T\cdot H$ that satisfy $\rho(H)\cong A_4$ or S_4, are actually doubly transitive or flag transitive groups of π (see [*10*; Lemma 8.1 and Table 2] for a list of these groups; also see [*15*; section 4]).

3.10. Proposition. *The exceptional solvable flag transitive and doubly transitive groups of degree* 3^4 *occur as collineation groups of* π, *the nearfield plane of order* 9.

Proof. The existence of three exceptional solvable flag transitive and doubly transitive groups of π is discussed in section 5 (Proposition 5.3 and Fig. 1). HUPPERT's proof [*15*; section 3] of the uniqueness of these groups in the doubly transitive case applies to the flag transitive case as well. Alternatively, uniqueness in the flag transitive case follows from the existence of exactly two translation planes of order 9 [*11*; Appendix II], and from the description of the flag transitive groups of each (section 5 below and [*10*; Theorem 1, section 12]).

Case 4 can be eliminated as follows. If G is doubly transitive on V, then H is transitive on the non-zero points of V, and hence V is irreducible and primitive under H. Applying the general theory as far as possible, we note that $|A|=3$ or 7, and in either case $\mathfrak{C}_H(A)\neq A$. The prime q divides 6, so $q=3$, $|A|=3$, and $|N|=27$. H contains an element γ of order 7, which must centralize N, since it must centralize $N/\mathfrak{Z}(N)$ and $\mathfrak{Z}(N)$ by [*14*; Hilfssatz II.2 and 3, p. 488]. Since $\mathfrak{Z}(N)=A$, $\langle A, \gamma\rangle$ is an irreducible cyclic group of order 21 which is centralized by N, and yet whose centralizer is cyclic by SCHUR's lemma.

The flag transitive part of case 4 can be eliminated by noting that π is the Desarguesian plane of order 8 [*12*] and that no exceptional solvable flag transitive groups occur on π [*10*; Theorem 1].

4. Proof of Corollary 2.2

Let $G=T\cdot H$ with $H=G_0$, be a sharply flag transitive collineation group of an affine translation plane π of order $n=p^r$. Then $|G|=n^2(n+1)$ implies there exists an element γ of order 2 in G. Either γ is an elation of π or γ fixes a square-root subplane of π [*13*; Theorem 20.9.7]. Since γ fixes no flag of π it follows that γ is a translation of π, and hence $p=2$. Further, G is a Frobenius permutation group of the points of π, since an element of G which fixes two points of π clearly fixes a flag of π and hence is the identity. It follows from [*19*; Satz 3 and 5] and [*20*; Theorem 15, p. 148] that G is a solvable, metacyclic group. Hence, from Theorem 2.1, $G\subseteq\langle T, \omega, \alpha\rangle$. Thus from [*10*; Lemma 4.1], H can be represented uniquely in the form $H=\langle\omega^d, \omega^e\alpha^s\rangle$, for positive integers d, e, and s which satisfy the conditions $d|2^{2r}-1$, $s|2r$, $0\leqq e<d$, and

$$e\left(\frac{2^{2r}-1}{2^s-1}\right)\equiv 0 \pmod{d}.$$

Let h be the largest factor of d whose primes divide 2^s-1, and let $g=(d, 2^r+1)$. From [*10*; Proposition 17.5], which describes the Frobenius groups of the form $G=T\cdot H$ with $H\subset\langle\omega, \alpha\rangle$, it follows that $2r/s=h/(h, e)$. Since

$$|H|=\frac{2r(n^2-1)}{sd}=\left(\frac{2r}{sg}\right)\left(\frac{n-1}{d/g}\right)(n+1)=n+1,$$

it follows that $g=2r/s$ and $d=(n-1)2r/s$. This implies that $(2r/s)|(2^r+1)$ and that the primes of $2r/s$ divide 2^s-1. Finally, by using [*10*; Lemma 2.2], $g=h/(h, e)$ implies $g(g, e)|(d, n+1)=g$, and hence $(g, e)=1$. Therefore, the integers d, e, and s satisfy conditions (1)–(5) of Corollary 2.2.

Conversely, it follows from [*10*; Lemma 4.1 and Proposition 4.3] that if $p=2$ then a group which satisfies conditions (1)–(5) is a sharply flag transitive group of the Desarguesian affine plane of order 2^r.

5. The flag transitive groups of the nearfield plane of order 9

Let $K=\{GF(9), +, \circ\}$ be the left near field of order 9 defined as follows. The elements of K are the elements of $GF(9)$ and the addition in K is the addition of $GF(9)$. Let ω be a primitive root of $GF(9)$, and define $\omega^i\circ\omega^j=\omega^{i+ej}$, for $0\leqq i, j\leqq 7$, by $e=1$ if i is even and $e=3$ if i is odd; let $a\circ 0=0\circ a=0$ for $a\in K$. Let π be the affine plane coordinatized by K (as in [*13*; section 20.3, p. 353], except for left-handed systems; i.e., the "slope" operates on the left). In particular, let the points of π be represented by (x, y), for $x, y\in K$, and let the points of L_∞, the line at infinity of π, be represented by (m) and (∞), for $m\in K$ and $\infty\notin K$.

Choose the basis $\{\omega, 1\}$ for K as a vector space over $GF(3)$. With respect to this basis of K and using BUSSEY's table [*6*] for $GF(9)$ with $\omega=i$, π can be represented as a 4-dimensional vector space over $GF(3)$. Let a, b, c, d, f, g, and h be the linear transformations of π over $GF(3)$ induced by the following

matrices, as left operators with respect to this representation of π:

$$a=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\2&0&0&0\\0&2&0&0\end{vmatrix} \quad b=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix} \quad c=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{vmatrix} \quad d=\begin{vmatrix}0&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&2\\0&0&1&0\end{vmatrix}$$

$$f=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\0&1&1&0\\2&1&2&2\\0&1&2&0\end{vmatrix} \quad g=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&1&0&0\\0&0&0&2\\0&0&2&0\end{vmatrix} \quad \text{and} \quad h=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}.$$

Note that the matrices $a,\ldots,g$ can be obtained from the generators $A,\ldots,G$ of HUPPERT's groups [*15*; p. 127] by interchanging the second and third rows and columns of each matrix. The following relations are satisfied by $a,\ldots,h$ (cf. [*15*; p. 145]):

$$a^2=c^2=d^2=-1, \quad b^2=1, \quad f^5=1, \quad g^4=-b, \quad h^3=1,$$
$$\text{and} \quad gfg^{-1}=(dcb)f^2.$$

Moreover, $\langle a, b, c, d\rangle$ is a group of order 32 which is normalized by f, g, and h.

5.1. Lemma. *The group $\langle a, b, c, d, f, g, h\rangle$ is a collineation group of π.*

Proof. One can compute that the matrices $a,\ldots,h$ induce the following collineations of π:

$$a=\varepsilon\underline{(-1)}, \quad b=\overline{(-1)}, \quad c=\underline{\omega^7}\,\overline{\omega^7}, \quad d=\underline{\omega^5}\,\overline{\omega^5},$$

$$f=\overline{(-1)}\,\underline{(\omega^2\eta)^2}\,\underline{\omega^7}\,\underline{(-1)}, \quad g=\underline{\omega^2}\,\overline{\omega^5}\,\sigma', \quad \text{and} \quad h=\tau'.$$

The notation is explained as follows (cf. [*2*; sections 4–6]):

$$\underline{\omega^i}:(x,y)\to(\omega^i\circ x, y), \quad \overline{\omega^i}:(x,y)\to(x,\omega^i\circ y),$$

$$\varepsilon:\ (x,y)\to(y,x), \quad \text{and} \quad \eta:\ (x,y)\to(x-y,x+y).$$

Finally,

$$\mu':\ (x,y)\to(\mu(x),\mu(y)) \quad \text{for} \quad \mu=\sigma \quad \text{or} \quad \mu=\tau,$$

where σ and τ are the nearfield automorphisms of K defined by

$$\sigma:\ \omega^2\to\omega^3, \quad \sigma:\ \omega^6\to\omega^7, \quad \sigma:\ \omega\to\omega^5, \quad \sigma^2=1,$$

and

$$\tau:\ \omega\to\omega^2\to\omega^7, \quad \tau:\ \omega^3\to\omega^5\to\omega^6, \quad \tau^3=1.$$

Alternatively, it is sufficient, by [*1*; Satz 19, p. 178], to compute directly that each matrix permutes the pencil of 10 lines through (0, 0) (it is sufficient to check each matrix on a basis of each line as a two-dimensional vector space over $GF(3)$).

Let $\boldsymbol{G}=T\cdot\boldsymbol{G}_0$ be the full collineation group of π. Let P be the full collineation group of L_∞, let ρ be the restriction homomorphism from $\boldsymbol{G}_0$ onto P,

and let Z be the kernel of ρ. From [2; section 6.4, p. 158], P is a transitive but imprimitive permutation group of the points of L_∞, with the following five admissible pairs of points as systems of imprimitivity: $(1, \omega^4)$, (ω, ω^5), (ω^2, ω^6), (ω^3, ω^7), and $(0, \infty)$. Let P^* be the permutation group of these pairs induced by P, let ϑ be the natural homomorphism from P onto P^*, and let Q be the kernel of ϑ. Finally, let N be the kernel of $\vartheta\rho$. Then $Z=\{\pm 1\}$, $N=\langle a, b, c, d\rangle$, and $N/Z=Q$.

5.2. Lemma. *The group $T \cdot \langle a, b, c, d, f, g, h\rangle$ is the full collineation group of π.*

Proof. ANDRÉ [2; Satz 21, p. 158] has shown that P^*, as a permutation group of the 5 admissible pairs of points of L_∞, is isomorphic to S_5, the symmetric group of degree 5. Since $h^3=1$ and $(hf^3)^2=-1$, it follows from [9; section 267] that $\vartheta\rho(\langle f, h\rangle)=A_5$, the alternative group of degree 5. But $\vartheta\rho(g)\notin A_5$ since the normalizer in A_5 of a subgroup of order 5 has order 10. Therefore, $\boldsymbol{G}_0=\langle a, b, c, d, f, g, h\rangle$.

Let the points (ω^i) of L_∞ be denoted by (i), for $1\leqq i\leqq 8$. Denote $\rho(x)$ by $x^\#$ and $\vartheta\rho(x)$ by x^*, for $x\in\boldsymbol{G}_0$. Then $a^\#,\ldots,h^\#$ have the following form:

$$a^\#=(0\infty)(48),\quad b^\#=(15)(26)(37)(48),\quad c^\#=(15)(26),\quad d^\#=(26)(37),$$
$$f^\#=(\infty 4365)(10872),\quad g^\#=(12435687),\quad \text{and}\quad h^\#=(127)(356).$$

Note that the mapping sending the matrix a into the permutation $a^\#=(0\,\infty)(48)$, is an anti-homomorphism.

If $G=T \cdot H$ is a flag transitive group of π, then $\vartheta\rho(H)$ is conjugate in P^* to one of the following transitive subgroups of S_5:

$$J_1=\langle f^*\rangle,\quad J_2=\langle f^*, (g^2)^*\rangle,\quad J_3=\langle f^*, g^*\rangle,\quad J_4=\langle f^*, (g^2)^*, h^*\rangle\simeq A_5,$$
$$\text{and}\quad J_5=\langle f^*, g^*, h^*\rangle\simeq S_5.$$

In order to determine the flag transitive groups of π, up to conjugacy, it is sufficient to find the subgroups H of $\boldsymbol{G}_0$ such that $\vartheta\rho(H)=J_i$ for some i, $1\leqq i\leqq 5$.

First, let $H_1=\langle N, f\rangle$, $H_2=\langle N, f, g^2\rangle$, $H_3=\langle N, f, g\rangle$, $H_4=\langle N, f, g^2, h\rangle$, and $H_5=\langle N, f, g, h\rangle$, so that $N\subseteq H_i$ and $\vartheta\rho(H_i)=J_i$, for $1\leqq i\leqq 5$. Since N is transitive on the non-zero points of the line $\{(x, 0): x\in K\}$ of π, the subgroups $G_i=T \cdot H_i$ $(1\leqq i\leqq 5)$ of $\boldsymbol{G}$ are doubly transitive on π. The structure of N implies that G_1, G_2, G_3 are not contained in $T \cdot \langle\omega, \alpha\rangle$, so that G_1, G_2, G_3 are exceptional solvable doubly transitive groups. Moreover, N is the minimal non-abelian subgroup of section 3, $Z=\{\pm 1\}$ is the center of N, Q is the elementary abelian group W of order 16, f is the β of Proposition 3.3, and $u=5$. Since Q is irreducible under f by Corollary 3.7, any additional flag transitive group $G=T \cdot H$ must satisfy the following condition:

(A) $$N\cap H\subseteq Z.$$

Now suppose that condition (A) is satisfied by H, and consider the various cases, $\vartheta\rho(H)=J_i$, for $1\leqq i\leqq 5$.

$i=1$. If $\vartheta\rho(H)=\langle f^*\rangle$ and $H\cap N\subseteq Z$, then $|H|\leqq 10$. But if $G=T\cdot H$ is flag transitive, then G is not sharply flag transitive since 3 is odd, and thus $|H|>10$. Hence no flag transitive group exists which satisfies condition (A), for $i=1$.

$i=2$. If $H=\langle f, xg^2\rangle$ satisfies condition (A), for some x in N, then $(xg^2)f(xg^2)^{-1}=\pm f^4$, and hence $\pm x^{-1}f^4x=g^2f(g^2)^{-1}=yf^4$, for some fixed $y\in N$. Since $\langle Q, f\rangle$ is a Frobenius group (Corollary 3.7), x is uniquely determined (modulo Z), and in fact $x=\pm bc$. Since $(bcg^2)^2=-1$, $H=\langle f, bcg^2\rangle$ is uniquely determined, but $G=T\cdot H$ is not flag transitive on π since $\rho(H)$ is not transitive on L_∞.

$i=3$. As in the case $i=2$, $H_6=\langle f, bag\rangle$ is the unique subgroup satisfying condition (A) for $i=3$. Moreover, $G_6=T\cdot H_6$ is flag transitive in π. Since $|H_6|=40$, G_6 is not doubly transitive on π. G_6 is not an exceptional solvable flag transitive group, from Lemma 3.2, since $\langle -f\rangle$ is an irreducible normal subgroup of H_6. Moreover, $H_6\simeq\langle\omega^8, \omega\alpha\rangle$ by Corollary 5.5 (part 2).

$i=4$. Let $H=\langle f, h\rangle$. As before, $h^3=f^5=1$ and $(hf^3)^2=-1$ imply that H satisfies condition (A), from [9; section 267]. Moreover, $bcg^2\in H$, from the case $i=2$. Conversely, suppose $H=\langle f, bcg^2, yh\rangle$ satisfies condition (A). Then $(yh)^3=\pm 1$ and $(yhf^3)^2=\pm 1$. If $y\neq 1$, then $y\in N$ implies y is the product of 2 or 4 of the two-cycles $(0\ \infty)$, (15), (26), (37), and (48). Since $h^*=(127)(356)$, $(h^*y^*)^3=1$ implies $y^*=(15)(26)$, (15)(37), or (26)(37). But for each such y^*, $(f^3)^*h^*y^*=(\infty\ 3)(28)(46)(7\ 0)y^*$ has order 4 instead of 2. Hence $y=1$. Therefore, $H=\langle f, h\rangle$ is the unique group which satisfies condition (A) for $i=4$. Note that $G=T\cdot H$ is not flag transitive on π.

$i=5$. Let $H_7=\langle f, bag, h\rangle$. Since $\langle f, h\rangle$ and $\langle f, bag\rangle$ satisfy condition (A), H_7 also satisfies (A) because $(bag)h(bag)^{-1}=f^2(hf^4hfh^2)^2f^3\in\langle f, h\rangle$. The group H_7 is unique for $i=5$ as a consequence of the cases $i=3$ and 4. Further, $G_7=T\cdot H_7$ is doubly transitive on π.

The preceding discussion can be summarized as follows.

5.3. Proposition. *The groups $G_i=T\cdot H_i$ $(1\leqq i\leqq 7)$ described above form a complete list (up to conjugacy) of the flag transitive collineation groups of π, the nearfield plane of order 9. Moreover, each group, except G_6, is doubly transitive on π. The exceptional solvable flag transitive and doubly transitive groups of π are G_1, G_2, and G_3. Finally, G_1 and G_6 are the minimal flag transitive groups, and G_1 and G_7 are the minimal doubly transitive groups of π (cf. Fig. 1 below).*

5.4. Lemma. *H_7, and hence H_6, can be represented as semi-linear transformations of the Desarguesian affine plane π' of order 9.*

Proof. Since π as a vector space over $GF(3)$ is irreducible under f, the set $\{\sum a_if^i\}$, for $a_i\in GF(3)$, forms the multiplicative group of $GF(81)$. Hence there exists an element $y=\sum a_if^i$ of order 8, such that $\langle y\rangle$ is the multiplicative group of $GF(9)$. Let π' be represented by π as a vector space over $GF(9)$. To show that H_7 acts on π', it is sufficient to show that H_7 normalizes $\langle y\rangle$.

The minimum polynominal of f is $\Phi(x)=(x^5-1)/(x-1)$, and hence $y=2f^2(f+1)$ has order 8. Clearly f centralizes $\langle y\rangle$. Further, h centralizes y, and $(bag)y(bag)^{-1}=y^3$, as required.

5.5. Corollary. 1. *The nearfield group $G_7=T\cdot\langle f, bag, h\rangle$ above is isomorphic to the Desarguesian group $G_7=T\cdot\langle G_{60}^*, c^3\sigma\rangle$ of [10; Fig. 1].*

2. *The nearfield group $G_6=T\cdot\langle f, bag\rangle$ above is isomorphic to the Desarguesian group $\langle 8, 1,1\rangle\in\mathfrak{A}$ of [10; section 4].*

3. *The nearfield group $T\cdot\langle f, bcg^2, h\rangle$ above (case $i=4$) is isomorphic to the Desarguesian group $T\cdot G_{60}^*$ of [10; Fig. 1 and Table 2].*

Proof. Parts 1 and 3 follow from Lemma 5.4, [10; Fig. 1], and the fact that $G_7=T\cdot\langle f, bag, h\rangle$ is doubly transitive on π'. Therefore, $G_6=T\cdot\langle f, bag\rangle$ is isomorphic either to $\langle 8, 1, 1\rangle\in\mathfrak{A}$ or to $\langle 8,0,1\rangle\notin\mathfrak{A}$ from [10; Corollary 13.10] and from the structure of $\langle f, bag\rangle$. By examining the subgroups of $\langle 8, 1, 1\rangle$, $\langle 8, 0, 1\rangle$, and G_6 which fix two points of π', it is clear that $G_6\simeq\langle 8, 1, 1\rangle$.

The preceding information is summarized in Fig. 1.

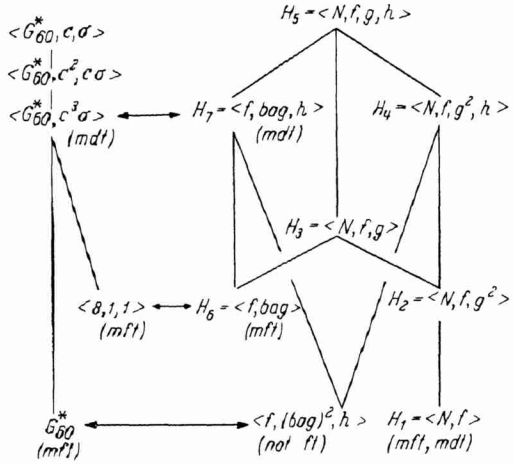

Fig. 1. For each group H of the diagram, the corresponding flag transitive group is $G=T\cdot H$. The minimal flag transitive and doubly transitive groups are denoted by (*mft*) and (*mdt*), respectively. Group isomorphisms are indicated by $\longleftrightarrow$

Corollary 5.5, parts 1 and 2, gives examples of groups which occur flag transitively on two non-isomorphic planes. The group of part 3 acts on both planes π and π', but flag transitively only on π'.

6. The flag transitive affine planes of order 25

Let π be an affine translation plane of order $n=p^r$, represented as in section 2 by $GF(n^2)$. In particular, let the lines of π which contain 0 be denoted by $V_1,\ldots,V_{n+1}$. Let ω and α be defined as in section 2.

6.1. Lemma. *Suppose that $\langle\omega^d\rangle$ is a collineation group of π, and suppose q is a prime divisor of $|\omega^d|$ which satisfies the conditions* (2) *and* (3) *of Lemma* 3.1. *Then π is a Desarguesian plane if and only if every subspace $V_i\,(1\leqq i\leqq n+1)$ has the form $a(GF(n))$* for some $a\neq 0$ *in $GF(n^2)$, where $GF(n)$ is the subfield of $GF(n^2)$ of index* 2.

Proof. It is sufficient to assume

$$d=\frac{n^2-1}{q}.$$

Clearly π is Desarguesian if the lines V_i have the specified form. Conversely, suppose π is a Desarguesian plane. Then there exists a linear transformation γ of π over $GF(p)$ such that the subspaces $\gamma(V_i)$ have the form $a(GF(n))$, for some a in $GF(n^2)$. Let π' be the plane $\gamma(\pi)$. Then $H=\gamma\langle\omega^d\rangle\gamma^{-1}$ is a collineation group of π', and $H\subseteq \Gamma L_2(n)$, the group of non-singular semi-linear transformations of π' over $GF(n)$. Since $q\nmid 2r$ by condition (2), H is the unique subgroup of order q in the Sylow q-subgroup of $\Gamma L_2(n)$ which contains H. Thus, there exists $\eta\in\Gamma L_2(n)$ such that $(\eta\gamma)\langle\omega^d\rangle(\eta\gamma)^{-1}=\langle\omega^d\rangle$, so $\eta\gamma$ normalizes $\langle\omega^d\rangle$. Then $\eta\gamma\in\langle\omega,\alpha\rangle$ from [*10*; Lemma 13.5], and hence $\gamma\in\Gamma L_2(n)$. Therefore, $V_i=\gamma^{-1}(aGF(n))=\gamma^{-1}(a)GF(n)=a'GF(n)$, for some $a'\in GF(n^2)$, as required.

The lemma is trivially true for the exceptional case (i) of Lemma 3.1. However, the conclusion of the lemma is false for case (ii), $n^2=64$. This case is of no interest, since every plane of order 8 is Desarguesian [*12*].

Let $n=25$, and let the structure of $GF(5^4)$ be given by BUSSEY's tables [*7*; pp. 201–202] for $GF(5^4)$, with $\omega=i$. Let k_0 be the 2-dimensional subspace of $GF(5^4)$ over $GF(5)$ defined by the basis $\{1,\omega\}$. Let π be the affine plane represented by $GF(5^4)$, whose lines through 0 are the images of k_0 under the group $H=\langle\omega^{12},\omega^9\alpha\rangle$. Let π' be the plane defined similarly with respect to the group $H'=\langle\omega^{12},\omega^3\alpha\rangle$.

6.2. Lemma. *π and π' are affine planes with flag transitive collineation subgroups $G=T\cdot H$ and $G'=T\cdot H'$, respectively.*

Proof. Modulo multiplications in $GF(5)^*$, the group of non-zero elements of $GF(5)$, $k_0=\{1,\omega,\omega^{18},\omega^{43},\omega^{46},\omega^{76}\}$. Since $GF(5)^*\subseteq\langle\omega^{12}\rangle$, the subspace k_0 will be permuted as a line by $\langle\omega^{12}\rangle$ if and only if the exponents $\{0,1,18,43,76\}$ of the elements of k_0 (mod $GF(5)^*$) form a distinct set of residues (mod 12). This condition is satified, so k_0 is permuted correctly by $\langle\omega^{12}\rangle$, and the subspaces $k_i=\omega^{12i}(k_0)\,(0\leqq i<13)$ are 13 lines of π.

Let $k_{13}=\omega^{144}\omega^9\alpha(k_0)$. A basis for k_{13} over $GF(5)$ is $\{\omega^2,\omega^{153}\}$, and the elements of k_{13} (mod $GF(5)^*$) are $\{\omega^2,\omega^{56},\omega^{65},\omega^{71},\omega^{87},\omega^{153}\}$. The residues (mod 12) of the exponents of k_{13} are all distinct, and are distinct from the residues of k_0. Let $k_{13+i}=\omega^{12i}(k_{13})\,(0\leqq i<13)$. Then the subspaces k_j $(0\leqq j<26)$ are pairwise disjoint, and hence form the lines through 0 of an affine plane π. Moreover, $\langle\omega^{12}\rangle$ permutes these lines in two transitivity classes. It can be checked that $\omega^9\alpha$ also permutes these lines. It then follows from the definition of k_{13} that $G=T\cdot\langle\omega^{12},\omega^9\alpha\rangle$ is a flag transitive collineation group of π.

Similarly, let $k_i'=k_i$ for $0\leqq i<13$, and let $k_{13}'=\omega^{96}\omega^3\alpha(k_0)$. A basis for k_{13}' is $\{\omega^{99},\omega^{104}\}$, and the elements of k_{13}' (mod $GF(5)^*$) are $\{\omega^{11},\omega^{12},\omega^{17},\omega^{33},\omega^{99},\omega^{104}\}$. Define $k_{13+i}'=\omega^{12i}(k_{13}')$ $(0\leqq i<13)$. Then the lines $\{k_j'\}$

$(0 \leqq j < 26)$ define an affine plane π' which has $G' = T \cdot \langle \omega^{12}, \omega^3 \alpha \rangle$ as a flag transitive collineation group.

Note that G and G' also occur as flag transitive collineation groups of the Desarguesian plane of order 25, from [*10*; Proposition 4.3].

6.3. Lemma. *π and π' are non-isomorphic, non-Desarguesian affine planes. Every non-Desarguesian flag transitive plane of order 25 is isomorphic to π or π'.*

Proof. π and π' are non-Desarguesian from Lemma 6.1, with $d=12$ and $q=13$.

It is straightforward to check that $H = \langle \omega^{12}, \omega^9 \alpha \rangle$ and $H' = \langle \omega^{12}, \omega^3 \alpha \rangle$ are the largest subgroups of $\langle \omega, \alpha \rangle$ which act as collineation groups on π, and π', respectively. Therefore, if $\boldsymbol{G}$ is the full collineation group of π, then H is the normalizer in $\boldsymbol{G}_0$ of a Sylow 13-subgroup of $\boldsymbol{G}_0$, by [*10*; Lemma 13.5]. It follows that if π and π' are isomorphic planes, then $G = T \cdot H$ and $G' = T \cdot H'$ are isomorphic groups. But G and G' are not isomorphic, from [*10*; Corollary 13.10]. Therefore, π and π' are not isomorphic planes.

Suppose π^* is a non-Desarguesian plane of order 25, represented by $GF(5^4)$, with flag transitive collineation group $G = T \cdot H$. It can be assumed that $\langle \omega^{12} \rangle \subset H$. Of the 31 subspaces of $GF(5^4)$ which contain 1, 13 admit $\langle \omega^{12} \rangle$ as a collineation group, in the sense that the exponents of the elements (mod $GF(5)^*$) of the subspace form a set of distinct residues (mod 12). One subspace corresponds to the Desarguesian plane, and the other 12 can be mapped into k_0 by a transformation of $GF(5^4)$ of the form $x \to ax$, for $a \in GF(5^4)^*$. Hence it can be assumed that k_0 is the line of π^* which contains 0 and 1. The line k' of π^* which contains ω^2 must have the residues $\{2, 3, 5, 8, 9, 11\}$ (mod 12). It is easily checked that $k' = k_{13}$ or k'_{13}. Therefore finally, π^* is isomorphic to π or π', as required.

The author has not determined whether or not the groups G and G' are the full collineation groups of π and π', respectively. However, since H is the largest collineation group of π in $\langle \omega, \alpha \rangle$, it follows from Proposition 2.1 that the full group of π is either G, or is a non-solvable group.

Bibliography

[*1*] André, J.: Über nicht-Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppen. Math. Z. **60**, 156–186 (1954).

[*2*] — Projektive Ebenen über Fastkörpern. Math. Z. **62**, 137–160 (1955).

[*3*] Artin, E.: The orders of the linear groups. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 355–366 (1955).

[*4*] — Geometric Algebra. New York: Interscience 1957.

[*5*] Birkhoff, George D., and H. S. Vandiver: On the integral divisors of $a^n - {}^n b$. Ann. of Math. (ser. 2) **5**, 173–180 (1904).

[*6*] Bussey, W. H.: Galois field tables for $p^n < 169$. Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 22–38 (1905).

[*7*] — Tables of Galois fields of order less than 1,000. Bull. Amer. Math. Soc. **16**, 188–206 (1909–1910).

[8] CLIFFORD, A.H.: Representations induced in an invariant subgroup. Ann. of Math. **38**, 533—550 (1937).
[9] DICKSON, L.: Linear Groups. New York: Dover 1958.
[10] FOULSER, D.: The flag transitive collineation groups of the finite Desarguesian affine planes. Canadian J. of Math. **16**, 443—472 (1964).
[11] HALL, MARSHALL jr.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943).
[12] — J. D. SWIFT, and R. J. WALKER: The uniqueness of the projective plane of order 8. Math. Tables Aids Comput. **10**, 186—194 (1956).
[13] — The Theory of Groups. New York: Macmillan 1959.
[14] HUPPERT, B.: Lineare auflösbare Gruppen. Math. Z. **67**, 479—518 (1957).
[15] — Zweifach transitive, auflösbare Permutationsgruppen. Math. Z. **68**, 126—150 (1957).
[16] JACOBSON, N.: Lectures in Abstract Algebra, vol. 2. New York: Van Nostrand 1953.
[17] MITCHELL, H. H.: Determination of the ordinary and modular ternary linear groups. Trans. Amer. Math. Soc. **12**, 207—242 (1911).
[18] WAGNER, A.: On finite affine line transitive planes. Math. Z. **87**, 1—11 (1965).
[19] ZASSENHAUS, H.: Über endliche Fastkörper. Abh. Math. Sem., Univ. Hamburg **11**, 187—220 (1935).
[20] — The Theory of Groups. Chelsea, New York, 1958.

Dept. of Math., Univ. of Chicago, Chicago 37, Ill. (U.S.A.)

(Received March 26, 1964)

EBERHARD, W.
Math. Zeitschr. 86, 205—214 (1964)

Die Entwicklungen nach Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen

Von
WALTER EBERHARD

1. Einleitung

In meiner ersten Arbeit über irreguläre Eigenwertprobleme [*1*] habe ich gezeigt, daß die Greensche Funktion solcher Aufgaben bezüglich λ nicht mehr beschränkt ist, sondern daß sie in gewissen Bereichen der λ-Ebene exponentiell über alle Grenzen wächst. Es erhebt sich somit die Frage, welchen Einfluß dieses Verhalten auf die Entwicklungssätze hat. HOPKINS [*2*], WARD [*7*], [*8*] und SEIFERT [*6*] benötigten stets Holomorphieeigenschaften der zu entwickelnden Funktion f, damit die Fourier-Reihe gleichmäßig konvergiert. In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen (Theorem 2), daß Fourier-Reihen nach Eigenfunktionen irregulärer Probleme mit zerfallenden Randbedingungen nur dann gleichmäßig konvergieren und f darstellen, wenn f in einem bestimmten regelmäßigen Polygon holomorph ist, dessen Eckenzahl gleich der Ordnung der Differentialgleichung ist und dessen Größe von der Differenz der Anzahl der Randbedingungen bei $x=0$ und $x=1$ abhängt. In einem weiteren Satz werden für eine engere Klasse von irregulären Randwertproblemen hinreichende Bedingungen für die gleichmäßige Konvergenz angegeben.

2. Ergebnisse

Den Untersuchungen liegt das folgende Eigenwertproblem zugrunde:

$$l(y)-\lambda y=0 \tag{1}$$

mit

$$l(y)=y^{(n)}+p_2(z)\,y^{(n-2)}+\cdots+p_n(z)\,y\,. \tag{2}$$

Dabei seien die $p_\nu(z)$ holomorph in $|z|\leqq 1$, $z=x+i\eta$. Die normierten zerfallenden Randbedingungen seien von der Gestalt:

$$\begin{cases} U_j(y)=y^{(k_j)}(0)+\sum\limits_{k=0}^{k_j-1}\alpha_{jk}\,y^{(k)}(0)=0 & \text{für } j=1,2,\ldots,m \\ U_j(y)=y^{(k_j)}(1)+\sum\limits_{k=0}^{k_j-1}\beta_{jk}\,y^{(k)}(1)=0 & \text{für } j=m+1,m+2,\ldots,n \end{cases} \tag{3}$$

mit

$$n-1\geqq k_1>k_2>\cdots>k_m\geqq 0$$

und

$$n-1\geqq k_{m+1}>k_{m+2}>\cdots>k_n\geqq 0 \quad \text{und mit} \quad n>m\geqq\frac{n}{2}.$$

Unter λ_k und $\Phi_k(z)$ verstehen wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (1), (3).

Theorem 1. *Konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(x)$$

gleichmäßig im Intervall $x_1 \leqq x \leqq x_0 (0 \leqq x_1 < x_0 \leqq 1)$, *so konvergiert sie gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich aus dem Inneren eines regelmäßigen n-Eckes in der komplexen z-Ebene mit dem Mittelpunkt* $z=0$ *und den Eckpunkten*

$$(4) \qquad x_0 \frac{\cos\frac{2\kappa\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} e^{\frac{(2\nu-1)i\pi}{n}} \qquad \text{für } \nu=1,2,\ldots,n \text{ im Falle } n-m=2\kappa,$$

$$(5) \qquad x_0 \frac{\cos\frac{(2\kappa+1)\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} e^{\frac{2\nu i\pi}{n}} \qquad \text{für } \nu=1,2,\ldots,n \text{ im Falle } n-m=2\kappa+1$$

und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.

Falls $x_1=0$ und $x_0=1$, so folgt aus Theorem 1 eine notwendige Bedingung dafür, daß f in eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe nach den Eigenfunktionen von (1), (3) entwickelbar ist. Denn wenn die Fourier-Entwicklung von f im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ gleichmäßig konvergiert, so stellt die Entwicklung in diesem Intervall f dar. Da außerdem wegen Theorem 1 die Reihe im Innern des Polygons eine holomorphe Funktion darstellt, muß f längs der reellen Achse Funktionselement einer im Polygon um den Nullpunkt holomorphen Funktion $f(z)$ sein. Wir erhalten daraus

Theorem 2. $f(x)$ *ist nur dann im Intervall* $0 \leqq x \leqq 1$ *in eine gleichmäßig konvergente Fourier-Reihe nach den Eigenfunktionen von* (1), (3) *entwickelbar, wenn* $f(x)$ *im Intervall*

$$0 \leqq x \leqq \cos\frac{n-m}{n}\pi, \qquad \text{falls } n-m=2\kappa,$$

im Intervall

$$0 \leqq x \leqq \frac{\cos\frac{n-m}{n}\pi}{\cos\frac{\pi}{n}}, \qquad \text{falls } n-m=2\kappa+1,$$

Funktionselement einer im betreffenden Polygon (4) *bzw.* (5) *mit* $x_0=1$ *holomorphen Funktion* $f(z)$ *ist.*

Wir lesen aus den Formeln (4), (5) ab, daß das Polygon am größten wird, wenn $n-m=1$ ist, d.h. wenn sich nur eine Randbedingung auf den Punkt $x=1$

bezieht und alle anderen auf den Punkt $x=0$. Die äußerste rechte Ecke des Polygons liegt dann im Punkt x_0 und das Intervall der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz im Innern des Polygons. Es liegt nahe, diesen Fall als den „irregulärsten" zu bezeichnen. Je ausgewogener die Anzahl der Randbedingungen bei 0 und 1 ist, desto kleiner wird das Polygon. Es schrumpft im Falle $n-m=m$ auf den Punkt $z=0$ zusammen. Dies ist aber gerade der reguläre Fall, in dem der gewöhnliche Entwicklungssatz gilt, der bekanntlich keine Holomorphieeigenschaften von f fordert. Wir können also die Größe des Polygons gleichsam als Maß für die Irregularität der zerfallenden Randbedingungen werten.

Als nächstes erhebt sich die Frage, ob im irregulären Fall überhaupt noch gleichmäßig konvergente Entwicklungen existieren. WARD [7] hat diese Frage für das Problem $y^{(n)}-\lambda y=0;\ y(0)=y'(0)=\cdots=y^{(n-2)}(0)=y(1)=0$ bejaht und eine Klasse von holomorphen Funktionen angegeben. In dem folgenden Theorem werden ähnliche Behauptungen zwar für dieselbe Differentialgleichung $y^{(n)}-\lambda y=0$, jedoch für die allgemeine Klasse (3) von zerfallenden Randbedingungen bewiesen. Wir setzen von nun an voraus, daß

(6) alle Eigenwerte der betrachteten Probleme einfach sind.

Zunächst erkennt man leicht, daß die Holomorphie von $f(z)$ allein nicht ausreicht, damit die Fourier-Reihe $f(z)$ darstellt. $f(z)=\sum c_k \Phi_k(z)$ dürfen wir innerhalb des Polygons, insbesondere im Nullpunkt, beliebig oft differenzieren. Da aber die Eigenfunktionen die Randbedingungen erfüllen, muß es auch $f(z)$ für $z=0$ tun, und da $\Phi_k^{(n)}(z)=\lambda_k \Phi_k(z)$ gilt, müssen alle νn-ten Ableitungen $(\nu=1, 2, \ldots)$ von $f(z)$ den Randbedingungen (3) im Nullpunkt genügen. Setzt man

$$f(z)=\sum_{i=0}^{n-1} g_i(z) \quad \text{mit} \quad g_i(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_{kn+i}\, z^{kn+i}, \tag{7}$$

so verifiziert man leicht (s. [7], S. 721 bis 722), daß die Bedingung über $f(z)$ äquivalent ist mit der Bedingung

$$g_{k_j}^{(k_j)}(z)+\sum_{k=0}^{k_j-1} \alpha_{jk}\, g_k^{(k)}(z)\equiv 0 \qquad \text{für } j=1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Im folgenden Entwicklungssatz erweist sich diese Bedingung auch als hinreichend.

Theorem 3. *Sei $f(z)$ im Kreis $|z|\leqq x_0$ $(0<x_0<1)$ holomorph und erfülle daselbst die Bedingung* (8). *Sei außerdem $f(x)\in C^2\langle 0, 1\rangle$*[1]). *Dann konvergiert*

[1]) Die Voraussetzung $C^2\langle 0,1\rangle$ and $f(x)$ ist aus beweistechnischen Gründen so stark gewählt. Theorem 3 ließe sich bereits unter der Voraussetzung beweisen, daß $f(x)$ im Intervall $\langle x_0, 1\rangle$ absolut integrierbar ist. Da aber $f(z)$ in einer Umgebung des Entwicklungspunktes $z=x$ regulär vorausgesetzt ist, wiegt eine derartige Verschärfung des Theorems nicht den beweistechnischen Mehraufwand auf.

unter der Voraussetzung (6) *die Fourier-Entwicklung von* $f(x)$ *nach den Eigenfunktionen der Aufgabe* $y^{(n)}-\lambda y=0$ *in Verbindung mit den Randbedingungen* (3) *gleichmäßig im Intervall* $0\leqq x\leqq x_0$ *und strebt gegen* $f(x)$.

In § 4 sind alle Hilfssätze zusammengetragen, die für die Beweise von Theorem 1 und 3 benötigt werden. Die Beweise von Theorem 1 und 3 selbst finden sich in § 3.

3. Beweise

Beweis von Theorem 1. Aus der Voraussetzung über die gleichmäßige Konvergenz an $\sum c_k \Phi_k(x)$ folgt

$$|c_k \Phi_k(x)|\leqq c<\infty. \tag{9}$$

Dabei ist c unabhängig von k und x.

Wir betrachten den Fall $n-m=2\kappa$. Es seien ρ_k die n-ten Wurzeln der Eigenwerte λ_k. Wir verwenden die Darstellungen (5), (6) aus [1], d.h.

$$\rho_k=\rho_k^0+O\left(\frac{1}{k}\right)=\rho_k^0\left(1+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)=\rho_k^0(1) \tag{10}$$

mit

$$\rho_k^0=\frac{\nu+\frac{n}{2}-\frac{1}{n}(k_1+\cdots+k_n)}{\sin\frac{2\kappa\pi}{n}}. \tag{11}$$

Für die Eigenfunktionen verwenden wir die in Hilfssatz 1 (S. 11) bewiesene asymptotische Abschätzung (18):

$$\Phi_k(x)=b_k\{e^{\rho_k\omega_{-\kappa}x}+(-1)^m e^{\frac{2i\pi}{n}(k_1+\cdots+k_m)} e^{\rho_k\omega_\kappa x}\}[1] \tag{12}$$

mit

$$[1]=1+O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Da $2\kappa\leqq n/2$ vorausgesetzt ist, gibt es zu jedem $k>k_0$ ein x_k mit $x_1\leqq x_k\leqq x_0$ und eine ganze Zahl q derart, daß

$$\rho_k^0 x_k\sin\frac{2\kappa\pi}{n}+\left(m+\frac{2}{n}(k_1+\cdots+k_m)\right)\pi=q\,\pi$$

gilt. Für solche x_k und für $k>k_0$ erhalten wir aus (12) die Abschätzung:

$$|\Phi_k(x)|\geqq|b_k|\,e^{\rho_k x_k\cos\frac{2\kappa\pi}{n}}\,|[1]|\geqq\frac{|b_k|}{2}e^{\rho_k x_k\cos\frac{2\kappa\pi}{n}}. \tag{13}$$

(13) in (9) eingesetzt liefert eine Abschätzung der c_k nach oben:

$$|c_k|\leqq\frac{2c}{|b_k|}e^{-\rho_k^0 x_k\cos\frac{2\kappa\pi}{n}}\leqq\frac{2c}{|b_k|}e^{-\rho_k^0 x_1\cos\frac{2\kappa\pi}{n}}. \tag{14}$$

Es sei nun x_2 eine Zahl mit $0<x_2<x_1$ und $z=x+i\eta$.

Wir bestimmen nun dasjenige Gebiet der komplexen z-Ebene, in dem die Ungleichung

$$|\Phi_k(z)| \leqq c_1 |b_k| e^{\rho_k^0 x_2 \cos \frac{2\kappa\pi}{n}} \tag{15}$$

erfüllt ist. c_1 ist eine passend zu wählende positive Konstante. Wir schätzen $\Phi_k(z)$ durch die Beträge der verschiedenen Summanden in der Darstellung (23), (25) aus Hilfssatz 1 nach oben ab. Da allein die Exponentialfaktoren ausschlaggebend sind, ist also (15) richtig, wenn die Ungleichungen

$$e^{-\Re[\rho_k(\omega_{-\kappa}+\cdots+\omega_{\kappa-1})]} e^{\Re(\rho_k z \omega_\nu)} e^{\Re[\rho_k(\omega_{j_{m+2}}+\cdots+\omega_{j_n})]} < e^{\rho_k^0 x_2 \cos \frac{2\kappa\pi}{n}}$$

gültig sind. Nun ist

$$e^{-\Re[\rho_k(\omega_{-\kappa}+\cdots+\omega_{\kappa-1})]}$$

diejenige e-Potenz, deren Realteil des Exponenten alle übrigen Realteile $\Re[\rho_k(\omega_{j_{m+1}}+\cdots+\omega_{j_n})]$, die in der Entwicklung (23) auftreten können, majorisiert. Deshalb und wegen (10), (11) dürfen wir (15) aus den Ungleichungen

$$e^{\rho_k^0 \Re(z\omega_\nu)} \leqq e^{\rho_k^0 x_2 \cos \frac{2\kappa\pi}{n}}$$

folgern, d.h. aus

$$x \cos \frac{2\nu\pi}{n} - \eta \sin \frac{2\nu\pi}{n} \leqq x_2 \cos \frac{2\kappa\pi}{n} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Wir erhalten somit ein regelmäßiges n-Eck mit dem Mittelpunkt $z=0$ und den Ecken

$$x_2 \frac{\cos \frac{2\kappa\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} e^{\frac{(2\nu-1)i\pi}{n}} \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Für das allgemeine Glied von $\sum c_k \Phi_k(z)$ folgt daher aus (14) und (15) die Abschätzung

$$|c_k \Phi_k(z)| \leqq c_2 e^{(x_2 - x_1)\rho_k^0 \cos \frac{2\kappa\pi}{n}}$$

für jedes z aus dem Polygon. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz und, da jedes Reihenglied eine für $|z| \leqq 1$ holomorphe Funktion ist, auch die Holomorphie von $\sum c_k \Phi_k(z)$ im Innern und auf dem Rand des Polygons. Da schließlich $x_2 < x_1$ beliebig dicht an x_0 heranrücken dürfen, ergibt sich die Behauptung von Theorem 1 im Falle $n-m=2\kappa$. Analoge Schlüsse führen im Falle $n-m=2\kappa+1$ zum Ziel.

Beweis von Theorem 3. Wir stellen die Partialsummen $s_p^0(x)$ der Fourier-Entwicklung von $f(x)$ auf die bekannte Weise durch ein Konturintegral dar

und betrachten wieder den Fall $n-m=2\kappa$.

$$s_p^0(x)=\frac{n}{2\pi i}\int_0^1 f(\xi)\left(\int_{K_p^{(R)}} G_0(x,\xi,\rho)\,\rho^{n-1}\,d\rho\right)d\xi\,.$$

$K_p^{(R)}$ bedeutet einen Kreisbogen mit Radius R und mit

$$0\leqq\arg\rho<\frac{2\pi}{n},$$

der ganz in $S_{2\kappa}$ (s. [*1*], S. 4) verläuft und die p ersten ρ_k umschließt. Wir integrieren nun bezüglich ξ im Integrationsbereich $x\leqq\xi\leqq 1$ zweimal partiell. Im Integrationsbereich $0\leqq\xi\leqq x$ zerlegen wir $f(x)$ gemäß (7) und integrieren bei $g_0(x)$ zweimal, bei $g_1(x)$ dreimal,..., bei $g_{n-1}(x)$ $(n+1)$-mal partiell. Beachtet man, daß

$$G_0(x,\xi,\rho)=\frac{1}{\rho^n}\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}G_0(x,\xi,\rho)$$

gilt und berücksichtigt man die Sprungrelation, so erhält man:

$$\begin{aligned}
s_p^0(x)=f(x)+\frac{n}{2\pi i}\times&\\
\times\Bigg\{&\int_{K_p^{(R)}}\frac{1}{\rho}\left[f(1)\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}G_0(x,1,\rho)-f'(1)\frac{\partial^{n-2}}{\partial\xi^{n-2}}G_0(x,1,\rho)\right]d\rho+\\
&+\int_x^1 f''(\xi)\left(\int_{K_p^{(R)}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^{n-2}}{\partial\xi^{n-2}}G_0(x,\xi,\rho)\,d\rho\right)d\xi+\\
&+\int_{K_p^{(R)}}\frac{1}{\rho}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{\partial^{n-1-k}}{\partial\xi^{n-1-k}}G_0(x,x,\rho)\sum_{l=k-1}^{n-1}g_l^{(k)}(x)\,d\rho-\\
&-\int_{K_p^{(R)}}\frac{1}{\rho}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k g_k^{(k)}(0)\frac{\partial^{n-1-k}}{\partial\xi^{n-1-k}}G_0(x,0,\rho)\,d\rho+\\
&+\int_0^x\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k g_k^{(k+2)}(\xi)\left(\int_{K_p^{(R)}}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^{n-2-k}}{\partial\xi^{n-2-k}}G_0(x,\xi,\rho)\,d\rho\right)d\xi\Bigg\}\\
=f(x)+\frac{n}{2\pi i}&\{\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}+\mathrm{IV}+\mathrm{V}\}\,.
\end{aligned}\tag{16}$$

Man überzeugt sich wegen der Abschätzung (12) aus [*1*] leicht davon, daß die Integrale I, II, III gleichmäßig zu Null streben für $R\to\infty$; denn im Intervall $x\leqq\xi\leqq 1$ ist $(x-\xi)\,\Re(\rho\,\omega_{\alpha_1})\leqq 0$ längs $K_p^{(R)}$. Das Integral IV aber verschwindet identisch. Man erkennt dies, wenn man die Entwicklung (25) aus Hilfssatz 2 und ihre Ableitungen in den Integranden einsetzt. Die innerste Summe aus

(25) hat dann die Gestalt:

$$\sum_{\mu=\nu,\, j_{m+1},\,\ldots,\, j_n} \Delta^{(A)}_{\mu,\, j_2,\,\ldots,\, j_m} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1}\, g_k^{(k)}(0)\, \rho^{n-1-k}\, \omega_\mu^{-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1}\, g_k^{(k)}(0)\, \rho^{n-1-k} \cdot \begin{vmatrix} \sum\limits_{\mu=\nu,\, j_{m+1},\,\ldots,\, j_n} \omega_\mu^{-k} A_{1\mu} & A_{1 j_2} \ldots A_{1 j_m} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \sum\limits_{\mu=\nu,\, j_{m+1},\,\ldots\, j_n} \omega_\mu^{-k} A_{m\mu} & A_{m j_2} \ldots A_{m j_m} \end{vmatrix}.$$

$\Delta^{(A)}\ldots$ und A_{ij} sind erklärt durch (35) und (20) in [*1*]. Wir multiplizieren nun die i-te Spalte mit $\omega_{j_i}^{-k}$ $(i=2, 3, \ldots, m)$ und addieren alles zur ersten Spalte, deren Elemente dann lauten:

$$(-1)^{n-1} \rho^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} g_k^{(k)}(0)\, \rho^{-k} \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu^{-k} A_{j\mu}$$

$$= (-1)^{n-1} \rho^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} g_k^{(k)}(0)\, \rho^{-k} \sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu^{-k} \left(\omega_\mu^{k_j} + \sum_{l=0}^{k_j-1} \alpha_{jl}\, \omega_\mu^{l}\, \rho^{l-k_j} \right)$$

$$= (-1)^{n-1}\, n\, \rho^{n-1-k_j} \left\{ g_{k_j}^{(k_j)}(0) + \sum_{k=0}^{k_j-1} \alpha_{jk}\, g_k^{(k)}(0) \right\} = 0$$

für $j=1, 2, \ldots, m$ wegen der bekannten Beziehung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \omega_\mu^{-k} = \begin{cases} n & \text{für } k=0 \\ 0 & \text{für } k=\pm 1, \pm 2, \ldots \end{cases}$$

und wegen (8) für $z=0$. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß auch Integral V aus (16) gleichmäßig zu Null strebt für $R \to \infty$. Wir setzen wiederum die Darstellung (25) in den Integranden ein und erhalten für das Integral über ξ:

$$(17) \qquad \begin{cases} \int\limits_0^x e^{-\rho\, \omega_\mu \xi}\, g_k^{(k+2)}(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^{x\, \omega_\mu^{-1}} e^{-\rho\, \omega_\mu \xi}\, g_k^{(k+2)}(\xi)\, d\xi + \\ \qquad\qquad + \int\limits_{x\, \omega_\mu^{-1}}^{x} e^{-\rho\, \omega_\mu \xi}\, g_k^{(k+2)}(\xi)\, d\xi . \star \end{cases}$$

Wir substituieren $t=\omega_\mu\, \xi$ und erhalten:

$$\int_0^x e^{-\rho\, \omega_\mu \xi}\, g_k^{(k+2)}(\xi)\, d\xi = \omega_\mu \int_0^x e^{-\rho\, t}\, g_k^{(k+2)}(t)\, dt + \omega_\mu \int_x^{x\, \omega_\mu} e^{-\rho\, t}\, g_k^{(k+2)}(t)\, dt .$$

Setzen wir dies in (17) ein, so dürfen wir im ersten Teil der entstehenden Darstellung das Integral $\int\limits_0^x$ vor die Summe $\sum\limits_\mu$ ziehen. Die zweimal differenzierte Voraussetzung (8) bewirkt dann nach der gleichen Rechnung wie bei Integral IV,

* *Bemerkung bei der Korrektur.* Wir integrieren in der komplexen z-Ebene längs des Strahles arc $z=\omega_\mu^{-1}$ von 0 nach $x\, \omega_\mu^{-1}$ und von dort längs des Kreises $|z|=x$ über den kürzeren Bogen nach x.

daß dieser Bestandteil identisch verschwindet. Bezüglich des zweiten Teiles gilt:

$$\left| e^{\rho(\omega_{j_{m+1}}+\cdots+\omega_{j_n})} e^{\rho\omega_\nu x} \int_x^{x\omega_\mu} e^{-\rho t} f''\left(\frac{t}{\omega_\mu}\right) dt \right| \leqq c_1 e^{\Re[\rho(\omega_{j_{m+1}}+\cdots+\omega_{j_n})]} e^{x\Re[\rho(\omega_\nu-\omega_\mu)]} = c_1 A.$$

Die Abschätzung des Integrales über t bedarf einer Erklärung im Falle, daß $n=2l+1$ und $\omega_\mu = e^{\frac{2li\pi}{n}}$. Wir zerlegen dann das Integral über ρ in die Bestandteile

$$\int_R^{Re^{\frac{i\pi}{n}}} (\ldots)\, d\rho + \int_{Re^{\frac{i\pi}{n}}}^{Re^{\frac{2i\pi}{n}}} (\ldots)\, d\rho = a+b.$$

Der Weg des Integrales über t verläuft bei a von x nach $x\omega_\mu$ längs des Kreises $|t|=x$ im Gegenuhrzeigersinn und bei b im Uhrzeigersinn. Also erreicht $\Re(-\rho t)$ auch in diesem Falle den größten Wert für $t=x\omega_\mu$. Durch eine ähnliche Überlegung wie in Hilfssatz 2 aus [1] überzeugt man sich davon, daß

$$A \leqq e^{\Re[\rho(\omega_{-\kappa}+\cdots+\omega_{\kappa-1})]}$$

gilt. Da schließlich

$$|\Delta^{(A)}_{\mu, j_2, \ldots, j_m} \Delta^{(B)}_{j_{m+1}, \ldots, j_n}| \leqq c_2$$

und

$$|D(\rho)| > c(\sigma)\, e^{\Re[\rho(\omega_{-\kappa}+\cdots+\omega_{\kappa-1})]}$$

gelten, können wir folgern, daß

$$\left| \int_0^x g_k^{(k+2)}(\xi) \frac{\partial^{n-2-k}}{\partial \xi^{n-2-k}} G_0(x, \xi, \rho)\, d\xi \right| \leqq \frac{c_3}{|\rho|^{k+1}}$$

richtig ist. Daraus ergibt sich unmittelbar die Abschätzung

$$|V| \leqq \frac{c_4}{R},$$

und dies strebt gleichmäßig zu Null für $R \to \infty$. Entsprechendes gilt im Falle $n-m=2\kappa+1$.

4. Hilfssätze

Hilfssatz 1. *Die Eigenfunktionen $\Phi_k(z)$ der Aufgabe* (1), (3) *sind in $|z| \leqq 1$ holomorph und besitzen für reelle $z=x$ die asymptotische Darstellung*:

$$\Phi_k(x) = b_k \{ e^{\rho_k \omega_{-\kappa} x} + (-1)^m e^{\frac{2i\pi}{n}(k_1+\cdots+k_m)} e^{\rho_k \omega_\kappa x} \} [1]. \tag{18}$$

Die b_k sind dabei von x unabhängige Größen und

$$[1] = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Beweis. Nach Wahl eines Fundamentalsystems $y=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ von (1) für $\lambda=\lambda_k$ ergeben sich die Eigenfunktionen zu:

$$\Phi_k(z)=\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{n-1}(y_1) & \cdots & U_{n-1}(y_n) \end{vmatrix}$$

mit a_k unabhängig von z und für $k>k_0$. Ein Fundamentalsystem von (1) für $\lambda=\lambda_k$ bilden die Funktionen:

$$y_\nu=e^{\rho_k\omega_\nu z}[1], \tag{19}$$

(s. [4], S. 39 bis 45). Die Funktionen y_ν sind holomorph in $|z|\leqq 1$ wegen der vorausgesetzten Holomorphie der Koeffizientenfunktionen $p_\nu(z)$ in (2), und für die Ableitungen gilt:

$$y_\nu^{(p)}=\rho_k^p\,\omega_\nu^p\,e^{\rho_k\omega_\nu z}[1] \qquad \text{für } p=1,2,\ldots,n-1. \tag{20}$$

Wir setzen (19) und (20) in die Randbedingungen (3) ein:

$$\Phi_k(z)=a_k\begin{vmatrix} e^{\rho_k\omega_1 z}[1] & \cdots & e^{\rho_k\omega_n z}[1] \\ \omega_1^{k_1}[1] & \cdots & \omega_n^{k_1}[1] \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{k_m}[1] & \cdots & \omega_n^{k_m}[1] \\ \omega_1^{k_{m+1}}e^{\rho_k\omega_1}[1] & \cdots & \omega_n^{k_{m+1}}e^{\rho_k\omega_n}[1] \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{k_{n-1}}e^{\rho_k\omega_1}[1] & \cdots & \omega_n^{k_{n-1}}e^{\rho_k\omega_n}[1] \end{vmatrix}\cdot\rho_k^{k_1+\cdots+k_{n-1}}. \tag{21}$$

Wir entwickeln (21) nach der ersten Zeile und wenden dann den Laplaceschen Satz an:

$$\begin{cases} \Phi_k(z)=a_k\,\rho_k^{k_1+\cdots+k_{n-1}}\sum\limits_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\,e^{\rho_k\omega_\nu z}\times \\ \qquad\times\sum\limits_{j_k\neq\nu}\pm\delta^{(A)}_{j_1,\ldots,j_m}\,\delta^{(B)}_{j_{m+1},\ldots,j_{n-1}}\,e^{\rho_k(\omega_{j_{m+1}}+\cdots+\omega_{j_{n-1}})}[1]. \end{cases} \tag{22}$$

Dabei bedeuten hier:

$$\delta^{(A)}_{j_1,\ldots,j_m}=\begin{vmatrix} \omega_{j_1}^{k_1}\ldots\omega_{j_m}^{k_1} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \omega_{j_1}^{k_m}\ldots\omega_{j_m}^{k_m} \end{vmatrix},\qquad \delta^{(B)}_{j_{m+1},\ldots,j_{n-1}}=\begin{vmatrix} \omega_{j_{m+1}}^{k_{m+1}}\ldots\omega_{j_{n-1}}^{k_{m+1}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \omega_{j_{m+1}}^{k_{n-1}}\ldots\omega_{j_{n-1}}^{k_{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Im Falle $n-m=2\kappa$ und für reelle $z=x$ sind die beiden Terme in (22) mit dem größten Realteil des Exponenten:

$$\delta^{(A)}_{\kappa,\ldots,n-\kappa-1}\,\delta^{(B)}_{-\kappa,\ldots,\kappa-1}\,e^{\rho_k\omega_{-\kappa}x}\,e^{\rho_k(\omega_{-\kappa+1}+\cdots+\omega_{\kappa-1})}[1]$$

und

$$\delta^{(A)}_{\kappa+1,\ldots,n-\kappa}\,\delta^{(B)}_{-\kappa,\ldots,\kappa-1}\,e^{\rho_k\omega_\kappa x}\,e^{\rho_k(\omega_{-\kappa+1}+\cdots+\omega_{\kappa-1})}[1].$$

Da sich die Vorzeichen der beiden Terme um den Faktor $(-1)^m$ und die Determinantenprodukte um den Faktor $e^{\frac{2i\pi}{n}(k_1+\cdots+k_m)}$ unterscheiden, folgt die Behauptung (18) mit

$$b_k = \pm a_k \delta^{(A)}_{\kappa,\ldots,n-\kappa-1}\, \delta^{(B)}_{-\kappa+1,\ldots,\kappa-1}\, e^{\rho_k(\omega_{-\kappa+1}+\cdots+\omega_{\kappa-1})}. \tag{24}$$

Hilfssatz 2. *Für $x>\xi$ besitzt die Greensche Funktion $G_0(x,\xi,\rho)$ von $y^{(n)}-\lambda y=0$ in Verbindung mit den Randbedingungen* (3) *die Entwicklung*:

$$\begin{cases} G_0(x,\xi,\rho)=\dfrac{1}{n\rho^{n-1}D(\rho)}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n}\pm e^{\rho\omega_\nu x}\sum_{j_k\neq\nu}\pm\Delta^{(B)}_{j_{m+1},\ldots,j_n}\, e^{\rho(\omega_{j_{m+1}}+\cdots+\omega_{j_n})}\times \\ \qquad\times\displaystyle\sum_{\mu=\nu,\,j_{m+1},\ldots,j_n}\omega_\mu\,\Delta^{(A)}_{\mu,j_2,\ldots,j_m}\, e^{-\rho\omega_\mu\xi}. \end{cases} \tag{25}$$

$\Delta^{(A)}\ldots$, $\Delta^{(B)}\ldots$ sind erklärt durch (35) aus [1] und $D(\rho)$ durch (19) aus [1].

Beweis. Wir sehen die Gültigkeit von (25) ein, wenn wir in (21), (22) aus [1] die Determinanten $\Delta_{\mu\nu}$ nach dem Laplaceschen Satz entwickeln und anschließend umsummieren, indem wir zu jedem ω_ν und zu jeder zulässigen Kombination $\omega_{j_{m+1}},\ldots,\omega_{j_n}$ von Einheitswurzeln alle verschiedenen Terme $e^{-\rho\omega_\mu\xi}$ zusammenfassen. Man erhält dann:

$$G_1(x,\xi,\rho)=\rho^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\sum_{\nu=1}^{n}\pm e^{\rho\omega_\nu x}\sum_{j_k\neq\nu}\pm\Delta^{(B)}_{j_{m+1},\ldots,j_n}\, e^{\rho(\omega_{j_{m+1}}+\cdots+\omega_{j_n})}\cdot$$
$$\times\sum_{\mu=\nu,\,j_{m+1},\ldots,j_n}(-1)^\mu V(\omega_\mu)\,\Delta^{(A)}_{\mu,j_2,\ldots,j_m}\, e^{-\rho\omega_\mu\xi}.$$

Wegen

$$G_0(x,\xi,\rho)=\frac{G_1(x,\xi,\rho)}{\Delta(\rho)}$$

und wegen (29) aus [1] folgt die Behauptung.

Literatur

[1] EBERHARD, W.: Das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen. Math. Z. **86**, 45–53 (1964).

[2] HOPKINS, J. W.: Some convergent developments associated with irregular boundary conditions. Trans. Am. Math. Soc. **20**, 245–259 (1919).

[3] JACKSON, D.: Expansion problems with irregular boundary conditions. Proc. Am. Acad. **51**, 383–417 (1916).

[4] KELDISCH, M. W.: Über Eigenwerte und Eigenfunktionen einiger Klassen von nichtselbstadjungierten Gleichungen. Ber. Akad. Wiss. UdSSR **77**, 11–14 (1951).

[5] NEUMARK, M. A.: Lineare Differentialoperatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1960.

[6] SEIFERT, G.: A third order irregular boundary value problem and the associated series. Pac. J. Math. **2**, 395–406 (1952).

[7] WARD, L. E.: An irregular boundary value and expansion problem. Annals of Math. **26**, 21–36 (1925).

[8] — Some third order irregular boundary value problems. Trans. Am. Math. Soc. **29**, 716–745 (1927).

Zentralinstitut für Angewandte Mathematik der Kernforschungsanlage Jülich, 51 Aachen, Adalbertstraße 116–118

(Eingegangen am 30. Juni 1964)

STAMM, E.
Math. Zeitschr. 86, 215—254 (1964)

Über die Homotopiegruppen gewisser Faserungen

Von
EMIL STAMM

§ 0. Einleitung

0.1. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einer Klasse von topologischen Räumen, deren Homotopiegruppen in ähnlich einfacher Weise berechnet werden können, wie die Homologiegruppen eines (simplizialen) Polyeders. Um nichttriviale Beispiele solcher Räume zu finden, haben wir uns eines (heuristischen) Dualitätsprinzips bedient (ECKMANN-HILTON [2]).

0.2. Es sei X ein simplizial-zerlegtes Polyeder. In der klassischen simplizialen Homologietheorie werden die Homologiegruppen $H_n(X)$ und die Cohomologiegruppen $H^n(X)$ in bekannter Weise nach einem einfachen algebraischen Verfahren berechnet. Dabei wird nur die kombinatorische Struktur von X verwendet, d.h. die Menge der n-dimensionalen Simplexe, $n=0, 1, 2, \ldots$, und die Art, wie diese Simplexe aneinander schließen, ausgedrückt durch die Inzidenzzahlen; mit ihrer Hilfe werden in der Cohomologietheorie die simplizialen Cozyklen, Coränder, Cohomologieklassen und schließlich die $H^n(X)$ gebildet. Diese simplizialen Cohomologiegruppen sind bekanntlich isomorph zu verschiedenen anderen, topologisch invariant definierten Cohomologiegruppen. Insbesondere lassen sie sich auch in homotopischer Weise ausdrücken als Gruppen $\Pi(X, K(G, n))$, deren Elemente Homotopieklassen von Abbildungen des Raumes X in den Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, n)$ sind.

Im Sinne der Eckmann-Hilton-Dualität sind zu diesen homotopischen Cohomologiegruppen dual die Homotopiegruppen $\Pi(K'(n, G), X)$, deren Elemente Abbildungsklassen eines Moore-Raumes $K'(n, G)$ in den Raum X sind (vgl. Abschnitt 5 dieser Einleitung). Für diese Gruppen schreibt man gewöhnlich $\pi_n(G; X)$, wobei G eine beliebige abelsche Gruppe ist; es sind die „Homotopiegruppen mit Koeffizienten in G" und für $G=Z=$ ganze Zahlen sind es die Hurewiczschen Homotopiegruppen $\pi_n(X)$. Es stellt sich nun die Frage, ob es einen zum Begriff des Polyeders dualen Begriff gibt, d.h., Räume, deren Homotopiegruppen $\pi_n(G; X)$ und $\pi_n(X)$ sich durch einen algebraischen Formalismus in analoger Weise berechnen lassen wie die Cohomologiegruppen eines Polyeders.

0.3. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß man solche Räume tatsächlich angeben kann. Wir nennen sie Copolyeder. Analog dem Aufbau eines Polyeders durch eine Folge von Inklusionen einfacher Elemente (der Simplexe oder allgemeiner der Zellen) ist ein Copolyeder durch eine Folge von Faserungen mit speziellen Fasern aufgebaut. In § 1 und 2 werden für derartige Copolyeder Formeln angegeben und diskutiert, die die Homotopiegruppen in

der gewünschten algebraischen Art ausdrücken: zu einem Copolyeder gehört ein algebraischer Kettenkomplex Q (d.h. eine Differentialfolge abelscher Gruppen)

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \xleftarrow{q_3} Q_3 \leftarrow \cdots,$$

dessen Homologiegruppen isomorph sind zu den Homotopiegruppen $\pi_n(X)$ des Copolyeders. Etwas allgemeiner: die Homotopiegruppen $\pi_n(G;X)$ sind isomorph zu den Homologiegruppen des induzierten Kettenkomplexes

$$\mathrm{Hom}(G, Q_1) \leftarrow \mathrm{Hom}(G, Q_2) \leftarrow \mathrm{Hom}(G, Q_3) \leftarrow \cdots,$$

unter der Voraussetzung, daß $\mathrm{Ext}(G, Q_m)=0$ ist.

In § 3 dieser Arbeit wird umgekehrt jedem Kettenkomplex Q ein Copolyeder zugeordnet, dessen zugehöriger Kettenkomplex gerade gleich Q ist. Dies gelingt im strikten Sinne nur für endliche Kettenkomplexe. Unendlichen Kettenkomplexen können nur verallgemeinerte Copolyeder zugeordnet werden; diese besitzen aber, abgesehen von Faserungs-Bedingungen, alle wichtigen Eigenschaften der Copolyeder. Stellt man an die Gruppen Q_m des gegebenen Kettenkomplexes die Bedingung $\mathrm{Ext}(G, Q_m)=0$, so lassen sich also alle Homotopiegruppen $\pi_n(G;X)$ algebraisch als Homologiegruppen berechnen. Insbesondere ist dies der Fall, wenn die Q_m direkte Summen von Gruppen R sind (R = additive Gruppe der reellen Zahlen modulo 1); die Randoperatoren mit Q sind dann durch Inzidenzzahlen gegeben, und die Situation entspricht weitgehend derjenigen von Polyedern. Auf diesen speziellen Fall gehen wir allerdings nicht näher ein, da er bei unsern algebraischen Betrachtungen keine weitere Rolle spielt. – Beschränkt man sich auf die klassischen Hurewiczschen Homotopiegruppen ($G=Z$), so ist überhaupt keine Bedingung über Gruppen Q_m nötig.

Es lassen sich also beliebig viele Beispiele von Copolyedern konstruieren, insbesondere natürlich Copolyeder mit vorgegebenen Homotopiegruppen π_n. Allerdings sind diese Räume verhältnismäßig kompliziert und es ist nicht ersichtlich, ob sie in einfachen geometrischen Zusammenhängen auftreten. In § 4 wird gezeigt, daß die vorher konstruierten Copolyeder funktoriell vom gegebenen Kettenkomplex Q abhängen.

0.4. Anläßlich der Konstruktion der Copolyeder taucht die Aufgabe auf, den Homotopietypus gewisser Faserungen zu untersuchen. Diese Untersuchung macht den Inhalt des Anhanges (§ 5) aus; dort wird, unter einschränkenden Bedingungen über die Faser, gezeigt: wenn die Basis und die Faser einer Faserung (im Sinne von HUREWICZ) den Homotopietypus eines CW-Komplexes haben, so ist auch der Totalraum einem CW-Komplex homotopieäquivalent; im Gegensatz zu bisher bekannten Fällen wird dabei über die Dimension des CW-Komplexes nichts vorausgesetzt.

0.5. Zusammenstellung benutzter Begriffe und Sätze. In den Publikationen von ECKMANN-HILTON [2] sowie in den vervielfältigten Vorlesungen von HILTON, „Homotopy Theory and Duality", Cornell University, 1959, findet man eine ausführliche Darstellung großer Teile der Homotopietheorie unter dem

Gesichtspunkt der Dualität. In unserer Arbeit werden wir die folgenden einfachsten Tatsachen ohne weitere Erläuterung benutzen:

Wir betrachten topologische Räume, die durch Wege zusammenhängen und in denen ein Punkt $*$ als Basispunkt ausgezeichnet ist. Von stetigen Abbildungen zwischen solchen Räumen setzen wir voraus, daß sie basispunkttreu sind; ebenso sollen Homotopien solcher Abbildungen basispunkttreu sein. Die Homotopieklasse einer stetigen Abbildung f bezeichnen wir mit $[f]$. Für zwei Räume A, B sei $\Pi(A, B)$ die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen.

Ist X ein topologischer Raum, so werde mit ΣX die reduzierte Suspension von X (Doppelkegel über X), mit ΩX der Schleifenraum von X bezeichnet. Jede stetige Abbildung $f\colon X\to Y$ induziert stetige Abbildungen $\Sigma f\colon \Sigma X\to \Sigma Y$, $\Omega f\colon \Omega X\to \Omega Y$. Ist $f\colon X\to Y$ gegeben, so kann dazu ein Abbildungszylinder M_f definiert werden. Er entsteht aus $X\times I\cup Y$ ($I=$Einheitsintervall) durch Identifizierung der Punkte $(x, 1)$ mit den Punkten $f(x)\in Y$. Die Punkte $(x, 0)$ bilden den „Boden" des Abbildungszylinders. Die Abbildung f läßt sich faktorisieren:

$$f=\mu\circ i: X\xrightarrow{i} M_f\xrightarrow{\mu} Y,$$

wobei $i(x)=(x, 0)$ eine Cofibration (Homotopieerweiterungseigenschaft) ist, μ die Abbildung $(x, t)\to f(x)$. Die Einbettung $Y\to M_f$ wird mit j bezeichnet. $j(Y)$ ist ein Deformationsretrakt von M_f. Dual zum Abbildungszylinder ist der „Mapping Track". Ist $f\colon X\to Y$ stetig, so sei $E_f\subset X\times Y^I$ als Menge der (x, χ) mit $\chi(1)=f(x)$ definiert. $\chi(0)$ ist beliebig, also χ nicht basispunkttreu. Sei $k\colon X\to E_f$ durch $k(x)=(x, \chi_x)$ definiert, wobei $\chi_x(t)$ konstant gleich $f(x)$ ist. $p\colon E_f\to Y$ sei durch $p(x, \chi)=\chi(0)$ definiert. Dann ist $f=p\circ k$; p ist eine Faserung.

Ist G eine abelsche Gruppe, n eine natürliche Zahl, so existieren zusammenhängende Polyeder $K(G, n)$ (EILENBERG-MACLANE) und $K'(n, G)$ (MOORE) mit $\pi_l(K(G, n))=0$ für $l\neq n$, und $\pi_n(K(G, n))=G$; resp. für $n\geqq 2$ $H_n(K'(n, G))=G$ und $H_l(K'(n, G))=0$ für $l\neq n, 0$ sowie $\pi_1(K'(n, G))=0$. Der Homotopietypus solcher Polyeder ist eindeutig festgelegt, und wir denken uns für jedes G und n ganz bestimmte Standardmodelle (metrische Polyeder) gegeben. Jeder Homomorphismus $\varphi\colon G_1\to G_2$ kann durch stetige Abbildungen $f\colon K(G_1, n)\to K(G_2, n)$ realisiert werden. Die Homotopieklasse $[f]$ ist durch φ eindeutig bestimmt; sie werde durch (φ) bezeichnet.

Ist G eine abelsche Gruppe, so können Homotopiegruppen und Cohomologiegruppen mit Koeffizienten in G für einen Raum X definiert werden als Gruppen von Homotopieklassen stetiger Abbildungen

$$f\colon \Sigma K'(n-1, G)\to X \quad \text{resp.} \quad f\colon X\to \Omega K(G, n+1).$$

Es gelten universelle Koeffiziententheoreme, die wir als Exaktheit der beiden folgenden Sequenzen formulieren können:

1) Homotopie:

$$0\to \mathrm{Ext}\big(G, \pi_{m+1}(X)\big)\to \pi_m(G, X)\xrightarrow{\eta} \mathrm{Hom}\big(G, \pi_m(X)\big)\to 0.$$

Die Folge zerfällt im allgemeinen nicht, d.h. es ist $\pi_m(G, X)$ nicht immer die direkte Summe von $\mathrm{Ext}(G, \pi_{m+1}(X))$ und $\mathrm{Hom}(G, \pi_m(X))$. Der Homomorphismus η ist der folgende: Es stelle $f: \Sigma K(n-1, G) \to X$ das Element $\gamma \in \pi_n(G, X)$ dar. Da $\Sigma K'(n-1, G)$ ein $K'(n, G)$ Raum ist, induziert f einen Homomorphismus $f_*: \pi_n(K'(n, G)) \to \pi_n(X)$. Da $\pi_n(K'(n, G)) = H_n(K'(n, G)) = G$ ist, folgt $f_* \in \mathrm{Hom}(G, \pi_n(X))$. f_* ist das Element $\eta(\gamma)$.

2) Cohomologie:

$$0 \to \mathrm{Hom}(H_n(X), G) \to H^n(X, G) \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), G) \to 0$$

ist exakt und zerfällt.

Aus der Theorie der CW-Komplexe (WHITEHEAD [9]) werden wir die Sätze benützen:

1. Jede stetige Abbildung eines CW-Komplexes X in einen CW-Komplex Y ist homotop einer zellulären Abbildung.

2. Der Abbildungszylinder einer zellulären Abbildung ist selbst ein CW-Komplex.

3. Eine Abbildung eines CW-Komplexes in einen topologischen Raum ist genau dann stetig, wenn die Beschränkung der Abbildung auf jede abgeschlossene Zelle stetig ist.

4. Jede kompakte Teilmenge eines CW-Komplexes liegt in einem endlichen Teilkomplex.

5. Ist (X, Y) ein Paar von CW-Komplexen, $Y \subset X$ ein Teilkomplex, so gilt der Homotopieerweiterungssatz, d.h. die Einbettung $Y \to X$ ist eine Cofibration.

6. Ist X ein CW-Komplex, so sind X und $|S(X)|$ homotopieäquivalent, wobei $S(X)$ den singulären Komplex von X und $|S(X)|$ seine geometrische Realisierung bedeutet.

Die vorliegende Arbeit entstand unter Leitung von Herrn Prof. Dr. B. ECKMANN. Der Autor ist ihm für viele Anregungen zu tiefem Dank verpflichtet.

§ 1. Copolyeder

Sei X ein bogenweise zusammenhängender topologischer Raum mit ausgezeichnetem Basispunkt $*$. Es werde eine Folge von Faserungen

$$X = X_0 \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} X_2 \xrightarrow{p_3} X_3 \to \cdots$$

betrachtet; ferner werde $w_k = p_k \circ p_{k-1} \circ \cdots \circ p_1$ gesetzt für $k = 1, 2, \ldots$; die w_k sind ebenfalls Faserungen. $\mathrm{Ker}\, w_k = w_k^{-1}(*)$ ist die Faser von w_k. Wir erhalten so das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \cdots \\
\mathrm{Id}\downarrow & & w_1\downarrow & & w_2\downarrow & & w_3\downarrow & & w_4\downarrow & & \\
X_0 & \xrightarrow{p_1} & X_1 & \xrightarrow{p_2} & X_2 & \xrightarrow{p_3} & X_3 & \xrightarrow{p_4} & X_4 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Wir führen nun zwei Gruppenfolgen $\mathscr{Z}^m(G, X)$, $\mathscr{C}^m(G, X)$ $m \geqq 1$ ein, wobei G eine beliebige abelsche Gruppe sei. $\mathscr{Z}^m(G, X)$ werde definiert als Gruppe $\Pi(K'(m, G), \operatorname{Ker} w_m)$. Ebenso setzen wir $\mathscr{C}^m(G, X) = \Pi(K'(m, G), \operatorname{Ker} p_m)$. Offenbar ist, wegen $X_0 = X$ und $p_1 = w_1$, $\mathscr{Z}^1(G, X) = \mathscr{C}^1(G, X)$; im allgemeinen aber $\mathscr{Z}^m(G, X) = \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_m)$, $\mathscr{C}^m(G, X) = \pi_m(G; \operatorname{Ker} p_m)$.

Wir betrachten nun die Beschränkung der Faserung w_{m-1} auf

$$\operatorname{Ker} p_m \subset X_{m-1} : \operatorname{Ker} w_{m-1} \xrightarrow{i_m} \operatorname{Ker} w_m \xrightarrow{\sigma_m} \operatorname{Ker} p_m .$$

Die Faser ist $\operatorname{Ker} w_{m-1}$, der Faserraum $\operatorname{Ker} w_m$ und die Basis $\operatorname{Ker} p_m$. Die zu dieser Faserung gehörige exakte Homotopiesequenz lautet:

$$\cdots \to \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-1}) \xrightarrow{i_{m_*}} \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_m) \xrightarrow{\sigma_{m_*}} \pi_m(G; \operatorname{Ker} p_m) \xrightarrow{\partial_m}$$

$$\xrightarrow{\partial_m} \pi_{m-1}(G; \operatorname{Ker} w_{m-1}) \xrightarrow{i_{m_*}} \pi_{m-1}(G; \operatorname{Ker} w_m) \xrightarrow{\sigma_{m_*}} \pi_{m-1}(G; \operatorname{Ker} p_m) \to \cdots .$$

Beachten wir die Definition der Gruppen $\mathscr{Z}^m(G, X)$ und $\mathscr{C}^m(G, X)$, so lautet diese Folge so:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \cdots \to \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-1}) \xrightarrow{i_{m_*}} \mathscr{Z}^m(G, X) \xrightarrow{\sigma_{m_*}} \mathscr{C}^m(G, X) \xrightarrow{\partial_m} \\ \xrightarrow{\partial_m} \mathscr{Z}^{m-1}(G, X) \xrightarrow{i_{m_*}} \pi_{m-1}(G; \operatorname{Ker} w_m) \xrightarrow{\sigma_{m_*}} \pi_{m-1}(G; \operatorname{Ker} p_m) \to \cdots . \end{cases}$$

Wir nennen einen Raum X der oben geschriebenen Art, zusammen mit den in X gegebenen Faserungen, einen „unendlich gefaserten Raum", die Folge 1.1 die „zugehörige exakte Folge" der Dimension m.

Lemma 1.1. *Sei X ein topologischer Raum, G eine abelsche Gruppe. Es sei $\pi_m(X) = 0$, $\operatorname{Ext}(G, \pi_{m+1}(X)) = 0$. Dann ist auch $\pi_m(G; X) = 0$.*

Beweis. Man wende das Universelle Koeffizienten-Theorem für Homotopiegruppen an.

Satz 1.1. *Sei X ein unendlich gefaserter Raum, $\pi_{m+k}(\operatorname{Ker} p_{m-1}) = 0$ für $k \geqq 0$. Dann ist σ_{m_*}: $\mathscr{Z}^m(G, X) \to \mathscr{C}^m(G, X)$ ein Monomorphismus.*

Beweis. Es ist definitionsgemäß $\mathscr{Z}^1(G, X) = \mathscr{C}^1(G, X)$; wir dürfen somit $m > 1$ voraussetzen. Wir werden zeigen, daß $\pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-1}) = 0$ ist; die Monomorphie folgt dann aus der Exaktheit der Folge 1.1.

Ein Element $h \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-1})$ wird durch eine stetige Abbildung f: $K'(m, G) \to \operatorname{Ker} w_{m-1}$ repräsentiert; $h = [f]$. Betrachten wir die Faserung

$$\operatorname{Ker} w_{m-1} \xrightarrow{\sigma_{m-1}} \operatorname{Ker} p_{m-1} .$$

Das Element $\sigma_{m-1_*}(h) = [\sigma_{m-1} \circ f] \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} p_{m-1})$ ist auf Grund von Lemma 1.1 gleich null; wegen der Exaktheit der Homotopiesequenz der Faserung σ_{m-1} somit $h = i_{m-1_*}(k_1)$; $k_1 \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-2})$. Vermöge einer Iteration der bisherigen Schlußweise erhält man

$$h = i_{m-1_*}(k_1), \quad k_1 = i_{m-2_*}(k_2), \quad k_2 = i_{m-3_*}(k_3), \ldots$$

$$k_1 \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-2}), \quad k_2 \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-3}), \quad k_3 \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_{m-4}), \ldots ,$$

zusammengefaßt also

$$h = i_{m-1_*} \circ i_{m-2_*} \circ \cdots \circ i_{2_*}(k_{m-2}), \qquad k_{m-2} \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} w_1).$$

Da $\operatorname{Ker} w_1 = \operatorname{Ker} p_1$ und $\pi_m(\operatorname{Ker} p_1) = 0$ für $m \geqq 2$ ist, folgt $k_{m-2} = 0$, also auch $h = 0$. q.e.d.

Der vorstehende Beweis benützt Lemma 1.1, also das Universelle Koeffizienten-Theorem für Homotopiegruppen. Daraus ersieht man die Gültigkeit von Satz 1 unter den schwächeren Voraussetzungen $\operatorname{Ext}(G, \pi_{m+k}(p_m)) = 0$,

$$\operatorname{Hom}(G, \pi_{m-1+k}(p_m)) = 0 \qquad k \geqq 2.$$

Lemma 1.2. *Sei X ein unendlich gefaserter Raum, G eine abelsche Gruppe. $\pi_{m+k}(\operatorname{Ker} p_m) = 0$ für $k \geqq 1$, $\pi_{m-1}(\operatorname{Ker} p_m) = 0$ und $\operatorname{Ext}(G, \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)) = 0$. Dann existiert eine exakte Folge*

$$0 \to \pi_{m+1}(G; X_{m-1}) \xrightarrow{p_{m_*}} \pi_{m+1}(G; X_m) \xrightarrow{\partial} \pi_m(G; \operatorname{Ker} p_m) \xrightarrow{i_*}$$

$$\xrightarrow{i_*} \pi_m(G; X_{m-1}) \xrightarrow{p_{m_*}} \pi_m(G; X_m) \to 0 \qquad m \geqq 1.$$

Beweis. Man betrachte die Homotopiesequenz der Faserung $p_m\colon X_{m-1} \to X_m$ und beachte, daß $\pi_{m+1}(G; \operatorname{Ker} p_m)$ verschwindet wegen $\pi_{m+k}(\operatorname{Ker} p_m) = 0$ und Lemma 1.1. Ebenso beweist man $\pi_{m-1}(G; \operatorname{Ker} p_m) = 0$.

Lemma 1.3. *Es sei für alle m $\pi_{m-1}(X_m) = 0$, $\pi_{m-1}(\operatorname{Ker} p_m) = 0$ und G eine abelsche Gruppe, für die $\operatorname{Ext}(G, \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)) = 0$ ist. Dann ist für $m \geqq 1$:*

$$\pi_m(G; X_{m+1}) = 0 \quad \text{und} \quad \pi_m(G; X_m) = 0.$$

Beweis. Die Homotopiesequenz der Faserung p_{m+1} liefert:

$$\cdots \to \pi_m(G; \operatorname{Ker} p_{m+1}) \to \pi_m(G; X_m) \to \pi_m(G; X_{m+1}) \to \cdots.$$

Die Gruppe $\pi_m(G; \operatorname{Ker} p_{m+1})$ ist nach Lemma 1.1 die Nullgruppe. Setzen wir in obiger Sequenz $G = Z$ (Z = additive Gruppe der ganzen Zahlen), so ist nach Voraussetzung $\pi_m(X_{m+1}) = 0$, also auch $\pi_m(X_m) = 0$ für alle m. Nach Lemma 1.1 schließt man $\pi_m(G; X_{m+1}) = 0$ und somit wegen der Exaktheit der Folge auch $\pi_m(G; X_m) = 0$. q.e.d.

An dieser Stelle erhält man leicht den

Satz 1.2. *Sei X ein unendlich gefaserter Raum, G eine abelsche Gruppe. Es sei $\pi_{m+k}(\operatorname{Ker} p_m) = 0$ für $m \geqq 1, k \geqq 1$; ferner $\pi_{m-1}(\operatorname{Ker} p_m) = 0$, $\operatorname{Ext}(G, \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)) = 0$ und $\pi_{m-1}(X_m) = 0$. Dann gilt*

$$\pi_m(G; X_{m-1}) \cong \pi_m(G; \operatorname{Ker} p_m) / \partial \pi_{m+1}(G; X_m),$$

wobei

$$\partial \pi_{m+1}(G; X_m) \cong \pi_{m+1}(G; X_m) / p_{m_*} \pi_{m+1}(G; X_{m-1}).$$

Beweis. Nach Lemma 1.3 ist $\pi_m(G; X_m) = 0$. Man berechne jetzt aus der exakten Folge des Lemmas 1.2 die Gruppe $\pi_m(G; X_{m-1})$ mit Hilfe des 1. Noetherschen Isomorphiesatzes.

Lemma 1.4. *Es sei für alle* m $\pi_{m-1}(X_m)=0$, $\pi_{m-1}(\mathrm{Ker}\, p_m)=0$ *und* $\mathrm{Ext}(G, \pi_m(\mathrm{Ker}\, p_m))=0$. *Dann ist* $\pi_{m-1}(G; \mathrm{Ker}\, w_m)\cong\pi_{m-1}(G; X)$.

Beweis. Die exakte Homotopiesequenz der Faserung w_m liefert:

$$\cdots\to\pi_m(G; X_m)\to\pi_{m-1}(G; \mathrm{Ker}\, w_m)\to\pi_{m-1}(G; X)\to\pi_{m-1}(G; X_m)\to\cdots.$$

Nach Lemma 1.3 ist aber $\pi_m(G; X_m)=0$ und $\pi_{m-1}(G; X_m)=0$. q.e.d.

Man folgert leicht aus Satz 1.1, Lemma 1.4 und Lemma 1.1 (auf die Gruppe $\pi_{m-1}(G; \mathrm{Ker}\, p_m)$ angewandt) den

Satz 1.3. *Es sei* X *ein unendlich gefaserter Raum,* G *eine abelsche Gruppe. Für alle* m *gelte* $\pi_{m+k}(\mathrm{Ker}\, p_m)=0$ $k\geqq 1$,

$$\pi_{m-1}(X_m)=0, \quad \pi_{m-1}(\mathrm{Ker}\, p_m)=0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{Ext}(G, \pi_m(\mathrm{Ker}\, p_m))=0.$$

Dann gibt die exakte Folge 1.1 *für jedes* m *zu einer exakten Folge* 1.2 *Anlaß:*

$$(1.2)\quad 0\to\mathfrak{Z}^m(G,X)\xrightarrow{\sigma_{m_*}}\mathfrak{C}^m(G,X)\xrightarrow{\partial_m}\mathfrak{Z}^{m-1}(G,X)\xrightarrow{i_{m_*}}\pi_{m-1}(G,X)\to 0.$$

Unter den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes 1.3 ist es sinnvoll, folgende Definition 1.1 zu treffen:

Definition 1.1. Es sei $d_m=\sigma_{m-1_*}\circ\partial_m$ *der durch die beiden exakten Folgen*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\to\mathfrak{Z}^m & \xrightarrow{\sigma_{m_*}} & \mathfrak{C}^m & \xrightarrow{\partial_m} & \mathfrak{Z}^{m-1} & \xrightarrow{i_{m_*}} & \pi_{m-1}\to 0 & & \\ & & & \searrow^{\mathrm{Id}} & & & & & \\ 0\to\mathfrak{Z}^{m-1} & \xrightarrow[\sigma_{m-1_*}]{} & \mathfrak{C}^{m-1} & \longrightarrow & \mathfrak{Z}^{m-2} & \longrightarrow & \pi_{m-2}\to 0 & & \end{array}$$

definierte Homomorphismus: $\mathfrak{C}^m\to\mathfrak{C}^{m-1}$.

Es gilt dann der *Hauptsatz*:

Satz 1.4. *Es sei für* $m\geqq 1$ $k\geqq 1$ $\pi_{m+k}(\mathrm{Ker}\, p_m)=0$, $\pi_{m-1}(X_m)=0$, $\pi_{m-1}(\mathrm{Ker}\, p_m)=0$ *und* $\mathrm{Ext}(G, \pi_m(\mathrm{Ker}\, p_m))=0$. *Dann gilt:*

1) $\mathrm{Ker}\, d_m=\mathfrak{Z}^m(G,X)$,

2) $d_{m-1}\circ d_m=0$,

3) $\pi_m(G,X)=\mathfrak{Z}^m(G,X)/d_{m+1}(\mathfrak{C}^{m+1}(G,X))$ $\quad m\geqq 2$.

$(\mathfrak{C}^m(G,X), d_m)$ ist also ein Kettenkomplex, dessen Homologiegruppen isomorph den Homotopiegruppen des unendlich gefaserten Raumes sind.

Beweis. Man benütze die Exaktheit der Folgen 1.2.

Die Voraussetzungen des Hauptsatzes sind sicher dann erfüllt, wenn wir über den unendlich gefaserten Raum folgendes annehmen:

α) Die Faser $\mathrm{Ker}\, p_m$ ist ein Eilenberg-MacLane-Raum $K(Q_m, m)$, also $\pi_i(\mathrm{Ker}\, p_m)=0$ $i\neq m$, $=Q_m$ für $i=m$.

β) $\pi_{m-1}(X_m)=0$.

γ) Für alle abelschen Gruppen G gilt $\mathrm{Ext}(G, Q_m)=0$.

Definition 1.2. Ein bogenweise zusammenhängender, unendlich gefaserter Raum X, der die obigen Bedingungen α), β), γ) erfüllt, heißt ein Copolyeder mit Gruppen $\{Q_m\}$.

Die Bedingung γ) ist gewiß dann erfüllt, wenn die Gruppen Q_m unendlich teilbar sind. [Anstatt über die Gruppen Q_m etwas vorauszusetzen, könnte man natürlich auch der Koeffizientengruppe G Bedingungen auferlegen, s. unten.]

Mit dieser Definition läßt sich der Hauptsatz 1.4 folgendermaßen fassen:

Satz 1.4'. *X sei ein Copolyeder, G eine abelsche Gruppe. Dann gilt: Die oben definierten Gruppen $\mathfrak{C}^m(G, X)$ und Homomorphismen d_m bilden einen Kettenkomplex $\mathfrak{C}(G, X)$, dessen Homologiegruppen isomorph zu den Homotopiegruppen $\pi_m(G, X)$ des Copolyeders sind (für $m \geqq 2$).*

Der Hauptsatz 1.4 gilt offenbar auch noch für Räume, welche nur die Voraussetzungen α) und β) erfüllen, falls man sich auf solche Koeffizientengruppen G beschränkt, welche die Bedingung $\mathrm{Ext}(G, Q_m)=0$ für alle m erfüllen. Diese Bedingung ist z.B. erfüllt, wenn wir als Koeffizientengruppe die unendlich zyklische Gruppe Z wählen. Diese Bemerkung trifft auch auf die Gültigkeit des folgenden Satzes 1.5 zu. Dieser Satz präzisiert den Satz 1.2.

Satz 1.5. *Für ein Copolyeder mit Gruppen Q_m und eine beliebige Koeffizientengruppe G gilt:*

1) $\pi_k(G; X_m)=0$ *für* $k \leqq m$,

2) $\pi_{m+1}(G; X_m) \cong \pi_{m+1}(G; \mathrm{Ker}\, p_{m+1}) / \partial \pi_{m+2}(G; X_{m+1})$;

dabei ist

$$\pi_{m+1}(G; \mathrm{Ker}\, p_{m+1}) \cong \mathrm{Hom}(G, G_{m+1}),$$

$$\partial \pi_{m+2}(G; X_{m+1}) \cong \pi_{m+2}(G; X_{m+1}) / p_{m+1_*} \pi_{m+2}(G; X_m),$$

$$\pi_k(G; X_m) \cong \pi_k(G; X_{m-1}) \quad \text{für} \quad k \geqq m+2.$$

Beweis. Man betrachte die zu p_{m+1} gehörige exakte Homotopiesequenz. Im Falle $k=m+1$ wende man außerdem das universelle Koeffiziententheorem für Homotopiegruppen an.

Wir erhalten also ein Schema der folgenden Art, in dem die Doppelpfeile Isomorphien bedeuten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\pi_1(X_1)=0 & & \pi_1(X_2)=0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\pi_2(X_1) & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
\pi_3(X_1) & & \pi_3(X_2) & & 0 & & 0 & & 0 \\
\pi_4(X_1) & \leftrightarrow & \pi_4(X_2) & & \pi_4(X_3) & & 0 & & 0 \\
\pi_5(X_1) & \leftrightarrow & \pi_5(X_2) & \leftrightarrow & \pi_5(X_3) & & \pi_5(X_4) & & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Es werde zum Schluß noch auf die duale Situation des Hauptsatzes 1.4 hingewiesen: Sei X ein Polyeder; $X_m \subset X$ das m-Gerüst. Man betrachtet dann

die unendliche Folge von Cofibrationen

$$X_0 \xrightarrow[i_1]{} X_1 \xrightarrow[i_2]{} X_2 \to \cdots \to X,$$

und führt zwei unendliche Folgen abelscher Gruppen ein:

$$Z^m(X; G) = \Pi(X/X_{m-1}, K(G, m)),$$

$$C^m(X, G) = \Pi(X_m/X_{m-1}, K(G, m)),$$

sowie den Randoperator $d_m: C^m(X, G) \to C^{m-1}(X, G)$. Es läßt sich dann leicht zeigen, daß $Z^m(X, G)$ eine Untergruppe von $C^m(X, G)$ ist. Wird weiter mit $H^m(X, G)$ die homotopische Cohomologiegruppe $\Pi(X, K(G, m))$ bezeichnet, so entspricht unserem Hauptsatz 1.4 über Copolyeder der folgende Satz über Polyeder:

1) $\operatorname{Ker} d_m \cong Z^m(X, G)$,

2) $d_{m-1} \circ d_m = 0$,

3) $H^m(X, G) \cong Z^m(X, G)/d_{m+1} C^{m+1}(X, G)$.

Der Gruppe $\mathfrak{Z}^m(G, X)$ entspricht somit dual die Gruppe $Z^m(X, G)$; ebenso entsprechen sich $\mathfrak{C}^m(G, X)$ und $C^m(X, G)$. In der Cohomologietheorie der Polyeder wird außerdem gezeigt, daß die hier homotopisch definierte Gruppe $C^m(X, G)$ isomorph ist zur üblichen simplizialen Cokettengruppe; d_m ist der simpliziale Corand und die Gruppe $Z^m(X, G)$ ist isomorph der Cozyklengruppe, $\{H^m\}$ den simplizialen Cohomologiegruppen.

§ 2. Der zu einem Copolyeder gehörige Kettenkomplex

Sei X ein Copolyeder. Da wir für ein solches definitionsgemäß $\pi_{m+1}(\operatorname{Ker} p_m) = 0$ voraussetzen, ist auch $\operatorname{Ext}(G, \pi_{m+1}(\operatorname{Ker} p_m)) = 0$ und nach dem Universellen Koeffiziententheorem für Homotopiegruppen somit

$$\pi_m(G; \operatorname{Ker} p_m) \overset{\eta}{\cong} \operatorname{Hom}(G, \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)) = \operatorname{Hom}(G, Q_m).$$

Der Isomorphismus η ist der folgende:

Ein Element $\xi \in \pi_m(G; \operatorname{Ker} p_m)$ wird durch eine Abbildung $f: K'(m, G) \to \operatorname{Ker} p_m$ repräsentiert. Der Satz von HUREWICZ zeigt: $\pi_m(K'(m, G)) \cong G$ und somit kann der induzierte Homomorphismus $f_*: \pi_m(K'(m, G)) \to \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)$ als Element von $\operatorname{Hom}(G, Q_m)$ aufgefaßt werden. Es ist dann $\eta(\xi) = f_*$. Anderseits wurde in §1 die Gruppe $\mathfrak{C}^m(G, X)$ als $\pi_m(G; \operatorname{Ker} p_m)$ definiert. Wir erhalten somit den

Satz 2.1. $\mathfrak{C}^m(G, X) \overset{\eta}{\cong} \operatorname{Hom}(G, \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)) = \operatorname{Hom}(G, Q_m)$.

Dies drückt also die $\mathfrak{C}^m(G, X)$ durch G und die $\pi_m(\operatorname{Ker} p_m)$ aus. Die Operatoren d_m wurden mit Hilfe der Faserungen σ_m definiert; σ_m ist die durch w_{m-1} über $\operatorname{Ker} p_m$ induzierte Faserung und es wurde dann $d_m = \sigma_{m-1_*} \circ \partial_m$ gesetzt. ∂_m ist der Randoperator der zur Faserung σ_m gehörigen Homotopiesequenz.

Wird nun ein Element $h \in \mathscr{C}^m(G, X)$ durch eine stetige Abbildung $f: K'(m, G) \to \operatorname{Ker} p_m$ repräsentiert, so kann man statt dessen auch ein Paar (f_1, f_2) betrachten:

$$\begin{array}{ccc} K'(m-1, G) & \xrightarrow{f_1} & * \\ \downarrow & & \downarrow \\ C\,K'(m-1, G) & \xrightarrow{f_2} & \operatorname{Ker} p_m . \end{array}$$

$\partial_m(h)$ erhält man durch Einbettung

$$\begin{array}{ccccc} K'(m-1, G) & \xrightarrow{f_1} & * & \longrightarrow & \operatorname{Ker} w_m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_m} \\ C\,K'(m-1, G) & \xrightarrow{f_2} & \operatorname{Ker} p_m & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \operatorname{Ker} p_m \end{array}$$

und nachfolgende Ersetzung des Paares $(*, f_2)$ durch ein dazu homotopes Paar $(f_1', *)$. $\partial_m(h)$ wird dann durch $f_1': K'(m-1, G) \to \operatorname{Ker} \sigma_m$ dargestellt; wegen $\operatorname{Ker} \sigma_m = \operatorname{Ker} w_{m-1}$ und $d_m = \sigma_{m-1_*} \circ \partial_m$ das Element $d_m(d)$ durch die zusammengesetzte Abbildung

$$K'(m-1, G) \xrightarrow{f_1'} \operatorname{Ker} w_{m-1} \xrightarrow{\sigma_{m-1}} \operatorname{Ker} p_{m-1}.$$

Identifizieren wir auf Grund von Satz 2.1 die Gruppe $\mathscr{C}^m(G, X)$ mit der Gruppe $\operatorname{Hom}(G, G_m)$, so ordnet $d_m(h)$ einem Element $g \in G$, dargestellt durch

$$S_{m-1} \xrightarrow{\gamma} K'(m-1, G),$$

das durch die Zusammensetzung der Abbildungen

$$S_{m-1} \xrightarrow{\gamma} K'(m-1, G) \xrightarrow{f_1'} \operatorname{Ker} w_{m-1} \xrightarrow{\sigma_{m-1}} \operatorname{Ker} p_{m-1}$$

definierte Element $(d_m(h))(g) \in Q_{m-1} = \pi_{m-1}(\operatorname{Ker} p_{m-1})$ zu.

Anderseits induziert p_{m-1} über $\operatorname{Ker} p_m$ eine Faserung τ_{m-1} mit $\operatorname{Ker} \tau_{m-1} = \operatorname{Ker} p_{m-1}$. Der Randoperator $q_m: \pi_m(\operatorname{Ker} p_m) \to \pi_{m-1}(\operatorname{Ker} \tau_{m-1})$, der in der Homotopiesequenz der Faserung τ_{m-1} auftritt, induziert einen Homomorphismus $q_{m_*}: \operatorname{Hom}(G, \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)) \to \operatorname{Hom}(G, \pi_{m-1}(\operatorname{Ker} p_{m-1}))$ wegen $\operatorname{Ker} \tau_{m-1} = \operatorname{Ker} p_{m-1}$. Wir werden folgenden Satz beweisen:

Satz 2.2. *Identifiziert man* $\mathscr{C}^m(G, X)$ *mit* $\operatorname{Hom}(G, \pi_m(\operatorname{Ker} p_m)) = \operatorname{Hom}(G, Q_m)$, *so ist* $d_m = q_{m_*}$ *für* $m \geqq 2$.

Beim Beweis des Satzes 2.2 benötigen wir das bekannte

Lemma 2.1. *Sei* $K'(m-1, G)$ *ein Moore-Raum und* $\Sigma K'(m-1, G) = K'(m, G)$ *seine Suspension. Sei* $E: \pi_{m-1}(K'(m-1, G)) \to \pi_m(K'(m, G))$ *der Suspensionshomomorphismus. Dann ist* E *ein Isomorphismus.*

Beweis des Satzes 2.2. Wir haben zu zeigen: Für jedes $h \in \mathscr{C}^m(G, X) = \operatorname{Hom}(G, Q_m)$ und jedes $g \in G$ ist $(d_m(h))(g) = (q_{m_*}(h))(g)$, d.h. die Elemente $d_m(h)$ und $q_{m_*}(h)$ stellen denselben Homomorphismus $G \to Q_{m-1}$ dar. h werde durch die Abbildung $f: K'(G, m) \to \operatorname{Ker} p_m$ repräsentiert: $[f] = \xi$, $\eta(\xi) = f_* = h$. Auf Grund von Lemma 2.1 dürfen wir annehmen, $g \in G$ werde durch $\gamma: S_{m-1} \to K'(m-1, G)$, resp. $\Sigma\gamma: S_m \to K'(m, G)$ dargestellt. Vor Satz 2.2 wurde bereits

eine Beschreibung des Elementes $(d_m(h))(g)$ gegeben. Wir betrachten nun $(q_{m_*}(h))(g)$. Nach der Definition von q_{m_*} ist

$$(q_{m_*}(h))(g)=(q_m\circ h)(g)=q_m(h(g))=q_m([f\circ \Sigma\gamma]).$$

Ersetzen wir wie vor Satz 2.2 die Abbildung f durch das Paar $(*, f_2)$, so ist auf Grund der geometrischen Definitionen klar, daß $[f\circ\Sigma\gamma]$ auch durch das nachfolgende Diagramm repräsentiert wird.

$$\begin{array}{ccccc} S_{m-1} & \xrightarrow{\gamma} & K'(m-1,G) & \xrightarrow{f_1} & * \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C\,S_{m-1} & \xrightarrow{C\gamma} & C\,K'(m-1,G) & \xrightarrow{f_2} & \operatorname{Ker} p_m. \end{array}$$

Da q_m der Randoperator der Faserung τ_{m-1} ist, erhalten wir $q_m([f\circ\Sigma\gamma])$ durch Einbetten:

$$\begin{array}{ccccccc} S_{m-1} & \xrightarrow{\gamma} & K'(m-1,G) & \xrightarrow{f_1} & * & \xrightarrow{i_1} & p_{m-1}^{-1}(\operatorname{Ker} p_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{m-1}} \\ C\,S_{m-1} & \xrightarrow{C\gamma} & C\,K'(m-1,G) & \xrightarrow{f_2} & \operatorname{Ker} p_m & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \operatorname{Ker} p_m \end{array}$$

und eine Homotopie $(i_1\circ f_1, f_2)\sim(f_1'', *)$. Es ist $q_m([f\circ\Sigma\gamma])=[f_1''\gamma]\in \pi_{m-1}(\operatorname{Ker}\tau_{m-1})=\pi_{m-1}(\operatorname{Ker} p_{m-1})=Q_{m-1}$. Den oberen Teil des letzten Diagramms kann man noch erweitern, indem man die durch w_{m-2} über $p_{m-1}^{-1}(\operatorname{Ker} p_m)$ induzierte Faserung ρ_{m-2} einführt:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \operatorname{Ker} w_m \\ & & & & & {\scriptstyle i_1'}\nearrow & \downarrow{\scriptstyle \rho_{m-2}} \\ S_{m-1} & \xrightarrow{\gamma} & K'(m-1,G) & \xrightarrow{f_1} & * & \xrightarrow{i_1} & p_{m-1}^{-1}(\operatorname{Ker} p_m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{m-1}} \\ C\,S_{m-1} & \xrightarrow{C\gamma} & C\,K'(m-1,G) & \xrightarrow{f_2} & \operatorname{Ker} p_m & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \operatorname{Ker} p_m. \end{array}$$

Die vorhin betrachtete Homotopie $(i_1\circ f_1, f_2)\sim(f_1'', *)$ läßt sich überlagern: $(i_1'\circ f_1, f_2)\sim(f_1', *)$; und zwar so, daß das Dreieck stets kommutativ bleibt, also $\rho_{m-2}\circ f_1'=f_1''$ ist.

Da auf Grund der Definitionen von τ_{m-1}, ρ_{m-2} und σ_m gilt:

$$\tau_{m-1}\circ\rho_{m-2}=\sigma_m,\quad \rho_{m-2}|\operatorname{Ker}\sigma_m=w_{m-2}|\operatorname{Ker}\sigma_m=\sigma_{m-1}\quad\text{und}\quad \tau_{m-1}\circ f_1''=*,$$

so folgt

$$*=\tau_{m-1}\circ f_1''=\tau_{m-1}\circ\rho_{m-2}\circ f_1'=\sigma_m\circ f_1'.$$

f_1' bildet somit $K'(m-1, G)$ in $\operatorname{Ker}\sigma_m$ ab, deshalb dürfen wir

$$f_1''=\rho_{m-2}\circ f_1'=\rho_{m-2}|\operatorname{Ker}\sigma_m\circ f_1'=\sigma_{m-1}\circ f_1'$$

setzen. Somit dürfen wir $q_m([f\circ\Sigma\gamma])$ durch die Abbildung

$$S_{m-1}\xrightarrow{\gamma}K'(m-1,G)\xrightarrow{f_1'}\operatorname{Ker}\sigma_m\xrightarrow{\sigma_{m-1}}\operatorname{Ker} p_{m-1}$$

repräsentieren. Da aber nach Definition von σ_m auch $\operatorname{Ker}\sigma_m=\operatorname{Ker} w_{m-1}$ gilt, so ist dies diejenige Abbildung, von der vor Satz 2.2 gezeigt wurde, daß sie $(d_m(h))(g)$ darstellt. q.e.d.

Nach Definition ist $\mathscr{C}^m(Z, X)=\pi_m(\operatorname{Ker} p_m)=\pi_m(K(Q_m, m))=Q_m$. Für den zugehörigen Randoperator d_m: $\mathscr{C}^m(Z, X)\to\mathscr{C}^{m-1}(Z, X)$ schreiben wir q_m. Der Kettenkomplex $(\mathscr{C}^m(Z, X), d_m)$ ist also gleich dem Kettenkomplex (Q_m, q_m).

Definition. Unter dem zu einem Copolyeder X mit Gruppen Q_m gehörigen „ganzzahligen" Kettenkomplex $\mathscr{C}(X)$ verstehen wir den Kettenkomplex (Q_m, q_m).

Mit Hilfe dieses Kettenkomplexes lauten nun die Sätze 2.1 und 2.2 dieses Paragraphen zusammengefaßt so:

Satz 2.3. *Sei X ein Copolyeder und G eine abelsche Gruppe. Dann ist der Kettenkomplex $(\mathscr{C}^m(G, X), d_m)$ isomorph dem Kettenkomplex $(\operatorname{Hom}(G, \mathscr{C}^m(X)), q_{m*})=(\operatorname{Hom}(G, \mathscr{C}(X)), q_*)$.*

§3. Konstruktion eines Copolyeders zu vorgegebenem Kettenkomplex

Sei

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{q_{m+1}} Q_{m+1}$$

ein *endlicher* Kettenkomplex. Ferner sei für alle abelschen Gruppen G $\operatorname{Ext}(G, Q_k)=0$ $k=1,\ldots, m+1$. In Abschnitt 3a) werden wir zu jedem solchen Kettenkomplex ein Copolyeder

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} X_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_m} X_m \longrightarrow *$$

konstruieren, dessen Gruppen $\mathscr{C}^l(Z, X)=Q_l$ und dessen Differentialoperatoren d_l: $\mathscr{C}^l(Z, X)\to\mathscr{C}^{l-1}(Z, X)$ die Homomorphismen q_l sind für $l\leqq m+1$. Für $l>m+1$ sind sie $=0$. Die Konstruktion wird so durchgeführt, daß sie einem beliebigen endlichen Kettenkomplex ein System von Räumen und Abbildungen

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_m} X_m \longrightarrow *$$

zuordnet, das noch die Eigenschaften $\alpha)$, $\beta)$ eines Copolyeders besitzt (siehe Definition 1.2).

Definition 3.1. Eine abelsche Gruppe G heißt bezüglich einem Kettenkomplex

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \longleftarrow \cdots$$

zulässig, falls $\operatorname{Ext}(G, Q_l)=0$ *ist für* $l=1, 2, \ldots$.

Beschränkt man sich auf zulässige abelsche Gruppen G, so können die Homotopiegruppen $\pi_n(G, X)$ auch für Räume, welche nur die Eigenschaften $\alpha)$ und $\beta)$ besitzen, nach den Methoden von §1 und §2 berechnet werden. Um an diese Tatsache zu erinnern, werden wir im folgenden stets von zulässigen abelschen Gruppen sprechen; für ein Copolyeder ist natürlich jede abelsche Gruppe zulässig.

In Abschnitt 3b) werden wir den Begriff „Copolyeder" etwas abschwächen und den Begriff „verallgemeinerte Copolyeder" einführen. Die Homotopiegruppen eines verallgemeinerten Copolyeders sind ebenfalls die Homologiegruppen eines gewissen Kettenkomplexes, der für verallgemeinerte Copolyeder genau gleich erhalten wird wie für Copolyeder.

Ist eine unendliche Differentialfolge

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \longleftarrow \cdots$$

vorgelegt, so werden wir dazu ein verallgemeinertes Copolyeder konstruieren, das (Q_m, q_m) als Kettenkomplex, d.h. das die Gruppen Q_k als Kettengruppen und die Homomorphismen q_k als Differentialoperatoren besitzt.

3a) Endliche Copolyeder

Gegeben ist eine endliche Differentialfolge

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{q_{m+1}} Q_{m+1}.$$

Gesucht ist eine endliche Folge von Faserungen

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} X_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{p_m} X_m \longrightarrow *$$

so, daß Ker $p_l = K(Q_l, l)$ ein Eilenberg-MacLane-Raum ist und der zur induzierten Faserung

$$\tau_{l-1}\colon\ p_{l-1}^{-1}(\operatorname{Ker} p_l) \to \operatorname{Ker} p_l,$$
$$\tau_{l-1} = p_{l-1} | p_{l-1}^{-1}(\operatorname{Ker} p_l)$$

gehörige Randoperator ∂_l der Homotopiesequenz gerade gleich dem Homomorphismus q_l wird (s. den Abschnitt vor Satz 2.2).

Die Art der Konstruktion einer solchen Folge von Faserungen wird nahegelegt durch den Satz (HILTON [5] p. 43):

Ist $p\colon X \to Y$ eine Faserung mit $\pi_0(Y) = \pi_1(Y) = 0$ und Ker $p = K(G, n-1)$, so ist p algebraisch äquivalent einer Faserung, die durch eine stetige Abbildung $f\colon Y \to K(G, n)$ induziert wird. ($K(G, n)$ wird als Basis der Faserung der vom Basispunkt auslaufenden Wege betrachtet.)

Zwei Faserungen $p'\colon X' \to Y', p\colon X \to Y$ mit denselben (oder homotopieäquivalenten) Basen Y', Y und denselben (oder homotopieäquivalenten) Fasern F', F heißen dabei *algebraisch äquivalent*, falls ein homotopiekommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F' & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & F \\ {\scriptstyle i'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y' & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & Y \end{array}$$

existiert. Offenbar sind die Homotopiegruppen von X' und X dieselben, denn das Diagramm induziert einen Homomorphismus der zu den Faserungen p' und p gehörigen Homotopiesequenzen. Das Fünferlemma (EILENBERG-STEENROD p. 16) ergibt die Isomorphie $\pi_n(X') \simeq \pi_n(X)$.

Das folgende Lemma stellt einen Zusammenhang her zwischen dem Randhomomorphismus $\partial: \pi_n(Y) \to \pi_{n-1}(\operatorname{Ker} p)$ und dem induzierten Homomorphismus $f_*: \pi_n(Y) \to \pi_n(K(G, n))$.

Lemma 3.1. *Sei $\rho: E \to K$ eine Faserung, $f: Y \to K$ eine stetige Abbildung, $p: X \to Y$ die durch f über Y induzierte Faserung, ∂ der zur Homotopiesequenz von p gehörige Randoperator, ∂' der analog zu ρ gehörige Randoperator. Dann ist $\partial = \partial' \circ f_*$.*

$$\partial: \pi_n(Y) \to \pi_{n-1}(\operatorname{Ker} p) = \pi_{n-1}(\operatorname{Ker} \rho).$$

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ Y & \xrightarrow{f} & K \end{array}$$

vor; g ist auf den Fasern die identische Abbildung. (g, f) induziert einen Homomorphismus der Homotopiesequenz von p in diejenige von ρ.

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots \to & \pi_n(X) & \to & \pi_n(Y) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(\operatorname{Ker} p) & \to & \pi_{n-1}(X) & \to \cdots \\ & {\scriptstyle g_*}\downarrow & & {\scriptstyle f_*}\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & {\scriptstyle g_*}\downarrow & \\ \cdots \to & \pi_n(E) & \to & \pi_n(K) & \xrightarrow{\partial'} & \pi_{n-1}(\operatorname{Ker} p) & \to & \pi_{n-1}(E) & \to \cdots . \end{array}$$

Daraus liest man unmittelbar die behauptete Beziehung $\partial = \partial' \circ f_*$ ab. *q.*e.d.

Lemma 3.2. *Es sei Y ein Raum mit $\pi_l(Y) = 0$ für $l \leqq n-1$. G sei eine abelsche Gruppe. Dann existiert eine Faserung $p: X \to Y$ über Y als Basis und einem Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, n-1)$ als Faser derart, daß $\partial: \pi_n(Y) \to \pi_{n-1}(\operatorname{Ker} p) = G$ gleich einem vorgegebenen Homomorphismus $\varphi: \pi_n(Y) \to G$ ist.*

Beweis. Wir betrachten einen Eilenberg-MacLane-Raum $K(G, n)$ und die Faserung $\rho: EK(G, n) \to K(G, n)$ der vom Basispunkt auslaufenden Wege. Da $EK(G, n)$ zusammenziehbar ist, folgt, daß $\partial': \pi_n(K(G, n)) \to \pi_{n-1}(\Omega K(G, n))$ ein Isomorphismus ist. Ist nun $f: Y \to K(G, n)$ eine stetige Abbildung, so induziert sie einen Homomorphismus $f_*: \pi_n(Y) \to \pi_n(K(G, n)) = G$. Wegen $\pi_l(Y) = 0$ für $l \leqq n-1$ steht die Menge der Homotopieklassen $\Pi(Y, K(G, n))$ in bijektiver Beziehung zu $\operatorname{Hom}(H_n(Y), G) = \operatorname{Hom}(\pi_n(Y), G)$. Es existiert somit genau eine Klasse $[f]$ derart, daß $\partial' \circ f_* = \varphi$ wird: $f_* = \partial'^{-1} \circ \varphi$. Es sei nun $p: X \to Y$ durch f induziert. Nach Lemma 3.1 haben wir $\partial = \partial' \circ f_* = \varphi$. q.e.d.

Um zu einer endlichen Differentialfolge das zugehörige Copolyeder zu konstruieren, werden wir, geleitet durch den obenzitierten Satz, Abbildungen

in Eilenberg-MacLane-Räume betrachten und dabei die Auswahl der Abbildungen durch Anwendung von Lemma 3.2 bestimmen.

Sei

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \xleftarrow{q_3} \cdots \xleftarrow{q_{m+1}} Q_{m+1}$$

die Differentialfolge. Zuerst geben wir explizite die Konstruktion der Faserung $p_m: X_{m-1} \to X_m$ an; nachher zeigen wir, wie man induktiv von der bereits konstruierten Folge

$$X_r \xrightarrow{p_{r+1}} \cdots \xrightarrow{p_m} X_m \to * \quad \text{zur Folge} \quad X_{r-1} \xrightarrow{p_r} X_r \xrightarrow{p_{r+1}} \cdots \xrightarrow{p_m} X_m \to *$$

gelangt. Nach endlich vielen solchen Schritten erhält man das gesuchte Copolyeder $X \to X_1 \to \cdots \to X_m \to *$. Wir setzen $X_m = K(Q_{m+1}, m+1)$ und betrachten den Homomorphismus $\varphi = q_{m+1}: Q_{m+1} \to Q_m$. Da $\pi_l(X_m) = 0$ für $l \leqq m$, so existiert nach Lemma 3.2 eine Faserung $p_m: X_{m-1} \to X_m$ über $Y = X_m$ so, daß $\partial: \pi_{m+1}(X_m) = Q_{m+1} \to Q_m$ gleich $\varphi = q_{m+1}$ wird.

Daraus folgern wir:

1) $\partial \pi_{m+1}(X_m) = \operatorname{Im} q_{m+1} \subset \operatorname{Ker} q_m$.

Die exakte Homotopiesequenz der Faserung p_m ergibt:

$$\cdots \to \pi_{m+l+1}(X_m) \to \pi_{m+l}(\operatorname{Ker} p_m) \xrightarrow{i_*} \pi_{m+l}(X_{m-1}) \xrightarrow{p_{m_*}} \pi_{m+l}(X_m) \xrightarrow{\partial} \pi_{m+l-1}(\operatorname{Ker} p_m) \to \cdots.$$

$l = 1$:

$$\cdots \to 0 \to 0 \xrightarrow{i_*} \pi_{m+1}(X_{m-1}) \xrightarrow{p_{m_*}} Q_{m+1} \xrightarrow{q_{m+1}} Q_m \to \cdots,$$

also

$$\pi_{m+1}(X_{m-1}) = \operatorname{Ker} q_{m+1}.$$

2) $l = 0$:

$$\cdots \to Q_{m+1} \xrightarrow{q_{m+1}} Q_m \xrightarrow{i_*} \pi_m(X_{m-1}) \to 0,$$

also

$$\pi_m(X_{m-1}) = Q_m / \operatorname{Im} q_{m+1};$$

und die kanonische Projektion $Q_m \to Q_m / \operatorname{Im} q_{m+1}$ wird durch die Einbettung der Faser bewirkt.

3) Ebenso sieht man:

Für $l \neq 0, 1$ ist $\pi_{m+l}(X_{m-1}) = 0$ d.h. die übrigen Homotopiegruppen von X_{m-1} sind alle $= 0$; insbesondere $\pi_k(X_{m-1}) = 0$ für $k \leqq m-1$.

4) Es ist $\operatorname{Ker} p_m = K(Q_m, m)$ ein Eilenberg-MacLane-Raum nach Konstruktion von p_m.

Im folgenden Lemma führen wir nun den angekündigten Induktionsschritt aus:

Lemma 3.3. *Es sei eine Folge von Faserungen gegeben*

$$X_r \xrightarrow{p_{r+1}} X_{r+1} \to \cdots \xrightarrow{p_m} X_m \to *$$

für welche gilt:

1) $\partial\,\pi_{l+1}(X_l)=\operatorname{Im} q_{l+1}\subset\operatorname{Ker} q_l$ für $l\geqq r+1$.

2) $\pi_l(X_{l-1})=Q_l/\operatorname{Im} q_{l+1}$ für $r+1\leqq l\leqq m$.

Die kanonische Projektion $Q_l\to\pi_l(X_{l-1})=Q_l/\operatorname{Im} q_{l+1}$ *werde durch die Einbettung der Faser* $\operatorname{Ker} p_l\to X_{l-1}$ *induziert.*

3) $\pi_l(X_s)=0$ für $r\leqq s\leqq m$, $l\leqq s$.

4) $\operatorname{Ker} p_s=K(Q_s, s)$ für $s\geqq r+1$.

Dann existiert über X_r *als Basis eine Faserung* $p_r\colon X_{r-1}\to X_r$ *so, daß auch für die erweiterte Folge*

$$X_{r-1}\xrightarrow{p_r}X_r\xrightarrow{p_{r+1}}X_{r+1}\to\cdots\xrightarrow{p_m}X_m\to *$$

die entsprechenden vier Aussagen 1)–4) *gelten.*

Beweis. Da nach Voraussetzung 3) gilt: $\pi_l(X_r)=0$ für $l\leqq r$, so existiert nach Lemma 3.2 über X_r eine Faserung $p_r\colon X_{r-1}\to X_r$ mit einem Eilenberg-MacLane-Raum $K(Q_r, r)$ als Faser und einem Randhomomorphismus $\partial\colon\pi_{r+1}(X_r)\to\pi_r(\operatorname{Ker} p_r)=Q_r$, der beliebig vorgegeben werden kann.

Nach Voraussetzung 2) gilt: $\pi_{r+1}(X_r)=Q_{r+1}/\operatorname{Im} q_{r+2}$ undwegen $q_{r+1}\circ q_{r+2}=0$ gilt $\operatorname{Im} q_{r+2}\subset\operatorname{Ker} q_{r+1}$, somit existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $q'_{r+1}\colon\pi_{r+1}(X_r)\to Q_r$ so, daß $q_{r+1}=q'_{r+1}\circ i_*$ ist. $i_*\colon Q_{r+1}\to\pi_{r+1}(X_r)$ ist die kanonische Projektion; sie wird nach Voraussetzung 2) durch die Einbettung der Faser $\operatorname{Ker} p_{r+1}\to X_r$ induziert.

Wir wählen jetzt die Faserung p_r gemäß Lemma 3.2 so, daß $\partial=q'_{r+1}$ wird. Damit haben wir die erweiterte Folge von Faserungen definiert und es sind jetzt noch die Aussagen 1)–4) nachzuprüfen.

Wir haben r durch $r-1$ zu ersetzen. Die Aussage 4) ist richtig nach Konstruktion der Faserung. 1) behauptet $\partial\,\pi_{r+1}(X_r)=\operatorname{Im} q_{r+1}$. Dies folgt aus $\partial=q'_{r+1}$ und $\operatorname{Im} q'_{r+1}=\operatorname{Im} q_{r+1}$.

Um noch 2) und 3) zu erhalten, bedienen wir uns der exakten Homotopiesequenz von p_r. Sie ergibt z.B.

$$\cdots\to\pi_{r+1}(X_r)\xrightarrow{\partial}\pi_r(\operatorname{Ker} p_r)\xrightarrow{i_*}\pi_r(X_{r-1})\xrightarrow{p_{r_*}}\pi_r(X_r)\to 0\to\cdots.$$

Da nach Voraussetzung 3) $\pi_r(X_r)=0$ ist und 1) $\partial\,\pi_{r+1}(X_r)=\operatorname{Im} q_{r+1}$ und 4) $\pi_r(\operatorname{Ker} p_r)=Q_r$ schon verifiziert wurden, folgt

$$\pi_r(X_{r-1})=Q_r/\operatorname{Im}\partial=Q_r/\operatorname{Im} q_{r+1}.$$

Die kanonische Projektion wird ersichtlich durch die Einbettung der Faser induziert. Damit ist 2) verifiziert.

Um 3) zu zeigen, betrachten wir

$$\cdots\to\pi_{s+1}(X_r)\to\pi_s(\operatorname{Ker} p_r)\xrightarrow{i_*}\pi_s(X_{r-1})\xrightarrow{p_{r_*}}\pi_s(X_r)\to\cdots.$$

Für $s\leqq r-1$ ist $\pi_s(\operatorname{Ker} p_r)=0$ und nach Induktionsvoraussetzung auch $\pi_s(X_r)=0$. Daraus folgt $\pi_s(X_{r-1})=0$ für $s\leqq r-1$. q.e.d.

Es ist auch auf Grund von 3) und 4) klar, daß

$$X \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_m \to *$$

ein Copolyeder ist.

Bezüglich einer zulässigen Koeffizientengruppe G ist

$$\mathscr{C}^l(G, X) = \pi_l(G, \operatorname{Ker} p_l) = \pi_l(G, K(Q_l, l)) = \operatorname{Hom}(G, Q_l).$$

d_l ist nach Satz 2.2 gleich q_{l_*}: $\operatorname{Hom}(G, Q_l) \to \operatorname{Hom}(G, Q_{l-1})$. Für $G=Z$ erhalten wir $\mathscr{C}^l(Z, X) = Q_l$ und $d_l = q_l$.

3b) Verallgemeinerte Copolyeder

Es sei eine Folge von Räumen und Abbildungen

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & X & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & X & \to \cdots \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & {\scriptstyle w_1}\downarrow & & {\scriptstyle w_2}\downarrow & \\ X & \xrightarrow{p_1} & X_1 & \xrightarrow{p_2} & X_2 & \to \cdots \end{array}$$

gegeben, mit $w_n = p_n \circ p_{n-1} \circ \cdots \circ p_1$. $\operatorname{Ker} w_n$ bezeichne das Urbild des Basispunktes $* \in X_n$ bezüglich der Abbildung w_n; analog sei $\operatorname{Ker} p_n = p_n^{-1}(*) \subset X_{n-1}$.

Definition. Ein System (X_n, p_n) von Räumen und Abbildungen heißt ein verallgemeinertes Copolyeder, falls gilt:

1) $\operatorname{Ker} p_n$ *ist ein Eilenberg-MacLane-Raum* $K(Q_n, n)$.

2) *Für alle* $m \geqq 1$ *ist* $\pi_{m-1}(X_m) = 0$.

3) *Für alle abelschen Gruppen* G *gilt* $\operatorname{Ext}(G, Q_m) = 0$.

4) *Setzen wir* $\mathscr{Z}^j(G, X) = \pi_j(G, \operatorname{Ker} w_j)$, $\mathscr{C}^j(G, X) = \pi_j(G, \operatorname{Ker} p_j)$, *so existiere für jedes* $j \geqq 2$ *und jede abelsche Gruppe* G *eine exakte Folge*

$$0 \to \mathscr{Z}^j(G, X) \xrightarrow{\sigma_j} \mathscr{C}^j(G, X) \xrightarrow{\partial_j} \mathscr{Z}^{j-1}(G, X) \to \pi_{j-1}(G, X) \to 0.$$

Die unter 4) postulierte exakte Folge entspricht der Folge 1.2. Man kann wie dort $d_j = \sigma_{j-1} \circ \partial_j$ setzen und erhält für verallgemeinerte Copolyeder den Hauptsatz von § 1:

1) $\operatorname{Ker} d_j = \mathscr{Z}^j(G, X)$,

2) $d_{j-1} \circ d_j = 0$,

3) $\pi_j(G, X) = \mathscr{Z}^j(G, X) / d_{j+1} \mathscr{C}^{j+1}(G, X)$.

Wir werden in diesem Abschnitt zu jedem *unendlichen* Kettenkomplex

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \xleftarrow{q_3} Q_3 \leftarrow \cdots,$$

dessen Gruppen die Eigenschaft haben, daß für alle abelschen Gruppen G $\operatorname{Ext}(G, G_j) = 0$ ist, ein verallgemeinertes Copolyeder konstruieren mit $\mathscr{C}^j(Z, X) = Q_j$, $d_j = q_j$ und allgemeiner: $\mathscr{C}^j(G, X) = \operatorname{Hom}(G, Q_j)$ und $d_j = q_{j_*}$.

Der Begriff des verallgemeinerten Copolyeders unterscheidet sich von demjenigen des Copolyeders durch die Tatsache, daß die Abbildungen p_j und w_j

keine Faserungen zu sein brauchen. Es steht somit die gewöhnliche exakte Homotopiesequenz nicht zur Verfügung; die exakte Folge 1.2 kann nicht bewiesen werden und wird deshalb unter 4) in der Definition des verallgemeinerten Copolyeders postuliert.

Wie früher, gilt auch hier: Wir können zu einem *beliebigen* Kettenkomplex ein System (X_n, p_n) von Räumen und Abbildungen konstruieren, das die Eigenschaften 1), 2), 4) eines verallgemeinerten Copolyeders besitzt und dessen Homotopiegruppen mit Koeffizienten in einer zulässigen abelschen Gruppe mit denselben Methoden berechnet werden können.

Eine wichtige Tatsache wird es uns ermöglichen, von dem im folgenden konstruierten System von Räumen und Abbildungen zu beweisen, daß es ein verallgemeinertes Copolyeder ist: Wir werden zu jedem natürlichen m ein „approximierendes" Copolyeder

$$X_{0\,L(m)} \to X_{1\,L(m)} \to \cdots \to X_{L(m)\,L(m)} \to *$$

finden können, mit

$$\mathfrak{X}^m(G, X_{0\,L(m)}) \cong \mathfrak{X}^m(G, X) \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}^m(G, X_{0\,L(m)}) \cong \mathfrak{C}^m(G, X).$$

Die exakte Folge 1.2 dieses „approximierenden" Copolyeders liefert dann z. B. die unter 4) postulierte Folge des verallgemeinerten Copolyeders. Der Index $L(m)$ ist nicht eindeutig bestimmt; verschiedene „approximierende" Copolyeder liefern aber isomorphe Folgen, falls die Indices $L(m)$ genügend groß sind. Wir haben dies als die duale Erscheinung der Tatsache zu betrachten, daß die Cohomologie eines Polyeders in der Dimension m isomorph ist derjenigen eines k-Gerüstes für $k \geqq m+1$.

Wir geben jetzt eine Übersicht, wie wir die Konstuktion durchführen werden. Sei

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \leftarrow \cdots$$

der gegebene Kettenkomplex. Für jedes $m \geqq 2$ betrachten wir den endlichen Kettenkomplex

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \leftarrow \cdots \xleftarrow{q_m} Q_m.$$

Nach dem vorhergehenden Abschnitt 3a) können wir somit für jedes $m \geqq 2$ ein zugehöriges „endliches" Copolyeder $X_{0\,m-1} \to X_{1\,m-1} \to \cdots \to X_{m-1\,m-1}$ finden. Aus diesen „Abschnittscopolyedern" möchten wir ein unendliches Schema der nachfolgenden Art aufbauen, in dem die Abbildungen $i_{l\,j}$ *Inklusionen* und sogar *Cofibrationen* sind, während die $p_{l\,k}$ *Faserungen* sind.

$$\begin{array}{ccccccc}
X_{00} & \xrightarrow{i_{01}} & X_{01} & \xrightarrow{i_{02}} & X_{02} & \xrightarrow{i_{03}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p_{11}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{12}} & & \\
 & & X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12} & \xrightarrow{i_{13}} & \cdots \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{22}} & & \\
 & & & & X_{22} & \xrightarrow{i_{23}} & \cdots
\end{array}$$

Die Mengen

$$X_k = \bigcup_{l \geqq k} X_{kl}$$

versehen mit einer geeigneten Topologie und die durch die p_{kl} definierten Abbildungen dieser Mengen sollten das gesuchte verallgemeinerte Copolyeder ergeben. – Dies gelingt aber nicht auf so direktem Wege, denn erstens ist $X_{m-1\,m-1}$ nur homotopieäquivalent zu $\operatorname{Ker} p_{mm}$ und nicht homöomorph. Somit kann das m-te Abschnittscopolyeder nicht ohne weiteres in das $m+1$-te Copolyeder eingebettet werden. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, werden wir gewisse Abbildungszylinder benützen. Dann sind aber die Abbildungen p_{kl} keine Faserungen mehr. Zweitens müssen wir den Mengen

$$X_k = \bigcup_{l \geqq k} X_{kl}$$

eine Topologie derart aufprägen, daß wir die Homotopieeigenschaften der Teilräume X_{kl} mit denjenigen des Gesamtraumes verknüpfen können. Um diesen „Grenzübergang" durchzuführen, werden wir die oben erwähnten Abbildungszylinder durch die geometrischen Realisationen ihrer singulären Komplexe ersetzen. Diese besitzen bekanntlich dieselben Homotopiegruppen wie die Ausgangsräume. Die Räume X_{kl} werden also durch CW-Komplexe ersetzt;

$$X_k = \bigcup_{l \geqq k} X_{kl}$$

wird ebenfalls ein CW-Komplex sein, der die X_{kl} als Teilkomplexe enthält. Hier wird dann der Satz ‚daß eine kompakte Menge eines CW-Komplexes stets in einem endlichen Teilkomplex enthalten ist, die gewünschte Verknüpfung der Homotopieeigenschaften der Teilräume X_{kl} mit denjenigen des ganzen Raumes X_k herstellen. Aus den Resultaten des Anhangs (=§ 5) folgt, daß die ursprünglichen Räume X_{kl} den Homotopietyp eines CW-Komplexes besitzen; durch den eben beschriebenen Übergang zu den zugehörigen geometrischen Realisationen der singulären Komplexe gehen also keine Homotopieeigenschaften verloren. Für die Konstruktion des verallgemeinerten Copolyeders ist dies allerdings ohne Belang, da die Homotopiegruppen eines Raumes ohnehin isomorph sind zu den Homotopiegruppen des zugehörigen singulären Polyeders.

Um nun dies im einzelnen durchzuführen, geben wir uns die Räume $X_{kk} = K(Q_{k+1}, k+1)$ als ein für allemal, fest gewählte metrische Polyeder vor. Dann wird nach Abschnitt a) das Copolyeder (X'_{01}, p'_{11}) so konstruiert, daß die Faser ein $K(Q_1, 1)$-Raum und der Randoperator der Faserung in der Dimension 2 $\partial: \pi_2(X_{11}) \to \pi_1(\operatorname{Ker} p'_{11})$ gleich $q_2: Q_2 \to Q_1$ ist. Die Faser $\operatorname{Ker} p'_{11}$ ist homotopieäquivalent zum festgewählten CW-Komplex $X_{00} = K(Q_1, 1)$, denn sie ist gleich $\Omega K(Q_1, 2)$. Dieser Raum ist als Schleifenraum nach MILNOR [6] homotopieäquivalent einem CW-Komplex, falls $K(Q_1, 2)$ ein CW-Komplex ist. Ferner sind zwei Eilenberg-MacLane-CW-Komplexe $K_1(Q, m)$ und $K_2(Q, m)$ stets homotopieäquivalent. Alle frei wählbaren Eilenberg-MacLane-Räume setzen wir in Zukunft als metrische CW-Komplexe realisiert voraus; die obigen Überlegungen wiederholen wir nicht mehr.

Sei nun $i'_{01}: X_{00} \to X'_{01}$ eine Abbildung, die durch Komposition einer solchen Homotopieäquivalenz mit der Einbettung der Faser $\operatorname{Ker} p'_{11}$ in X'_{01} entsteht. Wir bilden den Abbildungszylinder X_{01} dieser Abbildung i'_{01} und können dann i'_{01} durch eine injektive Cofibration i_{01} ersetzen. $i_{01}: X_{00} \to X_{01}$. X'_{01} ist ein Deformationsretrakt von X_{01}. Sei $\mu_{01}: X_{01} \to X'_{01}$ die kanonische Retraktion und $p_{11} = p'_{11} \circ \mu_{01}$; $p_{11}: X_{01} \to X_{11}$. Diese Abbildung ist dann keine Faserung mehr, steht aber in einfachem Zusammenhang mit einer solchen. Von X_{22} ausgehend konstruieren wir in derselben Weise X_{12}, p_{22}, i_{12}. Dann sind X_{02}, i_{02}, p_{12} anzugeben:

$$\begin{array}{ccccc} X_{00} & \xrightarrow{i_{01}} & X_{01} & \overset{i_{02}}{\dashrightarrow} & X_{02} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_{11}} & & \vdots{\scriptstyle p_{12}} \\ & & X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12} \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{22}} \\ & & & & X_{22}. \end{array}$$

Zu diesem Zwecke betrachten wir die ursprüngliche Faserung

$$\begin{array}{ccc} & & X'_{01} \\ & & \downarrow{\scriptstyle p'_{11}} \\ X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12}. \end{array}$$

Nach der Konstruktionsvorschrift von Lemma 3.2 in Abschnitt 3a) bilden wir über X_{12} die zum Homomorphismus $q'_2: \pi_2(X_{12}) = Q_2/\operatorname{Im} q_3 \to Q_1$ gehörige Faserung $X'_{02} \xrightarrow{p'_{12}} X_{12}$ und gelangen so zum Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X'_{01} & & X'_{02} \\ \downarrow{\scriptstyle p'_{11}} & & \downarrow{\scriptstyle p'_{12}} \\ X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12}. \end{array}$$

Die Einbettung i_{12} induziert den kanonischen Homomorphismus $Q_2 \to Q_2/\operatorname{Im} q_3$. In der Tat ist X_{11} homotopieäquivalent zu $\operatorname{Ker} p'_{22} = \Omega K(Q_2, 3)$ vermöge der Abbildung i'_{12}. X'_{12} ist Deformationsretrakt von X_{12}. Die Einbettung von $\operatorname{Ker} p'_{22}$ in X'_{12} induziert nach Lemma 3.3 den kanonischen Homomorphismus $Q_2 \to Q_2/\operatorname{Im} q_3$. Dies beweist die Behauptung. Es gilt jetzt noch X_{02}, p_{12} und i_{02} zu definieren. Zuerst definieren wir eine Abbildung $i'_{02}: X'_{01} \to X'_{02}$. Die Faserungen $p'_{11}: X'_{01} \to X_{11}$ und $p'_{12}: X'_{02} \to X_{12}$ werden gemäß Lemma 3.2 durch gewisse stetige Abbildungen $f: X_{11} \to K(Q_1, 2)$ $f'': X_{12} \to K(Q_1, 2)$ induziert.

$$\begin{array}{ccc} X'_{01} & \longrightarrow & EK(Q_1, 2) \\ \downarrow{\scriptstyle p'_{11}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ X_{11} & \xrightarrow{f} & K(Q_1, 2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X'_{02} & \longrightarrow & EK(Q_1, 2) \\ \downarrow{\scriptstyle p'_{12}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ X_{12} & \xrightarrow{f''} & K(Q_1, 2). \end{array}$$

Wie man weiß, lassen die Faserräume X'_{01}, X'_{02} sich auffassen als

$$X'_{01}=\{(x_{11},e)\,|\,x_{11}\in X_{11},\ e\in EK(Q_1,2),\ \ f(x_{11})=\rho(e)\},$$
$$X'_{02}=\{(x_{12},e)\,|\,x_{12}\in X_{12},\ e\in EK(Q_1,2),\ f''(x_{12})=\rho(e)\}.$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$i_{12}\times\mathrm{Id}: X_{11}\times EK(Q_1,2)\to X_{12}\times EK(Q_1,2).$$

Sie führt X'_{01} in X'_{02} über, falls f'' in seiner Homotopieklasse geeignet gewählt wurde:

Da nämlich i_{12} den kanonischen Homomorphismus $Q_2\to Q_2/\mathrm{Im}\,q_3$ induziert, ist $[f]=[f'']\,[i_{12}]$. Nach Konstruktion der Faserungen p'_{11}, p'_{12} gehört nämlich f zum Homomorphismus q_2, f'' zum Homomorphismus q'_2 und es ist

$$\begin{array}{ccc} Q_2 & \xrightarrow{q_2} & Q_1 \\ & \searrow \quad \nearrow_{q'_2} & \\ & Q_2/\mathrm{Im}\,q_3 & \end{array}$$

kommutativ. Daraus folgt $f\sim f''\circ i_{12}$. Ist f im Verlaufe der Konstruktion schon gewählt, so kann man deshalb f'' so bestimmen, daß $f=f''\circ i_{12}$ wird, da i_{12} eine Cofibration ist. Ein Element (x_{11}, e) aus X'_{01} wird durch $i_{12}\times\mathrm{Id}$ in $(i_{12}(x_{11}), e)$ übergeführt; und für dieses Element gilt dann $f''(i_{12}(x_{11}))=(f''\circ i_{12})(x_{11})=f(x_{11})=\rho(e)$. $i_{12}\times\mathrm{Id}$ ist somit wirklich eine Abbildung von X'_{01} in X'_{02}. Ferner ist $i_{12}\times\mathrm{Id}$ trivialerweise fasertreu und injektiv. Jetzt erweitern wir vermöge der Retraktion $\mu_{01}: X_{01}\to X'_{01}$ die Abbildung $i_{12}\times\mathrm{Id}$ von X'_{01} auf X_{01} und ersetzen die resultierende Abbildung $X_{01}\to X'_{02}$ durch die Einbettung i_{02} in den zugehörigen Abbildungszylinder X_{02}. Sei wieder $\mu_{02}: X_{02}\to X'_{02}$ die natürliche Retraktion; wir setzen $p_{12}=p'_{12}\circ\mu_{02}: X_{02}\to X_{12}$. Damit ist jetzt ein Diagramm erklärt:

$$\begin{array}{ccc} X_{01} & \xrightarrow{i_{02}} & X_{02} \\ {\scriptstyle p_{11}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{12}} \\ X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12}. \end{array}$$

Es ist ein kommutatives Diagramm:

$$i_{12}\circ p_{11}=i_{12}\circ p'_{11}\circ\mu_{01}=p'_{12}\circ(i_{12}\times\mathrm{Id})\circ\mu_{01}=p'_{12}\circ\mu_{02}\circ i_{02}=p_{12}\circ i_{02}.$$

Wir haben bisher konstruiert:

$$\begin{array}{ccccc} X_{00} & \xrightarrow{i_{01}} & X_{01} & \xrightarrow{i_{02}} & X_{02} \\ & & {\scriptstyle p_{11}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{12}} \\ & & X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12} \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{22}} \\ & & & & X_{22}. \end{array}$$

Vermöge der bisherigen Überlegungen können wir sogar das folgende Diagramm erhalten;

$$\begin{array}{ccccccc}
X_{00} & \xrightarrow{i_{01}} & X_{01} & \xrightarrow{i_{02}} & X_{02} & \xrightarrow{i_{03}} & X_{03} \\
 & & \downarrow{\scriptstyle p_{11}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{12}} & & \vdots{\scriptstyle p_{13}} \\
 & & X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12} & \xrightarrow{i_{13}} & X_{13} \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{22}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{23}} \\
 & & & & X_{22} & \xrightarrow{i_{23}} & X_{23} \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{33}} \\
 & & & & & & X_{33}
\end{array}$$

dafür hat man einfach auf das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
Q_3 & \xrightarrow{q_3} & Q_2 \\
 & \searrow \quad \nearrow{\scriptstyle q_3'} & \\
 & Q_3/\mathrm{Im}\, q_4 &
\end{array}$$

Bezug zu nehmen. Bei der Konstruktion der noch fehlenden rechten oberen Ecke X_{03}, i_{03}, p_{13} treten neue Gesichtspunkte auf, welche aber dann mit dem Bisherigen zusammen genau zeigen, wie man bei der weiteren Konstruktion des Diagramms zu verfahren hat.

Die Einbettung i_{13} ist eine Cofibration. Sie induziert die Identität:

$$\pi_2(X_{12}) \to \pi_2(X_{13}).$$

Nehmen wir letzteres als bewiesen an und sehen wir, wie daraus die Konstruktion von X_{03} hergeleitet werden kann. Wir erinnern uns, daß die Faserung $p'_{12}: X'_{02} \to X_{12}$ durch eine stetige Abbildung $f'': X_{12} \to K(Q_1, 2)$ induziert wurde. Es war $[f''] \in \Pi(X_{12}, K(Q_1, 2)) = \mathrm{Hom}(Q_2/\mathrm{Im}\, q_3, Q_1)$, $[f''] = q'_2$. Für denselben Homomorphismus q'_2 erhalten wir vermöge einer Abbildung f''' über X_{13} eine Faserung $p'_{13}: X'_{03} \to X_{13}$, da ja auch $\Pi(X_{13}, K(Q_1, 2)) = \mathrm{Hom}(Q_2/\mathrm{Im}\, q_3, Q_1)$ ist. Wegen $i_{13*} = \mathrm{Id}: \pi_2(X_{12}) \to \pi_2(X_{13})$, $[f''] = q'_2$, $[f'''] = q'_2$ ist aber $[f''] = [f'''] \circ [i_{13}]$; somit $f'' \sim f''' \circ i_{13}$. Da i_{13} eine Cofibration ist, existiert in derselben Klasse ein f''' so, daß sogar $f'' = f''' \circ i_{13}$ gilt. Es werde für die Konstruktion der Faserung $p'_{13}: X'_{03} \to X_{13}$ gerade dieses f''' verwendet. Wird dies so gemacht, so ist die Faserung $p'_{12}: X'_{02} \to X_{12}$ aus $p'_{13}: X'_{03} \to X_{13}$ durch i_{13} induziert. Die induzierte Abbildung $(i_{13} \times \mathrm{Id})$: $X'_{02} \to X'_{03}$ wird vermöge der Retraktion μ_{02} auf X_{02} erweitert $(i_{13} \times \mathrm{Id}) \circ \mu_{02}$: $X_{02} \to X'_{03}$ und schließlich durch die Einbettung i_{03} in den Abbildungszylinder X_{03} ersetzt. Die kanonische Retraktion $\mu_{03}: X_{03} \to X'_{03}$ läßt uns $p_{13} = p'_{13} \circ \mu_{03}$ definieren. Das entsprechende Diagramm ist kommutativ.

Wir haben noch zu beweisen, daß i_{13} die Identität $i_{13*}: \pi_2(X_{12}) \to \pi_2(X_{13})$ induziert. Da X'_{12}, X'_{13} Deformationsretrakte von X_{12}, X_{13} sind, genügt es,

die Abbildung $(i_{23}\times \mathrm{Id})_*$ zu betrachten.

$$\begin{array}{ccc} X'_{12} & \xrightarrow{(i_{23}\times \mathrm{Id})} & X'_{13} \\ {\scriptstyle p'_{22}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'_{23}} \\ X_{22} & \xrightarrow{i_{23}} & X_{23}. \end{array}$$

Dieses Diagramm der Faserung p'_{23} und der durch i_{23} induzierten Faserung p'_{22} ergibt einen Homomorphismus der zugehörigen Homotopiesequenzen. Da $(i_{23}\times \mathrm{Id})$ auf der Faser $\mathrm{Ker}\, p'_{22}$ die Identität ist, induziert $(i_{23}\times \mathrm{Id})$ die Identität $\pi_2(\mathrm{Ker}\, p'_{22})\to\pi_2(\mathrm{Ker}\, p'_{23})$.

Auf Grund der Voraussetzungen und auf Grund von Lemma 3.3 ist

$$\pi_2(X_{22})=0,\quad \pi_2(X_{23})=0,\quad \pi_2(\mathrm{Ker}\, p'_{22})=Q_2,\quad \pi_2(\mathrm{Ker}\, p'_{23})=Q_2$$

und

$$\pi_2(X'_{12})=\pi_2(X'_{13})=Q_2/\mathrm{Im}\, q_3.$$

Der Homomorphismus der Homotopiesequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} \to \pi_2(\mathrm{Ker}\, p'_{22}) & \to & \pi_2(X'_{12}) & \to & \pi_2(X_{22}) & \to & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \to \pi_2(\mathrm{Ker}\, p'_{23}) & \to & \pi_2(X'_{13}) & \to & \pi_2(X_{23}) & \to & \cdots \end{array}$$

wird deshalb zu

$$\begin{array}{ccccccc} \to Q_2 & \to & Q_2/\mathrm{Im}\, q_3 & \to & 0 & \to & \\ {\scriptstyle \mathrm{Id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (i_{23}\times \mathrm{Id})_*} & & \downarrow & & \\ \to Q_2 & \to & Q_2/\mathrm{Im}\, q_3 & \to & 0 & \to & . \end{array}$$

Da die Homomorphismen $Q_2\to Q_2/\mathrm{Im}\, q_3$ die kanonischen Projektionen sind, folgt

$$(i_{23}\times \mathrm{Id})_*=\text{Identität}.$$

Wir werden sogleich unter anderem zeigen, daß allgemein $i_{kl*}\colon \pi_{k+1}(X_{kl-1})\to \pi_{k+1}(X_{kl})=Q_{k+1}/\mathrm{Im}\, q_{k+2}$ für $l>k+1$ die Identität ist. (Stabilitätssatz 3.1.)

Frühere Überlegungen zeigen: $i_{kk+1*}\colon \pi_{k+1}(X_{kk})\to\pi_{k+1}(X_{kk+1})$ ist der kanonische Homomorphismus $Q_{k+1}\to Q_{k+1}/\mathrm{Im}\, q_{k+2}$. Die Konstruktion des ganzen Schemas kann deshalb in derselben Weise immer fortgeführt werden.

Wir betrachten nun die Eigenschaften der „Kolonnen"

$$X_{0n}\xrightarrow{p_{1n}} X_{1n}\xrightarrow{p_{2n}}\cdots\xrightarrow{p_{n-1n}} X_{n-1n}\xrightarrow{p_{nn}} X_{nn}\to *.$$

Eine solche Kolonne ist im wesentlichen ein endliches Copolyeder. Es wurde ja $X_{nn}=K(Q_{n+1}, n+1)$ gesetzt, dann über X_{nn} eine Faserung

$$X'_{n-1n}\xrightarrow{p'_{n-1n}} X_{nn}$$

konstruiert, schließlich $X'_{n-1\,n}$ durch den Abbildungszylinder einer gewissen Abbildung $X_{n-1\,n-1}\to X'_{n-1\,n}$ ersetzt, dann über $X_{n-1\,n}$ eine Faserung $X'_{n-2\,n}\to X_{n-1\,n}$ konstruiert, $X'_{n-2\,n}$ durch einen Abbildungszylinder $X_{n-2\,n}$ ersetzt usw. X'_{kn} ist jeweils ein Deformationsretrakt von X_{kn}; somit sind dies Räume mit gleichem Homotopietypus. Die Faser $\operatorname{Ker} p'_{kn}$ ist ebenfalls ein Deformationsretrakt von $\operatorname{Ker} p_{kn}$. Es folgt aus der ganzen Konstruktion auf diese Weise leicht: X_{kn} enthält einen Teilraum X''_{kn} so, daß

$$X''_{0n} \xrightarrow{p''_{1n}} X''_{1n} \to \cdots \to X''_{nn} = X_{nn}$$

ein Copolyeder und $p''_{kn}=p_{kn}\,|\,X''_{kn}$ ist. Ist $w_{kn}=p_{kn}\circ\cdots\circ p_{1\,n}$, so sieht man ferner ohne Mühe (wegen $\operatorname{Ker} p''_{kn}=\operatorname{Ker} p'_{kn}$): $\operatorname{Ker} w_{kn}$ läßt sich in $\operatorname{Ker} w''_{kn}$ deformieren; wobei während der Deformation $\operatorname{Ker} w''_{kn}$ in sich deformiert wird. Um dies zu sehen, geht man induktiv vor und wendet das Covering Homotopy Theorem auf die folgende Situation an:

$$\begin{array}{ccc} & & \operatorname{Ker} w_{kn} \\ & \overset{\mathrm{Id}}{\nearrow} & \downarrow \\ \operatorname{Ker} w_{kn} & \to & \operatorname{Ker} p_{kn}. \end{array}$$

$\operatorname{Ker} p_{kn}$ ist in $\operatorname{Ker} p''_{kn}$ deformierbar, also $\operatorname{Ker} w_{kn}$ in $\operatorname{Ker} w''_{kn}$. Diese Deformation induziert einen Isomorphismus der Homotopiegruppen, da $\operatorname{Ker} p''_{kn}$ resp. $\operatorname{Ker} w''_{kn}$ jeweils in sich deformiert werden. Aus all diesen Tatsachen folgt jedenfalls, daß wir die Abbildungen p_{kn}, w_{kn} in dem Sinne als Faserungen betrachten können, als auch für sie die gewöhnliche Homotopiesequenz der Faserungen gültig ist. Ferner haben natürlich die Räume X_{kn} dieselben Homotopiegruppen wie die Räume X''_{kn} des entsprechenden Copolyeders. All dies ermöglicht es uns, die Homotopiegruppen benachbarter Kolonnen unseres Schemas zu vergleichen und folgenden Stabilitätssatz aufzustellen:

Satz 3.1 (Stabilitätssatz).

Für $s\leqq m, k\leqq m$ *gilt* $\pi_s(G, X_{km})=\pi_s(G, X_{km+1})$ *und für* $k\leqq m, s\leqq m-1$ $\pi_s(G, \operatorname{Ker} w_{km})=\pi_s(G, \operatorname{Ker} w_{km+1})$. *G ist dabei eine zulässige abelsche Gruppe. Es gilt trivialerweise* $\pi_s(G, \operatorname{Ker} p_{km})=\pi_s(G, \operatorname{Ker} p_{km+1})$.

Beweis. Da eine Kolonne bezüglich der Homotopiegruppen die Eigenschaften eines Copolyeders hat, gilt für $s\leqq k$ $\pi_s(G, X_{km})=0=\pi_s(G, X_{km+1})$. Wir dürfen also $s>k$ voraussetzen. Sei $s-k=1$. Wir betrachten die Homotopiesequenzen der Abbildungen p_{mm} und p_{mm+1} sowie den durch die Abbildungen $i_{m-1\,m+1}$, i_{mm+1} induzierten Homomorphismus dieser Sequenzen.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to & \pi_{m+1}(G, X_{mm}) & \to & \pi_m(G, \operatorname{Ker} p_{mm}) & \to & \pi_m(G, X_{m-1\,m}) & \to \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots\to \pi_{m+1}(G, X_{mm+1}) & \to & \pi_m(G, \operatorname{Ker} p_{mm+1}) & \to & \pi_m(G, X_{m-1\,m+1}) & \to & \\
& & & \to \pi_m(G, X_{mm}) & \to & \pi_{m-1}(G, \operatorname{Ker} p_{mm}) & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & \to \pi_m(G, X_{mm+1}) & \to & \pi_{m-1}(G, \operatorname{Ker} p_{mm+1}). &
\end{array}$$

Auf Grund der bisher bewiesenen Tatsachen (§1, Satz 1.4) reduziert sich dieses Diagramm zu:

$$\begin{array}{ccccc}
\to & \operatorname{Hom}(G, Q_{m+1}) & \xrightarrow{q_{m+1_*}} & \operatorname{Hom}(G, Q_m) \to & \\
 & \downarrow & & \downarrow \mathrm{Id} & \\
\to \operatorname{Hom}(G, Q_{m+1})/q_{m+2_*}(\operatorname{Hom}(G, Q_{m+2})) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G, Q_m) \to & & \\
 & & \to \pi_m(G, X_{m-1\,m}) & \to 0 \to 0 \to & \\
 & & \downarrow i_{m-1\,m+1_*} & \downarrow \quad \downarrow & \\
 & & \to \pi_m(G, X_{m-1\,m+1}) & \to 0 \to 0 \to . &
\end{array}$$

Der erste vertikale Homomorphismus ist die kanonische Projektion

$$\operatorname{Hom}(G, Q_{m+1}) \to \operatorname{Hom}(G, Q_{m+1})/q_{m+2_*}(\operatorname{Hom}(G, Q_{m+2})).$$

Es folgt deshalb aus diesem Diagramm leicht, daß $i_{m-1\,m+1_*}$ ein Isomorphismus ist. Indem man nun der Reihe nach die zu den Abbildungen $p_{m-1\,m}$, $p_{m-1\,m+1}$ resp. $p_{m-2\,m}$, $p_{m-2\,m+1}$ usw. gehörigen Homomorphismen der Homotopiesequenzen betrachtet, erkennt man die Richtigkeit des Stabilitätssatzes für $s-k=1$. Für $s-k=2$ beginnt man mit dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{m+1}(G, X_{m-1\,m}) & \to & \pi_m(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m}) & \to & \pi_m(G, X_{m-2\,m}) \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\pi_{m+1}(G, X_{m-1\,m+1}) \to & & \pi_m(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m+1}) \to & & \pi_m(G, X_{m-2\,m+1}) \to \\
 & & \to \pi_m(G, X_{m-1\,m}) & \to \pi_{m-1}(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m}) & \to \\
 & & \downarrow & \downarrow & \\
 & & \to \pi_m(G, X_{m-1\,m+1}) & \to \pi_{m-1}(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m+1}) \to &
\end{array}$$

und verwendet $\pi_m(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m}) = \pi_m(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m+1}) = 0$, die schon bewiesene Isomorphie $\pi_m(G, X_{m-1\,m}) = \pi_m(G, X_{m-1\,m+1})$ und die triviale Isomorphie

$$\pi_{m-1}(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m}) = \pi_{m-1}(G, \operatorname{Ker} p_{m-1\,m+1}) = \operatorname{Hom}(G, Q_{m-1}).$$

Über $\pi_{m+1}(G, X_{m-1\,m})$ und $\pi_{m+1}(G, X_{m-1\,m+1})$ braucht man nichts zu wissen. Die Fälle $s-k \geqq 3$ erledigen sich in derselben Weise.

Um nun die entsprechende Stabilität für die Fasern Ker w_{km} zu beweisen, betrachten wir analog den durch die Inklusionen induzierten Homomorphismus der Homotopiesequenzen:

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots \to \pi_{s+1}(G, X_{0\,m}) & \to & \pi_{s+1}(G, X_{k\,m}) & \to & \pi_s(G, \operatorname{Ker} w_{k\,m}) \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots \to \pi_{s+1}(G, X_{0\,m+1}) \to & & \pi_{s+1}(G, X_{k\,m+1}) \to & & \pi_s(G, \operatorname{Ker} w_{k\,m+1}) \to \\
 & & & \to \pi_s(G, X_{0\,m}) & \to \pi_s(G, X_{k\,m}) \to \cdots \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & \to \pi_s(G, X_{0\,m+1}) & \to \pi_s(G, X_{k\,m+1}) \to \cdots .
\end{array}$$

Auf Grund der bereits bewiesenen Stabilität der Gruppen $\pi_s(G, X_{km})$ und des Fünferlemmas ergibt sich die Stabilität der Gruppen $\pi_s(G, \operatorname{Ker} w_{km})$. q.e.d.

Jetzt ersetzen wir die Räume X_{kl} des Schemas

$$\begin{array}{ccccc} X_{00} & \to & X_{01} & \to & X_{02} \to \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & X_{11} & \to & X_{12} \to \\ & & & & \downarrow \\ & & & & X_{22} \to \end{array}$$

durch die geometrischen Realisationen ihrer singulären Komplexe. Diese Polyeder $|S(X_{kl})|$ haben nach Satz 5.3 aus §5 denselben Homotopietypus wie die Räume X_{kl} selbst. Die Eilenberg-MacLane-Räume X_{kk} haben wir uns nämlich bei Beginn der Konstruktion als metrische Polyeder vorgegeben. $X_{k-1\,k}$ ist dann homotopieäquivalent einer induzierten Faserung $X''_{k-1\,k}$ über X_{kk}:

$$\begin{array}{ccc} X''_{k-1} & \to & E\,K(Q_k, k+1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{kk} & \to & K(Q_k, k+1). \end{array}$$

Satz 5.3 besagt, daß $X''_{k-1\,k}$ homotopieäquivalent einem CW-Komplex ist; also ist auch $X_{k-1\,k}$ einem solchen homotopieäquivalent, und somit homotopieäquivalent zu $|S(X_{k-1\,k})|$.

Gemäß Konstruktion des Schemas erhält man $X_{k-2\,k}$ wieder als Raum, der homotopieäquivalent einer über $X_{k-1\,k}$ induzierten Faserung ist usw. Man sieht daraus, daß ganz allgemein X_{kl} einem CW-Komplex und somit zu $|S(X_{kl})|$ homotopieäquivalent ist.

Wir betrachten jetzt das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} |S(X_{00})| & \to & |S(X_{01})| & \to & |S(X_{02})| & \to \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & |S(X_{11})| & \to & |S(X_{12})| & \to \cdots \\ & & & & \downarrow & \\ & & & & |S(X_{22})| & \to \cdots. \end{array}$$

Die horizontalen Pfeile bedeuten wieder injektive Cofibrationen: in der Tat ist $|S(X_{kl})| \subset |S(X_{kl+1})|$ ein abgeschlossener Teilkomplex. Die vertikalen Pfeile bedeuten die durch die Abbildung p_{kl} indzuzierten Abbildungen, die wir für den Augenblick mit $p^{\#}_{kl}$ bezeichnen wollen. Aus der Art und Weise, wie die geometrische Realisierung $|S(X)|$ des singulären Komplexes definiert wird (MILNOR [7]), folgt, daß $\operatorname{Ker} p^{\#}_{kl} = |S(p_{kl})|$ ist. Somit ist auch $\operatorname{Ker} p^{\#}_{kl}$ ein Eilenberg-MacLane-Komplex $K(Q_k, k)$. Dieselben Überlegungen können wir auf $\operatorname{Ker} w^{\#}_{kl}$ und $|S(\operatorname{Ker} w_{kl})|$ anwenden.

Im Ganzen gesehen dürfen wir somit die Räume X_{kl} als CW-Komplexe, $i_{kl}: X_{kl-1} \to X_{kl}$ als Inklusionen von Teilkomplexen auffassen. $\operatorname{Ker} p_{kl}$ und

Ker w_{kl} sind geschlossene Teilkomplexe in $X_{k-1\,l}$ und $X_{0\,l}$. Die Gültigkeit des Stabilitätssatzes 3.1 bleibt natürlich bestehen.

Jetzt bilden wir die Mengen

$$X_k = \bigcup_{l \geqq k} X_{kl}.$$

Da für $l_1 < l_2$ $X_{kl_1} \subset X_{kl_2}$ ein abgeschlossenes Teilpolyeder, versehen mit der schwachen Topologie ist, können wir auch X_k zu einem Polyeder machen, indem wir X_k die schwache Topologie aufprägen. Für jedes l ist $X_{kl} \subset X_k$ ein abgeschlossener Teilkomplex. Die Inklusion $X_{kl} \subset X_k$ bezeichnen wir mit $i_{kl\infty}$.

Da im konstruierten Schema alle Vierecke kommutativ sind, definieren die Abbildungen p_{kl} auch Abbildungen $p_k: X_{k-1} \to X_k$. Diese sind stetig: Sei $F \subset X_k$ abgeschlossen, d.h. $F \cap X_{kl}$ in X_{kl} für jedes $l \geqq k$ abgeschlossen. Daraus folgt wegen der Stetigkeit von p_{kl}:

$$p_{kl}^{-1}(F \cap X_{kl}) = p_{kl}^{-1}(F) \cap p_{kl}^{-1}(X_{kl}) = p_k^{-1}(F) \cap X_{k-1\,l}$$

ist in $X_{k-1\,l}$ für jedes l abgeschlossen, somit ist $p_k^{-1}(F)$ in X_{k-1} abgeschlossen, p_k also stetig. Analoges gilt für die Abbildungen w_{kl}.

Der folgende Satz verknüpft die Homotopieeigenschaften der Polyeder X_k mit denjenigen der Teilpolyeder X_{kl}.

Satz 3.2 (Grenzwertsatz). *Die Inklusionen*

$$i_{kl\infty}: X_{kl} \to X_k = \lim_{l \to \infty} X_{kl}$$

induzieren die folgenden Isomorphien der Homotopiegruppen mit Koeffizienten in einer zulässigen abelschen Gruppe G:

1) $\pi_s(G, X_{kl}) \cong \pi_s(G, X_k)$ *für* $s \leqq l-2$, $k \leqq l$.

2) $\pi_s(G, \operatorname{Ker} w_{kl}) \cong \pi_s(G, \operatorname{Ker} w_k)$ *für* $s \leqq l-3$, $k \leqq l$.

3) $\pi_s(G, \operatorname{Ker} p_{kl}) \cong \pi_s(G, \operatorname{Ker} p_k)$ *für* $k \leqq l$.

Den Beweis dieses Satzes führen wir in zwei Schritten. Zuerst betrachten wir den speziellen Fall $G = Z$; d.h. die gewöhnlichen Hurewiczschen Homotopiegruppen. Wir betrachten die Behauptung 1).

Sei $g \in \pi_S(X_k)$, $f: S_s \to X_k$ eine stetige, das Element g repräsentierende Abbildung. Da die Sphäre S_s kompakt ist, liegt $f(S_s)$ ganz in einem endlichen Teilpolyeder von X_k, also in einem Polyeder X_{kl} für genügend großes l. Die Injektion $i_{kl\infty}: X_{kl} \to X_k$ induziert somit einen Epimorphismus von $\pi_s(X_{kl})$ nach $\pi_s(X_k)$. Nach dem Stabilitätssatz 3.1 gilt dies für beliebige $l \geqq k$, $l \geqq s$.

Sei anderseits $g \in \pi_s(X_{kl})$ durch $f: S_s \to X_{kl}$ repräsentiert und $i_{kl\infty} \circ f: S_s \to X_k$ nullhomotop. Dann existiert eine Abbildung des Kegels über S_s, d.h. eine Abbildung der Vollkugel V_s in X_k, welche $i_{kl\infty} \circ f$ erweitert. Da V_s kompakt ist, liegt das Bild von V_s in einem Teilpolyeder $X_{kl'}$; die Abbildung ist somit schon in einem $X_{kl'}$ nullhomotop, wegen des Stabilitätssatzes also auch in X_{kl}.

Die Injektionen $i_{kl\infty}: X_{kl} \to X_k$ induzieren somit Homomorphismen der betrachteten Homotopiegruppen, welche nicht nur epimorph, sondern auch

monomorph sind; es handelt sich somit um Isomorphien. Derselbe Beweis läßt sich natürlich für die beiden übrigen Behauptungen durchführen; im Falle 1) für $s \leqq l$, im Falle 2) für $s \leqq l-1$, im Falle 3) für beliebige s; stets also um eins höher als im Satz behauptet. Dies werden wir aber im Falle einer beliebigen zulässigen abelschen Gruppe im Beweise benutzen und dabei den Satz nur für die angegebenen Schranken bekommen. Hier handelt es sich darum, Abbildungsklassen von Moore-Räumen $K'(s, G)$ in die Polyeder X_{kl}, X_k zu untersuchen. Da man $K'(s, G)$ stets als $(s+1)$-dimensionalen CW-Komplex realisieren kann (Anheften von $s+1$-dimensionalen Zellen an ein Büschel s-dimensionaler Sphären), wird es gelingen, durch Induktion nach gewissen Dimensionen den Satz allgemein zu beweisen. Wir werden dabei die folgenden bekannten Tatsachen benützen:

1. Eine Abbildung eines CW-Komplexes in einen topologischen Raum ist genau dann stetig, wenn die Beschränkung der Abbildung auf jede abgeschlossene Zelle stetig ist.

2. Für CW-Komplexe gilt der Homotopieerweiterungssatz.

3. Ist (X, A) ein Paar topologischer Räume mit $\pi_s(X, A)=0$ für ein bestimmtes s, so kann jede Abbildung $f: (I^s, \dot{I}^s) \to (X, A)$ des s-dimensionalen Einheitswürfels und seines Randes so in eine Abbildung $g: (I^s, \dot{I}^s) \to (A, A)$ deformiert werden, daß sich die Beschränkung von f auf $\dot{I}^s$ während der Deformation nicht ändert.

Ist nun eine stetige Abbildung $f: K'(s, G) \to X_k$ gegeben, so dürfen wir dim $K'(s, G) \leqq s+1$ voraussetzen. Auf dem Nullgerüst $K'_0(s, G)$ können wir f in die Nullabbildung deformieren, da X_k durch Wege zusammenhängt. Nach der Bemerkung 2 können wir diese Deformation auf ganz f ausdehnen. Es sei jetzt als Induktionsvoraussetzung angenommen, f bilde das t-Gerüst $K'_t(s, G)$ in ein X_{kl} ab. Wir betrachten eine $(t+1)$-Zelle von $K'(s, G)$. Die Beschränkung von f auf diese Zelle und ihren Rand liefert eine Abbildung $\varphi: (I^{t+1}, \dot{I}^{t+1}) \to (X_k, X_{kl})$, also ein Element aus $\pi_{t+1}(X_k, X_{kl})$. Falls wir l genügend groß nehmen (z.B. $l=t+1$), gilt auf Grund des bisher behandelten Falles $G=Z$ $\pi_{t+1}(X_k) \cong \pi_{t+1}(X_{kl})$ und $\pi_t(X_k) \cong \pi_t(X_{kl})$. Die exakte Homotopiesequenz für (X_k, X_{kl}) liefert deshalb $\pi_{t+1}(X_k, X_{kl})=0$. Auf Grund der Bemerkung 3 können wir φ so deformieren, daß I^{t+1} in X_{kl} abgebildet wird und auf $\dot{I}^{t+1}\varphi$ sich nicht ändert. Wenn wir diese Überlegung für jede Zelle durchführen, erhalten wir eine stetige Deformation von f auf dem $(t+1)$-Gerüst. Die Stetigkeit folgt aus der Bemerkung 1. Die Homotopie können wir auf ganz $K'(s, G)$ erweitern. Die neue Abbildung transformiert das $(t+1)$-Gerüst in X_{kl}. Da $K'(s, G)$ höchstens $(s+1)$-dimensional ist, können wir somit induktiv erreichen, daß f den ganzen Moore-Raum in X_{kl} abbildet. Dies beweist die Epimorphie des durch die Inklusion $i_{kl\infty}: X_{kl} \to X_k$ definierten Homomorphismus der Homotopiegruppen.

Um noch die Monomorphie einzusehen, nehmen wir an, es sei $f: K'(s, G) \to X_{kl}$ gegeben und $i_{kl\infty} \circ f$ sei nullhomotop. Die Abbildung $i_{kl\infty} \circ f$ läßt sich somit auf den Kegel $CK'(s, G)$ erweitern. Zu zeigen ist: Es gibt eine Abbildung

des Kegels, welche f erweitert. Es sei F: $CK'(s, G) \to X_k$ die Erweiterung von $i_{k\,l\,\infty} \circ f$. Wir werden F homotop abändern in die gewünschte Erweiterung von f, aber so, daß sich die Beschränkung von F auf $K'(s, G)$ nicht ändert. Der Teilkomplex von $CK'(s, G)$ bestehend aus $K'(s, G)$ und dem Nullgerüst von $CK'(s, G)$ wird bereits nach $X_{k\,l}$ abgebildet, da die „Kegelspitze" der Basispunkt ist. Nehmen wir als Induktionsvoraussetzung an, es sei F ohne sich auf $K'(s, G)$ zu verändern bereits so deformiert worden, daß das t-Gerüst von $CK'(s, G)$ in $X_{k\,l}$ abgebildet wird. Betrachten wir die Beschränkung von F auf eine $(t+1)$-Zelle von CK (s, G), die nicht in $K'(s, G)$ enthalten ist, d.h. auf den Teil-Kegel über einer t-Zelle von $K'(s, G)$. Ihr Rand wird voraussetzungsgemäß schon nach $X_{k\,l}$ abgebildet. Die exakte Homotopiesequenz für $(X_k, X_{k\,l})$ und der schon behandelte Fall $G=Z$ zeigen, daß F auf dieser Zelle so deformiert werden kann, daß ihr Bild in $X_{k\,l}$ liegt. So erhalten wir für jede solche Zelle eine Deformation, die wir auf dem Rand wieder wie früher als die Identität voraussetzen dürfen. Auf $K'(s, G)$ und den t-Zellen des Kegels werde die identische Deformation durchgeführt. Im ganzen erhalten wir so eine Deformation der Beschränkung von F auf den Teilkomplex bestehend aus $K'(s, G)$ und dem $(t+1)$-Gerüst von $CK'(s, G)$. Diese Homotopie kann auf ganz $CK'(s, G)$ ausgedehnt werden. Da $CK'(s, G)$ als höchstens $(s+2)$-dimensional gewählt werden kann, gelangen wir induktiv zu einer Deformation von F der gewünschten Art. Der Beweis benützt die Homotopiesequenz für $(X_k, X_{k\,l})$. Ferner ist $\dim CK'(s, G) = \dim K'(s, G) + 1$. Dies erklärt die im Satz angegebenen Schranken $s \leqq l-2$, $k \leqq l$.

Die Behauptung 1) des Grenzwertsatzes 3.2 ist damit in allen Teilen bewiesen.

Die Behauptung 2) und 3) erhält man genau auf dieselbe Weise; statt der Komplexe $X_{k\,l}$, X_k betrachtet man die Komplexe Ker $w_{k\,l}$, Ker w_k resp. Ker $p_{k\,l}$, Ker p_k.

Von $K'(s, G)$ haben wir einzig $\dim K'(s, G) < \infty$, aber keine Homotopieeigenschaften benutzt. q.e.d.

Hauptsatz 3.3. *Jedem Kettenkomplex*

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \xleftarrow{q_3} \cdots,$$

dessen Gruppen Q_j die Eigenschaft haben, daß für jede abelsche Gruppe G $\mathrm{Ext}(G, Q_j) = 0$ *ist, läßt sich ein verallgemeinertes Copolyeder*

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} X_2 \xrightarrow{p_3} \cdots$$

zuordnen. Sei $w_k = p_k \circ \cdots \circ p_1$. Dieses Copolyeder hat die folgenden Eigenschaften:

A) Ker p_k *ist ein Eilenberg-MacLane-Raum $K(Q_k, k)$. Die Gruppen $\mathscr{C}^k(Z, X) = \pi_k(\mathrm{Ker}\, p_k)$ sind also gleich den Gruppen Q_k. Allgemeiner ist für jede abelsche Gruppe G $\mathscr{C}^k(G, X) = \mathrm{Hom}(G, Q_k)$.*

B) *Die Differentialoperatoren d_j, die mit Hilfe der exakten Folgen aus* 4) *der Definition des verallgemeinerten Copolyeders definiert werden, sind die*

vorgegebenen Homomorphismen $q_j: Q_j \to Q_{j-1}$ *resp. die induzierten Homomorphismen* $q_{j*}: \mathrm{Hom}(G, Q_j) \to \mathrm{Hom}(G, Q_{j-1})$, *falls man eine beliebige Koeffizientengruppe G nimmt.*

Zusatz. Einem *beliebigen* Kettenkomplex läßt sich ein System von Räumen und Abbildungen

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} \cdots$$

zuordnen, mit der Eigenschaft: Beschränkt man sich auf zulässige Koeffizientengruppen G, so lassen sich die Homotopiegruppen von X genau so bestimmen, wie wenn X ein verallgemeinertes Copolyeder wäre.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} \cdots$$

ein Copolyeder ist, das die Eigenschaften A) und B) besitzt. Die Eigenschaften 1) $\mathrm{Ker}\, p_m = K(Q_m, m)$ und 2) $\pi_{m-1}(X_m) = 0$ eines Copolyeders folgen aus dem Grenzwertsatz 3.2. 3) $\mathrm{Ext}(G, Q_m) = 0$ haben wir vorausgesetzt. Um noch 4), die exakten Folgen eines verallgemeinerten Copolyeders zu erhalten, betrachten wir eine Kolonne im Schema, welche genügend weit „rechts" ist: ($l \geqq m+3$). Da wir für solche Kolonnen bereits die entsprechenden exakten Folgen besitzen, erlaubt es uns der Grenzwertsatz, diese Folgen dem verallgemeinerten Copolyeder zuzuschreiben. Der Stabilitätssatz 3.1 besagt, daß es gleichgültig ist, welche Kolonne wir auswählen, falls l groß genug ist. Diese Überlegung beweist auch die Eigenschaften A) und B).

§ 4. Funktorielles Verhalten der den Differentialfolgen zugeordneteten (verallgemeinerten) Copolyeder

Wir haben in § 3 gewissen (unendlichen) Differentialfolgen abelscher Gruppen

$$Q_1 \xleftarrow{q_2} Q_2 \xleftarrow{q_3} \cdots, \qquad q_{m-1} \circ q_m = 0, \qquad \mathrm{Ext}(G, Q_m) = 0$$

für jede abelsche Gruppe G, (verallgemeinerte) Copolyeder

$$X \xrightarrow{p_1} X_1 \xrightarrow{p_2} \cdots$$

zugeordnet. In diesem Paragraph zeigen wir, daß diese Konstruktion einen covarianten Funktor definiert, der auf einer Teil-Kategorie der Kategorie der Differentialfolgen abelscher Gruppen erklärt ist, und dessen Werte in der Kategorie der (verallgemeinerten) Copolyeder liegen. Die Morphismen der beiden Kategorien sind die Differentialfolgenhomomorphismen, resp. Copolyederhomomorphismen.

Sind (X, X_n, p_n) resp. (Y, Y_n, r_n) (verallgemeinerte) Copolyeder, so ist ein *Homomorphismus* $g: (X, X_n, p_n) \to (Y, Y_n, r_n)$ eine Folge von Homotopieklassen

$$[g_n];\ g_n: X_n \to Y_n \quad \text{mit} \quad [r_{n+1}] \circ [g_n] = [g_{n+1}] \circ [p_{n+1}].$$

Satz 4.1. (a) *Jeder Differentialfolge* (Q_n, q_n) $n \geqq 1$, *deren Gruppen die Bedingung* $\mathrm{Ext}(G, Q_n)=0$ *für jedes abelsche* G *erfüllen, läßt sich ein (verallgemeinertes) Copolyeder* $T[(Q_n, q_n)]=(X, X_n, p_n)$ *zuordnen.*

(b) *Jedem Homomorphismus* φ *von Differentialfolgen läßt sich ein Homomorphismus* $g=T(\varphi)$ *zwischen den entsprechenden Copolyedern in der Weise zuordnen, daß*

1) *dem identischen Homomorphismus* ι *die Identität* i *entspricht*;

2) *der Komposition* $\varphi_2 \circ \varphi_1$ *von zwei Homomorphismen die Komposition* $g_2 \circ g_1 = T(\varphi_2) \circ T(\varphi_1)$ *entspricht.* T *ist somit ein covarianter Funktor.*

Zusatz. Beschränkt man sich auf zulässige Koeffizientengruppen G, so erhalten wir einen Funktor, der auf der vollen Kategorie von Differentialfolgen abelscher Gruppen definiert ist. Die Bildkategorie enthält als Objekte etwas allgemeinere Räume als Copolyeder.

Beweis. Die Zuordnung (a) wurde in § 3 gegeben durch die explizite Konstruktion des verallgemeinerten Copolyeders.

Einem Homomorphismus $\varphi: (Q_n, q_n) \to (S_n, s_n)$ von Differentialfolgen entspricht ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} Q_1 & \xleftarrow{q_2} & Q_2 & \xleftarrow{q_3} & Q_3 & \xleftarrow{q_4} & \cdots \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_3} & & \\ S_1 & \xleftarrow{s_2} & S_2 & \xleftarrow{s_3} & S_3 & \xleftarrow{s_4} & \cdots . \end{array}$$

Die zugehörigen Copolyeder werden nach § 3 aus Diagrammen (X_{kl}, p_{kl}, i_{kl})

$$\begin{array}{ccccccc} X_{00} & \xrightarrow{i_{01}} & X_{01} & \xrightarrow{i_{02}} & X_{02} & \to \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle p_{11}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{12}} & & \\ & & X_{11} & \xrightarrow{i_{12}} & X_{12} & \to \cdots \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle p_{22}} & & \\ & & & & X_{22} & \to \cdots \end{array}$$

resp. (Y_{kl}, r_{kl}, h_{kl}) erhalten. Die Räume $X_{kk}=K(Q_{k+1}, k+1)$, $Y_{kk}=K(S_{k+1}, k+1)$ sind fest gewählte metrische Eilenberg-MacLane-Polyeder. Den Homomorphismen $\varphi_n: Q_n \to S_n$ entsprechen bestimmte Homotopieklassen (φ_n). Ist $g_{n-1\,n-1} \in (\varphi_n)$, so ist somit $[g_{n-1\,n-1}]=(\varphi_n)$; $g_{n-1\,n-1}: X_{n-1\,n-1} \to Y_{n-1\,n-1}$.

Wir denken uns ferner feste metrische CW-Komplexe $K(Q_n, n+1)$. Den Homomorphismen $q_{n+1}: Q_{n+1} \to Q_n$ entsprechen dann ebenfalls bestimmte Homotopieklassen $\{q_{n+1}\}=[f_{n+1}]; f_{n+1}: K(Q_{n+1}, n+1) \to K(Q_n, n+1)$. Indem wir zum Abbildungszylinder übergehen, sehen wir: $K(Q_{n+1}, n+1)$ kann als Teilraum von $K(Q_n, n+1)$ angesehen werden; f_{n+1} ist dann die Inklusion und es gilt: $[f_{n+1}]=\{q_{n+1}\}$.

Wir hatten zwar in § 3 die Abbildungen f_{n+1} nicht als Inklusionen vorausgesetzt; ersetzt man aber z. B. eine beliebige Abbildung f_2 durch die Inklusion in den zugehörigen Abbildungszylinder, so verhält man eine induzierte

Faserung, deren Totalraum X_{01} denselben Homotopietypus besitzt wie der zur ursprünglichen Abbildung gehörige Totalraum. Dies folgt leicht aus der Tatsache, daß der ursprüngliche Raum $K(Q_1, 2)$ starker Deformationsretrakt des zu f_2 gehörigen Abbildungszylinders ist. Anderseits beweist man: Ist $A \subset B$ starker Deformationsretrakt von B, so auch EA von EB und von $\rho^{-1}(A)$; wo ρ: $EB \to B$ die Faserung der vom Basispunkt auslaufenden Wege ist. Wir geben keine weiteren Einzelheiten.

Wir beweisen den Satz 4.1 für den Fall, wo f_{n+1} als Inklusion gewählt wurde. Dem Homomorphismus φ_n: $Q_n \to S_n$ entspricht eine Homotopieklasse

$$[h_n];\ h_n\colon K(Q_n, n+1) \to K(S_n, n+1).$$

Da $\varphi = (\varphi_n)_{n \geqq 1}$ ein Differentialfolgenhomomorphismus ist, gilt: $\varphi_n \circ q_{n+1} = s_{n+1} \circ \varphi_{n+1}$. Für die entsprechenden Homotopieklassen erhalten wir deshalb: $[h_n] \circ \{q_{n+1}\} = \{s_{n+1}\} \circ (\varphi_{n+1})$ oder auch

$$[h_n] \circ [f_{n+1}] = [a_{n+1}] \circ [g_{nn}], \quad \text{wo} \quad a_{n+1}\colon K(S_{n+1}, n+1) \to K(S_n, n+1)$$

die dem Homomorphismus s_{n+1} entsprechende Inklusion ist. Für die Abbildungen selbst erhält man Homotopiekommutativität:

$h_n \circ f_{n+1} \sim a_{n+1} \circ g_{nn}$. Da f_{n+1} eine Cofibration ist, kann h_n homotop so abgeändert werden, daß sogar $h_n \circ f_{n+1} = a_{n+1} \circ g_{nn}$ ist. Dieselbe Überlegung zeigt: Eine Deformation von g_{nn} kann auf h_n erweitert werden.

Nach diesen allgemeinen Vorbemerkungen konstruieren wir nun schrittweise Abbildungen g_{kl}: $X_{kl} \to Y_{kl}$, welche mit den Inklusionen i_{kl}: $X_{kl-1} \to X_{kl}$, bzw. u_{kl}: $Y_{kl-1} \to Y_{kl}$ verträglich sind: $u_{kl+1} \circ g_{kl} = g_{kl+1} \circ i_{kl+1}$. Sie definieren dann Abbildungen g_k: $X_k \to Y_k$. Die zugehörigen Homotopieklassen $[g_k]$ hängen von der Konstruktion nicht ab und stellen den gesuchten Copolyederhomomorphismus dar.

Wir wählen jetzt die beiden Abbildungen g_{00}: $X_{00} \to Y_{00}$, g_{11}: $X_{11} \to Y_{11}$ aus den Homotopieklassen (φ_1) und (φ_2). Gemäß § 3 werden dann unter Berücksichtigung von Lemma 3.2 die Faserungen p'_{11}: $X'_{01} \to X_{11}$ und r'_{11}: $Y'_{01} \to Y_{11}$ konstruiert, Wir erhalten das folgende Diagramm:

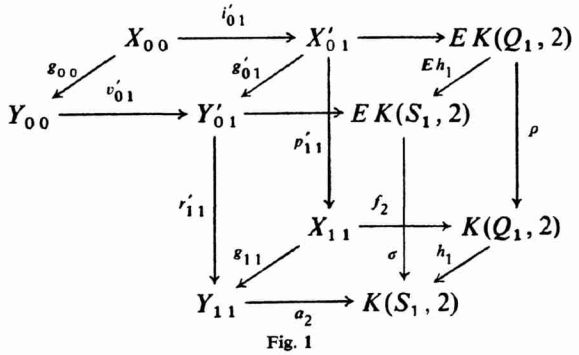

Fig. 1

Alle Vierecke, die weder i'_{01} noch v'_{01} enthalten, sind kommutativ. Ferner gilt: $g'_{01} \circ i'_{01} \sim v'_{01} \circ g_{00}$. Die Abbildungen i'_{01} und v'_{01} sind nämlich Homotopie-

äquivalenzen der Räume X_{00}, Y_{00} mit den Fasern von p'_{11} resp. r'_{11}, gefolgt von den Einbettungen dieser Fasern in die Faserräume X'_{01} resp. Y'_{01}: $i'_{01} = I_{01} \circ \alpha_{01}$, $v'_{01} = V_{01} \circ \beta_{01}$. α_{01} und β_{01} sollen für die Homotopiegruppen den identischen Homomorphismus induzieren. Die Beschränkung $g'_{01}|\mathrm{Ker}\, p'_{11}$ liefert eine Abbildung $\gamma_{01}: \mathrm{Ker}\, p'_{11} \to \mathrm{Ker}\, r'_{11}$ so, daß $g'_{01}|\mathrm{Ker}\, p'_{11} = V_{01} \circ \gamma_{01}$. Für die Homotopiegruppen induziert γ_{01} denselben Homomorphismus wie die durch Eh_1 definierte Abbildung der Faser von ρ in die Faser von σ. Die exakten Homotopiesequenzen zeigen, daß dieser Homomorphismus $= \varphi_1$ ist. Somit ist auch $(\gamma_{01})_* = g_{00*} = \varphi_1$. Da die Homotopieäquivalenzen α_{01}, β_{01} so gewählt wurden, daß $\alpha_{01*} = \mathrm{Id}$, $\beta_{01*} = \mathrm{Id}$, folgt:

$$\varphi_1 = \varphi_1 \circ \mathrm{Id} = \varphi_1 \circ \alpha_{01*} = \gamma_{01*} \circ \alpha_{01*}$$

und

$$\varphi_1 = \mathrm{Id} \circ \varphi_1 = \beta_{01*} \circ \varphi_1 = \beta_{01*} \circ g_{00*}.$$

Die Abbildungen $\gamma_{01} \circ \alpha_{01}$ und $\beta_{01} \circ g_{00}$ ergeben somit denselben Homomorphismus von Eilenberg-MacLane-Räumen; sie sind also homotop. Somit sind erst recht die Abbildungen $g'_{01} \circ i'_{01}$ und $v'_{01} \circ g_{00}$ homotop. Ersetzen wir nun gemäß § 3 X'_{01} und Y'_{01} durch die Abbildungszylinder X_{01} und Y_{01}, die zu den Abbildungen i'_{01} und v'_{01} gehören, so definiert $k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu_{01}$ eine Abbildung: $X_{01} \to Y_{01}$. μ_{01} ist die kanonische Retraktion $X_{01} \to X'_{01}$, k_{01} die Einbettung $Y'_{01} \to Y_{01}$.

Sei v_{01} die kanonische Retraktion $Y_{01} \to Y'_{01}$. Es sind auch die Abbildungen $(k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu_{01}) \circ i_{01}$ und $v_{01} \circ g_{00}$ homotop, da

$$k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu_{01} \circ i_{01} = k_{01} \circ g'_{01} \circ i'_{01} \sim k_{01} \circ v'_{01} \circ g_{00} \sim v_{01} \circ g_{00}.$$

Da i_{01} eine Cofibration ist, können wir $k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu_{01}$ durch eine Abbildung g_{01} ersetzen, die zu ihr homotop ist, und für die gilt: $g_{01} \circ i_{01} = v_{01} \circ g_{00}$ (I). Es gilt ferner:

$$g_{11} \circ p_{11} = g_{11} \circ p'_{11} \circ \mu_{01} = r'_{11} \circ g'_{01} \circ \mu_{01} = r'_{11} \circ v_{01} \circ k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu_{01}$$
$$= r_{11} \circ (k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu_{01}) \sim r_{11} \circ g_{01}; \quad \text{also} \quad g_{11} \circ p_{11} \sim r_{11} \circ g_{01} \quad \text{(II)}.$$

Das soeben beschriebene Verfahren wenden wir immer an, um Abbildungen g_{kk+1} zu konstruieren. Man erhält durch die entsprechenden Überlegungen jeweils die Eigenschaften I und II. Die Abbildungen g_{kl}, $l > k+1$ erhalten wir auf etwas andere Weise.

Zuerst geben wir das allgemeine Konstruktionsprinzip an. Ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{f'} & B' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

gegeben: $h \circ f' = f \circ g$, dann können wir den zu f' gehörigen Abbildungszylinder $M_{f'}$ so in den Abbildungszylinder M_f abbilden, daß wieder ein kommutatives Diagramm entsteht; genauer: Ist H die zu definierende Abbildung H:

$M_{f'} \to M_f$, i' die kanonische Cofibration $i'\colon A' \to M_{f'}$, i die f entsprechende Cofibration $i\colon A \to M_f$, so gilt $H \circ i' = i \circ g$.

Ist $a' \in A'$, $0 \leqq t \leqq 1$, so bezeichne $[a', t]$ den entsprechenden Punkt in $M_{f'}$. $j'\colon B' \to M_{f'}$ sei die kanonische Einbettung.

Dann ist definitionsgemäß

$$H([a', t]) = [g(a'), t]$$

resp.

$$H(j'(b')) = j(h(b')) \qquad b' \in B'.$$

Man verifiziert leicht, daß dies wirklich eine stetige Abbildung $M_{f'} \to M_f$ definiert. Ferner ergibt sich leicht: $H \circ j' \circ \mu' = j \circ \mu \circ H$ und daraus $\mu H j' \mu' = \mu j \mu H$ oder auch $h\mu' = \mu H$. (Formel 4.1)

Nach diesen Zwischenbemerkungen zeigen wir, wie nun die Abbildungen g_{02} (allgemeiner g_{kk+2}) und dann g_{03} (allgemeiner g_{kl}, $l > k+2$) zu konstruieren sind.

Die Räume X'_{02} resp. Y'_{02} sind die Totalrämue induzierter Faserungen; X'_{01} und Y'_{01} sind induzierte Faserungen über den Teilräumen $X_{11} \subset X_{12}$ resp. $Y_{11} \subset Y_{12}$. Somit ist das Diagramm kommutativ.

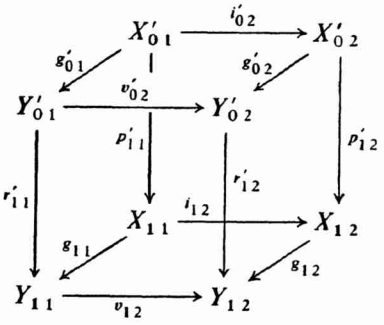

Fig. 2

(Wir dürfen ja g_{12} als schon konstruiert annehmen.) Ersetzt man hierin X'_{01} und Y'_{01} durch die Abbildungszylinder X_{01} und Y_{01} der Abbildungen i'_{01}, v'_{01} und die Abbildung g'_{01} durch die Abbildung $k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu'_{01}$, so bleibt die Kommutativität erhalten, wenn v'_{02} und i'_{02} in evidenter Weise erweitert werden. Somit können wir jetzt auf Grund des in der vorhergehenden Zwischenbemerkung geschilderten Verfahrens den Abbildungszylinder X_{02} in den Abbildungszylinder Y_{02} durch eine Abbildung H_{02} abbilden. Es gilt dann $v_{02} \circ k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu'_{01} = H_{02} \circ i_{02}$. Da i_{02} eine Cofibration ist, können wir die Homotopie $v_{02} \circ k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu'_{01} \sim v_{02} \circ g_{01}$ erweitern: $H_{02} \sim g_{02}$. Es ist dann also $v_{02} \circ g_{01} = g_{02} \circ i_{02}$ (I).

Die Eigenschaft (II) erhalten wir auch hier: $g_{12} \circ p_{12} = g_{12} \circ p'_{12} \circ \mu'_{02} = r'_{12} \circ g'_{02} \circ \mu'_{02}$. Nach Formel 4.1 ist dies $= r'_{12} \circ v_{02} \circ H_{02} = r_{12} \circ H_{02}$. Da $H_{02} \sim g_{02}$ ist, so auch $g_{12} \circ p_{12} \sim r_{12} \circ g_{02}$ (II).

Da die Homotopie $H_{02} \sim g_{02}$ die Homotopie $k_{01} \circ g'_{01} \circ \mu'_{01} \sim g_{01}$ erweitert und das Ausgangsdiagramm kommutativ war, erweitert die Homotopie $g_{12} \circ p_{12} \sim r_{12} \circ g_{02}$ die Homotopie $r_{11} \circ g_{01} \sim g_{11} \circ p_{11}$. Diese Eigenschaft (III) ist von großer Wichtigkeit; es folgt aus ihr nämlich, daß wir durch Grenzübergang eine Homotopie $r_{k+1} \circ g_k \sim g_{k+1} \circ p_{k+1}$ erhalten werden. Auf Grund der bisherigen Überlegungen können wir allgemein g_{kk+2} konstruieren; es gelten stets die Eigenschaften I, II, III.

Die Formel 4.1 zeigt nun aber:

$$g'_{02} \circ \mu'_{02} = \nu_{02} \circ H_{02};$$

somit ist auch

$$r'_{12} \circ g'_{02} \circ \mu'_{02} = r'_{12} \circ \nu_{02} \circ H_{02},$$

d.h.

$$g_{12} \circ p'_{12} \circ \mu'_{02} = r'_{12} \circ \nu_{02} \circ H_{02}$$

oder

$$g_{12} \circ p_{12} = r_{12} \circ H_{02}.$$

Ebenso folgt:

$$\nu'_{03} \circ g'_{02} \circ \mu'_{02} = \nu'_{03} \circ \nu_{02} \circ H_{02}$$

oder

$$g'_{03} \circ i'_{03} \circ \mu'_{02} = \nu'_{03} \circ \nu_{02} \circ H_{02}.$$

Diese Formeln zeigen gerade die zur Konstruktion einer Abbildung H_{03} benötigte Kommutativität. Wir können somit auch g_{03} konstruieren und die Eigenschaften I, II, III beweisen usw.

Damit haben wir allgemein Abbildungen $g_{kl}: X_{kl} \to Y_{kl}$ definiert. Die weitere Konstruktion der Copolyeder verlangte nun den Übergang zu den geometrischen Realisationen der entsprechenden singulären Komplexe $|S(X_{kl})|$. Die stetigen Abbildungen g_{kl} induzieren dann stetige Abbildungen dieser Polyeder, welche wieder die Eigenschaften I, II, III besitzen. Da diese Polyeder die schwache Topologie tragen, erhält man somit wegen (I) Abbildungen

$$g_k: X_k = \bigcup_{l \geqq k} X_{kl} \to Y_k = \bigcup_{l \geqq k} Y_{kl}.$$

$p_k: X_{k-1} \to X_k$, $r_k: Y_{k-1} \to Y_k$ und Homotopien (II)+(III): $g_k \circ p_k \sim r_k \circ g_{k-1}$. Wir haben dabei wieder X_{kl} usw. statt $|S(X_{kl})|$ geschrieben. Da Homotopien der Ausgangsabbildungen g_{kk} stets auf g_{kl}, $l > k$ erweitert werden können, sind die Homotopieklassen $[g_k]$ in eindeutiger Weise bestimmt. Man sieht daraus auch, daß die gegebene Konstruktion einen Funktor definiert, da die Klassen $[g_{kk}]$ durch die Gruppenhomomorphismen $\varphi_k: G_k \to S_k$ eindeutig bestimmt sind.

Anhang: § 5. Über den Homotopietypus gewisser Faserräume

Ziel der folgenden Betrachtung ist der Beweis des nachfolgenden Satzes 5.1; als Anwendung erbringen wir am Schluß den Beweis eines Satzes über den Homotopietypus des Totalraumes einer gewissen induzierten Faserung. Für uns ist dieser Satz von Interesse in § 3; er zeigt nämlich, daß sämtliche Räume, die wir während der Konstruktion eines (verallgemeinerten) Copolyeders zu einem vorgegebenen Kettenkomplex benützt haben, einem CW-Komplex homotopieäquivalent sind.

Satz 5.1. *Es sei $E \xrightarrow{p} B$ eine Faserung bezüglich der Klasse aller topologischen Räume, d.h. das Covering Homotopy Theorem gelte unbeschränkt, $\pi_0(B) = 0$, B sei schwach lokal zusammenziehbar, d.h. jeder Punkt $b \in B$ besitze eine Umgebung U, die in B auf b zusammenziehbar ist, B und F_b sei homotopieäquivalent*

einem CW-Komplex, E metrisch: ferner gelte für diese Faserung das Covering Homotopy Extension Theorem bezüglich metrischer Räume. Dann ist auch E homotopieäquivalent einem CW-Komplex.

Erklärung. Das Covering Homotopy Extension Theorem besagt: Ist Z ein metrischer Raum, $Y \subset Z$ ein abgeschlossener Teilraum, $f: Z \to B$ eine stetige Abbildung in die Basis, $\varphi: Z \to E$ eine überlagernde Abbildung ($p \circ \varphi = f$), $F: Z \times I$ eine Deformation von f, $\Phi': Y \times I \to E$ eine Überlagerung von $F|Y \times I (p \circ \Phi' = F|Y \times I)$, so existiert eine Überlagerung $\Phi: Z \times I \to E$ mit $\Phi|Y \times I = \Phi'$, $p \circ \Phi = F$.

Vorbemerkungen. Sind B_1 und B_2 homotopieäquivalent: $B_1 \overset{g}{\leftarrow} B_2$, ist $p_1: E_1 \to B_1$ eine Faserung, $\pi_0(B_1) = \pi_0(B_2) = 0$ und ist $p_2: E_2 \to B_2$ die durch die Homotopieäquivalenz g über B_2 induzierte Faserung, so sind E_1 und E_2 homotopieäquivalent. Wir dürfen also im Beweis des Theorems die Basis B von vornherein als CW-Komplex annehmen, da ja vorausgesetzt wurde, daß B homotopieäquivalent einem solchen Komplex sei. Nach MILNOR [6, Theorem 2(c)] darf man dann B sogar als Polyeder, versehen mit der schwachen Topologie, annehmen.

Schwache Topologie eines Polyeders X:

Die abgeschlossenen Simplexe $\bar{\sigma}$ tragen die natürliche Topologie; $U \subset X$ heißt abgeschlossen in X, falls $U \cap \bar{\sigma}$ in $\bar{\sigma}$ für jedes σ abgeschlossen ist.

Nach FADELL [3] gelten die folgenden Sätze für Faserungen der von uns betrachteten Art:

1. (Prop. 2): Ist $\pi_0(B) = 0$, so sind alle Fasern vom selben Homotopietypus.

2. (Prop. 4): Ist B schwach lokal zusammenziehbar ($= wlc$), d.h. besitzt jeder Punkt $b \in B$ eine Umgebung U, die in B auf b zusammenziehbar ist, so ist die über U induzierte Faserung $(p^{-1}(U), U, p|p^{-1}(U))$ faserhomotopieäquivalent zu $U \times F_b$, wobei $F_b = p^{-1}(b)$ ist. Insbesondere ist (E, B, p) für zusammenziehbares B einem Produktraum faserhomotopieäquivalent. – Wir entnehmen O. HANNER, Arkiv för Matematik **2,** No. 16 (1952), die folgenden Definitionen und Sätze:

a) Definitionen

1. Ein Raum X heißt absoluter Nachbarschaftsretrakt bezüglich der Klasse der metrischen Räume (ANR (metrisch)), falls X ein metrischer Raum ist, und gilt:

Immer dann, wenn X als abgeschlossene Teilmenge in einen metrischen Raum Z eingebettet ist, ist X ein Retrakt einer gewissen offenen Umgebung U von X in Z.

2. Ein Raum X heißt ein Nachbarschaftserweiterungsraum für die Klasse der metrischen Räume (NES (metrisch) = neighborhood extension space), wenn für jedes metrische Paar (Y, B) und jede stetige Abbildung $f: B \to X$ eine Umgebung U von B in Y und eine Erweiterung $F: U \to X$ von f existiert.

3. Ein Raum X heißt ein *lokaler* Nachbarschaftserweiterungsraum bezüglich der metrischen Räume, wenn jeder Punkt von X eine Umgebung besitzt, die bezüglich der metrischen Räume ein Nachbarschaftserweiterungsraum ist.

b) Sätze

1. Ein lokaler NES (metrisch) ist ein NES (metrisch) (19.2).

2. Ist X ein metrischer Raum und ein NES (metrisch), so ist X ein ANR (metrisch) (2.11).

3. Ein ANR (metrisch) wird von einem simplizialen Polyeder (versehen mit der schwachen Topologie) dominiert (28.6).

Nach MILNOR [6, Theorem 2(b)] gilt:

Ein Raum X, der von einem CW-Komplex dominiert wird, besitzt den Homotopietypus eines CW-Komplexes.

Um das Theorem 5.1 über den Homotopietypus eines Faserraumes zu beweisen, genügt es, nach obigen Sätzen zu zeigen:

E ist ein lokaler NES (metrisch).

Wir haben zu zeigen, daß jeder Punkt $e \in E$ eine Umgebung V besitzt, mit der folgenden Eigenschaft:

Immer dann, wenn $Y \subset Z$ eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes Z und $f\colon Y \to V$ eine stetige Abbildung ist, existiert eine offene Umgebung W von Y in Z so, daß sich f auf W erweitern läßt.

Nach den Fadellschen Sätzen 1,2 können wir zu $e \in E$ ein offenes $U \subset B$ mit $p(e) \in U$ so finden, daß $p^{-1}(U)$ faserhomotopie-äquivalent zu $F_{p(e)} \times U$ ist.

J.H.C. WHITEHEAD hat bewiesen [8, Theorem 35]:

Ist $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung eines Polyeders X in der schwachen Topologie, so existiert eine simpliziale Unterteilung X' derart, daß die abgeschlossenen Sterne der Eckpunkte von X' eine Verfeinerung von $\{U_\alpha\}$ darstellen.

Dieses Resultat enthält das folgende:

Ist $x \in X$ ein Punkt, U eine offene Umgebung von x, so enthält U eine Umgebung U' so, daß $\overline{U}'$ ein Teilpolyeder in einer geeigneten Unterteilung von X ist.

Kehren wir nun zum Raum $p^{-1}(U) \subset E$ zurück, so sehen wir deshalb: $\overline{U}$ darf als Polyeder angenommen werden; $p^{-1}(\overline{U})$ ist faserhomotopie-äquivalent $F_{p(e)} \times \overline{U}$ und dies ist homotopie-äquivalent einem Produkt von zwei Polyedern, da $\overline{U}$ schon ein Polyeder ist und $F_{p(e)}$ nach Voraussetzung äquivalent einem solchen ($=F$) ist. $p^{-1}(\overline{U})$ ist also äquivalent $F \times \overline{U}$, wobei F wie $\overline{U}$ Polyeder mit schwacher Topologie sind.

Nach HANNER [4, 25.1] ist aber ein Polyeder mit schwacher Topologie ein NES (metrisch). Allgemein ist aber das Produkt von zwei NES (metrisch) wieder ein NES (metrisch).

(Man erweitere die Komponentenfunktion auf 2 Umgebungen; im Durchschnitt sind beide definiert.)

Somit ist $p^{-1}(\bar{U})$ faserhomotopie-äquivalent zu $F \times \bar{U}$, einem NES (metrisch).

Der nachfolgende Satz 5.2 zeigt, daß dann auch $p^{-1}(\bar{U})$ ein NES (metrisch) ist, weil für die Faserung $p^{-1}(\bar{U})$ das Covering Homotopy Extension Theorem gilt. Da $p^{-1}(\bar{U})$ eine Umgebung von $e \in E$ ist, bedeutet dies: E ist ein lokaler NES (metrisch), also selbst ein NES (metrisch).

Satz 5.2. *Seien $p_1: E_1 \to B$, $p_2: E_2 \to B$ Faserungen über demselben Polyeder B. E_1 und E_2 seien faserhomotopie-äquivalent; E_2 sei ein NES (metrisch). Für $p_1: E_1 \to B$ gelte das Covering Homotopy Extension Theorem. Dann ist auch E_1 ein NES (metrisch).*

Beweis. Sei $\varphi: E_1 \to E_2$ eine Faserhomotopieäquivalenz, $\gamma: E_2 \to E_1$ eine dazu inverse Faserhomotopieäquivalenz. $Y \subset Z$ sei eine abgeschlossene Teilmenge eines metrischen Raumes Z; $h: Y \to E_1$ eine stetige Abbildung. Da E_2 ein NES (metrisch) ist, folgt die Existenz einer offenen Umgebung W von Y in Z und einer stetigen Funktion $k: W \to E_2$ mit $k|Y = \varphi \circ h$. Dann ist $\gamma \circ k: W \to E_1$ stetig und $(\gamma \circ k)|Y = \gamma \circ (k|_Y) = \gamma \circ \varphi \circ h \sim h$ da ja $\gamma \circ \varphi \sim 1_{E_1}$. Somit ist dann $p_1 \circ (\gamma \circ k)|Y \sim p_1 \circ h$. Ferner ist trivialerweise $p_1 \circ (\gamma \circ k)$ eine Erweiterung von $p_1 \circ (\gamma \circ k)|Y$. Da B als Polyeder mit schwacher Topologie nach HANNER (25.1) ein NES (metrisch) ist, folgt nach HANNER (28.2), daß die Homotopie $p_1 \circ (\gamma \circ k)|Y \sim p_1 \circ h$ erweitert werden kann auf ganz W. Sie beginnt mit $p_1 \circ \gamma \circ k$. Nach Voraussetzung können wir das Covering Homotopy Extension Theorem anwenden. Das Endresultat liefert eine Erweiterung von h auf W. q.e.d.

Anwendung des Theorems 5.1

Satz 5.3. *Sei B_1 homotopieäquivalent einem CW-Komplex. B_2 sei ein Polyeder mit metrischer Topologie. Sei $\pi_0(B_1) = \pi_0(B_2) = 0$. E_2 sei der Wegeraum $(B_2^I, *^*)$ von B_2, $f: B_1 \to B_2$ eine stetige Abbildung; $p_1: E_1 \to B_1$ die durch f über B_1 induzierte Faserung ($p_2: E_2 \to B_2$ ist ja eine Faserung). Dann ist E_1 homotopieäquivalent einem CW-Komplex.*

Beweis. Nach MILNOR [6] (loc. cit. Theorem 2d) ist B_1 homotopieäquivalent einem metrischen Polyeder und wir dürfen von Anfang an B_1 als ein solches Polyeder voraussetzen, da es nur auf den Homotopietypus von E_1 ankommt. Metrisches Polyeder: Eckpunkte $\{A_\iota\}$, baryzentrische Koordinaten $f(A_\iota)$ $0 \leqq f(A_\iota) \leqq 1$

$$\sum_\iota f(A_\iota) = 1, \qquad d(f, g) = \left[\sum_\iota \left((f(A_\iota) - g(A_\iota)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Da I kompakt und B_2 ein metrischer Raum ist, folgt leicht die Übereinstimmung von metrischer und der C-O-Topologie im Raum $E_2 = (B_2^I, *^*)$. B_1 (und B_2) sind als Polyeder schwach lokal zusammenziehbar. Die Fasern $p_2^{-1}(b_2)$, $b_2 \in B_2$ sind nach MILNOR loc. cit. Theorem 3 homotopieäquivalent zu CW-Komplexen und wegen $\pi_0(B_2) = 0$ und FADELL Prop. 2 homotopieäquivalent einem festen CW-Komplex. Ferner sind sie als Teilräume von B_2^I metrisch. Da

$$E_1 = \{(b_1, e_2) / b_1 \in B_1, e_2 \in E_2, f(b_1) = p_2(e_2)\} \subset B_1 \times E_2 \quad \text{und} \quad B_1 \text{ wie } E_2$$

metrisch sind, so auch $B_1 \times E_2$ und auch E_1. Wegen $\pi_0(B_1)=0$ sind die Fasern homotopieäquivalent demselben CW-Komplex wie die Fasern von $p_2: E_2 \to B_2$. Im nachfolgenden Lemma werden wir beweisen, daß für die Faserung $p_1: E_1 \to B_1$ das Covering Homotopy Extension Theorem bezüglich metrischer Räume gilt. Damit sind für diese Faserung alle Voraussetzungen des Satzes 5.1 verifiziert und also ist E_1 homotopieäquivalent einem CW-Komplex. q.e.d.

Lemma. (Covering Homotopy Extension Theorem für die Faserung $p_1: E_1 \to B_1$ des Satzes 5.3.) *Sei Z ein metrischer Raum, $Y \subset Z$ ein abgeschlossener Teilraum, $F(z, t): Z \times I \to B_1$ eine stetige Deformation einer stetigen Abbildung von Z in B_1. Die Beschränkung der Deformation auf Y sowie die ganze Anfangsabbildung seien in den Faserraum hinaufgehoben: $\Phi': Z \times (0) \cup Y \times I \to E_1$ mit $p_1 \circ \Phi' = F$. Dann kann Φ' zu einer stetigen Abbildung $\Phi: Z \times I \to E_1$ mit $p_1 \circ \Phi = F$ erweitert werden.*

Beweis. Wir haben das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} Z \times (0) \cup Y \times I & \xrightarrow{\Phi'} & E_1 & \xrightarrow{f'} & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle p_2} \\ Z \times I & \xrightarrow{F} & B_1 & \xrightarrow{f} & B_2 . \end{array}$$

Da $p_1: E_1 \to B_1$ die durch f aus $p_2: E_2 \to B_2$ induzierte Faserung ist und $E_2 = (B_2^I, *^*)$, so ist ein $e_1 \in E_1$ ein Paar (b_1, e_2) mit $f(b_1) = p_2(e_2)$; d.h. ein Punkt $b_1 \in B_1$ und ein Weg $\varphi \in B_2^I$ der in $*$ beginnt und in $f(b_1)$ endet. Diese Deutung zeigt, daß F und Φ' eine Abbildung $\Psi': Z' \to B_2$ definieren. Dabei ist $Z' = Z \times I \times (0) \cup Z \times (0) \times I \cup Y \times I \times I \cup Z \times I \times (1) \subset Z \times I \times I$. Ψ' wird so erklärt:

$$\Psi'(z, t_1, t_2) = \begin{cases} (f \circ F)(z, t_1) & \text{für} \quad t_2 = 1 \\ (f' \circ \Phi')(z, t_1)(t_2) & \text{für} \quad t_1 = 0 \quad \text{oder} \quad z \in Y \\ * & \text{für} \quad t_2 = 0 . \end{cases}$$

Dies bedeutet: Die Punkte $f(F(Z \times (0) \cup Y \times I))$ sind mit dem Basispunkt $*$ durch Wege verbunden. Zu benachbarten Punkten gehören benachbarte Wege. Wir müssen nun den übrigen Punkten von $(f \circ F)\ (Z \times I)$ auch noch solche Wege zuordnen, d.h., wir müssen die obige Abbildung Ψ' von Z' auf $Z \times I \times I$ erweitern.

Offenbar ist Z' in $Z \times I \times I$ abgeschlossen, da es Y in Z ist. Ferner ist $Z \times I \times I$ ein metrischer Raum, da Z ein solcher ist. Nach HANNER (26.1) ist das Polyeder B_2 ein NES (metrisch). Somit läßt sich Ψ' jedenfalls auf eine offene Umgebung T von Z' in $Z \times I \times I$ erweitern: $\Psi'': T \to B_2$. T ist natürlich erst recht eine Umgebung von $Z \times I \times (0) \cup Y \times I \times I \cup Z \times I \times (1) = Z''$. Da I kompakt ist enthält T eine Umgebung von Z'' der Form $S \times I$, wobei S eine Umgebung von $Z \times (0) \times (0) \cup Z \times (0) \times (1) \cup Y \times (0) \times I$ in $Z \times (0) \times I$ ist.

Sei nun $\alpha(\mathfrak{z})$ eine Urysohn-Funktion für $\mathfrak{z} \in Z \times (0) \times I$; d.h. eine solche reelle stetige Funktion, für die gilt: $0 \leqq \alpha(\mathfrak{z}) \leqq 1$, $\alpha(\mathfrak{z}) = 0$ für $\mathfrak{z} \in Z \times (0) \times I - S$, $\alpha(\mathfrak{z}) = 1$

für

$$\mathfrak{z} \in Z \times (0) \times (0) \cup Z \times (0) \times (1) \cup Y \times (0) \times I.$$

Ψ' wird jetzt erweitert auf ganz $Z \times I \times I$ durch

$$\Psi(z, t_1, t_2) = \Psi''(z, \alpha(\mathfrak{z})\, t_1, t_2) \qquad \mathfrak{z} = (z, 0, t_2).$$

Jetzt können wir Φ' zu einer Abbildung Φ erweitern, denn $\Psi: Z \times I \times I \to B_2$ definiert eine Abbildung $\Psi_1: Z \times I \to B_2^I: (\Psi_1(z, t))(t') = \Psi(z, t, t')$, und wir können $\Phi(z, t) = \{F(z, t), \Psi_1(z, t)\}$ setzen.

Literatur

[1] ECKMANN, B.: Homotopy and Cohomology Theory. Proceedings of the Int. Congress of Mathematicians. Stockholm. 59—73 (1962).

[2] —, et P. J. HILTON: Groupes d'homotopie et dualité, Notes I—V. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. **246**, 2444—2447, 2555—2558, 2991—2993 (1958); **247**, 620—623 (1958); **248**, 2054—2056 (1959).

[3] FADELL, E.: On fibre spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 1—14 (1959).

[4] HANNER, O.: Retraction and extension of mappings of metric and non-metric spaces. Arkiv för Matematik **2**, No 16, 315—360 (1952).

[5] HILTON, P. J.: Homotopy Theory and Duality. Part I, 1—113, Cornell University (1959). (Mimeographed lecture notes.)

[6] MILNOR, J.: On spaces having the homotopy type of a CW-complex. Trans. Amer. Math. Soc. **90**, 272—280 (1959).

[7] — The geometric realization of a semi-simplicial complex. Ann. of Math. **65**, 357—362 (1957).

[8] WHITEHEAD, J. H. C.: Simplicial spaces, nuclei and m-groups. Proc. London Math. Soc. (2) **45**, 243—327 (1939).

[9] — Combinatorial Homotopy I. Bull. American Math. Soc. **55**, 213—245 (1949).

Dept. of Math., University of Toronto (Canada)

(Eingegangen am 7. Juli 1964)

HELLWIG, B.
Math. Zeitschr. 86, 255–262 (1964)

Ein Kriterium für die Selbstadjungiertheit elliptischer Differentialoperatoren im R_n

Von
BIRGITTA HELLWIG

Einleitung

Es sei $\mathfrak{H}$ der Hilbertsche Raum

$$\mathfrak{H}=\{u(x)\,|\int_{R_n}|u(x)|^2\,dx<\infty\}$$

mit dem skalaren Produkt

$$(u,v)=\int_{R_n}u(x)\,\overline{v(x)}\,dx\,.$$

Dabei steht x für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und dx ist das Volumenelement im R_n. Betrachtet wird der Differentialoperator A in $\mathfrak{A}$ mit

$$A\,u=-\sum_{i,j=1}^{n}(p_{ij}(x)\,u_{x_i})_{x_j}+q(x)\,u\,,$$

$$\mathfrak{A}=\{u(x)\,|\,u\in C^2(R_n)\cap\mathfrak{H},\ A\,u\in\mathfrak{H}\}$$

unter den *Voraussetzungen*

1) $p_{ij}(x)$, $q(x)$ *reellwertig*, $p_{ij}(x)=p_{ji}(x)$, $p_{ij}(x)\in C^{2+\beta}(R_n)$, $0<\beta<1$, $q(x)\in C^0(R_n)$.

2) $\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}(x)\,\xi_i\,\bar{\xi}_j>0$ *für alle komplexen Zahlen* $\xi_1,\ldots,\xi_n$ *mit* $\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2>0$.

Ferner betrachten wir A in den Teilräumen $\mathring{\mathfrak{A}}$ und $\mathring{\mathfrak{C}}$:

$$\mathring{\mathfrak{A}}=\{u(x)\,|\,u\in C^2(R_n),\ u \text{ hat kompakten Träger}\},$$

$$\mathring{\mathfrak{C}}=\{u(x)\,|\,u\in C^\infty(R_n),\ u \text{ hat kompakten Träger}\}.$$

Ein Satz von E. WIENHOLTZ [1] sagt aus, daß A in $\mathring{\mathfrak{C}}$ wesentlich selbstadjungiert ist, falls A in $\mathfrak{A}$ symmetrisch ist[1]). Es ist dann natürlich auch A in $\mathring{\mathfrak{A}}$ und A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert. Allerdings sind die Differenzier-

[1]) Wir benutzen die folgenden Sprechweisen:

(α) T in $\mathfrak{T}$ heißt symmetrisch, falls $\mathfrak{T}$ dicht in $\mathfrak{H}$ ist und $(Tu,v)=(u,Tv)$ für alle $u,v\in\mathfrak{T}$ gilt.

(β) T in $\mathfrak{T}$ heißt wesentlich selbstadjungiert, falls T in $\mathfrak{T}$ symmetrisch ist und die Räume $(T+iE)\mathfrak{T}$, $(T-iE)\mathfrak{T}$ dicht in $\mathfrak{H}$ sind.

(γ) T in $\mathfrak{T}$ heißt selbstadjungiert, falls T in $\mathfrak{T}$ symmetrisch ist und $(T+iE)\mathfrak{T}=\mathfrak{H}$, $(T-iE)\mathfrak{T}=\mathfrak{H}$ gilt. Diese Definition ist mit $T=T^*$ gleichwertig.

Wenn T in $\mathfrak{T}$ wesentlich selbstadjungiert ist, ist die Abschließung $\overline{T}$ in $\overline{\mathfrak{T}}$ selbstadjungiert und damit spektral zerlegbar.

Für eine ausführliche Darstellung (auch des Satzes in [1]) vgl. G. HELLWIG [2].

barkeitsforderungen an die $p_{ij}(x)$ in [1] stärker als in Voraussetzung 1). Sie lassen sich aber in [1] sofort zu denen der Voraussetzung 1) abschwächen, wenn man die Fassung des in [1] benutzten Weylschen Lemmas durch eine schärfere Fassung ersetzt, wie man sie etwa bei G. HELLWIG [3] findet.

Das Ziel dieser Arbeit ist das folgende allgemeine Kriterium für die wesentliche Selbstadjungiertheit des Operators A in $\mathfrak{A}$[2]).

Satz. *Neben den Voraussetzungen* 1) *und* 2) *seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

3) *Für alle hinreichend großen* $|x|$ *sei*

$$\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(x)\,\xi_i\,\bar{\xi}_j \leqq \rho(|x|)\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2$$

mit positiver, lokal integrierbarer Funktion $\rho(|x|)$.

4) *Es gibt eine in* $0<t_0\leqq t<\infty$ *positive Funktion* $M(t)\in C^1(t_0\leqq t<\infty)$ *mit* $M(t)\geqq m_0>0$, *so daß für alle hinreichend großen* $|x|$ *gilt*

$$\rho(|x|)\,M(|x|)\leqq C_1|x|^2, \tag{1}$$

$$|\rho(|x|)^{\frac{1}{2}}\,M'(|x|)\,M^{-\frac{3}{2}}(|x|)|\leqq C_2, \tag{2}$$

$$q(x)\geqq -K\,M(|x|) \tag{3}$$

mit positiven Konstanten $C_1>0$, $C_2>0$, $K>0$.

Dann ist A in $\mathfrak{A}$ symmetrisch und A in $\mathring{\mathfrak{C}}$, A in $\mathring{\mathfrak{A}}$ und A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert.

Mit [1] folgt dann zusätzlich das wertvolle Resultat, daß sämtliche Eigenfunktionen des selbstadjungierten Operators $\bar{A}$ in $\overline{\mathfrak{A}}$ bereits in $\mathfrak{A}$ liegen[3]).

Bemerkung. Für ein heuristisches Auffinden der gemachten Voraussetzungen ist es nützlich, die entsprechende Situation im R_1: $-\infty<x<\infty$ zu studieren. Dort ist

$$\mathfrak{H}=\{u(x)\,|\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^2\,dx<\infty\},\qquad (u,v)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)\,\overline{v(x)}\,dx.$$

A in $\mathfrak{A}$ wird dann

$$A\,u=-(p(x)\,u')'+q(x)\,u,$$
$$\mathfrak{A}=\{u(x)\mid u\in C^2(-\infty<x<\infty)\cap\mathfrak{H},\ A\,u\in\mathfrak{H}\}.$$

Wir betrachten diesen Operator unter den gleichen allgemeinen Voraussetzungen, wie sie bei H. WEYL und M. H. STONE auftreten, nämlich:

$$p(x),\ q(x)\ \text{reellwertig};\qquad p(x),\ p'(x),\ q(x)\in C^0(-\infty<x<\infty);$$
$$p(x)>0\qquad \text{in } -\infty<x<\infty.$$

Bekanntlich ist A in $\mathfrak{A}$ dann und nur dann symmetrisch, wenn sowohl bei $x=+\infty$ als auch bei $x=-\infty$ der Grenzpunktfall vorliegt. Deshalb sind das Vorliegen des Grenzpunktfalles sowohl bei $x=+\infty$ als auch bei $x=-\infty$ und die Symmetrie von A in $\mathfrak{A}$ gleichwertige Begriffe. Ein besonders allgemeines und wichtiges Kriterium für das Vorliegen des Grenzpunktfalles bei

[2]) Ein anders geartetes Kriterium ist kürzlich von H.-W. ROHDE [6] gegeben worden.

[3]) Dafür sei $q(x)\in C^1(R_n)$ vorausgesetzt. Vgl. etwa [2].

$x=+\infty$ ist das Kriterium von N. LEVINSON [4]. Die gemachten Voraussetzungen stellen eine naheliegende Übertragung der bei LEVINSON auftretenden Bedingungen dar. Selbstverständlich läßt sich die Beweismethode von LEVINSON nicht auf den Fall des partiellen Differentialoperators übertragen.

Meinem Manne danke ich für die Anregung zu diesen Untersuchungen.

Beweis des Satzes

Es ist $\mathfrak{A}$ dicht in $\mathfrak{H}$. Für den Nachweis der Symmetrie von A in $\mathfrak{A}$ darf man sich auf den Beweis von $(A u, v)=(u, A v)$ für alle reellen $u, v \in \mathfrak{A}$ beschränken. Im folgenden sind deshalb alle Größen reell, und wir setzen $n \geqq 2$ voraus.

Einige Lemmata werden vorausgeschickt.

Lemma 1. *Sind α_{ij} Zahlen mit $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$, $i,j=1,\ldots,n$ und $\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j>0$ für alle Zahlen $\xi_1,\ldots,\xi_n$ mit $\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2>0$, so gilt für beliebige Zahlen a_j, b_j*

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}a_ib_j\right)^2 \leqq \left(\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}a_ia_j\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}b_ib_j\right).$$

Lemma 2. *Ist $\Phi(t)\in C^0(t_0\leqq t<\infty)$ und ist $\lim_{t\to\infty}\Phi(t)=\Phi_0$, so gilt für festes $a\geqq t_0$*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_a^t \Phi(s)\,ds=\Phi_0.$$

Beide Lemmata sind wohlbekannt.

Lemma 3. *Ist $F(r)\in C^0(r_1\leqq r<\infty)$, positiv und monoton wachsend und ist*

$$\int_{r_1}^{r} F(t)\,dt\leqq \alpha r\sqrt{F(r)} \quad \text{für alle} \quad r\geqq r_2>r_1,\ \alpha=\text{const},$$

so ist $F(r)$ in $r_1\leqq r<\infty$ beschränkt.

Beweis. Wegen der Monotonie existiert $\lim F(r)$ endlich oder unendlich. Wir machen die Widerspruchsannahme $\lim_{r\to\infty}F(r)=\infty$. Setzt man $G(r)=\int_{r_1}^{r}F(t)\,dt$, dann ist nach Voraussetzung für alle $r\geqq r_2$

$$G(r)\leqq \alpha r\sqrt{G'(r)} \quad \text{und somit} \quad \left(\frac{1}{G(r)}\right)'\leqq\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1}{r}\right)'.$$

Integration zwischen $\tilde{r}\geqq r_2$ und $r\geqq\tilde{r}$ ergibt

$$\frac{1}{G(r)}-\frac{1}{G(\tilde{r})}\leqq\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{\tilde{r}}\right\}.$$

Da $\lim_{r\to\infty}G(r)=\infty$ ist, hat man für alle $\tilde{r}\geqq r_2$ $G(\tilde{r})\leqq\alpha^2\tilde{r}$, also $\int_{r_1}^{r}F(t)\,dt\leqq\alpha^2 r$.

Nun gibt es eine Folge $r^{(1)}, r^{(2)}, \ldots$ mit $\lim_{k\to\infty} r^{(k)}=\infty$ und $F(r^{(k)})\leqq 2\alpha^2$. Andernfalls würde nämlich $F(r)>2\alpha^2$ für alle $r\geqq r_*$ sein. Dann würde aber

$$\alpha^2 r\geqq \int_{r_1}^{r} F(t)\,dt=\int_{r_1}^{r_*} F(t)\,dt+\int_{r_*}^{r} F(t)\,dt\geqq \int_{r_1}^{r_*} F(t)\,dt+2\alpha^2(r-r_*)$$

gelten, was für $r\to\infty$ sicher falsch ist. Wegen der Monotonie gilt dann sogar $F(r)\leqq 2\alpha^2$ für alle hinreichend großen r, welches der gewünschte Widerspruch ist. Deshalb ist das Lemma bewiesen.

Von zentraler Bedeutung ist

Lemma 4. *Für alle reellen $u(x)\in\mathfrak{A}$ existiert*

$$\int_{b\leqq|x|<\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_{ij}(x)\,u_{x_i}(x)\,u_{x_j}(x)}{M(|x|)}\,dx$$

bei geeignet festem $b>0$.

Beweis. Nach Voraussetzung 2) und 4) unseres Satzes ist

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\geqq 0 \quad \text{und daher} \quad I(r)=\int_{b\leqq|x|\leqq r} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\,dx$$

monoton wachsend. Da $u\in\mathfrak{H}$, $Au\in\mathfrak{H}$ ist und $\dfrac{1}{M(|x|)}\leqq\dfrac{1}{m_0}$ gilt, kann man ein r_0 so finden, daß (1), (2), (3) für alle $|x|\geqq r_0$ gelten und außerdem

$$\left(\int_{r_0\leqq|x|<\infty} u^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqq\min\left(1,\ \frac{1}{2C_2},\ \frac{m_0}{\sqrt{C_1}}\right), \tag{4}$$

$$\left|\int_{r_0\leqq|x|<\infty} \frac{uAu}{M}\,dx\right|\leqq 1 \tag{5}$$

ist. Wir wählen ein solches festes r_0. Mit

$$F(r)=\int_{r_0\leqq|x|\leqq r} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\,dx$$

machen wir die Widerspruchsannahme: $\lim_{r\to\infty} F(r)=\infty$. Partielle Integration liefert – dabei ist ν die äußere Normale von $|x|\leqq r$ bzw. $|x|\leqq r_0$ auf $|x|=r$ bzw. $|x|=r_0$ –

$$\begin{aligned}
-\int_{r_0\leqq|x|\leqq r} \frac{u}{M}Au\,dx&=\int_{r_0\leqq|x|\leqq r} \frac{u}{M}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}(p_{ij}u_{x_i})_{x_j}-qu\right\}dx\\
&=\int_{|x|=r} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}u_{x_i}\frac{u}{M}\nu_j\,do-\int_{|x|=r_0} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}u_{x_i}\frac{u}{M}\nu_j\,do-\\
&\quad-\int_{r_0\leqq|x|\leqq r} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}u_{x_i}\left(\frac{u}{M}\right)_{x_j}dx-\int_{r_0\leqq|x|\leqq r} \frac{q}{M}u^2\,dx.
\end{aligned} \tag{6}$$

Setzt man

$$f(r)=\int\limits_{|x|=r}\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}u_{x_i}\frac{u}{M}\nu_j\,do\,, \tag{7}$$

so ergibt (6) mit (7)

$$\begin{cases} F(r)=f(r)-f(r_0)+\displaystyle\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}\frac{u}{M}Au\,dx+ \\ \qquad+\displaystyle\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}u_{x_i}\frac{u}{M^2}M'\frac{x_j}{|x|}\,dx-\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}\frac{q}{M}u^2\,dx\,. \end{cases} \tag{8}$$

Lemma 1, die Schwarzsche Ungleichung für Integrale, sowie (2) und (4) und 3) ergeben

$$\begin{cases} \displaystyle\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}u_{x_i}\frac{u}{M^2}M'\frac{x_j}{|x|}\,dx \\ \qquad\leqq\displaystyle\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}|\rho^{\frac{1}{2}}M'M^{-\frac{3}{2}}|\,\Big|\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(u_{x_i}M^{-\frac{1}{2}})(x_j|x|^{-1}u\rho^{-\frac{1}{2}})\Big|\,dx \\ \qquad\leqq C_2\displaystyle\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}x_ix_j}{|x|^2}\frac{u^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}dx \\ \qquad\leqq C_2\displaystyle\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{|x|^2}\frac{u^2}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}dx \\ \qquad\leqq C_2\left(\displaystyle\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{r_0\leqq|x|\leqq r}u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\leqq\frac{1}{2}\sqrt{F(r)}\,. \end{cases} \tag{9}$$

Mit (8) und (9) findet man bei Beachtung von (3), (4), (5)

$$F(r)\leqq f(r)-f(r_0)+1+\tfrac{1}{2}\sqrt{F(r)}+K\,. \tag{10}$$

Man wählt jetzt ein festes $r_1\geqq r_0$ so groß, daß für alle $r\geqq r_1$ gilt $F(r)\geqq 1$. Dies ist wegen unserer Widerspruchsannahme: $\lim\limits_{r\to\infty}F(r)=\infty$ möglich. Dann hat man $\sqrt{F(r)}\leqq F(r)$, und (10) liefert für alle $r\geqq r_1$

$$\tfrac{1}{2}F(r)\leqq f(r)+|-f(r_0)+1+K|\,. \tag{11}$$

Integration zwischen r_1 und r ergibt

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\displaystyle\int_{r_1}^{r}F(t)\,dt\leqq\int_{r_1}^{r}f(t)\,dt+(r-r_1)\,|-f(r_0)+1+K| \\ \qquad\qquad\leqq\displaystyle\int_{r_1}^{r}f(t)\,dt+r\,|-f(r_0)+1+K|\,. \end{cases} \tag{12}$$

Mit der Setzung (7) unter Benutzung der Voraussetzungen des Satzes und der Formel (4) erhält man

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
\int_{r_1}^{r} f(t)\,dt &= \int_{r_1\leqq|x|\leqq r} \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(u_{x_i}M^{-\frac{1}{2}})(x_j|x|^{-1}M^{-\frac{1}{2}}u)\,dx \\
&\leqq \int_{r_1\leqq|x|\leqq r} \left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}x_ix_ju^2}{M|x|^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx \\
&\leqq \int_{r_1\leqq|x|\leqq r} \left(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\rho M u^2}{M^2}\right)^{\frac{1}{2}}dx \\
&\leqq \left(\int_{r_1\leqq|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{r_1\leqq|x|\leqq r}\frac{C_1|x|^2}{m_0^2}u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqq \frac{\sqrt{C_1}\,r}{m_0}\left(\int_{r_0\leqq|x|\leqq r}u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{F(r)}\leqq r\sqrt{F(r)}\,.
\end{aligned}\right.
$$

(12) und (13) ergibt für alle $r\geqq r_1$

$$
(14)\qquad \tfrac{1}{2}\int_{r_1}^{r} F(t)\,dt\leqq r\sqrt{F(r)}+r\,|-f(r_0)+1+K|\,.
$$

Wir wählen nun ein $r_2\geqq r_1$ so groß, daß für alle $r\geqq r_2$ mit unserer Widerspruchsannahme: $\lim_{r\to\infty}F(r)=\infty$ gilt

$$
|-f(r_0)+1+K|\leqq r\sqrt{F(r)}\,.
$$

Aus (14) wird dann für alle $r\geqq r_2$

$$
\tfrac{1}{2}\int_{r_1}^{r} F(t)\,dt\leqq 2r\sqrt{F(r)}\,.
$$

Lemma 3 liefert dann, daß $F(r)$ beschränkt ist. Dies ist der gewünschte Widerspruch. Deshalb ist $\lim_{r\to\infty}F(r)<\infty$ gezeigt und Lemma 4 bewiesen.

Beweis des Satzes. $u(x)$, $v(x)$ seien zwei beliebige reelle Funktionen aus $\mathfrak{A}$. Partielle Integration ergibt

$$
(15)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{|x|\leqq r} u(x)\,Av(x)\,dx-\int_{|x|\leqq r} v(x)\,Au(x)\,dx \\
&\quad=\int_{|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n}(p_{ij}u_{x_i})_{x_j}v\,dx-\int_{|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n}(p_{ij}v_{x_i})_{x_j}u\,dx \\
&\quad=\int_{|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n}(p_{ij}u_{x_i}v)_{x_j}\,dx-\int_{|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^{n}(p_{ij}v_{x_i}u)_{x_j}\,dx \\
&\quad\quad(\text{wegen } p_{ij}(x)=p_{ji}(x)) \\
&\quad=\int_{|x|=r}\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}u_{x_i}v\,\nu_j\,do-\int_{|x|=r}\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}v_{x_i}u\,\nu_j\,do\,.
\end{aligned}\right.
$$

Als Abkürzung setzen wir

$$\psi(r)=\int\limits_{|x|\leqq r} u(x)\,A\,v(x)\,dx-\int\limits_{|x|\leqq r} v(x)\,A\,u(x)\,dx. \tag{16}$$

Wegen $u, v\in\mathfrak{H}$; Au, $Av\in\mathfrak{H}$ existiert nach der Schwarzschen Ungleichung lim für die rechte Seite. Deshalb existiert $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(r)$. Unsere Aufgabe besteht darin, $\lim\limits_{r\to\infty}\psi(r)=0$ nachzuweisen. Mit diesem Nachweis ist dann die Symmetrie von A in $\mathfrak{A}$ gezeigt, und nach dem Satz von E. WIENHOLTZ ist unser Satz bewiesen. Es werde die Widerspruchsannahme: $\lim\limits_{r\to\infty}|\psi(r)|=\psi_0>0$ gemacht. Mit (15) und (16) erhalten wir

$$\left(\int\limits_c^r|\psi(t)|\,dt\right)^2\leqq 2\left(\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\left|\sum_{i,j=1}^n p_{ij}u_{x_i}v\frac{x_j}{|x|}\right|dx\right)^2 +2\left(\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\left|\sum_{i,j=1}^n p_{ij}v_{x_i}u\frac{x_j}{|x|}\right|dx\right)^2.$$

Dabei ist beachtet worden, daß $v_j=x_j/|x|$ gilt. Im folgenden soll c geeignet groß gewählt werden, insbesondere so groß, daß für $|x|\geqq c$ die Voraussetzungen des Satzes gültig sind. Wir erhalten mit Lemma 1 und (1)

$$\begin{aligned}\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\left|\sum_{i,j=1}^n p_{ij}u_{x_i}v\frac{x_j}{|x|}\right|dx&=\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\left|\sum_{i,j=1}^n p_{ij}\left(\frac{u_{x_i}}{\sqrt{M}}\right)\left(\frac{\sqrt{M}\,v\,x_j}{|x|}\right)\right|dx\\ &\leqq\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\left(\sum_{i,j=1}^n\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\right)^{\frac12}\left(\sum_{i,j=1}^n p_{ij}M\,v^2\frac{x_ix_j}{|x|^2}\right)^{\frac12}dx\\ &\leqq\left(\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^n\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\,dx\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\rho(|x|)\,M\,v^2\,dx\right)^{\frac12}\\ &\leqq\left(C_1r^2\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}v^2\,dx\int\limits_{c\leqq|x|\leqq r}\sum_{i,j=1}^n\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\,dx\right)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Setzen wir bei Beachtung von Lemma 4

$$\delta(c)=\int\limits_{c\leqq|x|<\infty}v^2\,dx\int\limits_{c\leqq|x|<\infty}\sum_{i,j=1}^n\frac{p_{ij}u_{x_i}u_{x_j}}{M}\,dx+ +\int\limits_{c\leqq|x|<\infty}u^2\,dx\int\limits_{c\leqq|x|<\infty}\sum_{i,j=1}^n\frac{p_{ij}v_{x_i}v_{x_j}}{M}\,dx,$$

so erhalten wir die Abschätzung

$$\left(\int\limits_c^r|\psi(t)|\,dt\right)^2\leqq 2C_1r^2\delta(c).$$

Mit Lemma 4 und $u, v\in\mathfrak{H}$ hat man $\lim\limits_{c\to\infty}\delta(c)=0$. Wir wählen nun c so groß, daß mit unserer Widerspruchsannahme

$$\delta(c)\leqq\frac{1}{2C_1}\frac{\psi_0^2}{4}$$

gilt. Danach wählen wir r so groß, daß

$$\frac{1}{r^2}\left(\int_c^r |\psi(t)|\,dt\right)^2 \geqq \frac{\psi_0^2}{2}$$

ist. Dies ist nach Lemma 2 möglich. Dann ist

$$\frac{\psi_0^2}{2} \leqq \frac{1}{r^2}\left(\int_c^r |\psi(t)|\,dt\right)^2 \leqq 2\,C_1\,\delta(c) \leqq \frac{\psi_0^2}{4},$$

was der gewünschte Widerspruch ist. Deshalb ist $\psi_0 = 0$ gezeigt und der Satz bewiesen.

Fügt man zu den gemachten Voraussetzungen die Voraussetzung

1a) $b_j(x)$ *reellwertig*, $b_j(x) \in C^{1+\beta}(R_n)$, $0 < \beta < 1$

hinzu, so gilt der Satz auch für den allgemeinen Differentialoperator

$$(17) \qquad A\,u = \sum_{j,k=1}^{n} D_j[p_{jk}(x)\,D_k\,u] + q(x)\,u \quad \textit{mit} \quad D_k\,u = i\,u_{x_k} + b_k(x)\,u$$

und $i = \sqrt{-1}$. Der Beweis verläuft analog, wobei man sich allerdings nicht mehr auf reelle $u \in \mathfrak{A}$ beschränken darf. So hätte man z. B. in dem entsprechenden Lemma 4 die Existenz von

$$\int_{b \leqq |x| < \infty} \frac{\sum_{j,k=1}^{n} p_{jk}(x)\,(D_j u)\,(\overline{D_k u})}{M(|x|)}\,dx$$

nachzuweisen.

Bekannte Spezialfälle entstehen durch die Setzungen $M(|x|) = 1$, $M(|x|) = |x|$, $M(|x|) = |x|^2$ mit $p_{ij}(x) = \delta_{ij}$ und $b_k(x) = 0$. Die bisher allgemeinsten Resultate für die wesentliche Selbstadjungiertheit von A in $\mathring{\mathfrak{A}}$ sind von T. IKEBE und T. KATO [5] gewonnen worden. Dort werden allgemeine elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung der Gestalt (17) betrachtet, bei denen der Koeffizient $q(x)$ noch geeignete, im endlichen liegende Singularitäten besitzen darf. Beschränkt man sich jedoch in [5] auf den hier vorliegenden Differentialoperator mit Koeffizienten, die keine im endlichen liegende Singularitäten besitzen, so sind die hier erzielten Resultate im allgemeinen weitergehend.

Literatur

[1] WIENHOLTZ, E.: Bemerkungen über elliptische Differentialoperatoren. Arch. Math. **10**, 126–133 (1959).

[2] HELLWIG, G.: Differentialoperatoren der mathematischen Physik. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964.

[3] — Partielle Differentialgleichungen. Stuttgart: Teubner 1960.

[4] LEVINSON, N.: Criteria for the limit-point case for second order linear differential operators. Časopis Pčst. Math. Fys. **74**, 17–20 (1949).

[5] IKEBE, T., and T. KATO: Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators. Arch. Rat. Mech. Analysis **9**, 77–92 (1962).

[6] ROHDE, H.-W.: Über die Symmetrie elliptischer Differentialoperatoren. Math. Z., **86**, 21–33 (1964).

Berlin-Charlottenburg, Reichskanzlerplatz 8

(Eingegangen am 23. Juli 1964)