

Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1964

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0083|log21

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

X, 82

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

B. ECKMANN	E. HEINZ	R. NEVANLINNA	K. ZELLER
ZÜRICH	MÜNCHEN	HELSINKI	TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

A. E. INGHAM **H. KNESER** **W. MAGNUS**
O. PERRON **G. PICKERT**

83. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 14. JANUAR 1964)



SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1964

Math. Z.

3 - Feb. 1964

Niedersächsische Staats- u.
Universitätsbibliothek

A 21267 E

4786

Die

Mathematische Zeitschrift

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F.K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechslungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule

E. Heinz, 8 München, Schellingstr. 2-8

R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Porthania.

H. Wielandt, 74 Tübingen, Ob dem Viehweide 21b.

K. Zeller, 74 Tübingen, Sonnenstraße 11

Springer-Verlag OHG

1 Berlin 31 (Wilmsdorf), Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
69 Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

83. Band	Inhalt	2. Heft Seite
WIENHOLTZ, E., Zur Regularität schwacher Lösungen für elliptische Systeme partieller Differentialoperatoren		85
ROBERTSON, M. M., Integrability of trigonometric series		119
EHlich, H., Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen		123
FENSTAD, J. E., On l -groups of uniformly continuous functions. III. Proximity spaces		133
NAKANO, T., A theorem on lattice ordered groups and its applications to the valuation theory		140
FOSTER, A. L., and A. PIXLEY, Semi-categorical algebras. I. Semi-primal algebras		147
BACHMUTH, S., and J. LEWIN, The Jacobi identity in groups		170

Zur Regularität schwacher Lösungen für elliptische Systeme partieller Differentialoperatoren

Von

ERNST WIENHOLTZ

Jede lokal integrable und zum Bildbereich des Laplace-Operators Δ orthogonale Funktion (jede „schwache Lösung“ von $\Delta u = 0$) stimmt fast überall mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion überein. Diese Aussage hob H. WEYL in [20] hervor und gründete seinen Beweis auf Methoden von G. FUBINI, R. COURANT und K. FRIEDRICHs, welche im Rahmen ihrer Arbeiten [7], [2] bzw. [6] ähnliche Aussagen bewiesen hatten. Der Unterschied besteht nur darin, daß diese Autoren davon ausgingen, daß die schwache Lösung lokal erste Ableitungen im L_2 -Sinne besitzt.

Regularitätsaussagen über schwache Lösungen allgemeiner elliptischer Differentialoperatoren spielen heute eine große Rolle sowohl bei Existenzbeweisen für Lösungen elliptischer Differentialgleichungen und bei der Konstruktion von Greenschen Funktionen, als auch bei funktionalanalytischen Untersuchungen, etwa bei Kriterien für Selbstadjungiertheit (spektrale Zerlegbarkeit) eines elliptischen Differentialoperators und bei Aussagen über die Regularität der Eigenelemente. Schließlich sei noch besonders hervorgehoben, daß die obige Aussage Ausgangspunkt der Theorie der hypoelliptischen Differentialoperatoren gewesen ist, [10], [14].

Im Anschluß an H. WEYL [20] wurde von L. SCHWARTZ [18] und von L. GÄRDING [8] die Gültigkeit der entsprechenden Aussage für elliptische Differentialoperatoren 2. Ordnung bewiesen, welche hinreichend reguläre Grundlösungen im Kleinen besitzen: Es sei $v(x)$ die zum Bildbereich von L orthogonale Funktion, L der Differentialoperator, $U(x, y; \dot{y})$ zugehörige Grundlösung in der Umgebung V von $\dot{y}$ und $\varrho(x; \dot{y})$ unendlich oft differenzierbar mit kompaktem Träger in V , $\varrho(x, \dot{y}) = 1$ für alle x nahe bei $\dot{y}$. Dann ist

$$w(y) = \int v(x) L \varrho(x; \dot{y}) U(x, y; \dot{y}) dx = \int_{|\dot{y} - x| \geq \varepsilon > 0} v(x) L \varrho(x, \dot{y}) U(x, y; \dot{y}) dx$$

mit einer Zahl $\varepsilon > 0$ und daher $w(y)$ differenzierbar, wenn $U(x, y; \dot{y})$ hinreichend regulär. Andererseits sieht man leicht, daß $w(y)$ und $v(y)$ in einer Umgebung von $\dot{y}$ fast überall übereinstimmen.

Diese Beweismethode ist von einer Reihe von Autoren, vgl. [1c], variiert und auch auf den Fall elliptischer Differentialoperatoren gerader Ordnung, vgl. insbesondere F. E. BROWDER [1a–1c], ausgedehnt worden. Der Nachteil der Methode liegt darin, daß sie die Konstruktion einer hinreichend regulären Grundlösung (wenn auch nur lokal) voraussetzt. Beweise ohne Benutzung der Grundlösung sind von F. JOHN [12] durch sphärische Mittelbildung und

von K. FRIEDRICHS [5], L. NIRENBERG [17] und P. LAX [13] unter Heranziehung funktionalanalytischer Hilfsmittel, insbesondere des Lemmas von S. SOBOLEV [19], gegeben worden. Alle diese Beweise verlangen von den Koeffizienten des Differentialoperators Differenzierbarkeitseigenschaften, welche mit der Zahl der unabhängigen Veränderlichen anwachsen. L. NIRENBERG dehnt in [17] seine Methoden auf den Fall von Differentialoperatorensystemen aus, welche in seinem Sinne streng elliptisch sind.

Man kann aber auch die Grundlösung vermeiden, ohne ganz von der ursprünglichen Beweisidee abzuweichen. E. HEINZ regte an, anstelle der Grundlösung die Singularitätenfunktion zu L zu benutzen. Man kommt zu der Singularitätenfunktion $S(x, y)$, indem man einen Differentialoperator L^0 mit konstanten Koeffizienten bildet, welcher mit dem Hauptteil von L an der Stelle y übereinstimmt. Dann ist $S(x, y)$ die Grundlösung von L^0 . Diese ist leicht angebbbar (vgl. [12]), weil L^0 nur konstante Koeffizienten und Differentiationen gleichhoher Ordnung enthält.

Hiermit kann man

$$(*) \quad w(y) = \int v(x) L \varrho(x; \dot{y}) S(x, y) dx$$

bilden, es stimmt auch $w(y)$ fast überall in einer Umgebung von $\dot{y}$ mit $v(y)$ überein, aber man kann trotz weitgehender Regularität von $S(x, y)$ keine höheren Regularitätsaussagen über $w(y)$ direkt aus der Integraldarstellung ablesen, weil der singuläre Punkt y im Integrationsgebiet liegt (es ist im allgemeinen $L S(x, y) \neq 0$). Man kann aber (*) als Integralgleichung für $v(x)$ auffassen und durch Iteration zu Regularitätsaussagen kommen. Hierbei werden wesentlich Differenzierbarkeitssätze über singuläre Integrale (vgl. E. HOPF [11]) benutzt.

Mit Hilfe der Singularitätenfunktion wurde ein solcher Beweis für elliptische Differentialoperatoren zweiter Ordnung von mir in [9] geliefert. In der vorliegenden Arbeit soll die entsprechende Methode für elliptische Systeme von Differentialoperatoren dargestellt werden. Dabei ist die Definition der Elliptizität eines Systems sehr viel weiter gefaßt als gewöhnlich. Sie geht auf eine Definition von L. NIRENBERG und A. DOUGLIS [4], vgl. auch [16], [17], zurück. Unter diesen Systemen kommen auch die elliptischen Differentialoperatoren sowohl gerader als auch ungerader Ordnung vor. Es ist zugelassen, daß alle Differentialoperatoren des für die Elliptizität des Systems entscheidenden Hauptteils untereinander verschiedener Ordnung sind.

Als $S(x, y)$ tritt eine Matrix auf, welche eine naheliegende Verallgemeinerung der Grundlösungsmatrizen von F. JOHN [12] für seine elliptischen Systeme im Falle konstanter Koeffizienten ist.

Ist L das in Rede stehende elliptische Differentialoperatorensystem und $v(x) = (v_1(x), \dots, v_p(x))$ die vektorwertige Funktion, welche lokal integrabel und orthogonal zum Bildbereich von L ist, und versucht man wiederum

$$w(y) = \int v(x) L \varrho(x; \dot{y}) S(x, y) dx$$

zu bilden, so stellt sich heraus, daß dieses Integral im allgemeinen gar nicht existiert, weil L in einigen Zeilen Differentialoperatoren so hoher Ordnung

enthält, daß ihre Anwendung auf einige der Spalten von $S(x, y)$ zu nicht integrierbaren Singularitäten führt. Es ist aber möglich, wie in der Arbeit auseinandergesetzt wird, die Spalten der Matrix S so in Klassen zusammenzufassen, daß

$$\tilde{w}(y) = \int v(x) L \varrho(x; y) \tilde{S}(x, y) dx$$

existiert, wenn $\tilde{S}$ außer denjenigen Spalten von S , welche einer bestimmten Klasse angehören, nur Nullspalten enthält. Man bekommt daraus für einige Komponenten von $v(x)$ eine Integralgleichung, in deren inhomogenen Anteil alle anderen Komponenten von $v(x)$ eingehen. Hieraus folgt Regularität der ausgezeichneten Komponenten von $v(x)$ durch Iteration, aber natürlich nur modulo einer Funktionenklasse, welche durch die anderen Komponenten bestimmt wird. Diese schwache Aussage reicht jedoch aus, um über andere Komponenten eine ähnliche Aussage zu gewinnen, usw., woraus schließlich die Regularität von $v(x)$ folgt.

Während die Regularitätsbeweise für schwache Lösungen für elliptische Differentialoperatorensysteme mit [1b], [15] und [17] genannt sind, wobei zudem die Elliptizität noch so gefaßt ist, daß sich Beweismethoden aus dem Fall eines einzelnen Differentialoperators geradewegs übertragen lassen, ist die Zahl der Arbeiten zur Regularität im Falle eines einzelnen Differentialoperators inzwischen sehr groß geworden. Es sei hierzu — auch mit Rücksicht auf die Untersuchungen über Hypoelliptizität — auf die in neuester Zeit erschienene Arbeit [1d] von F. E. BROWDER verwiesen, in der u. a. ein Regularitätsbeweis für elliptische Differentialoperatoren von gerader und ungerader Ordnung unter sehr schwachen Voraussetzungen hergeleitet wird.

§ 1. Vereinbarungen

Es bezeichne R_N den reellen euklidischen N -dimensionalen Raum mit Punkten $x = (x_1, \dots, x_N)$ und der durch $|x - y| = ((x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_N - y_N)^2)^{\frac{1}{2}}$ gegebenen Abstandsdefinition.

Die Menge der inneren Punkte einer Punktmenge F des R_N werde mit F^* bezeichnet.

Es sei F ein Bereich oder ein Gebiet des R_N .

Mit $L^1(F)$ werde die Menge aller auf F erklärten (komplexwertigen) Funktionen bezeichnet, welche auf F im Sinne von LEBESGUE meßbar und über jeden kompakten Teilbereich von F^* integrierbar sind.

Mit $C_k(F)$ werde die Menge aller Funktionen auf F bezeichnet, deren Ableitungen bis zur Ordnung k auf F existieren und stetig sind, $k = 1, 2, \dots$. $C_0(F)$ bezeichne die Menge der auf F stetigen Funktionen.

Ist $u(x) \in C_k(F)$, dann soll $D_x^\alpha u(x)$, mit $\alpha \leq k$, Ableitung α -ter Ordnung von $u(x)$ sein.

Eine auf F erklärte Funktion $u(x)$ heiße auf F gleichmäßig hölderstetig, wenn es zwei Zahlen K und α mit $0 < \alpha < 1$ gibt, so daß gilt $|u(x) - u(x')| \leq K|x - x'|^\alpha$ für alle $x, x' \in F$. Eine auf F erklärte Funktion $u(x)$ heiße auf F

hölderstetig, wenn sie auf jedem kompakten Teilbereich von F^* gleichmäßig hölderstetig ist.

Es soll $\overline{C}_k^H(F)$ die Menge aller Funktionen auf F bezeichnen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k auf F existieren und auf F gleichmäßig hölderstetig sind, $k = 1, 2, \dots$. $\overline{C}_0^H(F)$ bezeichne die Menge der auf F gleichmäßig hölderstetigen Funktionen.

Es soll $C_k^H(F)$ die Menge aller Funktionen auf F bezeichnen, deren Ableitungen bis zur Ordnung k auf F existieren und auf F hölderstetig sind, $k = 1, 2, \dots$. $C_0^H(F)$ bezeichne die Menge der auf F hölderstetigen Funktionen.

Mit $\dot{C}(F)$ werde die Menge aller in R_N unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnet, von denen jede außerhalb eines individuellen kompakten Teilbereiches von F^* verschwindet. Ist E Kompaktum in F^* , dann soll $\dot{C}(E, F)$ die Menge derjenigen Funktionen aus $\dot{C}(F)$ bedeuten, welche auf E den Wert 1 haben. Ferner ist es nützlich, gewisse Mengen von vektorwertigen Funktionen $u(x) = (u_1(x), \dots, u_p(x))$ einzuführen. Es soll $\overline{C}_k^H(p, F)$ die Menge aller $u(x) = (u_1(x), \dots, u_p(x))$ sein, deren Komponenten $u_i(x)$, $i = 1, \dots, p$ in $\overline{C}_k^H(F)$ liegen; entsprechend

$$\dot{C}(p, F) = \{u(x) \mid u_i(x) \in \dot{C}(F), \quad i = 1, 2, \dots, p\},$$

$$L^1(p, F) = \{u(x) \mid u_i(x) \in L^1(F), \quad i = 1, 2, \dots, p\}.$$

Schließlich werden noch Funktionen $h(x, y) = h(x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N)$ in Mengen $\mathfrak{G}_m^q(x, G)$, $x \in F$, und $\mathfrak{G}_m^q(G, y)$, $y \in F$, zusammengefaßt, welche bei Differenzierbarkeitssätzen über singuläre Integrale (s. § 5) zentrale Bedeutung haben.

Ist G ein beschränktes Gebiet des R_N und sind m und q nicht negative ganze Zahlen, dann sei $\mathfrak{G}_m^q(x, G)$, $x \in F$, die Menge aller Funktionen $h(x, y)$ mit den Eigenschaften:

- 1) $h(x, y)$ gehört bei festem $x \in F$ zu $C_m(G - \{x\})$.
- 2) $D_y^n h(x, y)$, $n = 0, 1, \dots, m$, meßbar auf $F \times G$ und bei festem $y \in G$ meßbar auf F .
- 3) Zu jedem $\alpha > 0$ gibt es eine Konstante c_0 , so daß

$$|D_y^n h(x, y)| \leq c_0 |x - y|^{-N-\alpha+q+m-n}; \quad x \in F, \quad y \in G, \quad x \neq y, \quad n = 0, 1, \dots, m.$$

- 4) Es gibt Konstanten η , c_1 und γ mit $0 < \gamma < 1$, so daß für alle $x \in F$, $\dot{y}, \dot{y}^2 \in G$ mit $|x - \dot{y}| \geq \eta |\dot{y} - \dot{y}^2| > 0$ diese Abschätzungen gelten:

$$|D_y^n h(x, \dot{y}) - D_y^n h(x, \dot{y}^2)| \leq c_1 \{ |x - \dot{y}|^{-N-1+q+m-n} + |x - \dot{y}^2|^{-N-1+q+m-n} \} |\dot{y} - \dot{y}^2|^\gamma,$$

$$n = 0, 1, \dots, m.$$

Entsprechend wird $\mathfrak{G}_m^q(G, y)$, $y \in F$, erklärt.

Anmerkung 1. Wenn $f(x, y) \in \mathfrak{G}_m^q(x, G)$, $x \in F$, für jedes beschränkte F aus R_N gilt und $f(x, y)$ nicht von x abhängt, dann folgt $f(x, y) = g(y) \in \overline{C}_m^H(G)$.

Anmerkung 2. Wenn in Zukunft von einer vektor- oder matrixwertigen Funktion $h(x, y)$ Aussagen $h(x, y) \in \mathcal{G}_m^q(x, G)$, $x \in F$, oder $|h(x, y)| \leq |x - y|^\alpha$ usw. gemacht werden, dann sollen diese elementweise verstanden werden.

Unter einem Differentialoperator $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ auf F soll ein Polynom in $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}$ verstanden werden mit Koeffizienten, die auf F erklärte Funktionen von $x = (x_1, \dots, x_N)$ sind.

Es sei m eine ganze Zahl. Für jedes $x \in F$ sei ${}^{(m)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ die im Polynom $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ enthaltene Form vom Grade m , falls diese existiert, sonst sei ${}^{(m)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$.

Der Differentialoperator ${}^{(m)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ auf F wird die m -te Form aus $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ auf F genannt, falls $m \geq 0$ ist.

Unter einem Differentialoperatorensystem $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ auf F soll eine Matrix verstanden werden, deren Elemente Differentialoperatoren auf F sind. $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ heißt (q, p) -reihig, wenn die Matrix q Zeilen und p Spalten hat.

Anwendung von $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ auf eine vektorwertige Funktion $u(x) = (u_1(x), \dots, u_p(x))$ mit auf F hinreichend oft differenzierbaren Komponenten wird $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u'(x)$ geschrieben mit

$$u'(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ \vdots \\ u_p(x) \end{pmatrix}$$

und ist im Sinne der Matrixmultiplikation zu verstehen.

Es sei

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left(a_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right) \right)_{\mu, \nu=1, \dots, p}$$

ein (p, p) -reihiges Differentialoperatorensystem auf F , und es seien $s_1, \dots, s_p$, $t_1, \dots, t_p$ solche ganze Zahlen, daß ${}^{(m)}a_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ ist für $m > s_\mu + t_\nu$ und $x \in F$; $\mu, \nu = 1, \dots, p$.

Man nennt das Differentialoperatorensystem

$$\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left({}^{(s_\mu + t_\nu)}a_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right) \right)_{\mu, \nu=1, \dots, p}$$

den durch $s_1, \dots, s_p$, $t_1, \dots, t_p$ bestimmten Hauptteil von $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ auf F . Man erhält denselben Hauptteil, wenn man die Zahlen $s_1, \dots, s_p$, $t_1, \dots, t_p$ durch $s_1 + c, \dots, s_p + c$, $t_1 - c, \dots, t_p - c$ ersetzt. Daher darf stets $s_i \geq 1$ angenommen werden, $i = 1, \dots, p$.

Definition der Elliptizität eines Differentialoperatorensystems. Ein (p, p) -reihiges Differentialoperatorensystem $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ auf F heißt auf F elliptisch,

wenn es mindestens einen Hauptteil

$$\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left({}^{(s_\mu+t_\nu)}a_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right)_{\mu, \nu=1, \dots, p} \right)$$

besitzt mit der Eigenschaft $\det \left(\left({}^{(s_\mu+t_\nu)}a_{\mu\nu}(x, \xi) \right) \right) \neq 0$ für alle $x \in F$ und alle reellen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N) \neq (0, \dots, 0)$. Vgl. A. DOUGLIS und L. NIRENBERG [4].

Die zu solchem $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ gehörigen Zahlen $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$ mit $s_i \geq 1$, $i = 1, \dots, p$ heißen elliptische Exponenten von $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

§ 2. Formulierung des Hauptsatzes und Vorbereitung seines Beweises

Ziel der Arbeit ist es, über elliptische Differentialoperatorensysteme den folgenden Satz aufzustellen und zu beweisen.

Satz 1. Es sei G ein Gebiet des R_N und $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(l_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right)$ sei ein (p, p) -reihiges, auf G elliptisches Differentialoperatorensystem mit elliptischen Exponenten $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$ und zugehörigem Hauptteil $\Lambda\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\lambda_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right)$, ferner sei $B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(b_\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right)$ ein $(1, p)$ -reihiges Differentialoperatorensystem auf G mit ${}^{(m)}b_\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ für $m > t_\nu$, $x \in G$, $\nu = 1, \dots, p$. Es sei $v(x) \in L^1(p, G)$ und

$$(1) \quad \int_G v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx = \int_G B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx \quad \text{für alle } \Phi(x) \in \dot{C}(p, G).$$

Ist dann r eine nicht negative ganze Zahl und sind die Koeffizienten von ${}^{(m)}l_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $C_{m-\min(m, t_\nu)+r}^H(G)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, die Koeffizienten von $\lambda_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $C_{\max(s_1, \dots, s_p)+r}^H(G)$ und die Koeffizienten von $b_\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $C_r^H(G)$, $\mu, \nu = 1, \dots, p$, dann stimmt $v(x)$ fast überall in G mit einer Funktion $w(x) = (w_1(x), \dots, w_p(x))$ überein, wobei $w_i(x) \in C_{s_i+r}(G)$ ist, $i = 1, \dots, p$.

Es genügt zu zeigen, daß jeder Punkt in G eine Umgebung U besitzt, so daß $v(x)$ fast überall in U mit einer in U definierten Funktion $w(x) = (w_1(x), \dots, w_p(x))$ übereinstimmt, wobei $w_i(x) \in C_{s_i+r}^H(U)$ ist. Wenn nämlich zwei solche Umgebungen einen nicht leeren Durchschnitt W haben und wenn fast überall in einer Umgebung $v(x) = w^1(x)$ und fast überall in der anderen $v(x) = w^2(x)$ ist, dann ist $w^1(x) = w^2(x)$ fast überall in W . Andererseits sind $w^1(x)$ und $w^2(x)$ beide aus $C_0^H(p, W)$. Also stimmen $w^1(x)$ und $w^2(x)$ in W überein.

Jede dieser Umgebungen kann konvex und so klein gedacht werden, daß jede Funktion aus $C_n^H(G)$ zu $\bar{C}_n^H(U)$ gehört. Daher ist es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man zu den Voraussetzungen des Satzes hinzunimmt, daß G beschränkt und konvex ist und daß die Koeffizienten von ${}^{(m)}l_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $\bar{C}_{m-\min(m, t_\nu)+r}^H(G)$, $m = 0, 1, \dots$, die Koeffizienten von $\lambda_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus

$\bar{C}_{\max(s_1, \dots, s_p)+r}^H(G)$ und die Koeffizienten von $b_\nu(x, \frac{\partial}{\partial x})$ aus $\bar{C}_r^H(G)$ sind, $\mu, \nu = 1, \dots, p$.

Es ist auch keine Beschränkung der Allgemeinheit, alle t_ν positiv anzunehmen. Anderenfalls sei nämlich q eine solche natürliche Zahl, daß $t_\nu + 2q > 0$ ist für $\nu = 1, \dots, p$; nach Voraussetzung des Satzes ist

$$\int_G v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) (\Delta^q \Phi'(x)) dx = \int_G B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) (\Delta^q \Phi'(x)) dx \text{ für alle } \Phi(x) \in \dot{C}(p, G),$$

also

$$\int_G v(x) \hat{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx = \int_G \hat{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx \text{ für alle } \Phi(x) \in \dot{C}(p, G)$$

mit

$$\hat{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta^q \quad \text{und} \quad \hat{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta^q.$$

$\hat{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left(\hat{l}_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right)$ hat als elliptische Exponenten $\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_p, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_p$ die positiven Zahlen $s_1, \dots, s_p, t_1 + 2q, \dots, t_p + 2q$. Es ist ${}^{(m)}\hat{b}_\nu\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ für $m > t_\nu + 2q \equiv \hat{t}_\nu, x \in G$. Es ist ${}^{(n)}\hat{l}_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ für $n < 2q, x \in G$, ferner sind die Koeffizienten von ${}^{(m+2q)}\hat{l}_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $C_{m-\min(m, t_\nu)+r}^H(G)$, $m = 0, 1, \dots$, also sind die Koeffizienten von ${}^{(n)}\hat{l}_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $C_{n-\min(n, \hat{t}_\nu)+r}^H(G)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, usw., und der Satz, eingeschränkt auf den Fall positiver elliptischer Exponenten, beweist die ursprüngliche Behauptung über $v(x)$.

Schließlich darf man noch voraussetzen, daß $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p$ ist, weil sich dies durch Vertauschen und Umbenennen der Zeilen von $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ und von $v'(x)$ erreichen läßt.

§ 3. Singularitätenmatrix zu einem elliptischen Differentialoperatorssystem

Es sei G ein beschränktes, konvexes Gebiet im R_N . Es sei $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left(l_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right)$ ein (p, p) -reihiges und auf G elliptisches Differentialoperator-system mit elliptischen Exponenten $s_1, \dots, s_p, t_1, \dots, t_p$, wobei $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq 1$ und $t_\nu \geq 1$ ist, und zugehörigem Hauptteil $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left(\lambda_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\right)$.

Die Koeffizienten von ${}^{(m)}l_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ seien aus $\bar{C}_{m-\min(m, t_\nu)}^H(G)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, und die Koeffizienten von $\lambda_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ seien aus $\bar{C}_{s_1}^H(G)$, $\mu, \nu = 1, \dots, p$.

Unter den $s_1, \dots, s_p$ gebe es genau h verschiedene Zahlen, diese werden mit $s^1, \dots, s^h$ bezeichnet, es sei $s^1 > s^2 > \dots > s^h$. Dies führt zu einer Klasseneinteilung der Zahlen $1, 2, \dots, p$ in Klassen $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_h$: Es soll $\alpha \in \mathfrak{h}_k$ sein, wenn $s_\alpha = s^k$ ist. Hieran schließt sich eine Matrizenzerlegung an.

Ist A eine Matrix von p Zeilen, dann bedeutet $A(k|)$ eine Matrix, welche aus A hervorgeht, indem in A alle Elemente mit Zeilenindex $\mathfrak{k}$ durch Null ersetzt werden. Ist A eine Matrix von p Spalten, dann bedeutet $A(|k)$ eine Matrix, welche aus A hervorgeht, indem in A alle Elemente mit Spaltenindex $\mathfrak{k}$ durch Null ersetzt werden.

Ist A eine Matrix mit p Zeilen und p Spalten, dann bedeutet $A(k|l)$ eine Matrix, welche aus A hervorgeht, indem in A alle Elemente mit Zeilenindex $\mathfrak{k}$ und alle Elemente mit Spaltenindex $\mathfrak{l}$ durch Null ersetzt werden. Anstelle von $\sum_{j=k}^n A(j|)$ wird kurz $A\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right|)$ geschrieben, entsprechend sind $A\left(\begin{smallmatrix} m \\ l \end{smallmatrix}\right)$ und $A\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \\ l \end{smallmatrix}\right)$ erklärt. Ist schließlich $A = A(x)$ oder $A = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, so ist klar, was unter $A(k|x)$, $A(x|l)$, $A\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right|x|l)$, $A\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ usw. zu verstehen ist.

Nunmehr wird zu $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ eine Singularitätenmatrix mit p Zeilen und p Spalten $S(x, y) = ((S_{\sigma\tau}(x, y)))$ für $x \in G$, $y \in G$, $x \neq y$ definiert durch $S_{\sigma\tau}(x, y) = \Delta^{\frac{N+d}{2}} W_{\sigma\tau}(x, y)$ mit

$$(2) W_{\sigma\tau}(x, y) = \operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{(s_\tau + t_\sigma + d)!} \int_{|\xi|=1} ((x-y) \cdot \xi)^{s_\tau + t_\sigma + d} \ln \frac{((x-y) \cdot \xi)}{i} \lambda^{\sigma\tau}(y, \xi) d\omega_\xi,$$

$d = 2s^1 + 1$ für ungerades N , $d = 2s^1$ für gerades N . Vgl. F. JOHN [12].

Dabei sollen die Funktionen $\lambda^{\sigma\tau}(y, \xi)$, $\sigma, \tau = 1, \dots, p$, für $|\xi| \neq 0$ die Elemente der zu $((\lambda_{\mu\nu}(y, \xi)))$ inversen Matrix sein; sie sind bei festem ξ als Funktionen von y aus $\bar{C}_{s^1}^H(G)$.

Zum Studium von $S_{\sigma\tau}(x, y)$ wird

$$F(z, y) = \int_{|\xi|=1} (z \cdot \xi)^{s_\tau + t_\sigma + d} \ln \frac{(z \cdot \xi)}{i} \lambda^{\sigma\tau}(y, \xi) d\omega_\xi$$

betrachtet. Es ist $F(z, y)$ bei festem $z \neq 0$ aus $\bar{C}_{s^1}^H(G)$, und wenn $\tilde{F}(z, y)$ irgendeine partielle Ableitung von $F(z, y)$ nach den y -Variablen von einer Ordnung $\leq s^1$ ist, dann ist $\tilde{F}(z, y)$ bei festem $y \in G$ beliebig oft in $z \neq 0$ nach den z -Variablen differenzierbar und

$$|D_z^\alpha \tilde{F}(z, y)| \leq \operatorname{const} |z|^{s_\tau + t_\sigma + d - n} (1 + |\ln |z||), \quad |z| \neq 0, \quad y \in G.$$

Schließlich ist die durch $H(x, y) = \tilde{F}(x - y, y)$ definierte Funktion $H(x, y)$ aus $\mathfrak{G}_{N+d+s_\tau+t_\sigma}^0(G, y)$, $y \in G$, und es ist $H_{x_i}(x, y) = \tilde{F}_{x_i}(x - y, y)$. Hiernach ist

$$(3) \quad W_{\sigma\tau}(x, y) \in \mathfrak{G}_{N+d+s_\tau+t_\sigma}^0(G, y), \quad y \in G$$

klar. Es folgt aber auch für alle $\varphi(y) \in \dot{C}(G)$

$$(4) \quad \int_G \tilde{F}(x - y, y) \varphi(y) dy \in \bar{C}_{N+d+s^1+t_\sigma-m}^H(G), \quad 0 \leq m \leq s^1,$$

wenn $\tilde{F}(z, y) = D_y^\alpha F(z, y)$ ist mit $\alpha \leq m$. Die Behauptung ist nämlich für $m = s^1$ eine Konsequenz von $\mathfrak{G}_{N+d+s_\tau+t_\sigma}^0(G, y) \subseteq \mathfrak{G}_{N+d+t_\sigma}^1(G, y)$ und von Satz 6

aus § 5. Es sei die Behauptung für ein m mit $0 < m \leq s^1$ schon bewiesen, dann ist mit $\hat{F}(z, y) = D_y^\alpha F(z, y)$, $0 \leq \alpha \leq m-1$, nach Satz 6 aus § 5

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_G \hat{F}(x-y, y) \varphi(y) dy = \int_G \hat{F}_{x_i}(x-y, y) \varphi(y) dy,$$

und dies ist dasselbe wie

$$\begin{aligned} & \int_G \left(-\frac{d}{dy_i} \hat{F}(x-y, y) \right) \varphi(y) dy + \int_G \hat{F}_{y_i}(x-y, y) \varphi(y) dy \\ &= \int_G \hat{F}(x-y, y) \varphi_{y_i}(y) dy + \int_G \hat{F}_{y_i}(x-y, y) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Integrale sind nach Induktionsannahme aus $\bar{C}_{N+d+s^1+t_\sigma-m}^H(G)$, also ist

$$\int_G \hat{F}(x-y, y) \varphi(y) dy \in \bar{C}_{N+d+s^1+t_\sigma-(m-1)}^H(G).$$

Als unmittelbare Konsequenz von (4) hat man für alle $\varphi(y) \in \dot{C}(G)$

$$(5) \quad \int_G W_{\sigma\tau}(x, y) \varphi(y) dy \in \bar{C}_{N+d+s^1+t_\sigma}^H(G), \quad \sigma, \tau = 1, \dots, p.$$

Daher gilt der

Satz 2. Es sei $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$ und $f'(x) = \int_G W(x, y) \Phi'(y) dy$ mit $\Phi(y) \in \dot{C}(p, G)$. Dann ist $f_\sigma(x) \in \bar{C}_{N+d+s^1+t_\sigma}^H(G)$.

Es sei $E_{\frac{N+d}{2}}(z)$ Grundlösung zum Differentialoperator $\Delta^{\frac{N+d}{2}}$. Damit ist insbesondere gemeint, daß $\Delta^{\frac{N+d}{2}} E_{\frac{N+d}{2}}(z) = 0$ ist für $z \neq 0$ und daß $-\int_G E_{\frac{N+d}{2}}(x-y) \Delta_y^{\frac{N+d}{2}} f(y) dy = f(x)$ ist für alle $f(y) \in \dot{C}(G)$, $x \in G$.

Satz 3. Die Elemente der Matrix $((M_{\mu\tau}(x, y))) = \Delta \left(j \left| y, \frac{\partial}{\partial x} \right| \right) W(x, y | l)$ haben folgende Eigenschaften: 1) Für $\mu \in \mathfrak{h}_j$ oder $\tau \in \mathfrak{h}_l$ ist $M_{\mu\tau}(x, y) = 0$. 2) Für $\mu \in \mathfrak{h}_j$ und $\tau \in \mathfrak{h}_l$ ist

$$M_{\mu\tau}(x, y) = \delta_{\mu\tau} E_{\frac{N+d}{2}}(x-y) + P_{\mu\tau}(y, x).$$

Dabei ist $P_{\mu\tau}(y, x)$ Polynom in den x -Variablen vom Grade $\leq s_\tau - s_\mu + d \equiv s^l - s^j + d$ mit Koeffizienten, welche nur von y abhängen und aus $\bar{C}_{s^l}^H(G)$ sind.

Beweis. 1) ist trivial. 2) Es sei $\mu \in \mathfrak{h}_j$ und $\tau \in \mathfrak{h}_l$, dann ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=1}^p \lambda_{\mu\nu} \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) W_{\nu\tau}(x, y) \\ &= \sum_{\nu=1}^p \operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{(s^l + t_\nu + d)!} \lambda_{\mu\nu} \left(y, \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{|\xi|=1} ((x-y) \cdot \xi)^{d+s^l+t_\nu} \ln \frac{((x-y) \cdot \xi)}{i} \lambda^{\nu\tau}(y, \xi) d\omega_\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^p \operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{(s^l + t_\nu + d)!} \int_{|\xi|=1} \left\{ \frac{(d + s^l + t_\nu)!}{(d + s^l - s^j)!} ((x - y) \cdot \xi)^{d+s^l-s^j} \ln \frac{((x - y) \cdot \xi)}{i} \right. \\
&\quad \left. \times \lambda_{\mu\nu}(y, \xi) \lambda^{\nu\tau}(y, \xi) + c_{l,j,\nu} ((x - y) \cdot \xi)^{d+s^l-s^j} \lambda_{\mu\nu}(y, \xi) \lambda^{\nu\tau}(y, \xi) \right\} d\omega_\xi \\
&= \operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{(d + s^l - s^j)!} \int_{|\xi|=1} ((x - y) \cdot \xi)^{d+s^l-s^j} \ln \frac{((x - y) \cdot \xi)}{i} \sum_{\nu=1}^p \lambda_{\mu\nu}(y, \xi) \lambda^{\nu\tau}(y, \xi) d\omega_\xi + \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^p \operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{(s^l + t_\nu + d)!} c_{l,j,\nu} \int_{|\xi|=1} ((x - y) \cdot \xi)^{d+s^l-s^j} \lambda_{\mu\nu}(y, \xi) \lambda^{\nu\tau}(y, \xi) d\omega_\xi
\end{aligned}$$

mit passenden Konstanten $c_{l,j,\nu}$. Wegen $\sum_{\nu=1}^p \lambda_{\mu\nu}(y, \xi) \lambda^{\nu\tau}(y, \xi) = \delta_{\mu\tau}$ verschwindet der erste Term der rechten Seite, falls $\mu \neq \tau$ ist. Im Falle $\mu = \tau$ ist $s^l - s^j = 0$, ferner ist

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{d!} \int_{|\xi|=1} (z \cdot \xi)^d \ln \frac{(z \cdot \xi)}{i} d\omega_\xi \\
&= \operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{d!} \int_{|\xi|=1} (z \cdot \xi)^d \left(\ln |(z \cdot \xi)| + i \arg \frac{(z \cdot \xi)}{i} \right) d\omega_\xi \\
&= \begin{cases} \frac{(-1)^{N/2}}{(2\pi)^N d!} \int_{|\xi|=1} (z \cdot \xi)^d \ln |(z \cdot \xi)| d\omega_\xi, & \text{falls } N \text{ gerade,} \\ \frac{(i)^{N+1}}{(2\pi)^N d!} \int_{|\xi|=1} |(z \cdot \xi)|^d \frac{\pi}{2} d\omega_\xi, & \text{falls } N \text{ ungerade;} \end{cases}
\end{aligned}$$

die beiden letzten Integrale lassen sich berechnen unter Zuhilfenahme einer Formel von F. JOHN (vgl. [I2], S. 8, oder [3], S. 678):

$$\int_{|\xi|=1} g((z \cdot \xi)) d\omega_\xi = \omega_{N-1} \int_{-1}^{+1} (1 - p^2)^{\frac{N-3}{2}} g(|z| p) dp,$$

wenn $g(\zeta)$ stetig in $-\infty < \zeta < \infty$.

Es resultiert:

$$\operatorname{Re} \frac{(2\pi i)^{-N}}{d!} \int_{|\xi|=1} (z \cdot \xi)^d \ln \frac{(z \cdot \xi)}{i} d\omega_\xi = E_{\frac{N+d}{2}}(z).$$

Schließlich ist $\int_{|\xi|=1} ((x - y) \cdot \xi)^{d+s^l-s^j} \lambda_{\mu\nu}(y, \xi) \lambda^{\nu\tau}(y, \xi) d\omega_\xi$ Polynom in den x -Variablen vom Grade $\leq d + s^l - s^j$ mit Koeffizienten, welche nur von y abhängen und aus $\overline{\mathcal{C}}_{s^l}^H(G)$ sind. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Eine einfache Konsequenz von Satz 3 ist

$$(6) \quad A\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) = 0 = \text{Nullmatrix},$$

denn es ist

$$(7) \quad \begin{cases} \Lambda\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) = \Lambda\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta_x^{\frac{N+d}{2}} W(x, y|k) \\ = \Delta_x^{\frac{N+d}{2}} \Lambda\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, y|k). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(8) \quad \left| L\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) \right| \leq \text{const} |x - y|^{-N+1} (1 + |\ln |x - y||),$$

$$x \in G, \quad y \in G, \quad x \neq y;$$

denn es ist

$$L\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) = \left\{ L\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} S(x, y|k),$$

ferner gilt (3), und auf die Koeffizienten in $\Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ läßt sich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden, weil G konvex ist.

Nunmehr gelingt es leicht, zu beweisen, daß für alle $\Phi(y) \in \dot{C}(p, G)$ die Relation

$$(9) \quad \begin{cases} \int_G L\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) \Phi'(y) dy \\ = \Phi'(k|x) + L\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_G S(x, y|k) \Phi'(y) dy, \end{cases} \quad x \in G,$$

mit $l \leq k \leq j$ besteht.

Zunächst ist wegen (3) und (8) klar, daß das Integral auf der linken Seite existiert. Die rechte Seite ist wegen Satz 2 sinnvoll. Es genügt,

$$(10) \quad \int_G \Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) \Phi'(y) dy = \Phi'(k|x) + \Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_G S(x, y|k) \Phi'(y) dy$$

zu beweisen, da alle übrigen Differentiationen nach (3) mit der Integration vertauschbar sind.

Jeder Koeffizient von $\lambda_{\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ werde durch eine Folge von unendlich oft differenzierbaren Funktionen gleichmäßig in G approximiert, dies führt zu einer Folge von Differentialoperatorensystemen

$$\Lambda_{(n)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left(\lambda_{(n)\mu\nu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right) \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

mit unendlich oft differenzierbaren Koeffizienten.

$\Lambda_{(n)}^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ bedeutet das zu $\Lambda_{(n)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ formal adjungierte Differentialoperatorensystem, das ist ein (p, p) -reihiges Differentialoperatorensystem

$$(11) \quad \left(\left(\lambda_{(n)\mu\nu}^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right) \right),$$

wobei $\lambda_{(n)\mu\nu}^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ der zu $\lambda_{(n)\nu\mu}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ formal adjungierte Differentialoperator ist.

Mit $f(x) \in \dot{C}(p, G)$ ist dann

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{G}} f(x) \Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\dot{G}} S(x, y|k) \Phi'(y) dy dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\dot{G}} f(x) \Lambda_{(n)}\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\dot{G}} S(x, y|k) \Phi'(y) dy dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\dot{G}} \int_{\dot{G}} \Phi(y) S'(k|x, y) dy \Lambda_{(n)}^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) f'(x) dx, \end{aligned}$$

dabei ist $S'(k|x, y)$ die Transponierte von $S(x, y|k)$. Es ist

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{G}} \int_{\dot{G}} \Phi(y) S'(k|x, y) dy \Lambda_{(n)}^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) f'(x) dx \\ &= \int_{\dot{G}} \Phi(y) \int_{\dot{G}} S'(k|x, y) \Lambda_{(n)}^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) f'(x) dx dy \\ &= \int_{\dot{G}} \Phi(y) \int_{\dot{G}} S'(k|x, y) \left\{ \Lambda_{(n)}^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) - \Lambda_{(n)}^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) \right\} f'(x) dx dy + \\ & \quad + \int_{\dot{G}} \Phi(y) \int_{\dot{G}} S'(k|x, y) \Lambda_{(n)}^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) f'(x) dx dy \\ &= \int_{\dot{G}} \int_{\dot{G}} f(x) \left\{ \Lambda_{(n)}\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda_{(n)}\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} S(x, y|k) dx \Phi'(y) dy + \\ & \quad + \int_{\dot{G}} \Phi(y) \int_{\dot{G}} \Delta_x^{\frac{N+d}{2}} W'(k|x, y) \Lambda_{(n)}^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) f'(x) dx dy \\ &= \int_{\dot{G}} f(x) \int_{\dot{G}} \left\{ \Lambda_{(n)}\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda_{(n)}\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} S(x, y|k) \Phi'(y) dy dx + \\ & \quad + \int_{\dot{G}} \Phi(y) \int_{\dot{G}} W'(k|x, y) \Lambda_{(n)}^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x} | k\right) \Delta_x^{\frac{N+d}{2}} f'(x) dx dy \\ &= \int_{\dot{G}} f(x) \int_{\dot{G}} \left\{ \Lambda_{(n)}\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda_{(n)}\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} S(x, y|k) \Phi'(y) dy dx + \\ & \quad + \int_{\dot{G}} \int_{\dot{G}} \left(\Delta_x^{\frac{N+d}{2}} f(x) \right) \Lambda_{(n)}\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, y|k) \Phi'(y) dx dy. \end{aligned}$$

Also resultiert

$$\begin{aligned} & \int_{\dot{G}} f(x) \Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\dot{G}} S(x, y|k) \Phi'(y) dy dx \\ &= \int_{\dot{G}} f(x) \int_{\dot{G}} \Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) \Phi'(y) dy dx + \\ & \quad + \int_{\dot{G}} \int_{\dot{G}} \left(\Delta_x^{\frac{N+d}{2}} f(x) \right) \Lambda\left(k|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, y|k) dx \Phi'(y) dy \end{aligned}$$

$$= \int_{\dot{G}} f(x) \int_{\dot{G}} \Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) \Phi'(y) dy dx - \int_{\dot{G}} f(y|k) \Phi'(y) dy,$$

letzteres nach Satz 3,

$$= \int_{\dot{G}} f(x) \left\{ \int_{\dot{G}} \Lambda\left(k|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S(x, y|k) \Phi'(y) dy - \Phi'(k|x) \right\} dx.$$

Weil $f(x)$ beliebig aus $\dot{C}(p, G)$ war, ist (10) fast überall in G bewiesen; da aber beide Seiten in (10) stetig in G sind, gilt (10) in ganz G .

Es seien α und β zwei von den Zahlen $1, 2, \dots, h$ mit $\alpha \geq \beta$. Es sei $\sigma(x) \in \dot{C}(G)$. Mit $R\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ gilt dann

$$\begin{aligned} L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \sigma(x) S(x, y|\beta) \\ = L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \{(\sigma(x) - \sigma(y)) S(x, y|\beta)\} + R\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \sigma(y) S(x, y|\beta) + \\ + \left\{ \Lambda\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(\alpha|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} \Delta_x^{\frac{N+d}{2}} \sigma(y) W(x, y|\beta) + P(y, x). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$P(y, x) = \Lambda\left(\alpha|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta_x^{\frac{N+d}{2}} \sigma(y) W(x, y|\beta) = \sigma(y) \Delta_x^{\frac{N+d}{2}} \Lambda\left(\alpha|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, y|\beta),$$

also eine Matrix, deren Elemente nach Satz 3 Polynome in den x -Variablen sind mit Koeffizienten, welche nur von y abhängen und aus $\overline{C}_{st}^H(G)$ sind.

Das Differentialoperatorsystem

$$\left\{ \Lambda\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(\alpha|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} D_x^{s\alpha} - D_x^{s\alpha} \left\{ \Lambda\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(\alpha|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\}$$

ist ein Differentialoperatorsystem

$$\Theta\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\left(\partial_{\mu\nu} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right) \right), \quad \text{wobei} \quad {}^{(m)}\partial_{\mu\nu} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0$$

ist für $m < s^\alpha + t_\nu$ und für $m > 2s^\alpha + t_\nu - 1$, während die Koeffizienten von ${}^{(m)}\partial_{\mu\nu} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ aus $\overline{C}_{st}^{H-2s^\alpha-t_\nu+m}(G)$ sind, $m \geq s^\alpha + t_\nu$. Mithin läßt sich $L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times \sigma(x) S(x, y|\beta)$ schreiben als Summe von Matrizen der Art

$$\begin{aligned} L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W(x, y|\beta) + R\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d} \sigma(y) W(x, y|\beta) + \\ + D_x^{s\alpha} \left\{ \Lambda\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(\alpha|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} D_x^{N+d-s\alpha} \sigma(y) W(x, y|\beta) + \\ + \Theta\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d-s\alpha} \sigma(y) W(x, y|\beta) + P(y, x). \end{aligned}$$

Für $\mu \in \mathfrak{h}_\alpha$, $\tau \in \mathfrak{h}_\beta$ ist

$$\begin{aligned} l_{\mu\varrho} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W_{\varrho\tau}(x, y) \} \\ = \sum_{m=0}^{s^\alpha + t_\varrho} {}^{(m)}l_{\mu\varrho} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W_{\varrho\tau}(x, y) \} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} {}^{(m)}l_{\mu\varrho} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W_{\varrho\tau}(x, y) \} \\ = a \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ D_x^{\min(m, t_\varrho)} \{ (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W_{\varrho\tau}(x, y) \} \} \end{aligned}$$

mit ${}^{(n)}a \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0$, falls $n \neq m - \min(m, t_\varrho)$.

Es sind die Koeffizienten von ${}^{(n)}a \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ aus $\overline{C}_n^H(G)$, $n=0, 1, \dots$; dies ist trivial für $n \neq m - \min(m, t_\varrho)$, und weil die Koeffizienten von ${}^{(m-\min(m, t_\varrho))}a \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ mit den Koeffizienten von ${}^{(m)}l_{\mu\varrho} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ übereinstimmen, welche nach Voraussetzung aus $\overline{C}_{m-\min(m, t_\varrho)}^H(G)$ sind, ist es auch für $n = m - \min(m, t_\varrho)$ richtig.

Es ist ${}^{(n)}a \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0$ für $n > s^\alpha$; denn es ist $m - \min(m, t_\varrho) = 0$ oder $m - \min(m, t_\varrho) = m - t_\varrho \leq s^\alpha$.

Schließlich ist $D_x^{\min(m, t_\varrho)} \{ (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W_{\varrho\tau}(x, y) \}$ sowohl aus $\mathfrak{G}_{s^\alpha}^1(G, y)$, $y \in G$, als auch aus $\mathfrak{G}_{s^\beta}^1(x, G)$, $x \in G$, sowie

$$D_x^q D_x^{\min(m, t_\varrho)} \{ (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W_{\varrho\tau}(x, y) \} \in \mathfrak{G}_{s^\beta + 1 - q}^0(x, G), \quad x \in G, \quad 1 \leq q \leq s^\alpha.$$

Also läßt sich jedes Element der Matrix

$$L \left(\alpha \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \{ (\sigma(x) - \sigma(y)) D_x^{N+d} W(x, y | \beta) \}$$

darstellen als Summe von Termen

$$a^0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) e(x, y),$$

wobei ${}^{(n)}a^0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = 0$ ist für $n > s^\alpha$ und $x \in G$, während die Koeffizienten von ${}^{(n)}a^0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ aus $\overline{C}_n^H(G)$ sind, $n=0, 1, 2, \dots$ und

$$e(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^\alpha}^1(G, y), \quad y \in G,$$

$$e(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^\beta}^1(x, G), \quad x \in G,$$

$$D_x^q e(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^\beta + 1 - q}^0(x, G), \quad x \in G, \quad 1 \leq q \leq s^\alpha,$$

ist.

Eine ähnliche Aussage bekommt man über $R \left(\alpha \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) D_x^{N+d} \sigma(y) W(x, y | \beta)$, es ist nämlich $r_{\mu\varrho} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) D_x^{N+d} \sigma(y) W_{\varrho\tau}(x, y)$ mit $\mu \in \mathfrak{h}_\alpha$, $\tau \in \mathfrak{h}_\beta$ dasselbe wie

$$\sum_{m=0}^{s^\alpha + t_\varrho - 1} {}^{(m)}r_{\mu\varrho} \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) D_x^{N+d} \sigma(y) W_{\varrho\tau}(x, y),$$

und es ist

$${}^{(m)}r_{\mu\varrho}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y) = a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d+\min(m, t_\varrho)}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y)$$

mit ${}^{(n)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ für $n \neq m - \min(m, t_\varrho)$.

Es sind auch diesmal die Koeffizienten von ${}^{(n)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $\overline{C}_n^H(G)$, $n=0, 1, 2, \dots$. Es ist ${}^{(n)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ für $n > s^\alpha - 1$; denn es ist

$$m - \min(m, t_\varrho) = 0 \quad \text{oder} \quad \leq s^\alpha + t_\varrho - 1 - t_\varrho = s^\alpha - 1.$$

Schließlich ist $N + d + \min(m, t_\varrho) \geq 1$ und $D_x^{N+d+\min(m, t_\varrho)-1}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y)$ sowohl aus $\mathfrak{G}_{s^\alpha}^1(G, y)$, $y \in G$, als auch aus $\mathfrak{G}_{s^\beta}^1(x, G)$, $x \in G$, sowie

$$D_x^q D_x^{N+d+\min(m, t_\varrho)-1}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^\beta+1-q}^0(x, G), \quad x \in G, \quad 1 \leq q \leq s^\alpha.$$

Also läßt sich jedes Element der Matrix $R\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d}\sigma(y)W(x, y|\beta)$ darstellen als Summe von Termen

$$a^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^1 e(x, y),$$

wobei ${}^{(n)}a^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ ist für $n > s^\alpha - 1$ und $x \in G$, während die Koeffizienten von ${}^{(n)}a^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $\overline{C}_n^H(G)$ sind, $n=0, 1, \dots$, und $e(x, y)$ die obigen Eigenschaften hat.

Die Elemente der Matrix

$$D_x^{s^\alpha} \left\{ A\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - A\left(\alpha|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} D_x^{N+d-s^\alpha}\sigma(y)W(x, y|\beta)$$

sind Summen von Termen

$$D_x^{s^\alpha} \left\{ \lambda_{\mu\varrho}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda_{\mu\varrho}\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} D_x^{N+d-s^\alpha}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y)$$

mit $\mu \in \mathfrak{h}_\alpha$, $\tau \in \mathfrak{h}_\beta$. Sie sind von der Gestalt

$$D_x^{s^\alpha} e(x, y),$$

also sind die Elemente der in Rede stehenden Matrix Summen von Termen

$$a^0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) e(x, y).$$

Es ist für $\mu \in \mathfrak{h}_\alpha$, $\tau \in \mathfrak{h}_\beta$

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mu\varrho}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d-s^\alpha}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y) \\ = \sum_{m=0}^{s^\alpha-1} (s^\alpha+t_\varrho+m) \vartheta_{\mu\varrho}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d-s^\alpha}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y), \end{aligned}$$

und es ist

$$(s^\alpha+t_\varrho+m) \vartheta_{\mu\varrho}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d-s^\alpha}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y) = a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d+t_\varrho}\sigma(y)W_{\varrho\tau}(x, y)$$

mit ${}^{(n)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$, falls $n \neq m$ ist.

Die Koeffizienten von $^{(m)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ sind dieselben wie die von $^{(s^\alpha+t_\varrho+m)}\partial_{\mu e}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, also aus $\overline{C}_{s^\alpha-2s^\alpha-t_\varrho+s^\alpha+t_\varrho+m}^H(G) \subseteq \overline{C}_m^H(G)$, also sind die Koeffizienten von $^{(n)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $\overline{C}_n^H(G)$ für $n=0, 1, 2, \dots$.

Schließlich ist $^{(n)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=0$ für $n>s^\alpha-1$. Mithin lassen sich die Elemente der Matrix $\Theta\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right)D_x^{N+d-s^\alpha}\sigma(y)W(x, y|\beta)$ darstellen als Summe von Termen $a^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)D_x^1e(x, y)$.

Zusammengenommen resultiert:

Jedes Element der Matrix $L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma(x)S(x, y|\beta)$ läßt sich darstellen als Summe von Termen

$$a^0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)e(x, y) + a^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)D_x^1e(x, y),$$

wobei $^{(n)}a^v\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=0$ ist für $n>s^\alpha-v$ und $x \in G$, während die Koeffizienten von $^{(n)}a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $\overline{C}_n^H(G)$ sind, $n=0, 1, 2, \dots$, $v=0, 1$, und

$$e(x, y) \in \mathbb{G}_{s^\alpha}^1(G, y), \quad y \in G,$$

$$e(x, y) \in \mathbb{G}_{s^\beta}^1(x, G), \quad x \in G,$$

sowie

$$D_x^q e(x, y) \in \mathbb{G}_{s^\beta+1-q}^0(x, G), \quad x \in G, \quad \text{für } 1 \leq q \leq s^\alpha$$

ist.

Daraus folgt leicht der

Satz 4. *Es sei Ω eine in G gelegene Kugel, F ein beschränktes Gebiet aus R_N und $\sigma(x) \in \dot{C}(\Omega)$. Es seien α und β zwei von den Zahlen $1, \dots, h$ mit $\alpha \geq \beta$. Dann ist*

$$(12) \quad L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma(x)S(x, y|\beta) \in \mathbb{G}_{s^\beta-s^\alpha}^1(x, G), \quad x \in G.$$

Und wenn $f(z, x) \in \mathbb{G}_{r-1}^1(z, \Omega)$, $z \in F$, ist, dann ist

$$(13) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} f(z, x) L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma(x)S(x, y|\beta) dx \in \mathbb{G}_{s^\beta-s^\alpha+r}^1(z, G), & z \in F, \\ 1 \leq r \leq s^\alpha. \end{cases}$$

Beweis. Während (12) nach obigem unmittelbar klar ist, werde zum Beweis von (13) zunächst ein $\tau(x) \in \dot{C}(\text{Träger von } \sigma(x), \Omega)$ eingeführt und dann jede Komponente von

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f(z, x) L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma(x)S(x, y|\beta) dx \\ &= \int_{\Omega} \tau(x) f(z, x) L\left(\alpha|x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\sigma(x)S(x, y|\beta) dx \end{aligned}$$

als Summe von Termen $\int_{\Omega} \tau(x) f(z, x) a^v\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^v e(x, y) dx$ dargestellt. Durch partielle Integrationen wird erreicht, daß hierin $e(x, y)$ nur noch bis zur Ordnung $s^\alpha - r + 1$ nach den x -Variablen differenziert wird. Dann sind diese Terme von der Gestalt

$$(14) \quad \int_{\Omega} \omega(x) \varphi^v(z, x) D_x^q e(x, y) dx$$

mit $\varphi^v(z, x) \in \mathfrak{G}_0^1(z, \Omega)$, $z \in F$, $\omega(x) \in \dot{C}$ (Träger von $\tau(x)$, Ω), $q \leq s^\alpha - r + 1$. Wenn $q < s^\alpha - r + 1$ ist, dann ist $D_x^q e(x, y) \in \mathfrak{G}_{s\beta-s^\alpha+r}^1(x, G)$, $x \in G$, und (14) aus $\mathfrak{G}_{s\beta-s^\alpha+r}^1(z, G)$, $z \in F$, nach Satz 7 aus § 5. Ist dagegen $q = s^\alpha - r + 1$, dann ist $q \geq 1$ und somit $\omega(x) D_x^q e(x, y)$ aus $\mathfrak{G}_{s\beta-s^\alpha+r}^0(x, G)$, $x \in G$, daher gehört

$$\int_{\Omega} \omega(x) \varphi^v(z, x) D_x^q e(x, y) dx = \int_{\Omega} \varphi^v(z, x) \omega(x) D_x^q e(x, y) dx$$

nach Satz 8 aus § 5 auch jetzt zu $\mathfrak{G}_{s\beta-s^\alpha+r}^1(z, G)$, $z \in F$, in der Tat, es ist Satz 8 anwendbar, insbesondere weil nach Satz 6 aus § 5

$$\int_{\Omega} \omega(x) D_x^q e(x, y) dx = (-1)^q \int_{\Omega} (D_x^q \omega(x)) e(x, y) dx \in \overline{C}_{s\beta}^H(G)$$

ist.

Es seien j und l zwei von den Zahlen $1, 2, \dots, h$ mit $j < l$. Es sei $\varrho(x) \in \dot{C}(G)$ und $\Phi(y) \in \dot{C}(p, G)$. Dann ist ähnlich wie auf S. 97 $L\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_G S(x, y|l) \times \Phi'(y) dy$ Summe von Termen der Art

$$\begin{aligned} & L\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_G (\varrho(x) - \varrho(y)) D_x^{N+d} W(x, y|l) \Phi'(y) dy + \\ & + R\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d} \int_G \varrho(y) W(x, y|l) \Phi'(y) dy + \\ & + D_x^{s^j} \int_G \left\{ \Lambda\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \Lambda\left(j|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} D_x^{N+d-s^j} \varrho(y) W(x, y|l) \Phi'(y) dy + \\ & + \Theta\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d-s^j} \int_G \varrho(y) W(x, y|l) \Phi'(y) dy; \end{aligned}$$

denn es ist

$$\Lambda\left(j|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^{N+d-s^j} W(x, y|l) = D_x^{N+d-s^j} \Lambda\left(j|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) W(x, y|l)$$

eine Matrix, deren Elemente nach Satz 3 Polynome in den x -Variablen sind vom Grade $< s^j$, und daher ist

$$D_x^{s^j} \int_G \Lambda\left(j|y, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(y) D_x^{N+d-s^j} W(x, y|l) \Phi'(y) dy = 0.$$

Man liest ab:

Jede Komponente des Vektors $L\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_G S(x, y|l) \Phi'(y) dy$ läßt sich darstellen als Summe von Termen

$$\tilde{a}^0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_G \tilde{e}(x, y) \Phi_\sigma(y) dy + \tilde{a}^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^1 \int_G \tilde{e}(x, y) \Phi_\sigma(y) dy, \quad \sigma \in \mathfrak{h}_l,$$

wobei ${}^{(n)}\tilde{a}^v\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ ist für $n > s^j - v$ und $x \in G$, während die Koeffizienten von ${}^{(n)}\tilde{a}^v\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $\overline{C}_n^H(G)$ sind, $n = 0, 1, 2, \dots; v = 0, 1$, und $\tilde{e}(x, y)$ die Eigenschaften

- 1) $\tilde{e}(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^l}^1(G, y), y \in G,$
- 2) $D_x^q \tilde{e}(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^l - q}^1(x, G), x \in G, \quad 0 \leq q \leq s^l,$
- 3) $D_x^1 \tilde{e}(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^l}^0(x, G), x \in G,$

hat.

Satz 5. Es seien Ω und Ω' konzentrische Kugeln, $\overline{\Omega'} \subset \Omega^* \subset \overline{\Omega} \subset G$, und $\varrho(x) \in \dot{C}(\Omega)$, $\Phi(y) \in \dot{C}(p, \Omega')$. Es seien j und l zwei von den Zahlen $1, 2, \dots, h$ mit $j < l$. Schließlich sei $\varphi(z, x) \in \mathfrak{G}_r^1(z, \Omega)$, $z \in F \subseteq G$. Dann ist

$$\int_{\Omega} \varphi(z, x) L\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega'} S(x, y|l) \Phi'(y) dy dx = \int_{\Omega'} \chi(z, y) \Phi'(y) dy$$

mit

$$\chi(z, y) \in \mathfrak{G}_{s^l - s^j + r}^1(z, \Omega'), z \in F; \quad s^j - s^l \leq r \leq s^j.$$

Beweis. Mit $\tau(x) \in \dot{C}(\text{Träger von } \varrho(x), \Omega)$ läßt sich jede Komponente von

$$\int_{\Omega} \varphi(z, x) L\left(j|x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega'} S(x, y|l) \Phi'(y) dy dx$$

darstellen als Summe von Termen

$$\int_{\Omega} \tau(x) \varphi(z, x) \tilde{a}^v\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^v \int_{\Omega'} \tilde{e}(x, y) \Phi_\sigma(y) dy dx, \quad v = 0, 1; \quad \sigma \in \mathfrak{h}_l,$$

und dies ist vermöge partieller Integration vom Typus

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega(x) \psi^v(z, x) D_x^q \int_{\Omega'} \tilde{e}(x, y) \Phi_\sigma(y) dy dx &= \int_{\Omega} \omega(x) \psi^v(z, x) \int_{\Omega'} D^q \tilde{e}(x, y) \Phi_\sigma(y) dy dx \\ &= \int_{\Omega'} \int_{\Omega} \omega(x) \psi^v(z, x) D_x^q \tilde{e}(x, y) dx \Phi_\sigma(y) dy \end{aligned}$$

mit $0 \leq q \leq \max(s^j - r, 1)$, $\omega(x) \in \dot{C}(\text{Träger von } \tau(x), \Omega)$ und $\psi^v(z, x) \in \mathfrak{G}_0^1(z, \Omega)$, $z \in F$.

Im Falle $q \leq s^j - r$ ist nach Satz 7 aus § 5

$$\int_{\Omega} \omega(x) \psi^v(z, x) D_x^q \tilde{e}(x, y) dx \in \mathfrak{G}_{s^l - s^j + r}^1(z, \Omega'), \quad z \in F;$$

denn es ist

$$D_x^q \tilde{e}(x, y) \in \mathfrak{G}_{s^l - q}^1(x, \Omega') \subseteq \mathfrak{G}_{s^l - s^j + r}^1(x, \Omega'), \quad x \in \Omega.$$

Im Falle $q > s^j - r$ ist $q = 1$ und $s^j - r = 0$. Dann ist $D_x^q \tilde{e}(x, y) \in \mathfrak{C}_{s^j}^0(x, \Omega')$, $x \in \Omega$, und daher ist nach Satz 8 aus § 5

$$\int_{\Omega} \omega(x) \psi^v(z, x) D_x^q \tilde{e}(x, y) dx = \int_{\Omega} \psi^v(z, x) \omega(x) D_x^1 \tilde{e}(x, y) dx \in \mathfrak{C}_{s^j}^1(z, \Omega'), \quad z \in F,$$

also auch in diesem Falle aus $\mathfrak{C}_{s^j - s^j + r}^1(z, \Omega')$, $z \in F$; in der Tat, es ist Satz 8 anwendbar, insbesondere weil nach Satz 6 aus § 5

$$\int_{\Omega} \omega(x) D_x^1 \tilde{e}(x, y) dx = - \int_{\Omega} (D_x^1 \omega(x)) \tilde{e}(x, y) dx \in \overline{C}_{s^j}^H(\Omega')$$

ist.

§ 4. Beweis des Hauptsatzes (Satz 1)

Induktionsannahme: Der Satz 1 sei bewiesen, falls die in seinen Voraussetzungen genannte Zahl r den Wert r_0 hat. Wenn dann die Voraussetzungen für $r = r_0 + 1$ erfüllt sind, so stimmt $v(x)$ nach Induktionsannahme fast überall in G mit einer Funktion $w(x) = (w_1(x), \dots, w_p(x))$ überein, wobei $w_i(x) \in C_{s_i + r_0}^H(G) \subseteq C_{s_i}^H(G) \subseteq C_1^H(G)$ ist, $i = 1, \dots, p$. Ferner ist dann für $\Phi(x) \in \dot{C}(p, G)$

$$\begin{aligned} \int_G (D_x^1 w(x)) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx &= - \int_G w(x) D_x^1 \left(L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) \right) dx \\ &= - \int_G w(x) \tilde{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx - \int_G v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^1 \Phi'(x) dx \\ &= - \int_G w(x) \tilde{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx - \int_G B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) D_x^1 \Phi'(x) dx \\ &= - \int_G w(x) \tilde{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx + \int_G \tilde{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx, \end{aligned}$$

wobei das Differentialoperatorsystem $\tilde{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ dadurch aus $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ hervorgeht, daß auf alle Koeffizienten der in $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ enthaltenen Differentialoperatoren die Differentiation D_x^1 ausgeübt wird; entsprechend $\tilde{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Das Integral $\int_G w(x) \tilde{L}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx$ läßt sich wegen $w_i(x) \in C_{s_i + r_0}^H(G)$ durch partielle Integration so umformen, daß es von der Art $\int_G B^{(1)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx$ wird, wobei $B^{(1)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ein $(1, p)$ -reihiges Differentialoperatorsystem $(b_1^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \dots, b_p^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right))$ ist, worin ${}^{(m)}b_v^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ für $m > t_v$, $x \in G$, ist und die Koeffizienten von $b_v^1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $C_{r_0}^H(G)$ sind. Schließlich ist $\tilde{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (\tilde{b}_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \dots, \tilde{b}_p\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right))$, worin ${}^{(m)}b_v\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = 0$ für $m > t_v$, $x \in G$, ist und die Koeffizienten von $\tilde{b}_v\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus $C_{r_0}^H(G)$ sind.

Mithin ist

$$\int_G (D_x^1 w(x)) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx = \int_G B^{(2)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi'(x) dx$$

für alle $\Phi(x) \in \dot{C}(p, G)$ mit

$$B^{(2)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \tilde{B}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - B^{(1)}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Nach Induktionsannahme stimmt dann $D_x^1 w_i(x)$ fast überall in G mit einer Funktion aus $C_{s_i+r_0}^H(G)$ überein. Wegen der Stetigkeit von $D_x^1 w_i(x)$ ist $D_x^1 w_i(x) \in C_{s_i+r_0}^H(G)$, also $w_i(x) \in C_{s_i+r_0+1}^H(G)$. Das ist aber die Aussage des Satzes 1, wenn $r=r_0+1$ ist. Damit ist gezeigt, daß es genügt, den Satz 1 für den Fall $r=0$ zu beweisen.

Im folgenden wird Gebrauch gemacht von den Beweisvorbereitungen aus § 2 und von den Ausführungen des § 3, angewendet auf das Differentialoperatorensystem $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ aus Satz 1.

Es seien Ω und Ω' zwei konzentrische Kugeln, $\bar{\Omega}' \subset \Omega^* \subset \bar{\Omega} \subset G$, ferner sei $\varrho(x) \in \dot{C}(\Omega', \Omega)$. Durch

$$(15) \quad w(y) = \int_{\Omega} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(x, y|1) dx - \int_{\Omega} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(x, y|1) dx$$

wird eine Funktion $w(y) \in L^1(p, G)$ definiert, von der sogleich gezeigt werden soll, daß sie fast überall in Ω' mit $v(y|1)$ übereinstimmt.

Für alle $\Phi(y) \in \dot{C}(p, \Omega')$ ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} w(y) \Phi'(y) dy &= \int_{\Omega} v(x) \int_{\Omega'} L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \int_{\Omega'} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx \\ &= \int_{\Omega} v(x) \int_{\Omega'} L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) (\varrho(x) - \varrho(y)) S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} v(x) \int_{\Omega} L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(y) S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega'} S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx \quad (\text{es ist } \Phi(y) = 0 \text{ für } y \notin \Omega') \\ &= \int_{\Omega} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\Omega'} (\varrho(x) - \varrho(y)) S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega'} S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} v(x) \varrho(x) \Phi'(1|x) dx + \int_{\Omega} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\Omega} \varrho(y) S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx, \end{aligned}$$

letzteres nach (9) auf S. 95. Es ist $\Phi(x) = 0$ für $x \notin \Omega'$, und $\varrho(x) = 1$ für $x \in \Omega'$, also

$$\int_{\Omega} v(x) \varrho(x) \Phi'(1|x) dx = \int_{\Omega'} v(x) \Phi'(1|x) dx = \int_{\Omega'} v(y|1) \Phi'(y) dy.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega'} (w(y) - v(y|1)) \Phi'(y) dy \\ &= \int_{\Omega} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega'} S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx - \\ & \quad - \int_{\Omega} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega'} S(x, y|1) \Phi'(y) dy dx \\ &= \int_{\tilde{G}} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx - \int_{\tilde{G}} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx \end{aligned}$$

mit

$$\varrho(x) \int_{\Omega'} S(x, y|1) \Phi'(y) dy = \psi'(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_p(x)).$$

Nach Satz 2 ist $\psi_\sigma(x) \in \overline{C}_{s^1+t_\sigma}^H(G)$, ferner verschwindet $\psi_\sigma(x)$ außerhalb eines in Ω gelegenen Kompaktums, also läßt sich $\psi_\sigma(x)$ mitsamt seinen Ableitungen bis zur Ordnung s^1+t_σ durch Funktionen $\Psi_\sigma(x) \in \dot{C}(G)$ bzw. durch deren Ableitungen gleichmäßig in G approximieren. Nach Voraussetzung (1) ist aber

$$\int_{\tilde{G}} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi'(x) dx - \int_{\tilde{G}} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi'(x) dx = 0 \quad \text{für } \Psi(x) \in \dot{C}(p, G),$$

also verschwindet auch

$$\int_{\tilde{G}} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx - \int_{\tilde{G}} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx.$$

Mithin gilt $\int_{\Omega'} (w(y) - v(y|1)) \Phi'(y) dy = 0$ für alle $\Phi(y) \in \dot{C}(p, \Omega')$, d. h. $w(y) = v(y|1)$ fast überall in Ω' .

Daher besteht nach (15) fast überall in Ω' für $v(y|1)$ die Integralgleichung

$$(16) \quad \begin{aligned} v(y|1) &= \int_{\Omega} v\left(x \begin{vmatrix} h \\ 1 \end{vmatrix}\right) L\left(\begin{vmatrix} h \\ 1 \end{vmatrix} x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(x, y|1) dx - \\ & \quad - \int_{\Omega} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(y, x|1) dx \end{aligned}$$

mit $\varrho(x) \in \dot{C}(\Omega', \Omega)$. Da die Wahl der Kugeln Ω, Ω' frei war, gilt (16) für jede Wahl von zwei konzentrischen Kugeln Ω, Ω' mit $\overline{\Omega'} \subset \Omega^* \subset \overline{\Omega} \subset G$, wofür die kurze Redeweise „(16) gilt für alle Ω, Ω' “ benutzt werden soll.

Allgemein habe von jetzt an die Redeweise „für alle $\Omega, \Omega', \dots, \Omega^{(n)}$ “ die Bedeutung: „Für jede Wahl von $n+1$ konzentrischen Kugeln $\Omega, \Omega', \dots, \Omega^{(n)}$ mit $\overline{\Omega^{(n)}} \subset \Omega^{(n-1)*} \subset \overline{\Omega^{(n-1)}} \subset \dots \subset \Omega^* \subset \overline{\Omega} \subset G$ “.

Aus der Integralgleichung (16) sollen durch Iteration Regularitätsaussagen über $v(x|1)$ gewonnen werden. Da aber diese Integralgleichung die Funktion $v\left(x \begin{vmatrix} h \\ 2 \end{vmatrix}\right)$ enthält, über deren Regularität auch noch nichts bekannt ist, werden die zunächst zu erwartenden Aussagen über $v(x|1)$ von der Art sein, daß

sie modulo einer Funktionenklasse formuliert werden müssen, die noch von $v\left(x\left|_2^h\right.\right)$ abhängt. Zur Festlegung dieser Funktionenklasse dienen die folgenden Definitionen.

I. Für alle Ω, Ω' und $k=1, 2, \dots, h$ sei $\mathfrak{H}_k(\Omega, \Omega')$ die Menge aller p -reihigen quadratischen Matrizen $H(x, y)$ mit den Eigenschaften:

1) $H(x, y)$ meßbar auf $G \times \Omega'$, bei festem $y \in \Omega'$ meßbar auf G und $|H(x, y)| \leq \text{const } |x - y|^{-N+1-\gamma}$ mit einem γ aus $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $x \in G$, $y \in \Omega'$, $x \neq y$, ferner $H(x, y) = 0$ für $x \notin \Omega$.

2) Ist F ein beschränktes Gebiet und ist $f(z, x) \in \mathfrak{G}_{r-1}^1(z, \Omega)$, $z \in F$, so ist

$$\int_{\Omega} f(z, x) H(l|x, y|j) dx \in \mathfrak{G}_{st-s^l+r}^1(z, \Omega'), z \in F, \quad 1 \leq j \leq k \leq l \leq h, \quad 1 \leq r \leq s^l.$$

3) $H(l|x, y|j) \in \mathfrak{G}_{st-s^l}^1(x, \Omega')$, $x \in G$, $1 \leq j \leq k \leq l \leq h$.

II. Für alle Ω, Ω' und $k=1, \dots, h-1$ sei $\mathfrak{M}_k(\Omega, \Omega')$ die Menge aller Funktionen $g(y)$, welche fast überall in Ω' die Darstellung

$$g(y) = \int_{\Omega} v\left(x\left|_{k+1}^h\right.\right) H\left(x, y\left|_1^k\right.\right) dx + f\left(y\left|_1^k\right.\right)$$

gestatten mit $H(x, y) \in \mathfrak{H}_k(\Omega, \Omega')$ und $f(y|j) \in \overline{C}_{st}^H(\Omega')$, $j=1, \dots, h$.

Schließlich sei $\mathfrak{M}_h(\Omega, \Omega')$ die Menge aller $g(y)$, welche fast überall in Ω' die Darstellung $g(y) = f(y)$ mit $f(y|j) \in \overline{C}_{st}^H(\Omega')$ gestatten.

Es soll durch Iteration von (16) die Regularitätsaussage

$$(17) \quad v(x|1) \in \mathfrak{M}_1(\Omega, \Omega') \quad \text{für alle } \Omega, \Omega'$$

hergeleitet werden. Wenn $\varrho(x) \in \dot{C}(\Omega)$ ist, gehört die Matrix

$$L\left(x\left|_1^h\right., \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(x, y|1) \equiv H(x, y)$$

zu $\mathfrak{H}_1(\Omega, \Omega')$, was man leicht einsieht, wenn man Satz 4 zu Hilfe nimmt. Das erste Integral in (16) wird zerlegt in

$$\int_{\Omega} v(x|1) H(x, y|1) dx + \int_{\Omega} v\left(x\left|_2^h\right.\right) H(x, y|1) dx.$$

Das letzte Integral in (16) stellt nach Satz 8 aus § 5 eine Funktion $f(y|1) \in \overline{C}_{st}(p, \Omega')$ dar. Also folgt aus (16), daß für alle Ω, Ω' ein $H(x, y) \in \mathfrak{H}_1(\Omega, \Omega')$ existiert, mit dem

$$(18) \quad v(y|1) - \int_{\Omega} v(x|1) H(x, y|1) dx \in \mathfrak{M}_1(\Omega, \Omega')$$

ist. Diese Aussage kann bequem einem Iterationsverfahren unterworfen werden. Das geschieht im Beweis des folgenden Hilfssatzes sogar für einen etwas allgemeineren Fall, welcher aber erst später eine Rolle spielen wird.

Hilfssatz. Es sei k eine der Zahlen $1, 2, \dots, h$. Für alle Ω, Ω' gebe es $H(x, y) \in \mathfrak{H}_k(\Omega, \Omega')$, so daß

$$(19) \quad v \left(y \left| \begin{smallmatrix} 1 \\ k \end{smallmatrix} \right. \right) - \int_{\Omega} v(x|k) H \left(x, y \left| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \right) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega, \Omega')$$

ist. Dann ist $v \left(y \left| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \right) \in \mathfrak{M}_k(\Omega, \Omega')$ für alle Ω, Ω' .

Für $k=1$ liefert dieser Hilfssatz gerade die Behauptung (17)

$$v(y|1) \in \mathfrak{M}_1(\Omega, \Omega') \quad \text{für alle } \Omega, \Omega'.$$

Beweis des Hilfssatzes. Es sei Ω_0 eine beliebige Kugel mit $\bar{\Omega}_0 \subset G$ und $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ eine Folge von Kugeln, welche mit Ω_0 konzentrisch sind und $\bar{\Omega}_{i+1} \subset \Omega_i^*$, $i=0, 1, 2, \dots$, erfüllen.

Es sei $H_i(x, y) \in \mathfrak{H}_k(\Omega_i, \Omega_{i+1})$ und

$$(20) \quad v \left(y \left| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \right) - \int_{\Omega_i} v(x|k) H_i \left(x, y \left| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \right) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{i+1}), \quad i=0, 1, \dots$$

Solche $H_i(x, y)$ gibt es wegen (19) und $\mathfrak{M}_k(\Omega_i, \Omega_{i+1}) \subseteq \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{i+1})$.

Die Matrizen $H_i \left(k \left| x, y \right| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ haben folgende *Transformationseigenschaft*. Ist $g(x) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_i)$, dann ist $\int_{\Omega_i} g(x) H_i \left(k \left| x, y \right| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{i+1})$. Der Beweis folgt auf S. 109.

Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß es eine beschränkte Funktion $b(y)$ gibt, so daß mit $R=2N$

$$v \left(y \left| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right. \right) - b(y) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R)$$

ist. Dazu sei für $n=2, 3, \dots, R$

$$(21) \quad \begin{cases} K^{(R-1)}(x, y) = H_{R-1} \left(k \left| x, y \right| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right), & x \in G, \quad y \in \Omega_R, \quad x \neq y, \\ K^{(R-n)}(x, y) = \int_{\Omega_{R-n+1}} H_{R-n} \left(k \left| x, z \right| \right) K^{(R-n+1)}(z, y) dz, & x \in G, \quad y \in \Omega_R, \quad x \neq y. \end{cases}$$

Behauptung: Ist $g(x) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R-n})$, dann ist

$$(22) \quad \int_{\Omega_{R-n}} g(x) K^{(R-n)}(x, y) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R), \quad n=1, 2, \dots$$

Beweis durch vollständige Induktion. Für $n=1$ ist das die Transformationseigenschaft von $H_{R-1} \left(k \left| x, y \right| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$. Es sei $\int_{\Omega_{R-n+1}} \varphi(x) K^{(R-n+1)}(x, y) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R)$ für alle $\varphi(x) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R-n+1})$ schon bewiesen. Mit $g(x) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R-n})$ ist dann

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{R-n}} g(x) K^{(R-n)}(x, y) dx &= \int_{\Omega_{R-n}} g(x) \int_{\Omega_{R-n+1}} H_{R-n} \left(k \left| x, z \right| \right) K^{(R-n+1)}(z, y) dz dx \\ &= \int_{\Omega_{R-n+1}} \int_{\Omega_{R-n}} g(x) H_{R-n} \left(k \left| x, z \right| \right) dx K^{(R-n+1)}(z, y) dz, \end{aligned}$$

Nach der Transformationseigenschaft von $H_{R-n}(k|x, z|k)$ stellt das innere Integral eine Funktion $\varphi(z) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R-n+1})$ dar. Daher ist nach Induktionsannahme

$$\int_{\Omega_{R-n}} g(x) K^{(R-n)}(x, y) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R), \quad \text{also gilt (22).}$$

Aus (20) für $i=R-n$, $2 \leq n \leq R$ und (22) folgt

$$\int_{\Omega_{R-n+1}} v\left(y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) K^{(R-n+1)}(y, z) dy - \int_{\Omega_{R-n}} v(x|k) K^{(R-n)}(x, z) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R).$$

Wegen $K^{(R-n+1)}(y, z) = K^{R-n+1}(k|y, z)$ ist dies dasselbe wie

$$\int_{\Omega_{R-n+1}} v(x|k) K^{(R-n+1)}(x, z) dx - \int_{\Omega_{R-n}} v(x|k) K^{(R-n)}(x, z) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R),$$

$$n = 2, 3, \dots, R.$$

Nimmt man noch (20) für $i=R-1$ hinzu, nämlich

$$v\left(z \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) - \int_{\Omega_{R-1}} v(x|k) K^{(R-1)}(x, z) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R),$$

so resultiert durch Aufsummieren wegen der Linearität von $\mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R)$ die Aussage

$$(23) \quad v\left(z \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) - \int_{\Omega_0} v(x|k) K^{(0)}(x, z) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R).$$

Es ist $K^{(0)}(x, z)$ eine Matrix, deren Elemente wegen (21) und $R=2N$ beschränkt sind in $G \times \Omega_R$, also stellt das letzte Integral eine in Ω_R beschränkte Funktion $b(z)$ dar.

Es sei $b(x)$ beschränkt und

$$v\left(x \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) - b(x) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_R).$$

Wegen der Transformationseigenschaft von $H_R(k|x, y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix})$ und wegen

$$v\left(x \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) H_R(k|x, y) = v(x|k) H_R(x, y)$$

folgt daraus

$$\int_{\Omega_R} v(x|k) H_R\left(x, y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) dx - \int_{\Omega_R} b(x) H_R\left(k|x, y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+1}),$$

ferner ist nach (20)

$$v\left(y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) - \int_{\Omega_R} v(x|k) H_R\left(x, y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+1}).$$

Durch Addition folgt wegen der Linearität von $\mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+1})$

$$v\left(y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) - \int_{\Omega_R} b(x) H_R\left(k|x, y \begin{vmatrix} k \\ 1 \end{vmatrix}\right) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+1}).$$

Nach der Eigenschaft 3) von $H_R(k|x, y|_1^k)$ und Satz 6 aus § 5 ist das letzte Integral eine Funktion $h(y|j)$ mit $h(y|j) \in \overline{C}_{sf-s^k}^H(p, \Omega_{R+1})$, $j \leq k$.

Es sei $0 \leq n < s^k$, und mit einer Funktion $h(x)$, für die $h(x|j)$ aus $\overline{C}_{sf-s^k+n}^H(p, \Omega_{R+1+n})$, $j \leq k$, ist, sei

$$v(x|_1^k) - h(x) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+1+n})$$

bereits bewiesen.

Nach der Transformationseigenschaft von $H_{R+1+n}(k|x, y|_1^k)$ und wegen $v(x|_1^k) H_{R+1+n}(k|x, y) = v(x|k) H_{R+1+n}(x, y)$ ist dann

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{R+n+1}} v(x|k) H_{R+1+n}(x, y|_1^k) dx - \\ & - \int_{\Omega_{R+n+1}} h(x) H_{R+1+n}(k|x, y|_1^k) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+n+2}), \end{aligned}$$

ferner ist nach (20)

$$v(y|_1^k) - \int_{\Omega_{R+n+1}} v(x|k) H_{R+n+1}(x, y|_1^k) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+n+2}),$$

also

$$v(y|_1^k) - \int_{\Omega_{R+n+1}} h(x|k) H_{R+n+1}(k|x, y|_1^k) dx \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+n+2}),$$

und nach Eigenschaft 2) von $H_{R+n+1}(k|x, y|_1^k)$ ist das letzte Integral eine Funktion $h(y|j)$, bei der nach Anm. 1, S. 88, $h(y|j) \in \overline{C}_{sf-s^k+n+1}^H(p, \Omega_{R+n+2})$, $j \leq k$, ist.

Also gibt es eine Funktion $u(x|_1^k)$ mit

$$u(x|j) \in \overline{C}_{sf}^H(p, \Omega_{R+s^k+1}) \subseteq \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+s^k+1}), \quad j \leq k,$$

und

$$v(x|_1^k) - u(x|_1^k) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+s^k+1}).$$

Wegen der Linearität von $\mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+s^k+1})$ ist das

$$v(x|_1^k) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{R+s^k+1}).$$

Dies Ergebnis wird wegen der Freiheit bei der Wahl von Ω_0 und der Folge $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ dahin interpretiert, daß für je zwei konzentrische Kugeln Ω und Ω' mit $\overline{\Omega'} \subset \Omega^* \subseteq \overline{\Omega} \subset G$, also für alle Ω, Ω' , $v(x|_1^k) \in \mathfrak{M}_k(\Omega, \Omega')$ gilt, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Beweis der Transformationseigenschaft der Matrizen $H_i(k|x, y|_1^k)$. Es sei $g(x) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_i)$, dann ist mit $H(z, x) \in \mathfrak{H}_k(\Omega_0, \Omega_i)$ und $f(x|j) \in \overline{C}_{sf}^H(p, \Omega_i)$,

$j=1, \dots, h,$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} g(x) H_i(k|x, y|_1^k) dx &= \int_{\Omega_i} \left\{ \int_{\Omega_0} v\left(z\left|_{k+1}^h\right.\right) H\left(z, x\left|_1^k\right.\right) dz + f\left(x\left|_1^k\right.\right) \right\} H_i(k|x, y|_1^k) dx \\ &= \int_{\Omega_0} v\left(z\left|_{k+1}^h\right.\right) \int_{\Omega_i} H(z, x) H_i(k|x, y|_1^k) dx dz + \int_{\Omega_i} f(x|k) H_i(k|x, y|_1^k) dx, \end{aligned}$$

wobei im Falle $k=h$ $v\left(z\left|_{h+1}^h\right.\right) \equiv 0$ zu setzen ist.

Nach Eigenschaft 2 von $H_i(x, y)$ ist das letzte Integral eine Funktion $h\left(y\left|_1^k\right.\right)$ mit $h(y|j) \in \overline{C}_{st}^H(p, \Omega_{i+1})$, also $h\left(y\left|_1^k\right.\right) \in \mathfrak{M}_k(\Omega_0, \Omega_{i+1})$. Offensichtlich genügt es daher zu zeigen, daß

$$(24) \quad \int_{\Omega_i} H(z, x|k) H_i(k|x, y|_1^k) dx$$

aus $\mathfrak{H}_k(\Omega_0, \Omega_{i+1})$ ist. Es ist $H(l|z, x|k) \in \mathfrak{G}_{sk-st}^1(z, \Omega_i)$, $z \in G$, für $l=k, \dots, h$ nach Eigenschaft 3) von $H(z, x)$, und somit nach Eigenschaft 2) von $H_i(x, y)$

$$\int_{\Omega_i} H(l|z, x|k) H_i(k|x, y|j) \in \mathfrak{G}_{st-sk+sk-st+1}^1(z, \Omega_{i+1}), \quad z \in G, \quad \subseteq \mathfrak{G}_{st-st}^1(z, \Omega_{i+1}), \quad z \in G,$$

für $1 \leq j \leq k \leq l \leq h$.

Also hat (24) die Eigenschaft 3) und damit auch Eigenschaft 1) von $\mathfrak{H}_k(\Omega_0, \Omega_{i+1})$.

Schließlich sei $\varphi(u, z) \in \mathfrak{G}_{r-1}^1(u, \Omega_0)$, $u \in F$ mit $F \subseteq R_N$, $1 \leq r \leq s^l$, dann ist mit $1 \leq j \leq k \leq l \leq h$

$$\int_{\Omega_0} \varphi(u, z) \int_{\Omega_i} H(l|z, x|k) H_i(k|x, y|j) dx dz = \int_{\Omega_i \Omega_0} \varphi(u, z) H(l|z, x|k) dz H_i(k|x, y|j) dx.$$

Das innere Integral stellt nach Eigenschaft 2) von $H(z, x)$ eine Funktion $\psi(u, x) \in \mathfrak{G}_{sk-st+r}^1(u, \Omega_i)$, $u \in F$, dar. Es ist

$$\int_{\Omega_i} \psi(u, x) H_i(k|x, y|j) dx \in \mathfrak{G}_{st-sk+sk-st+r+1}^1(u, \Omega_{i+1}) \subseteq \mathfrak{G}_{st-st+r}^1(u, \Omega_{i+1}), \quad u \in F.$$

Also ist (24) aus $\mathfrak{H}_k(\Omega_0, \Omega_{i+1})$.

Durch den Hilfssatz wurde

$$(25) \quad v(x|1) \in \mathfrak{M}_1(\Omega, \Omega') \quad \text{für alle } \Omega, \Omega'$$

gesichert. Dies Resultat wird nunmehr ausgenutzt, um

$$(26) \quad v\left(x\left|_1^2\right.\right) \in \mathfrak{M}_2(\Omega, \Omega') \quad \text{für alle } \Omega, \Omega'$$

zu beweisen, und so fortfahrend gelangt man schließlich zu

$$(27) \quad v\left(x\left|_1^h\right.\right) \in \mathfrak{M}_h(\Omega, \Omega') \quad \text{für alle } \Omega, \Omega'.$$

Weil jede Funktion aus $\mathfrak{M}_h(\Omega, \Omega')$ fast überall in Ω' mit einer Funktion $f(x)$ mit $f(x|j)$ aus $\overline{C}_{st}^H(\Omega')$ übereinstimmt, ist (27) bereits die zu beweisende, auf den Fall $r=0$ reduzierte Behauptung des Satzes 1.

Beweis von (27): Entweder ist $h=1$; dann ist (27) mit der schon bewiesenen Aussage (25) identisch, oder es ist $h>1$, dann sei für ein k aus $1 \leq k < h$ schon

$$(28) \quad v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} h \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \in \mathfrak{M}_k(\Omega, \Omega') \quad \text{für alle } \Omega, \Omega'$$

bewiesen, was für $k=1$ tatsächlich der Fall ist.

Für alle $\Omega, \Omega', \Omega''$ wird nun der in Analogie zu (15) gebildete Ausdruck

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma(y) &= v \left(y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) - \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) L \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) dx + \\ &+ \int_{\Omega'} B \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \quad \text{mit } \varrho(x) \in \dot{C}(\Omega'', \Omega') \end{aligned} \right.$$

betrachtet.

Es soll gezeigt werden, daß es ein $K(z, y) \in \mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$ gibt, mit dem

$$\gamma(y) - \int_{\Omega} v(z \mid k+1) K \left(z, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) dz \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$$

ist. Für alle $\Phi(y) \in \dot{C}(\mathfrak{p}, \Omega'')$ hat man

$$\begin{aligned} \int_{\Omega''} \gamma(y) \Phi'(y) dy &= \int_{\Omega''} v \left(y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy - \\ &- \int_{\Omega''} \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) L \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) dx \Phi'(y) dy + \\ &+ \int_{\Omega''} \int_{\Omega'} B \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) dx \Phi'(y) dy \\ &= \int_{\Omega''} v \left(y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy - \\ &- \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) \int_{\Omega''} L \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx + \\ &+ \int_{\Omega'} \int_{\Omega''} B \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx \\ &= \int_{\Omega''} v \left(y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy - \\ &- \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) L \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{\Omega''} (\varrho(x) - \varrho(y)) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx + \\ &+ \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) \int_{\Omega''} L \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx + \\ &+ \int_{\Omega'} B \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} h+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx. \end{aligned}$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_{\Omega''} L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy \\ = \int_{\Omega''} L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) (\varrho(x) - \varrho(y)) S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy + \\ + \int_{\Omega'} L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) \varrho(y) dy, \end{aligned}$$

weil $\Phi(y) = 0$ für $y \notin \Omega''$. Das erste Integral der rechten Seite wird nach Satz 6 aus § 5 umgeformt, das zweite nach (9) aus § 3. Man erhält für ihre Summe

$$\begin{aligned} L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\Omega''} (\varrho(x) - \varrho(x)) S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy + \\ + \Phi'(k+1|x) + L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \int_{\Omega'} S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy \\ = \Phi'(k+1|x) + L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy, \end{aligned}$$

abermals wegen $\Phi(y) = 0$ für $y \notin \Omega''$ und wegen $\varrho(y) = 1$ für $y \in \Omega''$.

Hiermit wird

$$\begin{aligned} \int_{\Omega''} \gamma(y) \Phi'(y) dy = \int_{\Omega''} v\left(y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy - \int_{\Omega'} v\left(x \middle| \frac{h}{k+1}\right) \Phi'(k+1|x) dx - \\ - \int_{\Omega'} v\left(x \middle| \frac{h}{k+1}\right) L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy dx + \\ + \int_{\Omega'} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy dx. \end{aligned}$$

Wegen $v\left(x \middle| \frac{h}{k+1}\right) \Phi'(k+1|x) = v(x|k+1) \Phi'(x)$ und weil $\Phi(x)$ außerhalb von Ω'' verschwindet, resultiert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega''} \gamma(y) \Phi'(y) dy = \int_{\Omega''} v\left(y \middle| \frac{k}{1}\right) \Phi'(y) dy - \int_{\Omega'} v\left(x \middle| \frac{h}{k+1}\right) L\left(\frac{h}{k+1} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx + \\ + \int_{\Omega'} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx. \end{aligned}$$

Dabei ist $\psi'(x) = \varrho(x) \int S\left(x, y \middle| \frac{k+1}{1}\right) \Phi'(y) dy$; mit einer zu der auf S. 105 ähnlichen Begründung folgt

$$\int_{\Omega'} v(x) L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx - \int_{\Omega'} B\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi'(x) dx = 0.$$

Also

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) L \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi'(x) dx + \int_{\Omega'} B \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi'(x) dx \\ & = \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right) L \left(\begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi'(x) dx, \end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega''} \gamma(y) \Phi'(y) dy &= \int_{\Omega''} v \left(y \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy + \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right) L \left(\begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi'(x) dx \\ &= \int_{\Omega''} v \left(y \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy + \int_{\Omega'} v \left(x \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right) L \left(\begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx \\ &= \int_{\Omega''} v \left(y \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} v(x|j) L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx + \\ & \quad + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} v(x|j) L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} v(x|j) L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx + \\ & \quad + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} v(x|j) \int_{\Omega''} L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx. \end{aligned}$$

Aus der Induktionsannahme (28) folgt, daß dies dasselbe ist wie

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\Omega} v \left(z \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) H(z, x|j) dz + f(x|j) \right\} L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right) \Phi' dy dx + \\ & \quad + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} \left\{ \int_{\Omega} v \left(z \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) H(z, x|j) dz + f(x|j) \right\} \int_{\Omega''} L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi' dy dx \end{aligned}$$

mit $H(z, x) \in \mathfrak{S}_k(\Omega, \Omega')$ und $f(x|j) \in \overline{C}_{sj}^H(p, \Omega')$, $j=1, \dots, h$. Damit ist

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega''} \gamma(y) \Phi'(y) dy \\ &= \sum_{j=1}^k \int_{\Omega} v \left(z \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) \int_{\Omega'} H \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| z, x|j \right) L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx dz + \\ & \quad + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega} v \left(z \middle| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right) \int_{\Omega'} H \left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| z, x|j \right) \int_{\Omega''} L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx dz + \\ & \quad + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} f(x|j) L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx + \\ & \quad + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} f(x|j) \int_{\Omega''} L \left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \varrho(x) S \left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dx. \end{aligned}$$

Die letzte Summe ist nach geläufiger Rechnung dasselbe wie

$$\int_{\Omega'} f\left(x \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Phi'(x) dx + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} f(x|j) L\left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S\left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Phi'(y) dy dx.$$

Addition zur vorangehenden Summe ergibt

$$\int_{\Omega''} f\left(y \middle| \begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Phi'(y) dy + \sum_{j=1}^k \int_{\Omega'} f(x|j) L\left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S\left(x, y \middle| \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \Phi'(y) dy dx,$$

und das ist nach Satz 5 und nach Anmerkung 1 auf S. 88 dasselbe wie

$$\int_{\Omega''} \zeta(y) \Phi'(y) dy \quad \text{mit} \quad \zeta(y|l) \in \overline{C}_{sl}^H(p, \Omega''), \quad \text{also} \quad \zeta(y) \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega').$$

Für das weitere Studium von $\int_{\Omega''} \gamma(y) \Phi'(y) dy$ werden jetzt die Ausdrücke

$$I_1^{(j)}(m, l) = \int_{\Omega'} H(m|z, x|j) L\left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S(x, y|l) \Phi'(y) dy dx$$

mit $j+1 \leq l \leq k+1 \leq m \leq h$ und

$$I_2^{(j)}(m, l) = \int_{\Omega'} H(m|z, x|j) \int_{\Omega''} L\left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S(x, y|l) \Phi'(y) dy dx$$

mit $1 \leq l < j \leq k+1 \leq m \leq h$ betrachtet.

Es ist nach Eigenschaft 3) von $H(m|z, x|j)$

$$H(m|z, x|j) \in \mathfrak{G}_{s^j - s}^1(z, \Omega'), \quad z \in G,$$

und daher nach Satz 5 aus § 3

$$I_1^{(j)}(m, l) = \int_{\Omega''} A^{(j)}(m|z, y|l) \Phi'(y) dy$$

mit einer Matrix $A^{(j)}(m|z, y|l) \in \mathfrak{G}_{s^j - s}^1(z, \Omega'')$, $z \in G$. Damit hat $A^{(j)}(m|z, y|l)$ aber die 1.) und 3.) Eigenschaft der Matrizen aus $\mathfrak{G}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$. Sie hat auch die 2.) Eigenschaft; denn sei $f(u, z) \in \mathfrak{G}_{r-1}^1(u, \Omega)$, $u \in F$, mit $1 \leq r \leq s^m$, dann ist für alle $\Phi(y) \in \dot{C}(p, \Omega'')$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} \int_{\Omega} f(u, z) A^{(j)}(m|z, y|l) dz \Phi'(y) dy &= \int_{\Omega} f(u, z) \int_{\Omega''} A^{(j)}(m|z, y|l) \Phi'(y) dy dz \\ &= \int_{\Omega} f(u, z) \int_{\Omega'} H(m|z, x|j) L\left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S(x, y|l) \Phi'(y) dy dx dz \\ &= \int_{\Omega'} \int_{\Omega} f(u, z) H(m|z, x|j) dz L\left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S(x, y|l) \Phi'(y) dy dx \\ &= \int_{\Omega'} \psi(u, x) L\left(j \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S(x, y|l) \Phi'(y) dy dx. \end{aligned}$$

Es ist

$$\psi(u, x) \equiv \int_{\Omega} f(u, z) H(m|z, x|j) dz \in \mathfrak{G}_{s^j - s}^1(u, \Omega'), \quad u \in F,$$

nach Eigenschaft 2) von $H(z, x)$ (wegen $1 \leq j \leq k < m \leq h$), daher und nach Satz 5 aus § 3 ist

$$\int_{\Omega'} \psi(u, x) L\left(j \left| x, \frac{\partial}{\partial x} \right.\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S(x, y | l) \Phi'(y) dy dx = \int_{\Omega''} \chi(u, y) \Phi'(y) dy$$

mit $\chi(u, y) \in \mathfrak{G}_{s^1 l - s}^{1, m+r}(u, \Omega'')$, $u \in F$.

Also stimmt $\int_{\Omega} f(u, z) A^{(j)}(m | z, y | l) dz$ fast überall in Ω'' mit $\chi(u, y)$ überein; andererseits ist es stetig von y abhängig, mithin gilt

$$\int_{\Omega} f(u, z) A^{(j)}(m | z, y | l) dz \in \mathfrak{G}_{s^1 l - s}^{1, m+r}(u, \Omega''), \quad u \in F.$$

Daher ist

$$A^{(j)}(m | z, y | l) \in \mathfrak{H}_{k+1}(\Omega, \Omega''), \quad j+1 \leq l \leq k+1 \leq m \leq h.$$

Es ist

$$\begin{aligned} I_2^{(j)}(m, l) &= \int_{\Omega''} \int_{\Omega'} H(m | z, x | j) L\left(j \left| x, \frac{\partial}{\partial x} \right.\right) \varrho(x) S(x, y | l) dx \Phi'(y) dy \\ &= \int_{\Omega''} A^{(j)}(m | z, y | l) \Phi'(y) dy, \end{aligned}$$

wobei nach Satz 4 aus § 3 $A^{(j)}(m | z, y | l) \in \mathfrak{G}_{s^1 l - s}^{1, m}(z, \Omega'')$ ist, denn es ist $1 \leq l \leq j < k+1 \leq m \leq h$.

Damit hat $A^{(j)}(m | z, y | l)$ die Eigenschaften 1) und 3) der Matrizen aus $\mathfrak{H}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$. Ähnlich wie soeben zeigt man, daß $A^{(j)}(m | z, y | l)$ auch die Eigenschaft 2) hat. Mithin ist

$$A^{(j)}(m | z, y | l) \in \mathfrak{H}_{k+1}(\Omega, \Omega'), \quad 1 \leq l < j \leq k+1 \leq m \leq h.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} H\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \left| z, x \right| j\right) L\left(j \left| x, \frac{\partial}{\partial x} \right.\right) \varrho(x) \int_{\Omega''} S\left(x, y \left| \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right.\right) \Phi'(y) dy dx \\ = \sum_{m=k+1}^h \sum_{l=j+1}^{k+1} I_1^{(j)}(m, l) = \int_{\Omega''} A^{(j)}\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \left| z, y \right| \begin{smallmatrix} k+1 \\ j+1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} H\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \left| z, x \right| j\right) \int_{\Omega''} L\left(j \left| x, \frac{\partial}{\partial x} \right.\right) \varrho(x) S\left(x, y \left| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix} \right.\right) \Phi'(y) dy dx \\ = \sum_{m=k+1}^h \sum_{l=1}^j I_2^{(j)}(m, l) = \int_{\Omega''} A^{(j)}\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \left| z, y \right| \begin{smallmatrix} j \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy. \end{aligned}$$

Hiermit wird (vgl. S. 113)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega''} \gamma(y) \Phi'(y) dy &= \sum_{j=1}^h \int_{\Omega} v\left(z \left| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right.\right) \int_{\Omega''} A^{(j)}\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \left| z, y \right| \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \Phi'(y) dy dz + \\ &+ \int_{\Omega''} \zeta(y) \Phi'(y) dy = \int_{\Omega''} \left\{ \int_{\Omega} v\left(z \left| \begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \right.\right) A\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \left| z, y \right| \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) dz + \zeta(y) \right\} \Phi'(y) dy \end{aligned}$$

mit

$$A\left(\begin{smallmatrix} h \\ h+1 \end{smallmatrix} \middle| z, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega'') \quad \text{und} \quad \zeta(y) \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega'').$$

Es ist

$$\int_{\Omega} v\left(z \begin{smallmatrix} h \\ k+2 \end{smallmatrix}\right) A\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+2 \end{smallmatrix} \middle| z, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) dz + \zeta(y) \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega''),$$

also

$$\gamma(y) - \int_{\Omega} v(z|k+1) A\left(\begin{smallmatrix} h \\ 1 \end{smallmatrix} \middle| z, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) dz \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$$

mit $A(z, y) \in \mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$.

Damit ist die auf S. 111 aufgestellte Behauptung über $\gamma(y)$ bewiesen. Unmittelbar aus der Definition (29) von $\gamma(y)$ liest man andererseits ab, daß

$$v\left(y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \gamma(y) = \int_{\Omega'} v\left(x \begin{smallmatrix} k+1 \\ h \end{smallmatrix}\right) \tilde{H}\left(x, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) dx + f\left(y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

mit $\tilde{H}(x, y) \in \mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$ und $f(y|j) \in \overline{C}_{\mathfrak{S}}^H(\Omega'')$, $j=1, \dots, h$, ist; denn aus $\varrho(x) \in \dot{C}(\Omega')$ folgt $\varrho(x) \in \dot{C}(\Omega)$, und es ist damit

$$L\left(\begin{smallmatrix} h \\ k+1 \end{smallmatrix} \middle| x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \varrho(x) S\left(x, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega''),$$

wie man leicht aus Satz 4 von § 3 abliest.

Also ist

$$v\left(y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \gamma(y) - \int_{\Omega} v(x|k+1) \tilde{H}\left(x, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) dx \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega'').$$

Zusammen mit

$$\gamma(y) - \int_{\Omega} v(x|k+1) A\left(x, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) dx \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$$

ergibt das wegen der Linearität von $\mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$ und $\mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$

$$v\left(y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \int_{\Omega} v(x|k+1) K\left(x, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) dx \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$$

mit $K(x, y) \in \mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega'')$.

Damit ist bewiesen:

Für alle Ω, Ω' existiert $K(x, y) \in \mathfrak{S}_{k+1}(\Omega, \Omega')$, so daß

$$v\left(y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) - \int_{\Omega} v(x|k+1) K\left(x, y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) dx \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega')$$

ist.

Nach dem Hilfssatz (s. S. 107) folgt $v\left(y \begin{smallmatrix} k+1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}_{k+1}(\Omega, \Omega')$ für alle Ω, Ω' , q.e.d.

§ 5. Differenzierbarkeitssätze für singuläre Integrale

In den vorigen Paragraphen wurde von folgenden bekannten Sätzen Gebrauch gemacht.

Satz 6. Sind F und G beschränkte, konvexe Gebiete in R_N , ist $f(x)$ auf F meßbar und beschränkt, $H(x, z) \in \mathfrak{G}_m^1(x, G)$, $x \in F$, dann ist

$$\int_F f(x) H(x, z) dx \in \overline{C}_m^H(G),$$

und es gilt

$$D_z^\alpha \int_F f(x) H(x, z) dx = \int_F f(x) D_z^\alpha H(x, z) dx, \quad \alpha \leq m; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Satz 7. Ist E Kompaktum in R_N und sind F und G beschränkte, konvexe Gebiete in R_N , ist ferner $f(y, x) \in \mathfrak{G}_0^1(y, F)$, $y \in E$, und $H(x, z) \in \mathfrak{G}_m^1(x, G)$, $x \in F$, dann ist

$$\int_F f(y, x) H(x, z) dx \in \mathfrak{G}_m^2(y, G), \quad y \in E,$$

und es gilt

$$D_z^\alpha \int_F f(y, x) H(x, z) dx = \int_F f(y, x) D_z^\alpha H(x, z) dx, \quad \alpha \leq m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Satz 8. Ist E Kompaktum in R_N und sind F und G beschränkte, konvexe Gebiete in R_N , ist ferner $f(y, x) \in \mathfrak{G}_0^1(y, F)$, $y \in E$, und $H(x, z) \in \mathfrak{G}_m^0(x, G)$, $x \in F$, sowie

$$\int_F H(x, z) dx \in \overline{C}_m^H(G),$$

dann ist

$$\int_F f(y, x) H(x, z) dx \in \mathfrak{G}_m^1(y, G), \quad y \in E; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Literatur

- [1a] BROWDER, F. E.: The Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary even order with variable coefficients. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **38**, 230–235 (1952).
- [1b] — Strongly elliptic systems of differential equations. Ann. Math. Studies No. 33. Princeton 1954.
- [1c] — On the regularity properties of solutions of elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **9**, 351–361 (1956).
- [1d] — Functional analysis and partial differential equations. II. Math. Ann. **145**, 81–226 (1962).
- [2] COURANT, R.: Über direkte Methoden bei Variations- und Randwertproblemen. Jber. Deutsch. Math. Verein. **34**, 90–117 (1926).
- [3] COURANT-HILBERT: Methods of mathematical physics, vol. II. New York 1962.
- [4] DOUGLIS, A., and L. NIRENBERG: Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 503–538 (1955).
- [5] FRIEDRICHS, K.: On the differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **6**, 299–326 (1953).
- [6] FRIEDRICHS, K.: On certain inequalities and characteristic value problems for analytic functions and for functions of two variables. Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 321–364 (1937).
- [7] FUBINI, G.: Il principio di minimo e i theoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari. Rend. Circolo Math. Palermo **23**, 58–84 (1907).

- [8] GÄRDING, L.: On a Lemma by H. Weyl. Kungl. Fys. Sällskapet i Lund Förh. **20**, 250—253 (1950).
- [9] HELLWIG, G.: Partielle Differentialgleichungen. Stuttgart 1960.
- [10] HÖRMANDER, L.: On interior regularity of the solutions of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **11**, 197—218 (1958).
- [11] HOPF, E.: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **34**, 194—233 (1932).
- [12] JOHN, F.: Plane waves and spherical means, applied to partial differential equations. New York 1955.
- [13] LAX, P.: On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 615—633 (1955).
- [14] MALGRANGE, B.: Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques. Bull. Soc. Math. France **85**, 283—306 (1957).
- [15] MORREY, C. B.: Second order elliptic systems of differential equations. Ann. Math. Studies No. 33, Princeton 1954, 101—159.
- [16] —, and L. NIRENBERG: On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **10**, 271—290 (1957).
- [17] NIRENBERG, L.: Remarks on strongly elliptic partial differential equations. Comm. Pure Appl. Math. **8**, 648—674 (1955).
- [18] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. Paris 1951.
- [19] SOBOLEV, S.: Über einen Satz aus der Funktionalanalysis. Mat. Sbornik, N.S., **4**, 471—497 (1938).
- [20] WEYL, H.: The method of orthogonal projection in potential theory. Duke Math. J. **7**, 411—444 (1940).

Berlin-Charlottenburg, Technische Universität

(Eingegangen am 16. April 1963)

Integrability of trigonometric series

By

M. M. ROBERTSON

1. Introduction

This note is concerned with certain integrability properties of trigonometric series. We write

$$(1.1) \quad f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx,$$

$$(1.2) \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx.$$

The following theorem was proved by BOAS [1].

Theorem A. *If $\lambda_n \downarrow 0$ ultimately, then, for $0 < \gamma < 1$, $x^{-\gamma} f(x) \in L(0, \pi)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converges.*

The next theorem was established by YOUNG [4] for $\gamma = 0$, by BOAS [1] for $0 < \gamma \leq 1$ and by HEYWOOD [3] for $1 < \gamma < 2$.

Theorem B. *If $\lambda_n \downarrow 0$ ultimately, then, for $0 \leq \gamma < 2$, $x^{-\gamma} g(x) \in L(0, \pi)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} \lambda_n$ converges.*

The aim of our investigation is to extend Theorem A and B to certain "well behaved" trigonometric series. Throughout this note we shall, for brevity of notation, use the expression "well behaved of order k " for sine or cosine series in which the coefficients λ_n can be partitioned into k disjoint sequences λ_{rk+i} ($i = 1, 2, \dots, k$), each of which ultimately increases or decreases steadily to zero. (The initial term of the cosine series $\frac{1}{2} \lambda_0$ may be disregarded.) We write $\varphi(x, k, \gamma) = \prod_{i=0}^{[\frac{1}{2}k]} \left(x - \frac{2i\pi}{k}\right)^{-\gamma}$. The theorems we establish then are the following.

Theorem 1. *If $f(x)$ is well behaved of order k , then, for $0 < \gamma < 1$, $f(x) \varphi(x, k, \gamma) \in L(0, \pi)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} |\lambda_n|$ converges.*

Theorem 2. *If $g(x)$ is well behaved of order k , then, for $0 < \gamma < 1$, $g(x) \varphi(x, k, \gamma) \in L(0, \pi)$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} |\lambda_n|$ converges.*

2. Proof of Theorems 1 and 2

If $f(x)$ is well behaved of order k , then there is an integer $R \geq 0$ such that all the sequences λ_{rk+i} ($i = 1, 2, \dots, k$) increase or decrease steadily to

zero for $r \geq R$. For $q > p \geq kR$, we write $\mu = \mu(i) = [(p-i)/k]$, $v = v(i) = [(q-i)/k]$. Then we have

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=p+1}^q \lambda_n \cos nx \right| &\leq \sum_{i=1}^k \left| \sum_{r=\mu+1}^v \lambda_{rk+i} \cos(rk+i)x \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |\lambda_{\mu k+i}| (2 \sin kx/2)^{-1} \left(\sin \left\{ (v + \frac{1}{2})k + i \right\} x - \sin \left\{ (\mu + \frac{1}{2})k + i \right\} x \right) \\ &\leq |\sin kx/2|^{-1} \sum_{i=1}^k |\lambda_{\mu k+i}|. \end{aligned}$$

Hence, since $|\lambda_{rk+i}| \downarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$, the series in (1.1) is seen to be uniformly convergent when $2l\pi/k + \delta \leq x \leq 2(l+1)\pi/k - \delta$, $0 \leq l \leq [\frac{1}{2}k]$, $0 < \delta < \pi/k$. Therefore $f(x)$ is continuous and so integrable over the above set of $[\frac{1}{2}k] + 1$ intervals. The same conclusion follows for $g(x)$ by a similar argument applied to the series in (1.2). It follows that the integrability of $f(x)\varphi(x, k, \gamma)$, $g(x)\varphi(x, k, \gamma)$ over $(0, \pi)$ depends only upon the behaviour of $f(x)$, $g(x)$ in a neighbourhood of the points $2l\pi/k$ ($0 \leq l \leq [\frac{1}{2}k]$).

As the proofs of Theorems 1 and 2 are very similar, we shall prove only Theorem 2. Actually, we shall prove somewhat more than Theorem 2 by using only part of the hypotheses for each half of the theorem. We require the following lemma.

Lemma. *If $0 < \gamma \leq 1$, $\lambda_{rk+i} \downarrow 0$ or $\lambda_{rk+i} \uparrow 0$ ultimately as $r \rightarrow \infty$ and $\sum (rk+i)^{\gamma-1} |\lambda_{rk+i}|$ converges, then $\sum (rk+i)^{\gamma} |\lambda_{(r+1)k+i} - \lambda_{(r-1)k+i}|$ converges.*

We observe that, since $(rk+i)^{\gamma-1} |\lambda_{rk+i}| \downarrow 0$ and $\sum (rk+i)^{\gamma-1} |\lambda_{rk+i}|$ converges, $(rk+i)^{\gamma} \lambda_{rk+i} \rightarrow 0$. The proof of the lemma follows by partial summation.

Before proceeding with the proof of Theorem 2, we introduce the following notation. C is used for a positive number, not usually the same at each occurrence, which may depend upon γ, k but not upon n, x and the constant implied in the symbol $O(\)$ is of the type C . We now prove the first part of the theorem by showing that if $\sum n^{\gamma} |\lambda_{n-k} - \lambda_{n+k}|$ converges and $\lambda_n \rightarrow 0$, then $g(x)\varphi(x, k, \gamma) \in L(0, \pi)$ for $0 < \gamma < 1$. First we write $c_i(r, x) = \cos ix - \cos(rk+i)x$. By partial summation, we obtain

$$\begin{aligned} g(x) &= (2 \sin kx)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \{ \cos(n-k)x - \cos(n+k)x \} \\ &= (2 \sin kx)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{rk+i} \{ \cos\{(r-1)k+i\}x - \cos\{(r+1)k+i\}x \} \\ &= (2 \sin kx)^{-1} \sum_{i=1}^k \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{rk+i} \{ c_i(r+1, x) - c_i(r-1, x) \} \\ &= (2 \sin kx)^{-1} \sum_{i=1}^k \left\{ -\lambda_i c_i(-1, x) + \sum_{r=1}^{\infty} (\lambda_{(r-1)k+i} - \lambda_{(r+1)k+i}) c_i(r, x) \right\}. \end{aligned}$$

Since $\sin kx \sim kx - 2l\pi$ as $x \rightarrow 2l\pi/k$, we have

$$c_i(-1, x) = \cos ix (1 - \cos kx) - \sin ix \sin kx = O(x - 2l\pi/k)$$

as $x \rightarrow 2l\pi/k$. It is therefore sufficient to show that the integrals

$$I_{li} = \int_{2l\pi/k-\delta}^{2l\pi/k+\delta} \left| x - \frac{2l\pi}{k} \right|^{-\gamma-1} \sum_{r=1}^{\infty} |(\lambda_{(r-1)k+i} - \lambda_{(r+1)k+i}) c_i(r, x)| dx$$

for $0 \leq l \leq [\frac{1}{2}k]$, $1 \leq i \leq k$ are finite. This follows since

$$\begin{aligned} I_{li} &= \sum_{r=1}^{\infty} |\lambda_{(r-1)k+i} - \lambda_{(r+1)k+i}| \int_{2l\pi/k-\delta}^{2l\pi/k+\delta} \left| x - \frac{2l\pi}{k} \right|^{-\gamma-1} |\cos ix - \cos(rk+i)x| dx \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} |\lambda_{(r-1)k+i} - \lambda_{(r+1)k+i}| \int_{-\delta}^{\delta} |u|^{-\gamma-1} \times \\ &\quad \times \left| 2 \sin\left(\frac{1}{2}rk+i\right) \left(u + \frac{2l\pi}{k}\right) \sin \frac{1}{2}rk \left(u + \frac{2l\pi}{k}\right) \right| du \\ &\leq 2 \sum_{r=1}^{\infty} (rk+i)^{\gamma} |\lambda_{(r-1)k+i} - \lambda_{(r+1)k+i}| \int_{-(rk+i)\delta}^{(rk+i)\delta} |v|^{-\gamma-1} \left| \sin \frac{\frac{1}{2}rk v}{rk+i} \right| dv \\ &\leq 2 \sum_{r=1}^{\infty} (rk+i)^{\gamma} |\lambda_{(r-1)k+i} - \lambda_{(r+1)k+i}| \int_{-\infty}^{\infty} |v|^{-\gamma-1} \left| \sin \frac{\frac{1}{2}rk v}{rk+i} \right| dv \\ &\leq C \sum_{n=k+1}^{\infty} n^{\gamma} |\lambda_{n-k} - \lambda_{n+k}|. \end{aligned}$$

Next, we prove the second half of the theorem by showing that if $g(x) \varphi(x, k, \gamma) \in L(0, \pi)$ then $\sum n^{\gamma-1} |\lambda_n|$ converges. We have $g(x) \in L(0, \pi)$ so that $\sum \lambda_n \sin nx$ is the Fourier series of its sum [2, Theorem 100]. Then, recalling that $\nu = \nu(i) = [(q-i)/k]$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \pi \sum_{n=1}^q n^{\gamma-1} |\lambda_n| &= \sum_{i=1}^k \sum_{r=0}^{\nu} (rk+i)^{\gamma-1} \left| \int_0^{\pi} g(x) \sin(rk+i)x dx \right| \\ (2.1) \quad &= \sum_{i=1}^k \left| \int_0^{\pi} g(x) \left\{ \sum_{r=0}^{\nu} (rk+i)^{\gamma-1} \sin(rk+i)x \right\} dx \right|. \end{aligned}$$

Now, if $(2l-1)\pi/k \leq x \leq (2l+1)\pi/k$, $x \neq 2l\pi/k$ and we write

$$m = [(|x - 2l\pi/k|^{-1} - i)/k],$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{r=0}^{\nu} (rk+i)^{\gamma-1} \sin(rk+i)x \right| &\leq \left| \sum_{r=0}^m \right| + \left| \sum_{r=m+1}^{\nu} \right| \\ &\leq \sum_{r=0}^m (rk+i)^{\gamma-1} + (mk+i)^{\gamma-1} \max_{m < \sigma \leq \nu} \left| \sum_{r=m+1}^{\sigma} \sin(rk+i)x \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{mk+i} n^{\gamma-1} + (mk+i)^{\gamma-1} |\sin kx/2|^{-1} \\ &\leq C |x - 2l\pi/k|^{-1}. \end{aligned}$$

It follows from (2.1) that

$$\sum_{n=1}^q n^{\gamma-1} |\lambda_n| \leq C \int_0^\pi |g(x)| \varphi(x, k, \gamma) dx$$

for all q and so $\sum n^{\gamma-1} |\lambda_n|$ converges.

3. Further remarks

It is noticeable that the integrability theorems proved in this note for sine and cosine series are valid for the same range of values of γ . The reason for the different regions of validity in Theorems A and B is the difference in the behaviour of $\sin nx$, $\cos nx$ near $x=0$. Since $|\sin nx| = |\sin n(\pi-x)|$, the range of validity of Theorem 2 of this note can easily be extended to $0 < \gamma < 2$ for $k=1, 2$ by the method of HEYWOOD [3]. Alternatively, the method of this note suffices as the lemma can be shown to hold for $0 < \gamma < 2$.

If $f(x)$, $g(x)$ are well behaved of order k , these functions are bounded whenever $\operatorname{cosec}(kx/2)$ is bounded. Therefore it follows easily from Theorems 1 and 2 that —

If $f(x)$, $g(x)$ are well behaved, then, for $0 < \gamma < 1$, $f(x)(x-t\pi)^{-\gamma}$, $g(x)(x-t\pi)^{-\gamma} \in L(0, \pi)$ for all t in $0 \leq t \leq 1$ if and only if $\sum n^{\gamma-1} |\lambda_n|$ converges.

References

- [1] BOAS, R. P.: Integrability of trigonometric series (III). Quart. J. Math. (Oxford) (2) **3**, 217–221 (1952).
- [2] HARDY, G. H., and W. W. ROGOSINSKI: Fourier Series. Cambridge 1944.
- [3] HEYWOOD, P.: On the integrability of functions defined by trigonometric series. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **5**, 71–76 (1954).
- [4] YOUNG, W. H.: On the Fourier series of bounded functions. Proc. London Math. Soc. **12**, 41–70 (1913).

Dept. of Math., University of California, Los Angeles 24, Calif., USA

(Received April 28, 1963)

Determinantenabschätzungen für binäre Matrizen

Von

HARTMUT EHLICH

1. Einleitung

Wir betrachten n -reihige quadratische Matrizen A, B , wobei stets

$$(1.1) \quad a_{ij} = \pm 1, \quad b_{ij} = 0 \text{ oder } 1$$

gelte. Diese binären Matrizen spielen als Inzidenzmatrizen eine Rolle in verschiedenen Gebieten (Wägeprobleme [2], [3], [7], [20], [21], [22], endliche Geometrien [5], [10], [25], [28], Differenzenmengen [11], [12], [15], binäre Codes [4]) und wurden in den letzten Jahren oft untersucht¹⁾. Über ihre Determinanten ist jedoch wenig bekannt [8], [23], [24]. Bezeichnen α_n, β_n die Betragsmaxima der Determinanten aller n -reihigen A bzw. B , so folgt mittels Ränderung und Elimination (vgl. [19])

$$(1.2) \quad 2^n \beta_n = \alpha_{n+1},$$

und für α_n ergibt die Hadamardsche Determinantenabschätzung

$$(1.3) \quad \alpha_n \leq h_n \quad \text{mit} \quad h_n = n^{n/2}.$$

Das Gleichheitszeichen steht hier genau für orthogonale A -Matrizen, und dazu ist notwendig [16]

$$n = 1, 2 \quad \text{oder} \quad n \equiv 0 \pmod{4}.$$

Ob ein orthogonales A für alle $n \equiv 0 \pmod{4}$ existiert, ist nicht entschieden. Eine Zusammenstellung aller bekannten orthogonalen A findet sich in [4], diese Liste ist durch $n=92$ [1] zu ergänzen.

Im nicht orthogonalen Fall ist bisher α_n nur für $n=3, \dots, 13$ bekannt [8], [31]. Andere Untersuchungen [21], [22], [26] beschränken sich auf spezielle Klassen von A - bzw. B -Matrizen. Für ungerade n gab POPOVICIU [18] die Verschärfung

$$(1.4) \quad \alpha_n^2 \leq (n-1)^{n-1} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-2}, \quad n \equiv 1(2)$$

von (1.3) an. Seine Methode (B -Matrizen und quadratische Formen) versagt jedoch für $n \equiv 2 \pmod{4}$.

In dieser Note werden wir für α_n und $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ neue Schranken herleiten, die in den Fällen $n \equiv 1$ und $2 \pmod{4}$ im allgemeinen nicht verschärft werden können. Die Methode beruht auf einer geeigneten Normierung der Elemente c_{ij} von

$$(1.5) \quad C = A A^T,$$

¹⁾ Eine gute Literaturübersicht gibt RYSER [27].

einer Abschätzung von Determinanten positiv definiter Matrizen (Satz 2.1) und Überlegungen, welche C in (1.5) auftreten können (vgl. [8]). Außerdem werden für $n \equiv 1$ und $2 \bmod 4$ Aussagen über den Aufbau maximaler Matrizen (Verteilung der Elemente $+1$ und -1) gewonnen.

Matrizen, die durch Umordnen von Zeilen und (oder) Spalten bzw. durch Multiplikation der Zeilen und Spalten mit ± 1 (Normieren) auseinander hervorgehen, bezeichnen wir — soweit keine Verwechslungen auftreten — mit dem gleichen Buchstaben. Symmetrische, insbesondere positiv definite Matrizen werden stets symmetrisch umgeordnet und normiert; $\det A$ bedeutet die Determinante, A^T die Transponierte von A und a_i die i -te Zeile.

2. Determinanten positiv definiter Matrizen

Lemma 2.1. Ist $C = (c_{ij})$ eine (reelle) symmetrische Matrix mit

$$(2.1) \quad \begin{cases} c_{11} \geq c_{22} \geq \dots \geq c_{nn} > 0 \\ |c_{nj}| \leq c_{nn} \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

und ist die Hauptabschnittsdeterminante C^* vom Grad $n-1$ positiv definit, so gilt

$$(2.2) \quad \det C \leq c_{nn} \prod_{i=1}^{n-1} (c_{ii} - c_{nn}).$$

Beweis. Falls $\det C > 0$ ist, so ist C positiv definit. Dann ist mit $c = (c_{n1}, \dots, c_{nn-1})$ aber auch

$$D = C^* - \frac{c^T c}{c_{nn}}$$

positiv definit (Gauß-Elimination!). $\det D$ ist daher kleiner oder gleich dem Produkt der Hauptdiagonalglieder, die durch

$$d_{ii} = c_{ii} - \frac{c_{ni}^2}{c_{nn}} \leq c_{ii} - c_{nn} \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

abgeschätzt werden können.

Der Beweis zeigt, daß das Gleichheitszeichen in (2.2) genau dann gilt, falls alle Elemente von D außerhalb der Hauptdiagonalen gleich Null sind und $|c_{ni}| = c_{nn}$ ist. Dies bedeutet aber, daß bei geeigneter Normierung von C gilt $c_{ij} = c_{nn}$ für $i \neq j$.

Mittels Lemma 2.1 läßt sich nun leicht zeigen

Satz 2.1. Sei $d \geq 0$ und $C = (c_{ij})$ eine positiv definite Matrix mit

$$(2.3) \quad \begin{cases} c_{11} \geq c_{22} \geq \dots \geq c_{nn} \geq d \\ |c_{ij}| \geq d \quad \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Dann ist

$$\det C \leq (c_{nn} + (n-1)d) \prod_{i=1}^{n-1} (c_{ii} - d),$$

und Gleichheit besteht genau dann, wenn bei geeigneter Normierung $c_{ij} = d$ für $i \neq j$ und, falls $d > 0$, $c_{11} = \dots = c_{nn}$ ist.

Beweis. Für $d=0$ erhalten wir die bekannte Abschätzung durch das Produkt der Hauptdiagonalglieder; daher sei im folgenden $d>0$. Wir benutzen eine Folge von Matrizen C_k der Dimension k ($C_n=C$), wobei C_{k-1} aus C_k durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht.

Für $k=2$ ist die Behauptung einschließlich Zusatz klar, da

$$\det C_2 = \det C = (c_{11} c_{22} - c_{12}^2) \leq (c_{11} - d)(c_{22} + d)$$

gilt. Ist sie aber für $n=m-1$ schon bewiesen, so folgt

$$\det C_m = (c_{mm} - d) \det C_{m-1} + \det D_m,$$

wobei sich D_m nur in dem letzten Element d in der Hauptdiagonale von C_m unterscheidet. Da auf D_m Lemma 2.1 angewandt werden kann, folgt mittels Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} \det C_m &\leq (c_{mm} - d)(c_{m-1, m-1} + (m-2)d) \prod_{i=1}^{m-2} (c_{ii} - d) + d \prod_{i=1}^{m-1} (c_{ii} - d) \\ &\leq (c_{mm} - d(m-1)) \prod_{i=1}^{m-1} (c_{ii} - d), \end{aligned}$$

und hier gilt überall das Gleichheitszeichen, wenn $c_{11} = \dots = c_{nn}$ und bei Normierung $c_{ij} = d$ für $i \neq j$ ist.

3. Normierungen für AA^T

Für ungerade n gibt es keine zwei zueinander orthogonale Zeilen einer A -Matrix. Es ergibt sich

Lemma 3.1. Für $n \equiv 1 \pmod 2$ läßt sich jede A -Matrix so normieren, daß in $C = (c_{ij}) = AA^T$ gilt

$$(3.1) \quad c_{ij} \equiv n \pmod 4.$$

Beweis. Wir normieren A so, daß jede der Zeilen a_i eine gerade Anzahl r_i ($i=1, \dots, n$) Elemente -1 enthält. Bezeichnet s_{ij} die Anzahl der in a_i und a_j übereinstimmenden Elemente -1 (die Anzahl der k für die $a_{ik} = a_{jk} = -1$), so folgt

$$a_i a_j = (n - r_i) - 2(r_j - s_{ij}) - (r_i - 2s_{ij}) = n - 2(r_i + r_j) + 4s_{ij} \equiv n \pmod 4.$$

Der Beweis zeigt zugleich

Lemma 3.2. Ist $n \equiv 1 \pmod 2$, genügen die Elemente c_{ij} von $C = AA^T$ der Kongruenz (3.1) und besitzt eine Zeile von A eine gerade (ungerade) Anzahl Elemente -1 , so enthält jede Zeile von A eine gerade (ungerade) Anzahl Elemente -1 .

Für $n \equiv 2 \pmod 4$ sind alle Elemente in AA^T gerade, hier kommt es vor allem auf die Verteilung der durch 4 teilbaren Elemente an:

Lemma 3.3. Ist $n \equiv 2 \pmod 4$, so gibt es keine drei Zeilen einer A -Matrix, die paarweise innere Produkte kongruent $0 \pmod 4$ besitzen.

Beweis. Es genügt die Behauptung für a_1 , a_2 und a_3 zu beweisen. O.B.d.A. sei $a_1 = (1, \dots, 1)$ und $a_1 a_2 \equiv a_1 a_3 \equiv 0 \pmod{4}$. Dann ist die Anzahl r_i der Elemente -1 in a_i ($i=2, 3$) ungerade, da $a_1 a_i = n - 2r_i$ ist. Bezeichnet s die Anzahl der übereinstimmenden -1 -er in a_2 und a_3 , so folgt wie oben

$$a_2 a_3 = n - 2(r_2 + r_3) + 4s \equiv n \equiv 2 \pmod{4}.$$

Lemma 3.4. *Ist $n \equiv 2 \pmod{4}$, so genügt die Anzahl b der Elemente $c_{ij} \equiv 0 \pmod{4}$ in $C = A A^T$ der Ungleichung*

$$b \leq \frac{n^2}{2}.$$

Gilt dabei das Gleichheitszeichen, so läßt sich A so umordnen, daß

$$C = \begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ D_3^T & D_2 \end{pmatrix}$$

ist und alle Elemente von D_1 , D_2 kongruent 2, alle Elemente von D_3 kongruent 0 mod 4 sind.

Beweis. Wir ordnen C so um, daß die größte Anzahl r von Elementen $\equiv 0(4)$ in einer Zeile von C in der $(r+1)$ -ten Zeile in den Spalten $1, 2, \dots, r$ auftritt und, was nach Lemma 3.3 möglich ist, $c_{ij} \equiv 2(4)$ für $i, j = 1, \dots, r$ gilt. Eine weitere Umordnung bringe nun die maximale Anzahl s ($s \leq r$, $s \leq n-r$) der Elemente $\equiv 0(4)$ in einer der r ersten Spalten in die Zeilen $r+1, \dots, r+s$, so daß auch $c_{ij} \equiv 2(4)$ für $i, j = r+1, \dots, r+s$ wird. Dann folgt für $r \geq \frac{n}{2}$

$$\begin{aligned} b &\leq 2rs + (n-r)^2 - (n-r) - s^2 + s \\ &\leq 2r(n-r) \leq \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

und $b = \frac{n^2}{2}$ kann nur für $r = s = \frac{n}{2}$ gelten. Ist aber $r < \frac{n}{2}$, so folgt auf Grund der Definition von r sofort $b \leq n \cdot r < \frac{n^2}{2}$.

4. Abschätzungen für α_n

Ist n ungerade, so ist in $C = A A^T$ stets $c_{ii} = n$ und nach Lemma 3.1 $|c_{ij}| \geq 1$. Satz 2.1 ergibt dann

Satz 4.1. *Ist n ungerade, so ist*

$$\alpha_n^2 \leq (n-1)^{n-1} (2n-1).$$

Da α_n eine ganze Zahl ist, so kann hier das Gleichheitszeichen nur für $n = \frac{m^2+1}{2}$ gelten; das zugehörige C ist dann von der Gestalt

$$(4.1) \quad F_1 = \begin{pmatrix} n & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & n \end{pmatrix}.$$

Die ersten Fälle sind $n = 5, 13, 25$; für diese n gibt es A -Matrizen mit $AA^T = F_1$. Auch bei den anderen $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \leq 21$ weicht bei den numerisch bestimmten „maximalen“ A -Matrizen AA^T nur wenig von F_1 ab. Die effektive Bestimmung von α_n bereitet aber große Schwierigkeiten, da eine Reihe von zahlen-theoretischen Fragen auftreten (vgl. [8]). Für $n \equiv 3 \pmod{4}$ ist die angegebene Schranke für α_n sicher zu groß. Mit der gewählten Normierung sind nämlich alle Elemente in AA^T entweder ≤ -1 oder ≥ 3 . Nur -1 kann außerhalb der Hauptdiagonalen nicht auftreten, da dies kleine Determinanten ergibt. Die maximale A -Matrix besitzt wahrscheinlich ein AA^T mit $+3$ und -1 , ein Anhaltspunkt für die Verteilung dieser Elemente, die für Abschätzungen wichtig wird, konnte bisher nicht gewonnen werden.

Satz 4.2. *Ist n gerade, so ist*

$$\alpha_n^2 \leq \begin{cases} n^n = h_n^2 & \text{für } n \equiv 0(4) \\ 4(n-2)^{n-2}(n-1)^2 & \text{für } n \equiv 2(4). \end{cases}$$

Beweis. Für $n \equiv 2(4)$ kommt es wesentlich auf die Verteilung der Nullen in AA^T an. Wie bei dem Beweis zu Satz 2.1 benutzen wir eine Folge von Matrizen C_k ($C_n = AA^T$), die durch Streichen der letzten Zeile und Spalte auseinander hervorgehen. Jedes C_k ordnen wir außerdem so an, daß die maximal r_k Elemente $\equiv 0(4)$ einer Zeile in der letzten Zeile in den Spalten $1, \dots, r_k$ auftreten und $|c_{ij}| \geq 2$ für $i, j = 1, \dots, r_k$ und $i = n, j = r_k + 1, \dots, n$ ist. Nach Satz 2.1 und Lemma 2.1 folgt dann

$$\begin{aligned} \det C_n &\leq (n-2) \det C_{n-1} + (n-2)^{n-1} (n + 2(r_n - 1)) 2(n-2)^{n-r_n-1} \\ &= (n-2) \det C_{n-1} + 2(n-2)^{n-2} (n-2 + 2r_n) \\ &\leq (n-2)^2 \det C_{n-2} + 2(n-2)^{n-2} (2(n-2) + 2(r_n + r_{n-1})) \\ &\leq \dots \\ &\leq (n-2)^s \det C_{n-s} + 2(n-2)^{n-2} \left(s(n-2) + 2 \sum_{i=n-s+1}^n r_i \right), \end{aligned}$$

wo C_{n-s} kein Element $\equiv 0(4)$ mehr enthält. Nach Satz 2.1 und Lemma 3.4 ist also

$$\begin{aligned} \det C &\leq (n-2)^{n-1} (n + 2(n-s-1)) + 2(n-2)^{n-2} \left(s(n-2) + 2 \frac{n^2}{4} \right) \\ &= 4(n-2)^{n-2} (n-1)^2. \end{aligned}$$

($\sum r_i$ gibt die halbe Anzahl der Elemente $\equiv 0(4)$ in C_n an!)

Die Überlegungen zeigen zugleich, daß die Schranke für α_n im Fall $n \equiv 2 \pmod{4}$ nur dann angenommen werden kann, wenn nach Umordnung und Normierung $AA^T = F_2$ mit

$$(4.2) \quad F_2 = \begin{pmatrix} F_3 & 0 \\ 0 & F_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F_3 = \begin{pmatrix} n & & 2 \\ & \ddots & \\ 2 & & n \end{pmatrix}$$

ist.

Interessant ist ein Vergleich von α_n und h_n :

$$(4.3) \quad \alpha_n \leq \begin{cases} h_n & \text{für } n \equiv 0(4) \\ \sqrt{\frac{2}{e}} \sqrt{\frac{2n-1}{2n-2}} h_n & \text{für } n \equiv 1(2) \\ \frac{2}{e} \frac{n-1}{n-2} h_n & \text{für } n \equiv 2(4). \end{cases}$$

Es liegt die Vermutung nahe, daß für $n \equiv 3(4)$

$$\alpha_n \leq \alpha h_n \quad \text{mit} \quad \alpha \approx \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{3}{4}}$$

ist.

5. Struktur maximaler A -Matrizen

Wir wollen nun noch die A -Matrizen untersuchen, für die $AA^T = F_1$ bzw. F_2 ist. Diese Matrizen bezeichnen wir kurz als maximale A -Matrizen oder $\tilde{A}$ -Matrizen. Existiert eine solche Matrix $\tilde{A}$, so gibt es eine Permutationsmatrix P mit den Elementen ± 1 , so daß auch $P^T \tilde{A}^T \tilde{A} P = F_i$ ist:

Satz 5.1. *Existiert eine maximale A -Matrix, so gibt es eine normale maximale A -Matrix (für die also $AA^T = A^T A$ gilt).*

Die Verteilung der Elemente $+1$ und -1 in dieser normalen maximalen Matrix $\tilde{A}$ ist von besonderem Interesse. Sei zunächst $n \equiv 1 \pmod{4}$, also $2n-1 = m^2$. Die erste Spalte von $\tilde{A}$ besitze r Elemente $+1$, diese bringen wir in die Zeilen $1, \dots, r$ und bilden die $(n-1, n)$ -Matrix $A_1 = (\tilde{a}_i - \tilde{a}_{11} \tilde{a}_i)_{i=2, \dots, n}$, deren erste Spalte identisch verschwindet. Für die nach Streichen dieser Spalte entstehende Matrix A_2 folgt einerseits $\det A_2 = \det \tilde{A}$ (Gauß-Elimination) und andererseits

$$C_2 = A_2 A_2^T = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2n-2 & & & & & \\ & \cdot & & n-1 & & \\ n-1 & & & & & \\ & & & 2n-2 & & \\ \hline & & & & 2n+2 & \\ & & & & n+3 & \cdot & n+3 \\ & & & & & & 2n+2 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} r-1 \text{ Zeilen} \\ \\ \\ \\ n-r \text{ Zeilen} \end{array}$$

Berechnen wir $\det C_2$ ($(r-1)$ -te Zeile von den vorangehenden, letzte Zeile von der r -ten bis $(n-2)$ -ten subtrahieren, dann Elimination), so erhalten wir

$$\det C_2 = (n-1)^{n-2} (n^2 - 4r^2 + 4rn - n)$$

oder

$$r(n-r) = \frac{n^2 - 2n + 1}{4}.$$

Da nach Lemma 3.2 jede Zeile von $\tilde{A}$ eine gerade (ungerade) Anzahl Elemente -1 enthält, haben wir gezeigt:

Satz 5.2. Ist $n = \frac{m^2+1}{2} \equiv 1 \pmod{4}$ und $\tilde{A}$ eine maximale normale Matrix, so enthält jede Zeile und Spalte von $\tilde{A}$ oder $-\tilde{A}$ genau $\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$ Elemente -1 ; in je zwei Zeilen oder Spalten stimmen $\frac{1}{8}(m-1)(m-3)$ Elemente -1 überein.

Für $n=5, 13$ existieren zyklische $\tilde{A}$, deren erste Zeilen $++++-$ bzw. $++++-+++-$ ($+$ steht für $+1$, $-$ für -1) sind. Ebenfalls ist für $n=25$ ein maximales $\tilde{A}$ bekannt [21]. Für $n=25, 41$ gibt es sicher kein zyklisches maximales $\tilde{A}$ [11].

Nun sei $n \equiv 2 \pmod{4}$. Zunächst zeigen wir

Satz 5.3. Für $n \equiv 2 \pmod{4}$ existiert höchstens dann eine maximale A -Matrix, wenn der quadratfreie Teil von $n-1$ keinen Primteiler kongruent $3 \pmod{4}$ enthält.

Beweis. Sei $\tilde{A}$ maximal mit $\tilde{A}\tilde{A}^T = F_2$ und r, s die Anzahl der $+1$ unter den $\frac{n}{2}$ ersten bzw. letzten Elementen der ersten Spalte. Dann ordnen wir so um, daß $a_{11} = \dots = a_{r1} = a_{\frac{n}{2},1} = \dots = a_{\frac{n}{2}+s,1} = 1$ ist, und bilden die $(n-1, n)$ Matrix $(a_i - a_{i1}a_1)_{i=2, \dots, n}$, deren erste Spalte verschwindet. Für die nach Streichen dieser Spalte entstehende Matrix A_3 gelten die Beziehungen $\det A_3 = \det \tilde{A}$ und

$$C_3 = A_3 A_3^T = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{array}{c} 2(n-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} & \begin{array}{c} n-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} & \begin{array}{c} n-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} & \begin{array}{c} n-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} & \begin{array}{c} n-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 2(n-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} & \begin{array}{c} 2(n+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ n+6 \end{array} & \begin{array}{c} n+6 \\ \cdot \\ \cdot \\ n+2 \end{array} & \begin{array}{c} n+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n+2 \end{array} & \begin{array}{c} n+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n+2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} n-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} & \begin{array}{c} n+6 \\ \cdot \\ \cdot \\ n+2 \end{array} & \begin{array}{c} 2(n+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ 2n \end{array} & \begin{array}{c} 2n \\ \cdot \\ \cdot \\ n+2 \end{array} & \begin{array}{c} n+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} n-2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n-2 \end{array} & \begin{array}{c} n+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n+2 \end{array} & \begin{array}{c} n+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2n \end{array} & \begin{array}{c} n+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ 2n \end{array} & \begin{array}{c} n+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ n+2 \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} r-1 \\ \text{Zeilen} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{n}{2}-r \\ \text{Zeilen} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} s \\ \text{Zeilen} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{n}{2}-s \\ \text{Zeilen} \end{array} \right\} \end{array}$$

$\det C_3$ berechnet sich zu (letzte Zeile von allen anderen, 1. bis $(r-1)$ -te von der letzten, $\left(\frac{n}{2}-1\right)$ -te von der r -ten bis $\left(\frac{n}{2}-2\right)$ -ten, $\left(\frac{n}{2}+s-1\right)$ -te von der $\left(\frac{n}{2}\right)$ -ten bis $\left(\frac{n}{2}+s-2\right)$ -ten Zeile subtrahieren, dann Elimination)

$$\det C_3 = 2(n-2)^{n-3}(n-1) \left\{ n(n-2) + 8r\left(\frac{n}{2}-r\right) + 8s\left(\frac{n}{2}-s\right) \right\}.$$

Wegen

$$\det C_3 = (\det \tilde{A})^2 = 4(n-2)^{n-2}(n-1)^2$$

gilt also

$$(5.1) \quad \left(\frac{n}{2} - 2r\right)^2 + \left(\frac{n}{2} - 2s\right)^2 = 2(n-1).$$

$2(n-1) \equiv 2 \pmod{4}$ muß sich also als Summe zweier Quadrate darstellen lassen, d.h. aber (vgl. LANDAU [14], S. 101–105), der quadratfreie Teil von $n-1$ darf keinen Primteiler $\equiv 3 \pmod{4}$ besitzen.

Einen anderen Beweis dieses Satzes führt man leicht mittels der rationalen Kongruenz quadratischer Formen und der Hasse-Minkowski-Invarianten (vgl. dazu etwa [5], [13], [17], [22], [29]). Wir haben den obigen Weg gewählt, weil wir so gleichzeitig eine Aussage über die Verteilung der Vorzeichen in $\tilde{A}$ erhalten.

Satz 5.4. *Ist $n \equiv 2 \pmod{4}$ und existiert ein normales maximales $\tilde{A}$ mit $\tilde{A}\tilde{A}^T = F_2$, so ist für die Anzahlen r und s der Elemente $+1$ in der ersten bzw. zweiten Hälfte einer beliebigen Zeile oder Spalte die Beziehung (5.1) gültig.*

Die einfachste Möglichkeit, solche maximalen $\tilde{A}$ zu konstruieren, bieten zyklische Matrizen. Gibt es nämlich zyklische A_1 und A_2 der Dimension $\frac{n}{2}$ mit $A_1 A_1^T + A_2 A_2^T = F_3$, so ist mit

$$(5.2) \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -A_2^T & A_1^T \end{pmatrix}$$

$\tilde{A}$ eine maximale normale Matrix. Für die nach Satz 5.3 in Betracht kommenden $n \leq 38$ existieren solche A_1, A_2 . Die erste Zeile solcher Matrizen ist in der folgenden Tabelle angegeben (es steht wieder $+$ für $+1$, $-$ für -1).

Tabelle		
n	A_1	A_2
2	+	+
6	+++	++-
10	++++-	++++-
14	+++++-	++++--
18	++++-++-	++++-+-
	++++++-	++++-++-
26	++++-+++-	++++-+++-
	++++++-	++++-+++-
30	---++-++-++-	---++-++-++-
38	---++-++-++-++-	---++-++-++-++-
	---++-++-++-++-	---++-++-++-++-
	---++-++-++-++-	---++-++-++-++-

Für einige $n \equiv 2 \pmod{4}$ (z.B. $n-1=p^t$ [16]) gibt es eine orthogonale Matrix S , die in jeder Zeile $n-1$ Elemente ± 1 und ein Element 0 besitzt. RAGHAVARAO [22] zeigte, daß eine solche Matrix S nur dann existieren kann,

wenn $(n-1, -1)_p = 1$ (Hilbert-Symbol) für alle p ist²⁾. Diese Beziehung ist aber, wie wir zeigen werden, gleichwertig damit, daß der quadratfreie Teil m von $n-1$ durch keine Primzahl kongruent $3 \bmod 4$ teilbar ist; *es sind hier also die gleichen n wie in Satz 5.3 ausgeschlossen.*

Zunächst ist $(n-1, -1)_p = (m, -1)_p$, und $(m, -1)_p = 1$ besagt, daß die Kongruenz $mx^2 - y^2 \equiv 1 \pmod{p}$ eine ganzrationale Lösung x, y besitzt. Für $p \nmid m$ und $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist aber -1 quadratischer Nichtrest. Gibt es dagegen kein $p \equiv 3 \pmod{4}$ mit $p \mid m$, so ist, wegen $m = u^2 + v^2$ mit $(u, v) = 1$, $u^2x^2 + v^2x^2 - y^2 \equiv 1 \pmod{p}$ lösbar: Man wähle $(u, p) = 1$, bestimme x aus $ux \equiv 1 \pmod{p}$ und setze $y = vx$.

6. Bemerkungen

Zur Bestimmung „maximaler“ Matrizen wurden von Herrn K. ZELLER und mir umfangreiche Rechnungen bis $n=27$ auf der Tübinger Rechenanlage Siemens 2002 durchgeführt, s. [8]. Das anfallende Material gab Anlaß zu Vermutungen, die zu den Sätzen 3.1, 3.2, 5.3 und 5.4 führten. Ebenfalls wurden die zyklischen Matrizen A_i für $n=18, 26, 30, 38$ mit der Rechenanlage ermittelt.

Herrn K. ZELLER danke ich für viele Ratschläge und Mitarbeit.

Literatur

- [1] BAUMERT, L., S. W. GOLOMB and MARSHALL HALL, jr.: Discovery of an Hadamard Matrix of order 92. Bull. AMS **68**, 237–238 (1962).
- [2] BOSE, R. C.: On the construction of balanced incomplete block designs. Ann. Eugenics **9**, 353–399 (1939).
- [3] —, and W. S. CONNOR: Combinatorial properties of group-divisible incomplete block designs. Ann. Math. Stat. **23**, 367–383 (1952).
- [4] —, and S. S. SHRIKHANDE: A note on a result in the theory of code construction. Information and Control **2**, 183–194 (1959).
- [5] BRUCK, R. H., and H. J. RYSER: Non-existence of certain finite projective planes. Can. J. Math. **1**, 88–93 (1949).
- [6] CHOWLA, S., and H. J. RYSER: Combinatorial problems. Can. J. Math. **2**, 93–99 (1950).
- [7] CONNOR jr., W. S.: On the structure of balanced incomplete block designs. Ann. Math. Stat. **23**, 57–71 (1952).
- [8] EHLICH, H., u. K. ZELLER: Binäre Matrizen. ZAMM **42**, T 20–21 (1962).
- [9] HADAMARD, J.: Résolution d'une question relative aux déterminants. Bull. Sci. Math. (2) **17**, 30–31 (1893).
- [10] MARSHALL HALL jr.: Cyclic projective planes. Duke Math. J. **14**, 1079–1090 (1947).
- [11] — A survey of difference sets. Proc. AMS **7**, 975–986 (1956).
- [12] —, and H. J. RYSER: Cyclic incidence matrices. Can. J. Math. **3**, 495–502 (1951).
- [13] JONES, B. W.: The arithmetic theory of quadratic forms. New York 1950.
- [14] LANDAU, E.: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I, S. 101–105. Leipzig 1927.
- [15] MANN, H. B.: Some theorems on difference sets. Can. J. Math. **4**, 222–226 (1952).
- [16] PALEY, R. E. A. C.: On orthogonal matrices. J. Math. Phys. **12**, 311–320 (1933).
- [17] PALL, GORDON: The arithmetic invariants of quadratic forms. Bull. AMS **51**, 185–197 (1945).

²⁾ Als Beispiel für die n , für die sicher keine S-Matrix existiert, gibt RAGHAVARAO $n=22, 34, 58$ und 78 an. Alle solchen $n \leq 100$ sind $22, 34, 58, 70, 78, 94$.

- [18] POPOVICIU, T.: Remarques sur le maximum d'une déterminant dont tous les éléments sont non négatifs. Soc. Sci. de Cluj **8**, 572—582 (1937).
- [19] Problem E 680. Amer. Math. Monthly **1946**, 220—223 (Lösungen von G. PALL und J. WILLIAMSON).
- [20] RAO, C. R.: Factorial experiments derivable from combinatorial arrangements of arrays. J. Royal Stat. Soc. Suppl. **9**, 128—139 (1947).
- [21] RAGHAVARAO, D.: Some optimum weighing designs. Ann. Math. Stat. **30**, 295—303 (1959).
- [22] — Some aspects of weighing designs. Ann. Math. Stat. **31**, 878—884 (1960).
- [23] Research problem 1. Bull. AMS **68**, 24 (1962).
- [24] Research problem 39. Bull. AMS **69**, 41 (1963).
- [25] RYSER, H. J.: Geometries and incidence matrices. Slaughter Memorial Papers (Suppl. Amer. Math. Monthly) **62**, 25—31 (1955).
- [26] — Maximal determinants in combinatorial investigations. Can. J. Math. **8**, 245—249 (1956).
- [27] — Matrices of zeros and ones. Bull. AMS **66**, 442—464 (1960).
- [28] SINGER, JAMES: A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. Trans. AMS **43**, 377—385 (1938).
- [29] VARTAK, M. N.: On the Hasse-Minkowski invariant of the Kronecker product of matrices. Can. J. Math. **10**, 66—72 (1958).
- [30] WILLIAMSON, J.: Hadamard's determinant theorems and the sum of four squares. Duke Math. J. **11**, 65—81 (1944).
- [31] — Determinants whose elements are 0 and 1. Amer. Math. Monthly **53**, 427—434 (1946).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 10. August 1963)

On l -groups of uniformly continuous functions. III Proximity spaces

By

JENS ERIK FENSTAD

1. Introduction

This paper contains just one theorem on l -groups of uniformly continuous functions, otherwise we discuss the theory of proximity spaces and especially the set $P(X)$ of all real-valued p -continuous functions on a proximity space $(X, \mathcal{P})$. In section 2 we recall some basic concepts and results from the theory of proximity spaces and treat the relationship between proximity and uniformity. It is recalled that the class of all uniformities on a set X naturally is divided into disjoint subsets, called p -classes, each being determined by a unique proximity on X . Two uniformities are in the same p -class if and only if they have the same bounded uniformly continuous functions. If $(X, \mathcal{U})$ belongs to the p class of $(X, \mathcal{P})$, then $U(X)$ is a subset of $P(X)$. All of this is standard knowledge, see e.g. [1], [2], [3], which contain further references to the literature.

In section 4 of this paper, using theorem (4.3) of II (i.e. [5, thm. (4.3)]), we characterize those subsets of $P(X)$ which are the groups of all uniformly continuous functions with respect to some uniformity belonging to the p -class of the given proximity structure on X .

$P(X)$ is a subset of the l -group R^X . In section 3 we give appropriate counterexamples to show that $P(X)$ is in general no l -subgroup of R^X . Our example is essentially the same as the one presented in ALFSEN and NJÅSTAD [3], but the mode of exposition is somewhat different and perhaps a little simpler. In [3] it has been shown that a p -class of uniformities on a set X does not always admit a finest element. We point out, as also O. NJÅSTAD has independently observed, that the same example yields the additional information that a p -class does not in general possess a finest functionally determined structure. In addition we construct functions f and g , p -continuous with respect to the given proximity, such that $f+g$ and $|f| \vee |g|$ are not p -continuous. As one of the very few "good" algebraic properties of $P(X)$ is that $f \in P(X)$ implies $|f| \in P(X)$, this shows that $P(X)$ is generally neither a group nor a lattice.

The counterexample we use is very simple to describe, and one may very well on the basis of this example question the relevance of the theory of proximity spaces and p -continuous maps. The description is as follows: Let Z be the integers and let $\mathcal{U}$ denote the discrete uniformity on Z . By $\mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ we shall understand the associated proximity structure. In [1, p. 359] the

initial product of p -structures was defined and shown to be the coarsest proximity structure on the product set making all the projection maps p -continuous. We then have the unpleasant fact that for Z and the given $\mathcal{U}$,

$$(1.4) \quad \mathcal{P}_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} \neq \mathcal{P}_{\mathcal{U}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{U}}.$$

It is the p -class of $\mathcal{P}_{\mathcal{U}} \times \mathcal{P}_{\mathcal{U}}$ on Z^2 which gives the above stated counterexamples.

It is a pleasure here to record our debts to O. NJÅSTAD with whom we have had many enlightening discussions on the topics of this and previous papers ([4], [5]), and whose construction, in collaboration with E. ALFSEN [3], of the "universal" counterexample in the theory of proximity spaces here has served us so well.

2. Proximity structures

The notion of proximity is intermediate to the concept of topology and uniformity. And as well as there is a natural way of getting a topological space from every uniform space, there is a canonical method of associating a proximity space with every uniform space. The method is as follows. If $(X, \mathcal{U})$ is a uniform structure, define on X the proximity relation by

$$(2.1) \quad A \mathfrak{C} B \Leftrightarrow (\exists V \in \mathcal{U}) [V(A) \subset B].$$

Conversely one may associate with every proximity space $(X, \mathcal{P})$ a unique totally bounded uniform space to be denoted by $(X, \mathcal{U}_w)$. To state this correspondence we need a definition. A cover $\{A_i | i = 1, \dots, n\}$ of X will be called a p -cover of X if there exists another cover $\{B_i | i = 1, \dots, n\}$ of X such that $B_i \mathfrak{C} A_i$, $i = 1, \dots, n$. $\mathcal{U}_w$ will then have a fundamental system of entourages of the form

$$(2.2) \quad V = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times A_i),$$

where $A_1, \dots, A_n$ is a p -cover of X , [1, p. 354].

A mapping f between proximity spaces will be called proximity continuous (shorter, p -continuous) if

$$(2.3) \quad A \mathfrak{C} B \Rightarrow f^{-1}(A) \mathfrak{C} f^{-1}(B),$$

where we as usual denote the proximity relation in both spaces by $\mathfrak{C}$.

On the real line R we are going to use the metric proximity structure such that $A \mathfrak{C} B$ is equivalent to the assertion that there exists an $\varepsilon > 0$ such that $V_\varepsilon(A) \subset B$. Using the unique associated totally bounded uniformity we have that the real-valued map f on the proximity space $(X, \mathcal{P})$ is p -continuous if and only if for every $A \subseteq R$ and $\varepsilon > 0$ there exists a $V \in \mathcal{U}_w$ such that

$$V(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(V_\varepsilon(A)).$$

Next an equivalence relation will be introduced in the class of all uniformities on a set X . A uniformity $(X, \mathcal{U})$ is called compatible with the proximity structure $(X, \mathcal{P})$ if $(X, \mathcal{P})$ is identical with the proximity deduced

from $(X, \mathcal{U})$ by (2.1). The class of all uniformities compatible with a given proximity structure will be called a proximity class, or shorter a p -class.

Definition (2.3) makes possible the introduction of the set $P(X, \mathcal{P})$ of all real-valued p -continuous functions on the space $(X, \mathcal{P})$. The purpose of this paper is partly to study the algebraic properties of the set $P(X)$, — a task which will be deferred to later sections —, and partly to investigate the relationship between $P(X)$ and $U(X)$ for some compatible $(X, \mathcal{U})$. The basic information on the latter topic is contained in the following proposition.

(2.4) **Proposition.** *If $(X, \mathcal{P})$ is a proximity structure and $(X, \mathcal{U})$ a compatible uniformity, then $U(X) \subseteq P(X)$, i.e. every uniform function is also p -continuous. Let $P_B(X)$ and $U_B(X)$ denote the bounded functions in each set, then $P_B(X) = U_B(X)$. And if $(X, \mathcal{U}_\omega)$ is the unique associated totally bounded uniform space, then $P_B(X) = U(X, \mathcal{U}_\omega)$.*

Proof. The first statement of the proposition is elementary and well known. Every $f \in U(X, \mathcal{U}_\omega)$ is bounded because it can be extended to the completion of $(X, \mathcal{U}_\omega)$ which is compact. It remains to show that any bounded p -continuous function is uniformly continuous with respect to the totally bounded uniformity in the p -class. Because f is bounded we may find a finite number of sets $A_1, \dots, A_n$ and $B_1, \dots, B_n$ such that $f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$, $d(A_i) < \varepsilon/2$, and $V_{\varepsilon/6}(B_i) \subset A_i$. The sets A_i may be chosen such that each A_i has non-empty intersection with at most A_{i-1} and A_{i+1} . Let the sets A'_i and B'_i be defined by $A'_i = f^{-1}(A_i)$ and $B'_i = f^{-1}(B_i)$. As f is p -continuous and the sets B'_i cover X , we have that $A'_1, \dots, A'_n$ is a p -cover of X . Let V be the entourage

$$V = \bigcup_{i=1}^n (A'_i \times A'_i).$$

Then $V \in \mathcal{U}_\omega$ and it will be shown that $V \subseteq (f \times f)^{-1}(V_\varepsilon)$, which implies that $f \in U(X, \mathcal{U}_\omega)$. If $(x, y) \in V$ it follows by the above construction that either there exist sets A'_i and A'_{i+1} such that $x, y \in A'_i \cup A'_{i+1}$ and $A'_i \cap A'_{i+1} \neq \emptyset$, or there exists an A'_i such that $x, y \in A'_i$. Because $f(A'_i \cup A'_{i+1}) = A_i \cup A_{i+1}$ and $d(A_i \cup A_{i+1}) < \varepsilon$ if $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, we obtain in both cases that $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, which shows that $(x, y) \in (f \times f)^{-1}(V_\varepsilon)$.

Remark. Proposition (2.3) entails that the concept of p -equivalence of uniform structures may be reformulated in this way: $(X, \mathcal{U}_1)$ and $(X, \mathcal{U}_2)$ belong to the same p -class if and only if $U_B(X, \mathcal{U}_1) = U_B(X, \mathcal{U}_2)$.

3. Counterexamples

This section contains some negative results: (i) In a p -class of uniform structures there does not always exist a finest functionally determined structure. (ii) The set $P(X)$ of all real-valued p -continuous functions is in general neither a group nor a lattice. (We assume, as always, the pointwise defined operations.)

Let Z be the set of integers with the discrete uniformity, in this section to be denoted by $\mathcal{U}$. As usual $\mathcal{U}_\omega$ is the unique associated totally bounded

uniform structure. A basis for $\mathcal{U}$ is the set $\Delta = \{(n, n) \mid n \in Z\}$ and a fundamental system of entourages for $\mathcal{U}_\omega$ consists of the sets

$$(3.1) \quad V = \bigcup_{i=1}^n (A_i \times A_i),$$

where $A_1, \dots, A_n$ is some finite partition of Z . On Z^2 we are going to consider four uniformities: (a) $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$, (b) $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_\omega$, (c) $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}$, and (d) $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

Both $\mathcal{U}$ and $\mathcal{U}_\omega$ are functionally determined, and as products and suprema of functionally determined structures are again functionally determined, it follows that all the structures (a)–(d) are functionally determined.

It will be shown that

$$(3.2) \quad \mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega = (\mathcal{U} \times \mathcal{U}_\omega)_\omega = (\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U})_\omega,$$

and further that

$$(3.3) \quad \mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega \neq (\mathcal{U} \times \mathcal{U})_\omega,$$

which corresponds to (1.1) of the introduction. It is easily seen that $\mathcal{U} \times \mathcal{U} = \sup(\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}, \mathcal{U} \times \mathcal{U}_\omega)$.

A basis for the structure $\mathcal{U} \times \mathcal{U}_\omega$ consists of the sets

$$V = (\pi_1 \times \pi_1)^{-1}(\Delta) \cap (\pi_2 \times \pi_2)^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \times A_i)\right),$$

where as usual π_i is the projection map of Z^2 onto the i -th axis and the sets A_i are a finite partition of Z . It is an elementary exercise in general set theory to show that each V of the above form may be written as

$$(3.4) \quad V = \bigcup_{\substack{m \in Z \\ i=1, \dots, n}} (\{m\} \times A_i)^2.$$

Similarly a basis for $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}$ is given by the sets

$$(3.5) \quad V' = \bigcup_{\substack{j=1, \dots, m \\ n \in Z}} (B_j \times \{n\})^2,$$

where B_j is a finite partition of Z .

Let V be an entourage of either the form (3.4) or the form (3.5). It is easily shown that $V(B_j \times A_i) = B_j \times A_i$, hence $B_j \times A_i \subseteq B_j \times A_i$ with respect to the associated p -structures. Therefore as $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$ has a base of the form

$$(3.6) \quad V'' = \bigcup_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}} (B_j \times A_i)^2,$$

this proximity structure is coarser than the associated p -structures of the uniformities of (3.4) and (3.5). To show the converse let V_1 be any entourage of $(\mathcal{U} \times \mathcal{U}_\omega)_\omega$. It then exists a finite p -cover of Z^2 , say $C_1, \dots, C_r$ such that $\bigcup (C_s \times C_s) \subseteq V_1$. And further there exists a V of the form (3.4) and a cover $D_1, \dots, D_r$ of Z^2 such that $V(D_s) \subseteq C_s$, $s = 1, \dots, r$.

It is easy to see that $V(D_s) = \bigcup (\{n\} \times A_i)$ where $(\{n\} \times A_i) \cap D_s \neq \emptyset$. Define the sets B_i^s by

$$(3.7) \quad n \in B_i^s \Leftrightarrow \{n\} \times A_i \subseteq V(D_s),$$

thus $B_i^s \times A_i \subseteq V(D_s)$. Take the coarsest partition $\{B_j | j = 1, \dots, m\}$ of Z such that each $B_j \subseteq B_i^s$ for some set B_i^s and such that a B_j is either contained in a B_i^s or disjoint from it. We then have that the set $V_0 = \bigcup (B_j \times A_i)^2 \in \mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$. As it has to be shown that $V_0 \subseteq \bigcup (C_s \times C_s)$, it suffices to prove that $B_j \times A_i \subseteq V(D_s)$ for some $s = 1, \dots, r$.

Any $(n, m) \in B_j \times A_i$ belong to some D_s . By the form of $V(D_s)$ it follows that $\{n\} \times A_i \subseteq V(D_s)$, hence $n \in B_i^s$. As $B_j \cap B_i^s \neq \emptyset$, it follows that $B_j \subseteq B_i^s$, therefore $B_j \times A_i \subseteq B_i^s \times A_i \subseteq V(D_s)$. This completes the proof of (3.2).

Concerning (3.3) it is easily seen that $\Delta \ll \Delta$ with respect to $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$, as this latter structure is the discrete uniformity on Z^2 . It is straightforward to show that if V is any entourage of the form (3.6), then $V(\Delta) \neq \Delta$, hence it is not true that $\Delta \ll \Delta$ with regard to the structure $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$.

It has thus been shown that *in the p -class determined by $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$ there exists no finest functionally determined uniformity.*

Define functions f and g on Z^2 by $f(n, m) = n$ and $g(n, m) = m$ and let $\Delta^* = \{(n, -n) | n \in Z\}$. It will be shown that $f \in U(Z^2, \mathcal{U} \times \mathcal{U}_\omega)$. Let $V = \bigcup (\{n\} \times Z)^2$. V is then an entourage of the form (3.4). Given any $\varepsilon > 0$ we have that $((x, y), (z, w)) \in V$ implies $|f(x, y) - f(z, w)| = 0 < \varepsilon$ as $x = z$. This shows that f is p -continuous with respect to the proximity structure associated with the p -class of $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$. Similarly g is shown to be p -continuous. But $f + g$ will not be p -continuous, which follows from the fact that

$$\Delta^* = (f + g)^{-1}(\{0\}) = (f + g)^{-1}(V_{\frac{1}{2}}(\{0\})).$$

Were $f + g$ p -continuous we would obtain that $\Delta^* \ll \Delta^*$ as $\{0\} \ll V_{\frac{1}{2}}(\{0\})$, but it is obvious that $V(\Delta^*) \neq \Delta^*$ for any V of either of the forms (3.4)–(3.6).

Thus the sum of p -continuous functions is not in general p -continuous, hence $P(X)$ is not in general a group under the pointwise defined addition.

This very same example may be used to show that $P(X)$ is not always a lattice.

As a preliminary remark we note that $f \in P(X)$ implies $|f| \in P(X)$. Because this seems to be about the only nice algebraic property of $P(X)$, we feel justified in carrying out the proof in detail. Let $\varepsilon > 0$ and $A \subseteq R$ be given. Define $A_1 = f(|f|^{-1}(A))$ and determine a $V \in \mathcal{U}_\omega$ such that $V(f^{-1}(A_1)) \subseteq f^{-1}(V_\varepsilon(A_1))$. Then $x \in V(|f|^{-1}(A))$ implies that $x \in V(f^{-1}(A_1))$, hence there exists a $y \in |f|^{-1}(A)$ such that $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Using the inequality $||f|(x) - |f|(y)| \leq |f(x) - f(y)|$ we conclude that $x \in |f|^{-1}(V_\varepsilon(A))$, which gives the p -continuity of $|f|$.

To produce the counterexample we use the functions $f(n, m) = n$ and $g(n, m) = m$. It is recalled that both f and g are p -continuous of class $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$. Define the function $h(n, m)$ by

$$(3.8) \quad h(n, m) = |f(n, m)| \vee |g(n, m)| = \sup(|n|, |m|).$$

If $P(X)$ were a lattice, then h would be p -continuous. Let Z_e be the set of all even integers. Then $Z_e \in V_{\frac{1}{2}}(Z_e)$, and as $h^{-1}(Z_e) = h^{-1}(V_{\frac{1}{2}}(Z_e))$, one would obtain that $h^{-1}(Z_e) \in h^{-1}(Z_e)$ with respect to the p -class of $\mathcal{U}_\omega \times \mathcal{U}_\omega$. $D = h^{-1}(Z_e)$ is the union of all squares $D_p = \{(n, m) \mid |n| \vee |m| = 2p\}$, $p = 0, 1, 2, \dots$. If $D \in D$, there would exist a V of the form (3.6) such that $D = V(D) = \bigcup (B_j \times A_i)$ for those products $B_j \times A_i$ such that $D \cap (B_j \times A_i) \neq \emptyset$. Here $B_1, \dots, B_m$ and $A_1, \dots, A_n$ are finite partitions of Z .

Let $p > 0$, then $(2p, 2p-1) \in D_p$, hence there exist sets B_j and A_i such that $(2p, 2p-1) \in B_j \times A_i$. If n is any number such that $0 < n < 2p$, then $(n, 2p-1) \notin B_j \times A_i$, as $B_j \times A_i \subseteq V(D) = D$. Therefore A_i must have a least positive element $2p$. Hence we have an injective map from the set of natural numbers into the partition $\{A_i\}$, which contradicts the fact that the partition is finite. The initial assumption must be negated, i.e. the map h of (3.8) cannot be p -continuous hence $P(X)$ is in general no lattice.

If there exists a finest functionally determined uniformity in a given p -class, then the associated set of p -continuous functions is equal to the set of all uniformly continuous functions with respect to this finest functionally determined structure (this is easily proved using some results of [3]); hence $P(X)$ is an l -group. It would be interesting to know if the above given counterexample could be generalized to converses of this statement. Some partial result has been obtained, e.g. if $P(X)$ is a lattice closed under the infinite lattice operations applied to some bounded families of functions (essentially the bounded uniform families of next section), then there exists a finest functionally determined uniformity in the p -class.

4. Subsets of $P(X)$ which are l -groups $U(X)$

It is a natural problem to characterize those subsets of $P(X)$ which are the l -groups $U(X)$ of all real-valued uniformly continuous functions with respect to some compatible uniformity $(X, \mathcal{U})$. The answer is immediate using theorem (4.3) of II.

We recall some definitions needed in the present context. An admissible family $\{f_i \mid i \in I\}$ in some subset G of $P(X)$ is a family which is either locally finite or bounded. Bounded is here used in the sense dominated, i.e. $\{f_i \mid i \in I\}$ is bounded in G if there exists an $f \in G$ such that $|f_i| \leq f$ for all $i \in I$. A uniform family is defined by the property that for any $\varepsilon > 0$ there shall exist a $\delta > 0$ and functions $g_1, \dots, g_n \in G$ such that

$$(4.1) \quad |g_j(x) - g_j(y)| < \delta, \quad j = 1, \dots, n \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon, \quad i \in I.$$

The answer to the characterization problem is contained in the following theorem.

(4.2) **Theorem.** *Let $(X, \mathcal{P})$ be a proximity space and let $P(X, \mathcal{P})$ be the set of all real-valued p -continuous functions on the space. A subset G of $P(X)$ is an l -group $U(X)$ for some compatible uniformity $(X, \mathcal{U})$, if and only if G is a divisible l -group which contains the set $P_B(X)$ and is closed under suprema of admissible uniform families.*

Proof. Let $(E, 1)$ be the normal pair in G where E is the set of all fixed maximal l -ideals $M_x \subseteq G$, $x \in X$. The admissible uniform families of the present theorem corresponds to the admissible uniform families of theorem (4.3) of II. Hence G can be considered as a group $U(X, \mathcal{U})$ on the set X . It remains to prove that $(X, \mathcal{U})$ is compatible with $(X, \mathcal{P})$. This is, however, immediate as $U_B(X) = P_B(X)$, which according to proposition (2.4) is the same as compatibility of $(X, \mathcal{U})$ with $(X, \mathcal{P})$.

Using the fact that an equation $a = nx$ has at most one solution in a commutative l -group and recalling that the supremum of an admissible uniform family in a group $U(X)$ is the pointwise supremum, one easily verifies that if G_1 and G_2 are subsets of $P(X)$ satisfying the conditions of theorem (4.2), then $G_1 \cap G_2$ is a subset $U(X)$ for some compatible uniformity of the p -class. In general $P(X)$ is not equal to some $U(X)$ for any uniformity on X . $P(X) = U(X)$ for some compatible $(X, \mathcal{U})$ if and only if there exists a finest functionally determined structure in the p -class of $(X, \mathcal{P})$, which in particular is the case if the p -class contains a pseudo-metric uniformity (theorem of EFREMOVIC [3, thm. 5]).

Added in proof. After this paper was submitted the Proceedings of the Stockholm Congress (1962) have appeared. Concerning the address given by J. U. SMIRNOV: Some questions of uniform topology, two remarks may be in order: (1) Theorem (4.2) constitutes an answer to SMIRNOV's question 3. (2) SMIRNOV states that the set $C'(P)$ of all real-valued proximity-continuous functions is a group (pointwise operations). A counter-example has been given in section 3 of this paper.

Literatur

- [1] ALFSEN, E. M., and J. E. FENSTAD: On the equivalence between proximity structures and totally bounded uniform structures. Math. Scand. **7**, 353–360 (1959) (see also a correction Math. Scand. **9**, 258 (1961)).
- [2] — — A note on completion and compactification. Math. Scand. **8**, 97–104 (1960).
- [3] —, and O. NJÅSTAD: Proximity and generalized uniformity. Fund. Math. **52**, 235–252 (1963).
- [4] FENSTAD, J. E.: On l -groups of uniformly continuous functions. I. Approximation theory. Math. Zeitschr. **82**, 434–444 (1963).
- [5] — On l -groups of uniformly continuous functions. II. Representation theory. Math. Zeitschr. **83**, 46–56 (1964).

Institutt for Matematiske Fag, Universitetet, Oslo (Norway)

(Received February 25, 1963)

A theorem on lattice ordered groups and its applications to the valuation theory

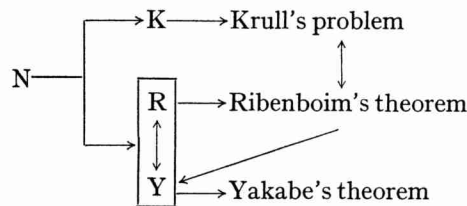
By

TAKEO NAKANO

Introduction

D. MÜLLER [5] and P. JAFFARD [2] solved Krull's problem [3] on l -groups (lattice ordered groups), and the latter also gave another simple proof based on Ribenboim's approximation theorem [7]. Furthermore, I. YAKABE [10] has proved recently that the theorem is equivalent to the problem.

In this paper, we shall give four theorems; theorems K, R, Y and N. These are the generalizations of Krull's problem, of Ribenboim's theorem, of Yakabe's theorem 7 [9] and our main theorem respectively. The figure below indicates the logical relations between those theorems.



Let $N_1, N_2, \dots, N_k$ be any sequence of normal subgroups of a group G . A sequence $a_1, a_2, \dots, a_k$ of elements of G is called *compatible* if $a_i \equiv a_j \pmod{N_i N_j}$ for every pair i, j . We shall say that the *compatibility axiom* holds in a system $\{G; N_1, N_2, \dots, N_k\}$ if, for every compatible sequence $\{a_i\}$ of elements in G , there exists always an element $a \in G$ such that $a \equiv a_i \pmod{N_i}$ for $i = 1, 2, \dots, k$.

Now, we shall state the theorems.

Theorem K. *The compatibility axiom holds in any system consisting of an l -group and a finite number of its convex¹⁾ normal subgroups.*

Theorem R. *Let $E_1, E_2, \dots, E_k$ be any sequence of unit groups of a sequence $v_1, v_2, \dots, v_k$ (resp.) of valuations²⁾ on a field³⁾ F . Then the compatibility axiom holds in the system $\{F^*; E_1, E_2, \dots, E_k\}$. In other words, a sequence $a_1, a_2, \dots, a_k$ of elements in F^* is compatible if and only if there exists an element $a \in F^*$ such that $v_i(a) = v_i(a_i)$ for $i = 1, 2, \dots, k$.*

¹⁾ The definition is given in §1.

²⁾ We use the term "valuation" in Schilling's sense [8].

³⁾ We use the term "field" to mean not necessarily commutative division ring.

Theorem Y. Let $v_1, v_2, \dots, v_k$ be any sequence of valuations on a field F . Then all the elements

$$\bar{a} = (v_1(a), v_2(a), \dots, v_k(a)) \quad (a \in F^*)$$

form an l -group with respect to multiplication $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ and order relation:

$$\bar{a} \geq \bar{b} \Leftrightarrow v_i(a) \geq v_i(b) \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Theorem N. Let $N_1, N_2, \dots, N_k$ be a sequence of normal subgroups of a group G such that the factor groups $\Gamma_i = G/N_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) are l -groups. Then the following two statements are equivalent:

(I) The factor group $\Gamma = G/N$, where $N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k$, is an l -group such that the canonical mappings: $xN \rightarrow xN_i$ are order-homomorphisms of Γ onto Γ_i .

(II) For every pair i, j , the factor group $\Gamma_{ij} = G/N_i N_j$ is an l -group such that the canonical mapping: $xN_i \rightarrow xN_i N_j$ is an order-homomorphism of Γ_i onto Γ_{ij} , and the compatibility axiom holds in the system $\{G; N_1, N_2, \dots, N_k\}$.

§ 1. l -groups

An l -group G can be defined as a group with a second binary operation "meet" $\wedge$ which is idempotent (i.e., $a \wedge a = a$), commutative, associative and satisfies the distributive laws:

$$a(b \wedge c) = ab \wedge ac, \quad (a \wedge b)c = ac \wedge bc^4).$$

Throughout we denote by 1 the identity of G . We write $a \geq b$ when $a \wedge b = b$; evidently, the relation $\geq$ is a partial order in G .

Lemma 1. For every $a, b; x, y \in G$, there exist $a^*, b^* \in G$ such that $a^* \wedge b^* = 1$ and

$$ax \wedge by = (a \wedge b)(a^* x \wedge b^* y).$$

Proof. $a^* = (a \wedge b)^{-1}a$, $b^* = (a \wedge b)^{-1}b$. q.e.d.

A normal subgroup N of G is called *convex*⁵⁾ if $x \in N$ and $a \wedge b = 1$ imply $a \wedge bx \in N$. By an *order-homomorphism* of an l -group G into an l -group G^* is meant a group homomorphism ϑ which preserves meets, i.e., $\vartheta(a \wedge b) = \vartheta(a) \wedge \vartheta(b)$ for all $a, b \in G$. If ϑ is a one-to-one correspondence, we shall say that G and G^* are *isomorphic*.

The following lemmas 2–3 are fundamental to the theory of l -groups.

Lemma 2⁶⁾. If N is a convex normal subgroup of an l -group G , then the factor group G/N is an l -group with respect to meet

$$aN \wedge bN = (a \wedge b)N,$$

⁴⁾ Cf. [1], Ex. 3, Ch. XIV, p. 215.

⁵⁾ We follow the terminology in [6]. Several authors have used the terms " l -ideal" [1], "isolated subgroup" [2], [5], [9]. More general concept of convexity has been defined in an analogous form in the theory of v -groups [6].

⁶⁾ This is a special case of Th. 2 [6].

and the canonical mapping: $x \rightarrow xN$ is an order-homomorphism of G onto G/N . Conversely, if ϑ is an order-homomorphism of G onto an l -group G^* , then all the elements x such that $\vartheta(x)$ is equal to the identity of G^* form a convex normal subgroup N of G , and the factor group G/N is isomorphic to G^* .

Proof. Let $a, b \in G$ and $x, y \in N$. Then, by lemma 1 and definition of convexity, we have

$$ax \wedge by = (a \wedge b)(a^* x \wedge b^* y) = (a \wedge b)(a^* \wedge b^*(y x^{-1})) x \in (a \wedge b)N.$$

This shows that the definition of meet in G/N is legitimate. Conversely, if $\vartheta(x)$ is the identity of G^* , and if $a \wedge b = 1$, then

$$\begin{aligned} \vartheta(a \wedge b x) &= \vartheta(a) \wedge \vartheta(b) \vartheta(x) = \vartheta(a) \wedge \vartheta(b) = \vartheta(a \wedge b) \\ &= \vartheta(1) = \text{identity of } G^*. \end{aligned}$$

Hence N is convex. The rest can be verified easily. q.e.d.

By lemma 2, we see that the congruence relations on an l -group G are the partitions of G into the coset of its different convex normal subgroups. Therefore, the following lemma is nothing but a restatement of theorem 10 [I] (Ch. XIV, p. 222).

Lemma 3. *The convex normal subgroups of any l -group form a distributive lattice with respect to join $N_1 N_2$ and meet $N_1 \cap N_2$ of its elements N_1, N_2 .*

§ 2. Proof of theorem N

Lemma 4. *Let $N_1, N_2, \dots, N_k$ be a sequence of normal subgroups of a group G . Then the compatibility axioms hold in the systems $\{G; N_1, N_2, \dots, N_j\}$ ($j = 1, 2, \dots, k$), if and only if the distributive laws*

$$(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{j-1}) N_j = N_1 N_j \cap N_2 N_j \cap \dots \cap N_{j-1} N_j$$

hold.

Proof. Distributive laws $\Rightarrow$ Compatibility axioms: The assertion is trivial when $k=1$. We shall employ the induction on k . Let $a_1, a_2, \dots, a_k$ be a compatible sequence of the elements in G . Assume that there exists an element $b \in G$ such that $b \equiv a_i \pmod{N_i}$ for $i = 1, 2, \dots, k-1$. Since $N_i \subset N_i N_k$, $b \equiv a_i \equiv a_k \pmod{N_i N_k}$; this means that $b^{-1} a_k \in N_i N_k$. From the assumption, it follows that $b^{-1} a_k \in (N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}) N_k$ so that we can find an element $c \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1}$ such that $b^{-1} a_k \equiv c \pmod{N_k}$. Setting $a = bc$, we have $a \equiv a_k \pmod{N_k}$ and $a \equiv b \equiv a_i \pmod{N_i}$ for all $i < k$.

Compatibility axioms $\Rightarrow$ Distributive laws: By one-sided distributive law, it suffices to prove that $(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{j-1}) N_j \supset N_1 N_j \cap N_2 N_j \cap \dots \cap N_{j-1} N_j$ for every $j \leq k$. If x is contained in the latter intersection of the products of groups, then the sequence $a_1 = a_2 = \dots = a_{j-1} = 1$, $a_j = x$ is compatible. Therefore, we can find an element y such that $y \equiv 1 \pmod{N_i}$ for all $i < j$ and $y \equiv x \pmod{N_j}$. These mean that $y \in N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{j-1}$ and $x = yz$ for some $z \in N_j$. q.e.d.

Since the distributive law for $k=2$ is irrelevant, we obtain

Corollary. *The compatibility axiom holds in every system consisting of a group and its any two normal subgroups.*

Lemma 5. *Let N_1, N_2 be two normal subgroups of a group G , and let G/N_1 be an l -group. If N_1N_2/N_1 is convex in G/N_1 , then G/N_1N_2 is also an l -group such that the canonical mapping: $xN_1 \rightarrow xN_1N_2$ is an order-homomorphism of G/N_1 onto G/N_1N_2 .*

Proof. Define, for every pair $a, b \in G$,

$$aN_1N_2 \wedge bN_1N_2 = (aN_1 \wedge bN_1)N_2.$$

It suffices to prove that the meet can be determined uniquely by any choice of a, b in each coset mod N_1N_2 . Assume that $a_1 \equiv a_2, b_1 \equiv b_2 \pmod{N_1N_2}$. By the corollary above, we can find $a, b \in G$ such that $a \equiv a_1, b \equiv b_1 \pmod{N_1}$; $a \equiv a_2, b \equiv b_2 \pmod{N_2}$. The former implies $aN_1 \wedge bN_1 = c_1N_1 \wedge b_1N_1$, while the latter implies $a_2 = ax, b_2 = by$ with some $x, y \in N_2$. By lemma 1 and convexity, we have

$$a_2N_1 \wedge b_2N_1 = axN_1 \wedge byN_1 = (aN_1 \wedge bN_1)(a^*xN_1 \wedge b^*yN_1)$$

where $a^*N_1 \wedge b^*N_1 = N_1$, and

$$(a^*xN_1 \wedge b^*yN_1) = (a^*N_1 \wedge b^*(yx^{-1})N_1)(xN_1) \in N_1N_2/N_1.$$

Hence,

$$(a_2N_1 \wedge b_2N_1)N_2 = (aN_1 \wedge bN_1)N_2 = (a_1N_1 \wedge b_1N_1)N_2. \text{ q.e.d.}$$

Now, we shall prove the theorem N.

(I) $\Rightarrow$ (II): By lemma 5, it is enough to show that N_iN_j/N_i is a convex subgroup of $\Gamma_i = G/N_i$. Assume that $x \in N_j$ and $aN_i \wedge bN_i = N_i$. Set $aN \wedge bN = cN$ and $aN \wedge bxN = yN$. From the assumption on the canonical mappings, it follows that $aN_i \wedge bN_i = cN_i = N_i$, $aN_j \wedge bN_j = cN_j$, $aN_i \wedge bxN_i = yN_i$ and $aN_j \wedge bxN_j = aN_j \wedge bN_j = yN_j$. Therefore we have $yN_iN_j = yN_jN_i = cN_jN_i = cN_iN_j = N_iN_j$, whence $y \in N_iN_j$ proving the convexity. Next, by lemma 2, the groups $\Delta_i = N_i/N$ are convex in Γ . By lemma 3, we have

$$(\Delta_1 \cap \Delta_2 \cap \dots \cap \Delta_{j-1})\Delta_j = \Delta_1\Delta_j \cap \Delta_2\Delta_j \cap \dots \cap \Delta_{j-1}\Delta_j$$

for all $j \leq k$. These imply immediately,

$$(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{j-1})N_j = N_1N_j \cap N_2N_j \cap \dots \cap N_{j-1}N_j$$

so that, by lemma 4, the compatibility axiom holds in the system $\{G; N_1, N_2, \dots, N_k\}$. q.e.d.

(II) $\Rightarrow$ (I): We put $c_iN_i = aN_i \wedge bN_i$ for $i = 1, 2, \dots, k$. From the assumption on the canonical mappings, it follows that

$$\begin{aligned} aN_iN_j \wedge bN_iN_j &= (aN_i \wedge bN_i)N_j = c_iN_iN_j \\ &= (aN_j \wedge bN_j)N_i = c_jN_iN_j; \end{aligned}$$

this means that the sequence $\{c_i\}$ is compatible. Therefore, we can find an element $c \in G$ such that $c \equiv c_i \pmod{N_i}$, and so $aN_i \wedge bN_i = cN_i$ for all $i \leq k$. Since c is determined uniquely mod N , we may conclude that G/N is an l -group with respect to meet $aN \wedge bN = cN$. q.e.d.

§ 3. On Krull's problem

A convex normal subgroup N of an l -group G is called *prime* if $a \wedge b \in N$ implies either $a \in N$ or $b \in N$. Using Zorn's lemma, it is easy to see that, for any prime subgroup N , there exists a minimal one contained in N .

Lemma 6. *The factor group G/N is simply ordered if and only if N is prime.*

Proof. Assume that N is prime. For every pair $a, b \in G$, there exist a^*, b^* such that $a^* \wedge b^* = 1$ by lemma 1. Since $a^* \wedge b^* \in N$, either a^* or b^* must be contained in N . If the former arises, then $a^*N = N$ and so $aN \wedge bN = (a \wedge b)N = (a \wedge b)a^*N = aN$ so that $aN \leq bN$; similarly, the alternative implies $aN \geq bN$. Conversely, assume that G/N is simply ordered. Let $a \wedge b \in N$. We may assume $aN \geq bN$. Then $bN = aN \wedge bN = (a \wedge b)N = N$, whence $b \in N$. q.e.d.

Lemma 7. *Let N_1, N_2 be two convex normal subgroups of an l -group G . If N_1 is prime, then so is N_1N_2 .*

Proof. If $a \wedge b = xy$ with $x \in N_1$, $y \in N_2$, then $ay^{-1} \wedge by^{-1} = x \in N_1$ implies either $ay^{-1} \in N_1$ or $by^{-1} \in N_1$, and so either $a \in N_1N_2$ or $b \in N_1N_2$. q.e.d.

The following propositions (1)–(4) are written, without proof, for those who are familiar with the terminologies due to LORENZEN⁷⁾.

(1) If S is a "vollständige invariante Unterhalbgruppe", then $N(S) = \{xy^{-1}; x, y \in S\}$ is a convex normal subgroup. Conversely, if N is a convex normal subgroup, then $S(N) = \{(x \wedge 1)^{-1}; x \in N\}$ is a vollständige invariante Unterhalbgruppe.

(2) $N(S(N)) = N$, $S(N(S)) = S$.

(3) $N(S_1S_2) = N(S_1)N(S_2)$, $S(N_1N_2) = S(N_1)S(N_2)$.

(4) N is prime if and only if $S(N)$ is "prim".

The original Krull's problem can be stated as follows:

Let G be a commutative l -group which contains only a finite⁸⁾ number of minimal prime convex subgroups $N_1, N_2, \dots, N_k$. We denote by Γ_i the factor group G/N_i , by Γ_{ij} the factor group G/N_iN_j . By lemmas 6–7, these groups are simply ordered. We may define the canonical mappings $\eta_{ij}: xN_i \rightarrow xN_iN_j$ of Γ_i onto Γ_{ij} . An element $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ in the direct product $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_k$ is called "restgebunden"⁹⁾ if $\eta_{ij}(\alpha_i) = \eta_{ji}(\alpha_j)$ for every pair i, j . Krull had conjectured that if $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ is restgebunden, then there exists an element $a \in G$ such that $\alpha_i = aN_i$ for all $i \leq k$.

⁷⁾ Cf. [4], pp. 500 and 501.

⁸⁾ Finiteness assumption implies an isomorphism of G into $\Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_k$. Cf. [4], [5].

⁹⁾ This is equivalent to the original, somewhat complicated definition given in [5].

Setting $a_i N_i = \alpha_i$ with $a_i \in G$, the condition of "restgebunden" is equivalent to assert that the sequence $\{\alpha_i\}$ is compatible. Therefore, theorem K, evidently an immediate consequence of theorem N and equivalent to lemma 3, gives an affirmative answer to the problem.

§ 4. Applications to the valuation theory

Lemma 8. *Let v_1, v_2 be any two valuations of a field F with valuation rings R_1, R_2 and unitgroups E_1, E_2 respectively. Then $F^*/(E_1 \cap E_2)$ is an l -group and $F^*/E_1 E_2$ is an simply ordered group. Furthermore, the mapping $v: x \rightarrow x E_1 E_2$ of F^* onto $F^*/E_1 E_2$ is a valuation of F , and $R_1 R_2$ is the valuation ring of v with unitgroup $E_1 E_2$.*

Proof. Put $I_1 = F^*/E_1, I_2 = F^*/E_2$. We may identify I_1, I_2 with the value groups of v_1, v_2 (resp.). We may also identify the group $F^*/(E_1 \cap E_2)$ with the subgroup $\{(v_1(x), v_2(x)); x \in F^*\}$ of the direct product $I_1 \times I_2$. We shall prove that, for every pair $a, b \in F^*$, there exists an element $c \in F^*$ such that

$$\min(v_1(a), v_1(b)) = v_1(c), \quad \min(v_2(a), v_2(b)) = v_2(c),$$

i.e., $F^*/(E_1 \cap E_2)$ is a sublattice of the lattice $I_1 \times I_2$. If $v_1(a) \geq v_1(b), v_2(a) \geq v_2(b)$, then clearly $c = b$; similarly, the alternative case. The remaining cases are either

$$v_1(a) > v_1(b), \quad v_2(a) < v_2(b) \quad \text{or} \quad v_1(a) < v_1(b), \quad v_2(a) > v_2(b).$$

In any case, we may put $c = a + b$.

Using theorem N, we see that $F^*/E_1 E_2$ is an l -group such that the mapping: $x E_1 \rightarrow x E_1 E_2$ is an order-homomorphism of I_1 onto $F^*/E_1 E_2$. Since I_1 is simply ordered, so is $F^*/E_1 E_2$. Now, we shall prove that v is a valuation on F . Evidently, $v(a)v(b) = v(ab)$. Since $v_1(a+b) = (a+b)E_1 \geq \min(v_1(a), v_1(b)) = aE_1 \wedge bE_1$, we obtain

$$v(a+b) = (a+b)E_1 E_2 \geq (aE_1 \wedge bE_1)E_2 = aE_1 E_2 \wedge bE_1 E_2 = \min(v(a), v(b)),$$

proving the strong triangle inequality.

Finally, we shall prove that $R_1 R_2$ is the valuation ring of v . Assume $v(a) \geq 1$, i.e., $aE_1 E_2 \geq E_1 E_2$. Setting $aE_1 \wedge E_1 = bE_1$, we have $bE_1 E_2 = (aE_1 \wedge E_1)E_2 = aE_1 E_2 \wedge E_1 E_2 = E_1 E_2$ so that $b = dc$ for some $d \in E_1, c \in E_2$. It follows that $v_1(a) = aE_1 \geq bE_1 = cE_1 = v_1(c)$, whence $ac^{-1} \in R_1$ or $a \in R_1 c < R_1 E_2 < R_1 R_2$. Conversely, if $a \in R_1$, then $aE_1 E_2 \wedge E_1 E_2 = (aE_1 \wedge E_1)E_2 = E_1 E_2$, i.e., $v(a) \geq 1$; similarly, for R_2 . q.e.d.

We shall prove theorems R–Y as follows.

Ribenboim's theorem $\Rightarrow$ Theorem Y: By the dual of theorem 2 [I] (Ch. XIV, p. 215), it suffices to prove that, for every $a \in F^*$, there exists an element $b \in F^*$ such that

$$\min(v_i(a), 1) = v_i(b)$$

for $i = 1, 2, \dots, k$. Let C be the centre of F . Then we can apply Ribenboim's theorem to the restrictions of v_i 's to the subfield $C(a)$. Combining theorem N with lemma 8, we see that the above relations are satisfied by an element $b \in C(a)^*$.

Theorem Y $\Rightarrow$ Theorem R: Evidently, theorem Y asserts that the system $\{F^*; E_1, E_2, \dots, E_k\}$ satisfies condition (I) of theorem N so that the compatibility axiom holds in the system. q.e.d.

Remarks. (1) Incidentally, we have $R_1 R_2 = R_1 E_2 = E_1 R_2$ in the lemma 8.

(2) Using theorem Y and theorem 4 [9], Satz 22 [5] is also valid for non-commutative valuations without "Unvergleichbarkeit" restriction.

References

- [1] BIRKHOFF, G.: Lattice Theory. Rev. ed. Am. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XXV. New York 1948.
- [2] JAFFARD, P.: Solution d'un problème de Krull. Bull. Sc. Math., 2^e série, **85**, 127—135 (1961).
- [3] KRULL, W.: Zur Theorie der Bewertungen mit nichtarchimedisch geordneter Wertgruppe und der nichtarchimedisch geordneten Körper. Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles 1956, 45—77.
- [4] LORENZEN, P.: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. **52**, 483—526 (1949/50).
- [5] MÜLLER, D.: Verbandsgruppen und Durchschnitte endlich vieler Bewertungsringe. Math. Z. **77**, 45—62 (1961).
- [6] NAKANO, T.: A generalized valuation and its value groups. To appear in Comm. Math. Univ. St. Pauli.
- [7] RIBENBOIM, P.: Le théorème d'approximation pour les valuations de Krull. Math. Z. **68**, 1—18 (1957).
- [8] SCHILLING, O. F. G.: The theory of Valuations. Math. Surveys Nr. IV, New York 1950.
- [9] YAKABE, I.: On semi-valuations II. Memoirs of Fac. Sci. Kyûshû Univ. **17**, 10—28 (1963).
- [10] — Equivalence of the Krull-Müller-Jaffard theorem and Ribenboim's approximation theorem. (To appear.)

Department of Mathematics, University of Utsunomiya (Japan)

(Received August 11, 1963)

Semi-categorical algebras. I Semi-primal algebras

By
 ALFRED L. FOSTER and ALDEN PIXLEY

1. Introduction

The general theory of primal algebras — that is, finite algebras in which each map is expressible in terms of the primitive operations of the algebra — has formed the nucleus of a considerable number of recent investigations (see [1]—[6] and the accompanying bibliography). In one direction this theory subsumes, in much generalized form, the classical Boolean theory as well as that of $\mathcal{P}$ -rings, Post algebras, etc., while in another direction the theory approaches and extends various aspects of classical field theory — within a realm of more general structures.

Among the basic results of primal theory is the

Theorem 1 (*First structure theorem*): *A primal algebra is categorical.*

In the present communication we present a more general structure theory, for the substantially larger class of “semi-primal” algebras, in terms of the notion of “semi-categoricity”. Several new classes of semi-primals are exhibited¹⁾.

2. Some preliminaries

Definition 2.1. Let $\mathfrak{A} = (A, \sigma_1, \sigma_2, \dots)$ be an algebra and let $S = (n_1, n_2, \dots)$ be its species. (Here σ_i is an n_i -ary primitive operation, $n_i \geq 0$.²⁾)

(2.1 a) A map $f(\xi, \eta, \dots, \zeta)$ from $A, A, \dots, A$ into A is “expressible” if there exists an “ S -expression” $\Phi(\xi, \eta, \dots, \zeta)$ such that $f = \Phi$ for all $\xi, \eta, \dots, \zeta \in A$. Here an “ S -expression” is either an indeterminate symbol ξ, η , etc., or else some (finite) composition of such symbols via the primitive operations σ_i .

(2.1 b) A map $f(\xi, \eta, \dots, \zeta)$ is “conservative” if for each subalgebra $\mathfrak{A}_i$ ($\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}$) and for each sequence $\alpha, \beta, \dots$ of elements of $\mathfrak{A}_i$,

$$\alpha, \beta, \dots \text{ all } \in \mathfrak{A}_i \Rightarrow f(\alpha, \beta, \dots) \in \mathfrak{A}_i.$$

Otherwise expressed: if $f(\alpha, \beta, \dots) \in (\langle \alpha, \beta, \dots \rangle) =$ subalgebra generated by $\alpha, \beta, \dots$.

Definition 2.2. (2.2 a) An algebra $\mathfrak{P}$ is “primal” if it is finite, with at least two elements, and if every map $f(\xi, \eta, \dots, \zeta)$ in $\mathfrak{P}$ is expressible.

¹⁾ In part II, to be offered shortly, a still broader class of semi-categorical algebras will be investigated, employing a quite different approach — involving relations between the identities and the lattice of congruence relations of the algebras in question.

²⁾ A “0-ary” operation ($n_i = 0$) is a constant: $\sigma_i(\xi) = \sigma_i(\eta)$ for all $\xi, \eta \in \mathfrak{A}$.

(2.2b) An algebra $\mathfrak{B}$ is “semi-primal” if it is finite, with at least two elements, and if every conservative map $f(\xi, \eta, \dots)$ in $\mathfrak{B}$ is expressible.

Definition 2.3. (2.3a) An algebra $\mathfrak{B}$ is “categorical” if it is finite, with at least two elements, and if every “ $\mathfrak{B}$ -algebra” is isomorphic with a subdirect power of $\mathfrak{B}$; here

(2.3a') A “ $\mathfrak{B}$ -algebra” is an algebra (of the same species as $\mathfrak{B}$) which satisfies all (global) identities of $\mathfrak{B}$.

(2.3b) An algebra $\mathfrak{B}$ is called “semi-categorical” if it is finite, with at least two elements, and if every $\mathfrak{B}$ -algebra is isomorphic with a subalgebra of a direct power of $\mathfrak{B}$, or, equivalently, if each $\mathfrak{B}$ -algebra is isomorphic with a subdirect product of algebras $\mathfrak{B}_i$, where each $\mathfrak{B}_i$ is (isomorphic with) a subalgebra, $\mathfrak{B}_i \leq \mathfrak{B}$.

Basic results on categorical algebras may be found in [1], [3]. The notion of semi-categorical algebras was initially broached in [3].

3. Elementary results

Theorem 3.0. *A semi-primal algebra $\mathfrak{B}$ with no subalgebra $\mathfrak{B}' (\neq \mathfrak{B})$ is primal, and conversely.*

The proof is trivial.

Clearly a semi-primal $\mathfrak{B}$ possesses at least one “minimal” subalgebra $\mathfrak{B}^*$ ($\leq \mathfrak{B}$), i.e., one having no proper subalgebra. Theorem 3.0 is then a special case of the evident

Theorem 3.1. *In a semi-primal algebra $\mathfrak{B}$ each minimal subalgebra is either primal or else is a one-element subalgebra. If $\mathfrak{B}$ possesses more than one minimal subalgebra, any two such are disjoint.*

Theorem 3.2. *A semi-primal algebra $\mathfrak{B}$ is simple. Also any subalgebra of $\mathfrak{B}$ (different from a one-element algebra) is again semi-primal (and hence also simple).*

Proof. That a (non one-element) subalgebra is again semi-primal follows at once from the definition. Consider simplicity. Suppose $\mathfrak{B}$ is semi-primal and non-simple. Then $\mathfrak{B}$ contains at least three elements α, β, γ (since a two-element algebra is always simple) and a congruence relation Θ in $\mathfrak{B}$ such that $\alpha \equiv \beta(\Theta)$, $\alpha \not\equiv \gamma(\Theta)$. Consider the map f in $\mathfrak{B}$,

$$f(\xi, \eta) = \xi,$$

except

$$f(\alpha, \gamma) = \gamma.$$

This is clearly conservative and therefore expressible by some expression $\Phi(\xi, \eta)$. Then

$$\alpha \equiv \beta, \quad \Phi(\alpha, \gamma) = \gamma, \quad \Phi(\beta, \gamma) = \beta, \quad \beta \not\equiv \gamma \pmod{\Theta}.$$

This contradicts our assumption that Θ is a congruence relation, and the theorem follows.

Theorem 3.3. *A semi-primal algebra possesses no non-identical automorphism.*

Proof. Let $\mathfrak{B}$ be a semi-primal and suppose $\xi \rightarrow h(\xi)$ to be a non-identical automorphism. Then for some $\alpha \in \mathfrak{B}$: $\alpha \neq \beta = h(\alpha)$. Let $h(\beta) = \beta'$. Then

$$(3.1) \quad \alpha \neq \beta, \quad \beta \neq \beta'.$$

The map $f(\xi, \eta)$ in $\mathfrak{B}$ defined by

$$f(\xi, \eta) = \xi, \quad \text{except} \quad f(\alpha, \beta) = \beta$$

is clearly conservative and hence expressible in $\mathfrak{B}$, say by $\Phi(\xi, \eta)$, whence

$$(3.2) \quad \Phi(\xi, \eta) = \xi, \quad \text{except} \quad \Phi(\alpha, \beta) = \beta.$$

Since we have an automorphism,

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta) = \beta &\Rightarrow \Phi(h(\alpha), h(\beta)) = h(\beta) \\ &\Rightarrow \Phi(\beta, \beta') = \beta'. \end{aligned}$$

But this is absurd in view of (3.1) and (3.2), from which the theorem follows.

Theorem 3.4. *A semi-primal algebra is functionally complete.³⁾*

Proof. Let $\mathfrak{B} = (W, \sigma_1, \dots)$ be a semi-primal, let S be its species and n its order, and let its elements be written

$$W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

By definition of semi-primal, $n \geq 2$. If $\mathfrak{B}$ is *constantive* — i.e., if each ω_i is S -expressible — the theorem follows at once since in this event $\mathfrak{B}$ is primal (Theorem 3.1) and *a-fortiori* functionally complete.

So, assuming $\mathfrak{B}$ not constantive, let S' denote the species S augmented by n 0-ary (= constant) primitive operations $\varrho_1(\xi), \dots, \varrho_n(\xi)$,

$$(3.3) \quad \varrho_i(\xi) = \omega_i (\xi \in \mathfrak{B}; i = 1, 2, \dots, n),$$

and let $\mathfrak{B}' = (W, \sigma_1, \dots, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n)$ be the corresponding conversion of $\mathfrak{B}$ into an S' -algebra. (Here $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{B}'$ have precisely the same elements, W .) The theorem will clearly follow if we show that $\mathfrak{B}'$ is primal.

To prove $\mathfrak{B}'$ primal it is sufficient to show that each map $f(\xi, \eta)$ — of two arguments — in W is S' -expressible. (See [2].) Suppose then $f(\xi, \eta)$ is an arbitrary but fixed map in W and let

$$g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi, \eta)$$

be a map in W , of $n+2$ arguments, which is partially defined by the condition

$$(3.4) \quad g(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad (\text{for all } \xi, \eta \in W).$$

³⁾ An algebra $\mathfrak{A} = \{\alpha, \dots\}$ is "functionally complete" if each map $f(\xi, \eta, \dots, \zeta)$ in $\mathfrak{A}$ may be written as an $\mathfrak{A}$ -function, i.e., as a primitive combination of indeterminates $\xi, \eta, \dots$ and/or constants $\alpha, \beta, \dots \in \mathfrak{A}$. Thus, for instance, $(F_p, +, \times)$, the prime field, is functionally complete but not primal; $(F_p, +, \times, 1)$ is primal.

Since the subalgebra $((\omega_1, \dots, \omega_n))$ S -generated by the ω_i is of course W itself, (3.4) is seen to be a conservative condition. Let then $g(\omega_1, \dots, \omega_n, \xi, \eta)$ be conservatively completed in $\mathfrak{B}$. Since $\mathfrak{B}$ is semi-primal, this g is then S -expressible, say by $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi, \eta): g = \Gamma$. From this we get the S' -expression Γ''

$$\Gamma''(\xi, \eta) = \text{def} = \Gamma(\varrho_1(\xi), \varrho_2(\xi), \dots, \varrho_n(\xi), \xi, \eta)$$

and because of (3.4)

$$\Gamma''(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) \quad (\text{for all } \xi, \eta \in W).$$

Thus an arbitrary map $f(\xi, \eta)$ in W is S' -expressible, from which the theorem follows as indicated above.

Remark. While a semi-primal is necessarily functionally complete, we shall see (Th. 11.3) that the converse is generally false.

We shall need the useful

Lemma 3.5. *Let $\mathfrak{B}$ be a semi-primal, of species S , let $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ be a sequence of (not necessarily distinct) elements of $\mathfrak{B}$ and let $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ be an S -expression. Then the following map $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ in W is expressible by some S -expression*

$$\Psi(\xi_1, \dots, \xi_k) = f(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

Here

$$\begin{aligned} f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) &= \Gamma(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k), \\ f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) &= \xi_1 \quad (\text{for all other } \xi_i \text{ in } \mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Proof. We need merely observe that in any case the value of f lies in the subalgebra of generated by the corresponding argument values.

4. The fundamental structure

Theorem 4.1 (*Semi-primal structure theorem*). *A semi-primal algebra is semi-categorical.*

The proof will be based in part on the following result of ASTROMOFF [1], and in part on Theorem 4.2 below.

Theorem 4A. *Let $\mathfrak{B}$ be a finite algebra, with at least two elements and let $\mathfrak{B}$ be “finitely-semi-categorical”, i.e., let each finite $\mathfrak{B}$ -algebra (Def. 2.3a) be isomorphic with a subalgebra of a direct power of $\mathfrak{B}$. Then $\mathfrak{B}$ is semi-categorical.⁴⁾*

Theorem 4.2. *Let (i) $\mathfrak{B}$ be a semi-primal algebra, (ii) $\tilde{\mathfrak{B}} (= \mathfrak{B}^{(\mathfrak{N})})$ be a direct power of $\mathfrak{B}$ (of arbitrary cardinality $\mathfrak{N}$), (iii) $\mathfrak{A}$ be a finite subalgebra of $\tilde{\mathfrak{B}}$, and (iv) $\mathfrak{A}$ be a homomorphic image of $\mathfrak{B}$. Then $\mathfrak{A}$ is isomorphic with a subalgebra of a direct power of $\mathfrak{B}$.*

⁴⁾ In his study of categorical algebras and clusters, [1], ASTROMOFF establishes Theorem 4A only for the categorical case, i.e., he proves: If $\mathfrak{B}$ is “finitely categorical” — that is, if each finite $\mathfrak{B}$ -algebra is isomorphic with a subdirect power of $\mathfrak{B}$, — then $\mathfrak{B}$ is categorical. The proof in [1] is, however, easily seen to extend to the more general semi-categorical case, as stated in Theorem 4A.

Before turning to the proof of Theorem 4.2 we observe that the latter, together with Theorem 4A, readily yield Theorem 4.1. For, by Theorem 4A, it is (1°) sufficient to show that each *finite* $\mathfrak{B}$ -algebra is isomorphic with a subalgebra $\mathfrak{A}$ of some direct power $\tilde{\mathfrak{B}}$ of $\mathfrak{B}$. Now, (2°) each $\mathfrak{B}$ -algebra is a homomorphic image of $\mathfrak{F}(\mathfrak{B})$, the free $\mathfrak{B}$ -algebra of sufficiently many generators, in particular, (3°) each *finite* $\mathfrak{B}$ -algebra is a homomorphic image of a *finite* free $\mathfrak{B}$ -algebra, $\mathfrak{F}_{(*)}(\mathfrak{B})$. [Here we recall: For any algebra $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}_k(\mathfrak{B})$, the free- $\mathfrak{B}$ -algebra of k generators, is always finite if k is finite and if $\mathfrak{B}$ is a finite algebra.] On the other hand it is known (BIRKHOFF [7]) that, (4°) for any algebra $\mathfrak{B}$ and any cardinal, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{B})$, the free $\mathfrak{B}$ -algebra of $\mathfrak{M}$ generators, is isomorphic with a subalgebra of some direct power of $\mathfrak{B}$. Hence, combined with (3°), we have: (5°) the finite free $\mathfrak{B}$ -algebra $\mathfrak{F}_{(*)}(\mathfrak{B})$ is isomorphic with a (finite) subalgebra of a suitable direct power $\tilde{\mathfrak{B}}$ of $\mathfrak{B}$. From (5°), (3°) and Theorem 4.2 we immediately obtain (1°), and with it Theorem 4.1.

Thus the proof of the fundamental Theorem 4.1 follows from Theorem 4.2, to which we now turn our attention. We require a number of lemmas. The proof of Theorem 4.2 is completed in § 6.

Proof of Theorem 4.2. In the proof we shall be largely concerned (see Definition 2.3 b) with the “subdirect product of subalgebras” version of semi-primality rather than the (equivalent) “subalgebra of a direct power” formulation. We then have the following equivalent version of Theorem 4.2,

Theorem 4.2'. *Let $\mathfrak{B}$ be a semi-primal algebra and let $\mathfrak{A}$ be (a) a subdirect product of algebras $\mathfrak{B}_i$, each $\mathfrak{B}_i$ being an isomorphic copy of a subalgebra ($\leq \mathfrak{B}$) of $\mathfrak{B}$, and where $\mathfrak{A}$ is (b) a finite algebra. Then each homomorphic image, $\mathfrak{A}$, of $\mathfrak{A}$ is of type (a) — and of course also of type (b).*

Notation. Throughout $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ shall retain their above meanings. Let

$$(4.1) \quad \mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(2)}, \dots, \mathfrak{B}^{(m)} (= \mathfrak{B}) \text{ — also written } \mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \dots$$

denote the m (≥ 1) distinct subalgebras ($\leq \mathfrak{B}$) of $\mathfrak{B}$.

The (finite number of) elements of $\mathfrak{B}$

$$(4.2) \quad \alpha, \beta, \dots, \tau \text{ also written } \alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(k)}$$

are (subdirect) “vectors”,

$$(4.3) \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_i, \dots), \dots$$

where, for each fixed index,

$$(4.4) \quad \alpha_i, \beta_i, \dots, \tau_i \in \mathfrak{B}_i \text{ and } \mathfrak{B}_i \cong \text{one of the } m \text{ subalgebras (4.1) of } \mathfrak{B}^{(5)}$$

Also, since we have a subdirect product of subalgebras:

$$(4.5) \quad \text{each element of } \mathfrak{B}_i \text{ occurs at least once in the set } \{\alpha_i, \beta_i, \dots, \tau_i\}.$$

We refer to the i simply as (subdirect) “indices”.

⁵⁾ As remarked in Theorem 4.2, the number of subdirect “factors” $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_i, \dots$ may be of arbitrary cardinality.

Let Θ be the kernel of the homomorphism

$$(4.6) \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}/\Theta \cong \mathfrak{A}.$$

The elements (finite in number)

$$(4.7) \quad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{d} \in \mathfrak{A}$$

are then identifiable as the various congruence classes of $\mathfrak{B}$ mod Θ ,

$$(4.8) \quad \mathbf{a} = \{\alpha, \alpha', \alpha'', \dots\}, \quad \mathbf{b} = \{\beta, \beta', \dots\}, \dots, \mathbf{d} = \{\delta, \delta', \dots\}.$$

We say $\alpha, \alpha', \dots$ are “in” $\mathbf{a}$, or $\in \mathbf{a}$, etc.

Definition 4.1. Let an index i and an $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ be given. We say “ i is a firm index for (or in) $\mathbf{a}$ ”, or simply “ i is firm in $\mathbf{a}$ ” if the i^{th} components of all vectors in $\mathbf{a}$ are the same, that is,

$$(4.9) \quad \alpha_i = \alpha'_i = \alpha''_i = \dots.$$

An index j which is not firm in $\mathbf{a}$ is called “free in $\mathbf{a}$ ”, i.e.:

$$\alpha_j, \alpha'_j, \alpha''_j, \dots$$

contains at least two different elements of $\mathfrak{B}$.

Lemma 4.3. *If i is firm in some $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ then i is firm in each $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}$.*

Proof. By hypothesis (4.9) holds. Let $\mathbf{b}$ be any other element of $\mathfrak{A}$, and assume i to be free in $\mathbf{b}$. Then there exist vectors β, β' in $\mathbf{b}$ with distinct i -components, $\beta_i \neq \beta'_i$. Hence $\beta_i^* \neq \alpha_i$, where β_i^* is an appropriate one of the elements β_i, β'_i . From the semi-primality of $\mathfrak{B}$, there exists an expression $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ such that

$$(4.10) \quad \begin{cases} \Phi(\beta_i, \beta'_i, \alpha_i) = \beta_i^*, \\ \Phi(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \quad \text{for all other } \xi, \eta, \zeta \text{ in } \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Applying the expression Φ (componentwise) to the algebra $\mathfrak{B}$ we have

$$\Phi(\beta, \beta', \alpha) = \alpha$$

which implies — since Θ is a congruence relation,

$$(4.11) \quad \Phi(\beta, \beta', \alpha) \in \mathbf{a}.$$

But by (4.10) $\Phi(\beta, \beta', \alpha)$ is a vector having β_i^* as its i^{th} component, and $\beta_i^* \neq \alpha_i$, in contradiction with (4.9) and (4.11). This contradiction proves the lemma.

Definition 4.2. By the “firm index set of $\mathbf{a}$ ”,

$$N(\mathbf{a}) = \{i_1, i_2, \dots\}$$

we mean the totality of subdirect indices $i_1, i_2, \dots$ which are firm in $\mathbf{a}$. Similarly for the “free-index set of $\mathbf{a}$ ”,

$$\tilde{N}(\mathbf{a}) = \{j_1, j_2, \dots\}.$$

From Lemma 4.3 we have the

Corollary 4.4. $N(\mathbf{x}) = N(\mathbf{y})$; $N^\sim(\mathbf{x}) = N^\sim(\mathbf{y})$, for all $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{A}$.

We may thus speak of

Definition 4.3. $N(\mathfrak{A})$, the “firm-index set of the algebra $\mathfrak{A}$ ”, and $N^\sim(\mathfrak{A})$, the “free-index set of $\mathfrak{A}$ ”.

5. Proof (continued)

For a free index we have the following improvement of (4.5),

Lemma 5.1. *Let j be a free index of $\mathfrak{A}$, let $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ and let ω_j be any element of the subalgebra $\mathfrak{B}_j$. Then at least one vector in $\mathbf{a}$ has ω_j as its j^{th} component.*

Proof. For given $\omega_j \in \mathfrak{B}_j$ there exists a $\mathbf{v} \in \mathfrak{A}$ and a $\mathbf{v}' \in \mathfrak{v}$ such that $\mathbf{v}$ has ω_j as its j^{th} component (by (4.5)),

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \{\mathbf{v} = (\dots, \omega_j, \dots), \mathbf{v}' = (\dots, \mathbf{v}'_j, \dots), \dots\}, \quad (\mathbf{v}'_j \neq \omega_j \text{ since } j \text{ is free}), \\ \mathbf{a} &= \{\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_j, \dots), \mathbf{a}', \dots\}. \end{aligned}$$

As in an earlier argument, consider the map $f(\xi, \eta, \zeta)$ in $\mathfrak{B}$ defined by

$$\begin{aligned} f(\omega_j, \mathbf{v}'_j, \alpha_j) &= \omega_j, \\ f(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta \quad \text{for all other arguments in } \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

This is a conservative map, and hence is expressible, say by $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$,

$$(5.1) \quad \begin{cases} \Psi(\omega_j, \mathbf{v}'_j, \alpha_j) = \omega_j, \\ \Psi(\xi, \eta, \zeta) = \zeta \quad \text{for all other arguments in } \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Then

$$\Psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}, \therefore \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}, \therefore \Psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{a}) \in \mathbf{a}.$$

But the j^{th} component of the vector $\Psi(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{a})$ is ω_j , and the lemma is proved.

Definition 5.1. Corresponding to the m subalgebras $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \dots$ of $\mathfrak{B}$ (see (4.1)), we have m “free-index classes”

$$(j') = (j'_1, j'_2, \dots), (j'') = (j''_1, j''_2, \dots), \dots, (j^{(m)}) = (j_1^{(m)}, j_2^{(m)}, \dots).$$

Here (j') consists of all those free indices of $\mathfrak{A}$ which “correspond” to $\mathfrak{B}'$, i.e., such that

$$\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}_{j'_1} \cong \mathfrak{B}_{j'_2} \cong \dots$$

and similarly for $(j''), \dots$ (Of course some (or indeed all) of these free index classes may be empty.)

Lemma 5.2. *Let $\mathfrak{B}'$ be a fixed subalgebra ($\leq \mathfrak{B}$) of $\mathfrak{B}$, let $(j') = j'_1, j'_2, \dots$ be the corresponding free-index class and let ω' be a fixed $\in \mathfrak{B}'$. Then in each $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ there exists at least one vector $\mathbf{a}$ such that*

$$\alpha_{j'_1} = \alpha_{j'_2} = \dots = \omega'.$$

Proof. Let $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ be given. It consists of a finite class of vectors

$$\mathbf{a} = \{\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(n)}\}.$$

Consider the map $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ in $\mathfrak{B}$ where

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) &= \omega' \quad \text{if at least one argument} = \omega' \\ &= \xi_1 \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

This is conservative and hence is expressible by some expression Ω ,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \Omega(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) &= \omega' \quad \text{if at least one argument} = \omega' \\ &= \xi_1 \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

Now in particular

$$\Omega(\xi, \xi, \dots, \xi) = \xi,$$

whence, applied to the components, we have

$$\Omega(\alpha_{(1)}, \alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(1)}) = \alpha_{(1)}.$$

Since Θ is a congruence relation it follows that

$$\Omega(a, a, \dots, a) = a$$

and hence that

$$\alpha = \text{def} = \Omega(\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(r)}) \in a.$$

But by Lemma 5.1 applied separately to each of the free indices $j'_1, j'_2, \dots$ we have: at least one of the vectors $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \dots, \alpha_{(r)}$ has ω' as its j_1 component; at least one of the vectors $\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(r)}$ has ω' as its j_2 component, etc. Hence, from (5.2) we have

$$\alpha \in a; \quad \alpha_{j_1} = \alpha_{j_2} = \dots = \omega'$$

and the proof is complete.

Lemma 5.3. *Let $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \dots$ be any subalgebras ($\leq \mathfrak{B}$) having an element ω in common, and let $(j'), (j''), \dots$ be the corresponding free index classes (Definition 5.1). Then in each $a \in \mathfrak{A}$ there exists at least one α such that*

$$\omega = \alpha_{j'_1} = \alpha_{j'_2} = \dots = \alpha_{j''_1} = \alpha_{j''_2} = \dots = \dots.$$

Proof. Using Lemma 5.2 successively, there exist vectors $\alpha' = (\alpha'_{j'_1}, \alpha'_{j'_2}, \dots)$, $\alpha'', \dots \in a$ such that

$$\begin{aligned} \alpha'_{j'_1} &= \alpha'_{j'_2} = \dots = \omega, \\ \alpha''_{j''_1} &= \alpha''_{j''_2} = \dots = \omega, \\ &\vdots \end{aligned}$$

As before (because of the conservative nature of the mapping (5.3) in $\mathfrak{B}$) there exists an expression $\Gamma(\xi', \xi'', \dots)$ such that

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \Gamma(\xi', \xi'', \dots) &= \omega \quad \text{if at least one of the arguments} = \omega, \\ &= \xi' \quad \text{otherwise.} \end{aligned}$$

And again

$$\Gamma(\xi, \xi, \dots) = \xi$$

whence

$$\Gamma(\alpha', \alpha', \alpha', \dots) = \alpha', \quad \therefore \Gamma(a, a, a, \dots) = a, \quad \therefore \alpha = \text{def} = \Gamma(\alpha', \alpha'', \dots) \in a.$$

But because of (5.3),

$$\omega = \alpha_{j'_1} = \alpha_{j'_2} = \dots = \alpha_{j''_1} = \alpha_{j''_2} = \dots = \dots$$

which establishes the lemma.

6. Proof (concluded)

Corresponding to the m distinct subalgebras of $\mathfrak{B}$: $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \dots, \mathfrak{B}^{(m)}$ and the corresponding free index classes (j') , (j'') , ... (Definition 5.1), each vector $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \mathfrak{B}$ may, with rearranged and redesignated components, also be written

$$(6.1) \quad \alpha = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots; \alpha_{j'_1}, \alpha_{j'_2}, \dots, \alpha_{j''_1}, \alpha_{j''_2}, \dots, \dots),$$

where $i_1, i_2, \dots$ are the firm indices of $\mathfrak{A}$, where $j'_1, j'_2, \dots$ are the free indices of $\mathfrak{A}$ corresponding to $\mathfrak{B}'$, where $j''_1, j''_2, \dots$ are the free indices of $\mathfrak{A}$ corresponding to $\mathfrak{B}''$, etc. We further write (6.1) in the form

$$(6.1)' \quad \alpha = [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots] + \langle \alpha_{j'_1}, \alpha_{j'_2}, \dots, \alpha_{j''_1}, \alpha_{j''_2}, \dots, \dots \rangle$$

as the “sum” of a “firm-vector” $[\dots, \alpha_i, \dots]$ — called the “firm-component” of α — and a “free-vector” $\langle \dots, \alpha_j, \dots \rangle$ — called the “free-component” of α .

Lemma 6.1. *If the set of free-indices of $\mathfrak{A}$ is not empty, there exists a free-vector $\langle \dots, \pi_j, \dots \rangle$ which (1°) is absolute, that is, independent of the choice of $\alpha \in \mathfrak{A}$, and where (2°) in each $\alpha \in \mathfrak{A}$ there exists an $\alpha \in \alpha$ having $\langle \dots, \pi_j, \dots \rangle$ as its free-component,*

$$(6.2) \quad \alpha = [\dots, \alpha_i, \dots] + \langle \dots, \pi_j, \dots \rangle.$$

Proof. A subalgebra $\mathfrak{B}^*$ ($\leq \mathfrak{B}$) is called “primitive” if it has no subalgebra ($\neq \mathfrak{B}^*$). $\mathfrak{B}$ contains at least one primitive subalgebra, and any two such are necessarily disjoint. Suppose there are t (≥ 1) primitive subalgebras of $\mathfrak{B}$. By a “primitive subset” of $\mathfrak{B}$ we mean a set of t elements of $\mathfrak{B}$,

$$(6.3) \quad \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_t,$$

one in each primitive subalgebra. Each subalgebra of $\mathfrak{B}$ then contains at least one of the π_i .

Consider the m different subalgebras of $\mathfrak{B}$ arranged in a row. Under each subalgebra (= 1 st row) write π_1 or nothing at all, according as the subalgebra contains π_1 or not. Again (= 2nd row), under each subalgebra write π_2 or nothing, according as the subalgebra contains π_2 or not; and so on for each π_i of (6.3). We then have the following type of scheme,

$$(6.4) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} \mathfrak{B}' & \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \mathfrak{B}'''' & \dots & \mathfrak{B}^{(m)} (= \mathfrak{B}) \\ \pi_1 & & & \pi_1 & & \pi_1 \\ & \pi_2 & & \pi_2 & & \pi_2 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ & \pi_t & \pi_t & & & \pi_t. \end{array} \right.$$

To avoid excessively involved notation we shall construct the proof in terms of a specific table (with $m=6$, $t=3$). It will be evident from this how the construction goes for the general case.

$$(6.5) \quad \begin{array}{cccccc} \mathfrak{B}' & \mathfrak{B}'' & \mathfrak{B}''' & \mathfrak{B}^{(4)} & \mathfrak{B}^{(5)} & \mathfrak{B}^{(6)} (= \mathfrak{B}) \\ \pi_1 & & & \pi_1 & & \pi_1 \\ & \pi_2 & & \pi_2 & & \pi_2 \\ & & \pi_3 & & \pi_3 & \pi_3. \end{array}$$

We assume $\mathfrak{A}$ to possess at least one free-index. Let $\mathbf{a} \in \mathfrak{A}$ be given. By a 3-fold (in general, a t -fold) application of Lemma 5.3 there exist 3 vectors $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(3)}$, all in $\mathbf{a}$, such that

$$(6.6) \quad \begin{cases} \pi_1 = \alpha_{j_1}^{(1)} = \alpha_{j_2}^{(1)} = \alpha_{j_3}^{(1)} = \dots = \alpha_{j_{(4)}}^{(1)} = \alpha_{j_{(5)}}^{(1)} = \dots = \alpha_{j_{(6)}}^{(1)} = \alpha_{j_{(6)}}^{(1)} = \dots, \\ \pi_2 = \alpha_{j_1}^{(2)} = \alpha_{j_2}^{(2)} = \dots = \alpha_{j_{(4)}}^{(2)} = \alpha_{j_{(5)}}^{(2)} = \dots = \alpha_{j_{(6)}}^{(2)} = \alpha_{j_{(6)}}^{(2)} = \dots, \\ \pi_3 = \alpha_{j_1}^{(3)} = \alpha_{j_2}^{(3)} = \dots = \alpha_{j_{(4)}}^{(3)} = \alpha_{j_{(5)}}^{(3)} = \dots = \alpha_{j_{(6)}}^{(3)} = \alpha_{j_{(6)}}^{(3)} = \dots. \end{cases}$$

Consider the following function $f(\xi_3, \xi_2, \xi_1)$ (in general, $f(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots, \xi_1)$) defined for all arguments in $\mathfrak{B}$ and “corresponding” to (6.5):

$$\begin{aligned} (i_0) \quad & f(\xi_3, \xi_2, \xi_1) = \xi_1 \quad \text{except as below (corresponding to the columns of} \\ & \quad \quad \quad (6.5), \text{ left to right).} \\ (i_1) \quad & f(\xi_3, \xi_2, \pi_1) = \pi_1 \quad \text{if } \xi_3, \xi_2 \neq \pi_3, \pi_2 \quad (\text{respectively}) \\ (i_2) \quad & f(\xi_3, \pi_2, \xi_1) = \pi_2 \quad \text{if } \xi_3, \xi_1 \neq \pi_3, \pi_1 \\ (i_3) \quad & f(\pi_3, \xi_2, \xi_1) = \pi_3 \quad \text{if } \xi_2, \xi_1 \neq \pi_2, \pi_1 \\ (i_4) \quad & f(\xi_3, \pi_2, \pi_1) = \pi_1 \quad \text{if } \xi_3 \neq \pi_3 \\ (i_5) \quad & f(\pi_3, \xi_2, \xi_1) = \pi_3 \quad \text{if } \xi_2, \xi_1 \neq \pi_2, \pi_1 \\ (i_6) \quad & f(\pi_3, \pi_2, \pi_1) = \pi_1. \end{aligned}$$

(In each of (i_1) – (i_6) the value of f (for the sake of definiteness) is taken as the topmost value in the corresponding column.) The function f is well defined since the table (6.5) — or in general (6.4) — is constructed in terms of subalgebras of $\mathfrak{B}$, and the inclusion (or non-inclusion) of the primitive elements $\pi_1, \dots, \pi_t$. (The conditions on f may be partly redundant, — for instance in our example, i_1, i_4, i_5, i_6 are seen to be redundant.)

It is further readily seen that f , defined as above, is a conservative map in $\mathfrak{B}$ and hence is expressible, say by an expression $\Gamma(\xi_3, \xi_2, \xi_1)$ (— in general $\Gamma(\xi_t, \xi_{t-1}, \dots, \xi_1)$ —).

We note the identity

$$\Gamma(\xi, \xi, \xi) = \xi.$$

From this follows:

$$\Gamma(\alpha^{(1)}, \alpha^{(1)}, \alpha^{(1)}) = \alpha^{(1)}, \therefore \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{a}) = \mathbf{a}, \therefore \Gamma(\alpha^{(3)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(1)}) \in \mathbf{a}.$$

If we designate

$$(6.7) \quad \alpha = \text{def} = I'(\alpha^{(3)}, \alpha^{(2)}, \alpha^{(1)})$$

on use of (6.6) and $(i_0) - (i_6)$ above we readily verify that

$$\alpha_{j_1'} = \alpha_{j_2'} = \cdots = \alpha_{j_1^{(4)}} = \alpha_{j_2^{(4)}} = \cdots = \alpha_{j_1^{(6)}} = \alpha_{j_2^{(6)}} = \cdots = \pi_1,$$

$$\alpha_{j_1''} = \alpha_{j_2''} = \cdots = \pi_2,$$

$$\alpha_{j_1'''} = \alpha_{j_2'''} = \cdots = \alpha_{j_1^{(5)}} = \alpha_{j_2^{(5)}} = \cdots = \pi_3.$$

The free component of α (given by (6.7)) is thus seen to be a free-vector $\langle \dots, \pi_j, \dots \rangle$ in which each π_j is one of the 3 (in general t) elements of the initially chosen primitive set in $\mathfrak{B}$. Moreover since the construction of $\langle \dots, \pi_j, \dots \rangle$ depends only on the primitive set and on the subalgebras of $\mathfrak{B}$, $\langle \dots, \pi_j, \dots \rangle$ is seen to be “absolute”, that is independent of the choice of $a \in \mathfrak{A}$. This completes Lemma 6.1.

Lemma 6.2. *If in $\mathfrak{A}$ all indices are firm, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$. If in $\mathfrak{A}$ all indices are free, $\mathfrak{A} \cong$ one-element algebra.*

Proof. If each index is firm then clearly each $a \in \mathfrak{A}$ contains precisely one vector,

$$a = \{\alpha\} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots).$$

For $b = \{\beta\} = \beta$ and $b \neq a$ it follows that $\alpha \neq \beta$, since a and b — *qua* distinct conjugate classes of $\mathfrak{B} \bmod \Theta$ — can contain no common element (= vector). Hence $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

On the other hand, if each index is free, no $\alpha \in \mathfrak{B}$ has a firm component. In this case Lemma 6.1 asserts: there exists a vector $\pi \in \mathfrak{B}$ which is in each $x \in \mathfrak{A}$. This implies $x = y$ for all $x, y \in \mathfrak{A}$ — i.e., that $\mathfrak{A}$ is a one-element algebra — since otherwise, as before, π would appear in distinct congruence classes of $\mathfrak{B} \bmod \Theta$, which is impossible. This proves the lemma.

Let $i_1, i_2, \dots$ again be the totality of firm-indices of $\mathfrak{A}$. Returning to the opening remarks of this section we recall that: for given $a \in \mathfrak{A}$, all vectors $\alpha, \dots \in a$ have precisely the same firm-component $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots]$ which we now simply call the “firm-component of a ”.

Definition 6.1. By the “firm-projection” of $\mathfrak{A}$ we mean the correspondence

$$(6.8) \quad a \rightarrow [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots],$$

which associates with each $a \in \mathfrak{A}$ its firm component $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots]$.

Finally we have the

Lemma 6.3. *If $\mathfrak{A}$ has at least one firm-index, the firm projection of $\mathfrak{A}$ is an isomorphism between $\mathfrak{A}$ and a subdirect product of the algebras $\mathfrak{B}_{i_1}, \mathfrak{B}_{i_2}, \dots$.*

Proof. That (6.8) is a homomorphism from $\mathfrak{A}$ onto a subdirect product of $\mathfrak{B}_{i_1}, \mathfrak{B}_{i_2}, \dots$ is immediate since for each expression $\mathcal{P}(\xi, \eta, \dots)$,

$$a \rightarrow [\alpha_{i_1}, \dots], \quad b \rightarrow [\beta_{i_1}, \dots]$$

obviously implies

$$\Psi(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots) \rightarrow [\Psi(\alpha_{i_1}, \beta_{i_1}, \dots), \Psi(\alpha_{i_2}, \beta_{i_2}, \dots), \dots].$$

We have then only to establish that the correspondence (6.8) is 1-1, i.e., that $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ implies $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots] \neq [\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \dots]$.

Suppose $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ and suppose $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ have the same firm-components

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\rightarrow [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots], \\ \mathbf{b} &\rightarrow [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots]. \end{aligned}$$

Then by Lemma 6.1 there exists an $\alpha \in \mathbf{a}$ and also a $\beta \in \mathbf{b}$ such that α and β have the same free-component $\langle \dots, \pi_j, \dots \rangle$. Then

$$\alpha = [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots] + \langle \dots, \pi_j, \dots \rangle = \beta.$$

This is impossible since, as before, $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ (*qua* distinct residue classes of $\mathfrak{B} \bmod \theta$) can have no common elements. This contradiction establishes the lemma.

The proof of Theorem 4.2', and with it also the fundamental structure Theorem 4.1, is now seen to be an immediate combination of Lemmas 6.3 and 6.2⁶).

7. Finite $\mathfrak{B}$ -algebras

For the case of *finite* $\mathfrak{B}$ -algebras the general subdirect structure theorem becomes direct, according to

Theorem 7.1. *Let $\mathfrak{B}$ be a semi-primal algebra and let $\mathfrak{B}$ be a finite $\mathfrak{B}$ -algebra. Then $\mathfrak{B}$ is isomorphic with the direct product of algebras $\mathfrak{B}_i$, where each $\mathfrak{B}_i$ is an isomorphic copy of a subalgebra of $\mathfrak{B}$.*

Proof. With $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \dots, \mathfrak{B}^{(m)} (= \mathfrak{B})$ as the distinct subalgebras of $\mathfrak{B}$, by the general structure Theorem 4.1, $\mathfrak{B}$ is here isomorphic with a subdirect product of suitable *finite* subdirect powers of $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \dots, \mathfrak{B}^{(m)}$,

$$(7.1) \quad \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'^{s_1} \circ \mathfrak{B}''^{s_2} \circ \dots \circ \mathfrak{B}^{(m)s_m},$$

where

$$(7.2) \quad \mathfrak{B}'^{s_1} = \mathfrak{B}' \circ \mathfrak{B}' \circ \dots \circ \mathfrak{B}', \quad \text{etc.},$$

and where each $\circ$ refers to a suitable subdirect product,

$$0 \leq s_i < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Definition 7.1. A subdirect power $\mathfrak{B}^{(91)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{91}), (\beta_1, \dots, \beta_{91}), \dots\}$ of an algebra $\mathfrak{B}$ is called "redundant" if some pair of indices i, i' ($i \neq i'$) are "linked" in $\mathfrak{B}$

$$\alpha_i = \alpha_{i'}, \quad \beta_i = \beta_{i'}, \dots$$

If $\mathfrak{B}^{(91)}$ possesses no pair of linked indices it is called "irredundant".

⁶ In applying Lemma 6.2, we recall that a one-element algebra is identified as the 0th direct power of $\mathfrak{B}$.

We note a familiar elementary

Lemma 7.2. *A subdirect power of $\mathfrak{B}$ is isomorphic with an irredundant subdirect power of $\mathfrak{B}$.*

Proof. If i, i' are linked in $\mathfrak{B}^{(q)}$, delete all i' components, thereby getting " $\mathfrak{B}^{(q-1)}$ ", and where obviously

$$\mathfrak{B}^{(q)} \cong \mathfrak{B}^{(q-1)}.$$

If $\mathfrak{B}^{(n-1)}$ is not irredundant, repeat this deletion of one index of a linked pair, etc. Eventually we arrive at an irredundant subdirect power of $\mathfrak{B}$ isomorphic with $\mathfrak{B}^{(q)}$.

Lemma 7.3. *Let $\mathfrak{B}$ be a semi-primal algebra and let $\mathfrak{A}$ be a finite $\mathfrak{B}$ -algebra. Then (a) $\mathfrak{A}$ is subdirectly representable in the form (7.1) and where each of the subdirect powers $\mathfrak{A}^{s_1}, \mathfrak{A}^{s_2}, \dots, \mathfrak{A}^{s_m}$ is irredundant. (b) In such an irredundant representation (7.1), all factors occurring are already direct ($= \times$), i.e.,*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}' \times \dots \times \mathfrak{A}'' \times \mathfrak{A}'' \times \dots \times \mathfrak{A}^{(m)} \times \mathfrak{A}^{(m)} \times \dots$$

We note that Lemma 7.3 clearly covers Theorem 7.1.

Proof. Part (a) of Lemma 7.3 has already been established above. Consider then part (b). Let the finite algebra $\mathfrak{A}$ consist of t elements $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ subdirectly given by (7.1),

$$(7.3) \quad \begin{cases} \alpha = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{s_1}, \alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_{s_2}, \dots, \alpha^{(m)}_1, \alpha^{(m)}_2, \dots, \alpha^{(m)}_{s_m}) \\ \beta = (\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_{s_1}, \beta''_1, \beta''_2, \dots, \beta^{(m)}_1, \beta^{(m)}_2, \dots, \beta^{(m)}_{s_m}) \\ \vdots \\ \gamma = (\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{s_1}, \gamma''_1, \gamma''_2, \dots, \gamma^{(m)}_1, \gamma^{(m)}_2, \dots, \gamma^{(m)}_{s_m}). \end{cases}$$

If $((\mu, \nu, \dots))$ denotes the set of distinct elements in the sequence $\mu, \nu, \dots$, then, since we have a subdirect power

$$(7.4) \quad \begin{cases} ((\alpha'_i, \beta'_i, \dots, \gamma'_i)) = \mathfrak{A}' & (i' = 1, 2, \dots, s_1) \\ ((\alpha''_i, \beta''_i, \dots, \gamma''_i)) = \mathfrak{A}'' & (i'' = 1, 2, \dots, s_2) \\ \vdots \\ ((\alpha^{(m)}_i, \beta^{(m)}_i, \dots, \gamma^{(m)}_i)) = \mathfrak{A}^{(m)} & (i^{(m)} = 1, 2, \dots, s_m). \end{cases}$$

Let

$$(7.5) \quad \begin{cases} \omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{s_1} & \text{be any given sequence of} \\ & \text{(not necessarily distinct) elements of } \mathfrak{A}' \\ \omega''_1, \omega''_2, \dots, \omega''_{s_2} & \text{be any given sequence of} \\ & \text{(not necessarily distinct) elements of } \mathfrak{A}'' \\ \vdots & \\ \omega^{(m)}_1, \omega^{(m)}_2, \dots, \omega^{(m)}_{s_m} & \text{be any given sequence of} \\ & \text{(not necessarily distinct) elements of } \mathfrak{A}^{(m)}. \end{cases}$$

With t as the number of elements (7.3) in $\mathfrak{A}$, consider the function $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$ defined in $\mathfrak{A}$, where f is partially defined — corresponding

to the columns of the "matrix" (7.3) — as follows:

$$(7.6) \quad \begin{cases} f(\alpha'_{k_1}, \beta'_{k_1}, \dots, \gamma'_{k_1}) = \omega'_{k_1} & (k_1 = 1, 2, \dots, s_1) \\ f(\alpha''_{k_2}, \dots, \gamma''_{k_2}) = \omega''_{k_2} & (k_2 = 1, 2, \dots, s_2) \\ \vdots \\ f(\alpha^{(m)}_{k_m}, \dots, \gamma^{(m)}_{k_m}) = \omega^{(m)}_{k_m} & (k_m = 1, 2, \dots, s_m). \end{cases}$$

Now because of (7.4) coupled with the hypothecated irredundancy of the representation (7.1), it is readily seen that the conditions (7.6) are both consistent and conservative in $\mathfrak{B}$. Hence if the definition of $f(\xi_1, \dots, \xi_t)$ is completed (for all arguments in $\mathfrak{B}$) in any conservative way, this f will then be expressible, say by $\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$, and Γ will have properties corresponding to (7.6).

Since $\mathfrak{B}$ is an algebra it follows that:

$$(7.7) \quad \omega = \text{def} = \Gamma(\alpha, \beta, \dots, \gamma) \in \mathfrak{B}.$$

On the other hand if we compute ω by use of (7.6) — with Γ in place of f —, we find

$$(7.8) \quad \omega = (\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_{s_1}, \omega''_1, \dots, \omega''_{s_2}, \dots, \omega^{(m)}_1, \dots, \omega^{(m)}_{s_m}).$$

Since the sequence $\omega'_1, \dots, \omega'_{s_1}$ is arbitrarily chosen in $\mathfrak{B}'$; $\omega''_1, \omega''_2, \dots, \omega''_{s_2}$ arbitrarily chosen in $\mathfrak{B}''$, etc., part (b) of Lemma 7.3 follows. This completes Lemma 7.3 and with it also Theorem 7.1.

8. Subprimals. Centroid, frames, etc.

As noted elsewhere, the primal algebras — a most extensive class — are subsumed by the broader class of semi-primals. We now delineate a notable subclass of semi-primals and — for convenience — simultaneously expressly exclude the primals, via the

Definition 8.1. By a "subprimal" algebra we mean a semi-primal, $\mathfrak{B}$, which possesses precisely one subalgebra, $\mathfrak{B}^*$ ($\neq \mathfrak{B}$), called the "core" of $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{B}$ is called "regular" if $\mathfrak{B}^*$ contains at least two elements, and otherwise "singular" (= one-element core).

In §§ 11, 12 we shall exhibit several classes of subprimals.

For subprimals, Theorems 4.1 and 7.1 reduce to

Theorem 8.1. *Let $\mathfrak{B}$ be a subprimal with core $\mathfrak{B}^*$. Then each $\mathfrak{B}$ -algebra is isomorphic with a subdirect product of algebras $\mathfrak{B}_i$, all isomorphic either with $\mathfrak{B}$ or with $\mathfrak{B}^*$; in particular, a finite $\mathfrak{B}$ -algebra is isomorphic with a direct product of such algebras $\mathfrak{B}_i$. If $\mathfrak{B}$ is singular it is categorical.*

From Theorem 3.4 we have

Theorem 8.2. *If in a subprimal algebra $\mathfrak{B}$ a given non-core element, λ_0 , is accepted (as a constant primitive operation), the resulting algebra $\mathfrak{B}$ is primal.*

The centroid.

Definition 8.2. Let $\mathfrak{A}$ be an algebra and S its species. By the “centroid” $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ of $\mathfrak{A}$ — see [2] — we mean the class of all expressible elements of $\mathfrak{A}$: $\alpha \in \mathcal{C}(\mathfrak{A})$ if and only if there exists an S -expression $\varrho_\alpha(\xi)$ such that $\varrho_\alpha(\xi) = \alpha$ for all $\xi \in \mathfrak{A}$.

From [2] we have the

Lemma 8.3. *The centroid $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ of an algebra $\mathfrak{A}$, if not empty, is (1°) a subalgebra of $\mathfrak{A}$, (2°) $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ is a subalgebra of each subalgebra of $\mathfrak{A}$, and hence (3°) $\mathcal{C}(\mathfrak{A})$ contains no proper subalgebra.*

Theorem 8.4. *If $\mathfrak{B}$ is a subprimal its centroid $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ is non-empty and is identical with its core $\mathfrak{B}^*$, $\mathcal{C}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}^*$. The centroid of $\mathfrak{B}$ is a primal algebra, or else a one-element algebra.*

Proof. Let $\beta \in \mathfrak{B}^*$. Since $\mathfrak{B}$ has no subalgebra except $\mathfrak{B}^*$, the map $f(\xi) = \beta$ (for all $\xi \in \mathfrak{B}$) is conservative, and hence f is expressible. Thus $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$ is not empty and moreover $\mathfrak{B}^* \subseteq \mathcal{C}(\mathfrak{B})$. But by Lemma 8.3, $\mathcal{C}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}^*$, i.e., $\mathfrak{B}^* = \mathcal{C}(\mathfrak{B})$. On application of Theorem 3.1 the proof is complete.

Frames and couplings.

Definition 8.3. Let $\mathfrak{A} = (A, \sigma, \dots)$ be an algebra and S its species. We say that $\mathfrak{A}$ possesses a “frame”

$$[0, 1, \times, \wedge, \vee]$$

if there exist two elements $0, 1 \in A$, ($0 \neq 1$), and operations $\times$ (binary), $\wedge$ (unary) and $\vee$ (unary) such that

- (1°) 0 and 1 are expressible (i.e., $\in \mathcal{C}(\mathfrak{A}) = \text{centroid}$).
- (2°) $\xi \times \eta$, $\xi^\wedge$, $\xi^\vee$ are all expressible.
- (3°) $\xi^\wedge$ and $\xi^\vee$ are permutations of A , with $\xi^\vee$ the inverse of $\xi^\wedge$ and where
- (4°) $0 \times \eta = \eta \times 0 = 0$, $1 \times \eta = \eta \times 1 = \eta$ (for all $\eta \in A$), and where $0^\wedge = 1$.

Definition 8.4. An algebra $\mathfrak{A}$ is said to possess a “coupling”

$$[0, 1, \times, \top]$$

if it possesses elements $0, 1$ ($0 \neq 1$) and operations $\times, \top$ (both binary) such that

- (i) 0 and 1 are expressible.
- (ii) $\xi \times \eta$, $\xi \top \eta$ are expressible.
- (iii) $0 \times \eta = \eta \times 0 = 0$; $1 \times \eta = \eta \times 1 = \eta$; $0 \top \eta = \eta \top 0 = \eta$ (for all $\eta \in A$).

Definition 8.5. An algebra $\mathfrak{A}$ is said to possess a “singular-coupling”

$$[0, \times, \top; 1, 1^-]$$

if $0, 1, \times, \top$ have the properties of a coupling, except that

- (i') 0 (but not necessarily 1) is expressible

and furthermore

- (iv) There exists an element 1^- in $\mathfrak{A}$ such that

$$1 \top 1^- = 1^- \top 1 = 0.$$

Lemma 8.5. In (iv) of Definition 8.5, $1^- \neq 0$.

Proof. $1^- = 0$ implies $1 \top 1^- = 0 = 1 \top 0 = 1$, a contradiction, since $0 \neq 1$.

Lemma 8.6. If $\mathfrak{A}$ possesses a frame it also possesses a coupling.

Proof. In a frame $[0, 1, \times, \wedge, \vee]$ set

$$\xi \top \eta = \text{def} = (\xi \wedge \times \eta \vee)^\vee.$$

It is then easily verified that $[0, 1, \times, \top]$ is a coupling in $\mathfrak{A}$.

Lemma 8.7. A subprimal $\mathfrak{B}$ which is

- (a) regular, possesses at least one frame and at least one coupling;
- (b) singular, possesses at least one singular-coupling.

Proof. In case (b) let 0 be chosen as the (one-element) centroid, and let 1 ($\neq 0$) be chosen as any fixed element of $\mathfrak{B}$. Since $0 \top 0 = 0$, $0 \times 0 = 0$, etc. are conservative conditions, from semi-primality it follows that: for each fixed choice of $1^- (\neq 0$, by Lemma 8.4), $\top$ and $\times$ are expressible to yield a singular-coupling $[0, \times, \top; 1, 1^-]$. In the regular case (a), with 0, 1 ($0 \neq 1$) arbitrarily fixed in the centroid, $0 \top 0 = 0$, $0 \times 0 = 0$, $0^\wedge = 1$, $0 \times 1 = 0$, etc. are again conservative conditions and hence both a frame $[0, 1, \times, \wedge, \vee]$ and a coupling $[0, 1, \times, \top]$ are guaranteed as in case (b).

9. A characterization of regular subprimals

Theorem 9.1. For an algebra $\mathfrak{B} = (V, \sigma, \dots)$ (species S) to be a non-singular subprimal it is necessary and sufficient that

- (1°) $\mathfrak{B}$ be a finite algebra of at least three elements.
- (2°) $\mathfrak{B}$ possess precisely one subalgebra, $\mathfrak{B}^* (\neq \mathfrak{B})$.
- (3°) $\mathfrak{B}$ possess a frame — or alternatively
- (3°)' $\mathfrak{B}$ possess a coupling.
- (4°) For each $\mu \in \mathfrak{B}$ the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$ is expressible; here

$$\delta_\mu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi = \mu \\ 0 & \text{if } \xi \neq \mu \end{cases} \quad (\xi \in \mathfrak{B}).$$

- (5°) There exists a $\lambda_0 \in \mathfrak{B}^*$ which is "ex-expressible", i.e.: for a suitable S -expression $\varrho_{\lambda_0}(\xi)$

$$\varrho_{\lambda_0}(\xi) = \lambda_0 \quad (\text{for all } \xi \in \mathfrak{B}^*).$$

Proof. Necessity. If $\mathfrak{B}$ is a non-singular subprimal the $\mathfrak{B}^*$ of (2°) is the core and (3°) — or (3°)' — is satisfied, by Lemma 8.7. Finally (5°) is a conservative condition and is therefore satisfiable. Indeed, in (5°) each $\lambda \in \mathfrak{B}^*$ is seen to be ex-expressible.

Sufficiency. Assume now that $\mathfrak{B}$ satisfies (1°)–(5°). (Here we may ignore (3°) in favor of the weaker (3°)', by Lemma 8.6.) We must show that $\mathfrak{B}$ is subprimal and non-singular.

From (2°) and (3°), 0 and 1 are two elements of the centroid $\mathcal{C}(\mathfrak{B})$, hence the latter is non-empty. From (2°) and Lemma 8.3 it then follows that:

Lemma 9.2. $\mathfrak{B}^* = \text{centroid of } \mathfrak{B}$; $0, 1 \in \mathfrak{B}^*$; each element of $\mathfrak{B}^*$ is expressible; no λ is expressible if $\lambda \notin \mathfrak{B}^*$.

While no $\lambda \notin \mathfrak{B}^*$ is expressible, we have the stronger form of (5°).

Lemma 9.3. Each $\lambda \in \mathfrak{B}^*$ is ex-expressible: for a suitable S-expression $\varrho_\lambda(\xi)$, $\varrho_\lambda(\xi) = \lambda$ for all $\xi \in \mathfrak{B}^*$.

Proof. By (2°), each $\lambda \in \mathfrak{B}^*$ is a generator of $\mathfrak{B}$, in particular λ_0 of (5°) is such. Hence for a given $\lambda \in \mathfrak{B}^*$ and a suitable S-expression $\Phi_\lambda(\xi)$ we have: $\Phi_\lambda(\lambda_0) = \lambda$. Then

$$\varrho_\lambda(\xi) = \Phi_\lambda(\varrho_{\lambda_0}(\xi)) = \lambda \quad (\text{for all } \xi \in \mathfrak{B}^*).$$

The Lemma is thus established.

Lemma 9.4 (Normal expansion). Let $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ be any conservative map from $V, V, \dots, V$ into V . Then

$$(9.1) \quad f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{\mu_i \in \mathfrak{B}}^{\top} f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \delta_{\mu_1}(\xi_1) \delta_{\mu_2}(\xi_2) \dots \delta_{\mu_n}(\xi_n).$$

Here in the “ $\top$ -sum”, $\sum$, the “terms” $f(\mu_1, \dots) \times \delta_{\mu_1}(\xi_1) \times \dots \times \delta_{\mu_n}(\xi_n)$ are connected by $\top$; the μ_i independently run through $\mathfrak{B}$ and the right of (9.1) becomes an S-expression, as indicated below⁷).

Proof. Each coefficient $f(\mu_1, \dots, \mu_n)$ — written $f(\cdot \mu \cdot)$ for short — is a fixed $\in \mathfrak{B}$. If such a coefficient is $\in \mathfrak{B}^*$ (as it must be, for instance, when all μ_i are $\in \mathfrak{B}^*$, because of conservation) we substitute the S-expression

$$f(\cdot \mu \cdot) = \varrho_{f(\cdot \mu \cdot)}(\xi_1) \quad (\text{valid for all } \xi_1 \in \mathfrak{B}).$$

If $f(\cdot \mu \cdot) \notin \mathfrak{B}^*$ then, since f is conservative, at least one of the μ_i is not in $\mathfrak{B}^*$ — say $\mu_h \notin \mathfrak{B}^*$. In this case we substitute the S-expression

$$f(\cdot \mu \cdot) = \varrho_{f(\cdot \mu \cdot)}(\xi_h) \quad (\text{valid for all } \xi_h \in \mathfrak{B}^*).$$

Via these substitutions and condition (4°), the right of (9.1) becomes an S-expression $\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h, \dots, \xi_n)$. From the last part of (iii) (Definition 8.4) it is seen that for any $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathfrak{B}$,

$$f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \Psi(\mu_1, \dots, \mu_n) = \begin{cases} \varrho_{f(\cdot \mu \cdot)}(\mu_1) & \text{if } f(\cdot \mu \cdot) \in \mathfrak{B}^* \\ \varrho_{f(\cdot \mu \cdot)}(\mu_h) & \text{if } f(\cdot \mu \cdot) \notin \mathfrak{B}^*. \end{cases}$$

But in either eventuality, these latter are both $f(\mu_1, \dots, \mu_n)$, and the Lemma is proved.

The proof of “sufficiency” in Theorem 9.1 is an immediate corollary of the foregoing Lemma, and Theorem 9.1 is established.

⁷ For definiteness, in (9.1) we assume all “ $\times$ -products” and also all “ $\top$ -sums” associated from left to right. However, because of the special role of 0 and 1, it is readily seen that any other association leads to the same result.

From the proof above one readily has the further

Theorem 9.5. *If an algebra $\mathfrak{B}$ satisfies the conditions (1°)–(5°) of Theorem 9.1 with a particular $[0, 1, \times, \top]$ — or alternatively with a particular $[0, 1, \times, \wedge, \vee]$ — and a particular λ_0 (in (5°)), then $\mathfrak{B}$ satisfies (1°)–(5°) with any choice of coupling (respectively frame) and any choice of λ_0 ($\lambda_0 \in \mathfrak{B}^*$).*

This may be put negatively as

Theorem 9.5.1. *If an algebra $\mathfrak{B}$ fails to satisfy (1°)–(5°) for a particular coupling (or frame) and a particular choice of λ_0 ($\in \mathfrak{B}^*$), then $\mathfrak{B}$ is not a regular subprimal.*

It is further noted: In a regular supprimal, $\mathfrak{B}$, any coupling (or frame) in the core may be continued in at least one way to a coupling (or frame) in $\mathfrak{B}$. And of course conversely, any coupling in $\mathfrak{B}$ is automatically a coupling in $\mathfrak{B}^*$.

Finally since Theorem 9.1 is a characterization, from the conservation condition one has

Theorem 9.6. *If $\mathfrak{B}$ satisfies (1°)–(5°) of Theorem 9.1, then for each $\lambda \in \mathfrak{B}^*$ and for each integer $n \geq 1$ there exists an expression $\varrho_\lambda(\xi_1, \dots, \xi_n) = \lambda$ (for all $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathfrak{B}$, not all of which are $\in \mathfrak{B}^*$).*

10. Characterization of singular subprimals

Theorem 10.1. *Let $\mathfrak{B}$ (of species S) be an algebra. The following are necessary and sufficient conditions for $\mathfrak{B}$ to be a singular subprimal.*

- (1°) $\mathfrak{B}$ is a finite algebra of at least two elements.
- (2°) $\mathfrak{B}$ possesses a one-element subalgebra $\mathfrak{B}^*$ and no other subalgebra.
- (3°) $\mathfrak{B}$ possesses a singular coupling $[0, \times, \top; 1, 1^-]$.
- (4°) For each $\mu \in \mathfrak{B}^*$ the characteristic function $\delta_\mu(\xi)$ is expressible:

$$\delta_\mu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi = \mu \\ 0 & \text{if } \xi \neq \mu \end{cases} \quad (\text{for all } \xi \in \mathfrak{B}; \text{ for each fixed } \mu \in \mathfrak{B}^*).$$

- (5°) There exists a $\lambda_0 \in \mathfrak{B}^*$ which is ex-expressible: $\varrho_{\lambda_0}(\xi) = \lambda_0$ (for all $\xi \in \mathfrak{B}^*$).

Proof. Necessity. If $\mathfrak{B}$ is a singular subprimal and if its (one-element) core is written: $\mathfrak{B}^* = \{0\} = 0$, then the satisfaction of (1°)–(5°) follows from conservation considerations, as in the previous case. We omit the details.

Sufficiency. Suppose $\mathfrak{B}$ is an algebra satisfying (1°)–(5°). We shall show $\mathfrak{B}$ to be a singular subprimal. Similarly to the proof of Lemma 9.2 we readily have

Lemma 10.2. *$\mathfrak{B}^*$ is the centroid of $\mathfrak{B}$ — write $\mathfrak{B}^* = \{0\} = 0$; 0 is expressible and no other element of $\mathfrak{B}$ is expressible. Each $\lambda \neq 0$ is ex-expressible.*

Lemma 10.3. *Let $\mu \neq 0$ and let*

$$(10.1) \quad \delta_{0\mu}(\xi, \eta) = \text{def} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi = 0 \text{ and } \eta = \mu \\ 0 & \text{otherwise in } \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Then $\delta_{0\mu}(\xi, \eta)$ is expressible.

Proof. Consider

$$(10.2) \quad \delta_{0\mu}(\xi, \eta) = \text{def} = \delta_\mu(\eta) \times [\varrho_{1-}(\xi) \top \delta_\mu(\eta)].$$

Employing Lemma 8.5 and (10.2) and recalling that $\Phi(0) = 0$ for any expression $\Phi(\xi)$ (since 0 is a subalgebra), it is readily verified that (10.2) has the desired property (10.1).

Lemma 10.4. *Let $\mu \neq 0, v \neq 0$ and let*

$$\delta_{\mu v}(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi = \mu \text{ and } \eta = v \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $\delta_{\mu v}(\xi, \eta)$ is expressible.

Proof. Using property (4°) of Theorem 10.1 it is verified that

$$\delta_{\mu v}(\xi, \eta) = \delta_\mu(\xi) \times \delta_v(\eta).$$

Lemma 10.5. *If $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ ($m \geq 1$) are any given elements of $\mathfrak{B}$ such that not all μ_i are 0, then*

$$\delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \text{def} = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i = \mu_i \quad (i = 1, \dots, m) \\ 0 & \text{otherwise in } \mathfrak{B} \end{cases}$$

is expressible.

Proof. For $m = 1$ this follows ((4°) of Theorem 10.1). For $m > 1$ we note

$$\delta_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \dots \mu_m}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m) = \delta_{\mu_2 \mu_3 \dots \mu_m}(\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_m)$$

and similarly for any permutation of the indices μ_i with a corresponding permutation of the indices ξ_i . So it clearly suffices to prove the Lemma under the assumption that $\mu_m \neq 0$. But for $\mu_m \neq 0$ we readily verify the identity in $\mathfrak{B}$,

$$\delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) = \delta_{\mu_1 \mu_m}(\xi_1, \xi_m) \times \delta_{\mu_2 \mu_m}(\xi_2, \xi_m) \times \dots \times \delta_{\mu_{m-1} \mu_m}(\xi_{m-1}, \xi_m).$$

Each of the “factors” on the right is expressible, by Lemma 10.4 or else by Lemma 10.3, and the proof is complete⁸⁾.

Lemma 10.6 (*Normal representation*). *If $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$ is any conservative map in $\mathfrak{B}$, f is expressible, in the “normal form”*

$$(10.3) \quad f(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{\top} f(\mu_1, \dots, \mu_m) \delta_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m),$$

where in the $\top$ -sum $\sum$, the μ_i independently run through all elements of $\mathfrak{B}$ and where the right side becomes an S -expression as indicated below.

⁸⁾ Here, and again in Lemma 10.6, the same remarks on association apply as in the footnote to Lemma 9.4.

Proof. Because $f(0, 0, \dots, 0) = 0$ (by conservation) and because $0 \top \eta = \eta \top 0 = \eta$, we may omit the term $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 0$. In any other term,

$$f(\mu_1, \dots, \mu_m) \delta_{\mu_1 \dots \mu_m}(\xi_1, \dots, \xi_m),$$

at least one of the $\mu_i \neq 0$, say $\mu_h \neq 0$. Then $\delta_{\mu_1 \dots \mu_h \dots \mu_m}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ is to be replaced by a corresponding expression via Lemma 10.5. The coefficient $f(\mu_1, \dots, \mu_m)$ is $\in \mathfrak{B}$ (and in particular may be 0). We replace $f(\mu_1, \dots, \mu_h, \dots, \mu_m)$ by $\varrho_{f(\mu_1, \dots, \mu_m)}(\xi_h)$ via Lemma 10.2. Thus our term becomes

$$f(\mu_1, \dots, \mu_m) \delta_{\mu_1 \dots \mu_m}(\xi_1, \dots, \xi_m) = \varrho_{f(\mu_1, \dots, \mu_m)}(\xi_h) \times \delta_{\mu_1, \dots, \mu_m}(\xi_1, \dots, \xi_m).$$

For all argument insertions for the ξ_i , the right is 0 except when $\xi_i = \mu_i$ ($i = 1, \dots, m$), in which case we have $\varrho_{f(\mu_1, \dots, \mu_m)}(\mu_h)$. Since $\mu_h \neq 0$ this is simply $f(\mu_1, \dots, \mu_m)$, by Lemma 10.2.

In the above manner the entire right of (10.3) is replaced by an S-expression which is seen to globally express $f(\xi_1, \dots, \xi_m)$. This proves Lemma 10.6 and with it also Theorem 10.4.

11. Special classes of singular subprimals; double groups, fields

Definition 11.1. A finite algebra $\mathfrak{G} = (G, +, \times)$, of species (2.2), is called a “double group”, of order n ($n \geq 2$) if (1°) $(G, +)$ is the cyclic group of order n : (write 0 for the identity of $+$, let e be a fixed generator of $(G, +)$ and let G' denote G with 0 deleted), (2°) $(G', \times)$ is any fixed group of order $n - 1$ and having e as its identity, (3°) $0 \times \xi = \xi \times 0 = 0$ for all $\xi \in G$.

Theorem 11.1. *A double group is a singular subprimal.*

Proof. Clearly 0 is the core (= centroid) of $\mathfrak{G}$ since 0 is expressible $- 0 = \eta \xi = \xi + \xi + \dots + \xi -$ and moreover $\{0\}$ is the only subalgebra since: for $\alpha \in \mathfrak{G}$, $\alpha \neq 0$ it follows that α generates $\mathfrak{G}$, since $\alpha^{n-1} = e$ and e generates $\mathfrak{G}$. Secondly, there exists an element of $\mathfrak{G}$, — namely e — which is ex-expressible:

$$\varrho_e(\xi) = \xi^{n-1} = e \quad (\xi \neq 0).$$

From this it follows that each $\alpha \neq 0$ is ex-expressible,

$$\begin{aligned} e + e &= \alpha_2, & e + e + e &= \alpha_3, \dots \\ \varrho_{\alpha_2}(\xi) &= \varrho_e(\xi) + \varrho_e(\xi), & \text{etc.} \end{aligned}$$

Again, $[0, +, \times; e, -e]$ is obviously a singular coupling in $\mathfrak{G}$. Finally for each $\mu \neq 0$, $\delta_\mu(\xi)$ is expressible (and hence *a-fortiori* ex-expressible), as is easily verified:

$$\begin{aligned} \delta_e(\xi) &= \{(\xi - \varrho_{\alpha_2}(\xi)) (\xi - \varrho_{\alpha_3}(\xi)) \dots (\xi - \varrho_{\alpha_{n-1}}(\xi))\}^{n-1} \\ \delta_{\alpha_2}(\xi) &= \delta_e(\xi + \varrho_{\alpha_{n-1}}(\xi)) \\ \delta_{\alpha_3}(\xi) &= \delta_e(\xi + \varrho_{\alpha_{n-2}}(\xi)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

An application of Theorem 10.4 then completes Theorem 11.1.

From Theorem 11.1 and 8.2 we have the

Corollary 11.2. *$(F_p, +, \times)$, the prime field of characteristic p , is a singular subprimal, and $(F_p, +, \times, 1)$ is primal.*

We have seen (Theorem 3.4) that a semi-primal algebra — and *a-fortiori* a subprimal — is necessarily functionally complete. The failure of the converse is related to the above corollary by

Theorem 11.3. *For $k > 1$ the finite field $(F_{p^k}, +, \times)$ — and even $(F_{p^k}, +, \times, 1)$ — though functionally complete, is not semi-primal.*

Proof. It is obviously sufficient to argue the second case. The functional completeness follows from the well known result: $(F_{p^k}, +, \times, \theta)$ is primal if θ is a fixed generator. Again, if $k > 1$ and if θ is a generator, there exists a $\theta_1 \in F_{p^k}$, where θ_1 is a conjugate of θ ($\theta \neq \theta_1$). Thus $(F_{p^k}, +, \times, 1)$ has a non-identical automorphism, in which $\theta \rightarrow \theta_1$. By Theorem 3.3 it follows that $(F_{p^k}, +, \times, 1)$ is not semi-primal.

We consider next a certain “hybrid” algebra — involving both a group and also the “min” operation typical of Post-algebras.

Theorem 11.4. *Let p be a prime and let*

$$\mathfrak{S}_p = (H_p, +, \dot{\times})$$

be the algebra of p elements $0, 1, \dots, p-1$ in which $\xi + \eta$ is ordinary addition mod p , and $\xi \dot{\times} \eta = \min(\xi, \eta)$ in the ordering

$$0, 2, 3, \dots, p-1, 1.$$

Then $\mathfrak{S}_p$ is a singular subprimal.

Proof. It is easily checked that $\{0\} = \text{centroid} = \text{core}$. Also the element 2 is ex-expressible — and hence each $\mu \neq 0$ is ex-expressible,

$$\varrho_2(\xi) = \xi \dot{\times} 2\xi \dot{\times} 3\xi \dot{\times} \dots \dot{\times} (p-1)\xi \quad (2\xi = \xi + \xi, \text{ etc.}).$$

This is clear since for each fixed $\xi_0 \neq 0$ the factors in $\varrho_2(\xi)$ run through all residues, mod p , except 0. Also $[0, \dot{\times}, +; 1, -1]$ is a singular coupling. Finally for each $\mu \neq 0$, $\delta_\mu(\xi)$ is expressible (for all $\xi \in \mathfrak{S}_p$):

$$\delta_2(\xi) = [\xi \dot{\times} \varrho_3(\xi) + \varrho_{p-3}(\xi)] + \varrho_2([\xi \dot{\times} \varrho_3(\xi) + \varrho_{p-3}(\xi)]).$$

Here for $\xi=2$, the $[\]$ in $\delta_2(\xi)$ reduces to $p-1$ and $\varrho_2(p-1)=2$, so $\delta_2(2)=1$. And for $\xi \neq 2$, $[\]$ reduces to 0 and $\varrho_2(0)=0$, so $\delta_2(\xi)=0$. We further have

$$\delta_1(\xi) = \delta_2(\xi + \varrho_1(\xi))$$

$$\delta_{p-1}(\xi) = \delta_2(\xi + \varrho_3(\xi))$$

$$\delta_{p-2}(\xi) = \delta_2(\xi + \varrho_4(\xi))$$

$$\vdots$$

On appealing to Theorem 10.1 the proof is complete.

For n arbitrary, related to Theorem 11.4 we have

Theorem 11.5. *Let n be an arbitrary integer ($n \geq 2$) and let $(H_n, +, \dot{\times}, \wedge)$ be the algebra of n elements $0, 1, \dots, n-1$ where $\xi + \eta = \text{addition mod } n$, $\xi \dot{\times} \eta = \min(\xi, \eta)$ in the ordering $0, 2, 3, \dots, n-1, 1$ and $\xi \wedge \eta = 0$, $1 \wedge = 2$, $2 \wedge = 3, \dots, (n-1) \wedge = 1$. Then $(H_n, +, \dot{\times}, \wedge)$ is a singular subprimal.*

The proof is similar to that of Theorem 11.4 and will be omitted.

12. A class of regular subprimals, with Post-core

For each integer n ($n \geq 2$) we recall the "basic-Post-algebra (order n)" (see [2], [3]):

$$\mathcal{P}_n = (P_n, \times, \wedge); \quad P_n = 0, \beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \dots, \beta_2, \beta_1, 1$$

in which $\xi \times \eta = \min(\xi, \eta)$ in the above ordering, and $\xi \wedge: 0 \wedge = 1, 1 \wedge = \beta_1, \beta_1 \wedge = \beta_2, \dots, \beta_{n-2} \wedge = 0$. It is well known that $\mathcal{P}_n$ is primal. For $n=2$, $\mathcal{P}_2$ is isomorphic with the 2-element Boolean algebra.

In the following theorem we exhibit a class of subprimals "over" $\mathcal{P}_n$.

Theorem 12.1. *Let the basic-Post-algebra $\mathcal{P}_n = P_n: 0, \beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \dots, \beta_2, \beta_1, 1$ be given, let k be an integer ($k \geq 1$) and let*

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{n,k} = (P', \times, \wedge)$$

be the algebra of species (2.1) and order $n+k$, where

$$(12.1) \quad P' = 0, \beta_{n-2}, \beta_{n-3}, \dots, \beta_2, \beta_1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k, 1$$

and where: $\xi \times \eta, \xi \wedge$ are taken as in $\mathcal{P}_n$ whenever ξ, η are both in $\mathcal{P}_n$, and where otherwise:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \wedge &= \lambda_2, \lambda_2 \wedge = \lambda_3, \dots, \lambda_{k-1} \wedge = \lambda_k, \lambda_k \wedge = \lambda_1 & (i, j = 1, 2, \dots, k) \\ \lambda_i \lambda_j &= (\lambda_i \times \lambda_j) = \lambda_{\min(i,j)} & \text{if } i \neq j \\ \lambda_i^2 &= 1 \\ \lambda_i \xi &= \xi \lambda_i = \text{arbitrarily defined in } P' \text{ in all other cases, except} \\ \lambda_i \times 0 &= 0 \times \lambda_i = 0, 1 \times \lambda_i = \lambda_i \times 1 = \lambda_i. \end{aligned}$$

Then $\mathcal{P}'_{n,k}$ is a subprimal algebra with core $\cong \mathcal{P}_n$.

Proof. Since $\mathcal{P}_n$ is primal, for each $\beta \in \mathcal{P}_n$, $\delta_\beta(\xi)$ is expressible for all $\xi \in \mathcal{P}_n$, and in particular $\delta_0(\xi)$ is so expressible. We lean on this to show:

$$(12.1) \quad \text{for each } \mu \in \mathcal{P}', \delta'_\mu(\xi) \text{ is expressible } \left(\xi \in \mathcal{P}'; \delta'_\mu(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi = \mu \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \right).$$

Here we readily verify the validity of the identities:

$$\begin{aligned} \delta'_0(\xi) &= \delta_0(\xi^2); & \delta'_1(\xi) &= \delta'_0(\xi^\vee); & \delta'_{\beta_1}(\xi) &= \delta'_0(\xi^{\vee^2}); & \dots \\ \delta'_{\lambda_k}(\xi) &= (\xi \times \xi^\wedge \times \xi^{\wedge^2} \times \dots \times \xi^{\wedge^{n-1}})^2 \times [\xi(\xi \xi^\wedge)]^{\wedge^2} \\ \delta'_{\lambda_{k-1}}(\xi) &= \delta'_{\lambda_k}(\xi^\wedge); & \delta'_{\lambda_{k-2}}(\xi) &= \delta'_{\lambda_k}(\xi^{\wedge^2}); & \dots \end{aligned}$$

It is also clear that $\mathcal{P}_n$ is the only subalgebra of $\mathcal{P}'_{n,k}$ and that $\mathcal{P}_n$ is indeed the centroid. Thus for $\beta \in \mathcal{P}_n$ we easily check:

$$\begin{aligned} 0 &= \varrho'_0(\xi) = \delta'_0(\xi) \delta'_1(\xi) \\ 1 &= \varrho'_1(\xi) = (\varrho'_0(\xi))^\vee \\ \beta_1 &= \varrho'_{\beta_1}(\xi) = (\varrho'_0(\xi))^{\vee^2} \quad (\text{for all } \xi \in \mathcal{P}'). \end{aligned}$$

Further, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ are ex-expressible:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \varrho'_{\lambda_1}(\xi) = \xi \times \xi^\wedge \times \dots \times \xi^\wedge_k \\ \lambda_2 &= \varrho'_{\lambda_2}(\xi) = (\varrho'_{\lambda_1}(\xi))^\wedge \quad (\text{for } \xi \in \mathcal{P}_n). \\ &\vdots\end{aligned}$$

Finally we note that $[0, 1, \times, ^\wedge]$ is a frame in $\mathcal{P}'_{n,k}$. From the above the Theorem follows on application of Theorem 9.1.

13. Implication tree

We conclude with a tree partially diagramming various concepts considered in the foregoing. (X below and connected with Y signifies X implies Y .)

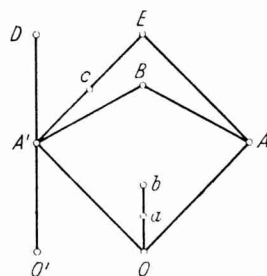


Fig. 1

O primal; O' subprimal; a no subalgebra; b essentially no subalgebra; A' semi-primal; A categorical; B semi-categorical; C functionally complete; D no automorphism; E simple.

Bibliography

- [1] ASTROMOFF, A.: Functionally complete algebras and their generalizations. Doctoral Dissertation, Univ. Calif. Berkeley 1963.
- [2] FOSTER, A. L.: Generalized Boolean theory of universal algebras. Part I. Subdirect sums and normal representation theorem. *Math. Z.* **58**, 306–336 (1953). Part II. Identities and subdirect sums of functionally complete algebras. *Math. Z.* **59**, 191–199 (1953).
- [3] — Functional completeness in the small. Part I. Algebraic structure theorem and identities. *Math. Ann.* **143**, 29–58 (1961). Part II. Algebraic cluster theorem. *Math. Ann.* **148**, 173–191 (1962).
- [4] O'KEEFE, E. S.: Primal clusters of two-element algebras. *Pac. J. Math.* **11**, 1505–1510 (1961).
- [5] PIXLEY, A. F.: Distributivity and permutability of congruence relations in equational classes of algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* **14**, 105–109 (1963).
- [6] SIOSON, F. M.: Some primal clusters. *Math. Z.* **75**, 201–210 (1961).
- [7] BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory*. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 25, rev. ed., Amer. Math. Soc. 1948.

*University of California, Berkeley, Cal., and
Harvey Mudd College, Claremont, Cal. (U.S.A.)*

(Received July 22, 1963)

The Jacobi identity in groups

By
 SEYMOUR BACHMUTH and JACQUES LEWIN*

1. Introduction

Let M be the free metabelian group on n free generators $x_1, x_2, \dots, x_n$. Then denoting commutators by square brackets and conjugation by exponentiation, a convenient set of generators for the commutator subgroup M' of M is given by all commutators of the form

$$(1) \quad [x_i, x_j]^{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}$$

where $i < j$ and the k_i 's are arbitrary integers. Although this set is not a free set of generators for M' , recently BACHMUTH [1] has shown that modulo the Jacobi law

$$(2) \quad [x, y, z][y, z, x][z, x, y] = 1, \quad ([x, y, z] = [[x, y], z])$$

the set (1) is a free set. That is, any non-trivial relation among the elements of (1) is a product of transforms of the Jacobi product. This result indicates that the Jacobi identity is a basic identity for metabelian groups and motivates the following question. What is the variety of groups defined by the Jacobi law? It is well known that this variety cannot be the metabelian variety since B. H. NEUMANN [2] has shown that the metabelian variety cannot be defined by a law involving less than four variables. However, we shall prove

Theorem 1. *The variety of groups which satisfy the Jacobi identity coincides with the variety $\mathcal{J}$ of groups whose 3-generator subgroups are metabelian.*

It is perhaps worthwhile to remark that an examination of our proof shows that the Jacobi law is equivalent to the law

$$[[x, y], [x, z]] = 1.$$

This variety $\mathcal{J}$ has been studied by MACDONALD [3]. A slight extension of one of his theorems gives the following:

Let J be the free group of rank n in the variety $\mathcal{J}$ and let M be the free metabelian group of rank n .

Theorem 2. *$J/J'' \cong M$ and J'' is in the center of J . Moreover, J'' is of exponent 2 and order $2^{C_n^2}$.*

* Both authors were supported by a National Science Foundation grant GP-27.

Here, as usual, J'' denotes the second commutator subgroup of J and C_4^n is the binomial coefficient, where it is understood that $C_4^n = 0$ if $n < 4$.

Our explicit knowledge of the center of J enables us to prove

Theorem 3. *Every free group in the variety $\mathcal{J}$ is residually a finite 2-group. The same techniques enable us to prove*

Theorem 4. *The free groups of the variety $[x, y]^2 = 1$ are residually finite 2-groups.*

We prove Theorem 1 in Section 3. Theorems 2, 3, and 4 are proved in Section 4.

2. Notation and preliminaries

We will use the notation $x \leftrightarrow y$ to mean that x commutes with y when x and y denote elements in a group G . Similarly if A and B are sets of elements of G , then $A \leftrightarrow B$ means every element in A commutes with every element in B . $\bar{x}$ will denote the normal closure of x in G . $[x, y]$ denotes $x^{-1}y^{-1}xy$ and x^y denotes $y^{-1}xy$. Also we will write $[x, y, z]$ for $[[x, y], z]$.

If H and K are subgroups of G , then the subgroup generated by the commutators $[h, k]$ for all $h \in H$ and $k \in K$ is denoted by $[H, K]$. The terms G_n of the lower central series of G are defined inductively by

$$G_1 = G, \quad G_n = [G, G_{n-1}].$$

The second commutator subgroup of G is defined by $G'' = [G', G']$.

The following standard commutator identities will be used:

$$(2.1) \quad \begin{cases} [xy, z] = [x, z]^y [y, z] \\ [x, yz] = [x, z] [x, y]^z. \end{cases}$$

In addition we will use the following obvious fact:

(2.2) If an element commutes with a product of two elements and also commutes with one of the factors, then it commutes with the other factor.

Let P be a property pertaining to groups. Then G is said to be residually a P -group if for every $x \in G$, $x \neq 1$, there exists a group H_x with the property P and an epimorphism $\varphi: G \rightarrow H_x$ such that $x\varphi \neq 1$.

3. Proof of Theorem 1

Let G be a group generated by elements a, b, c and such that the Jacobi law holds in G . We must show that $G' \leftrightarrow G'$. Now G' is generated by the set of elements B consisting of $[a^i, b^j]^{c^k}$, $[b^i, c^j]^{a^k}$, and $[a^i, c^j]^{b^k}$ for arbitrary integers i, j, k . Theorem 1 is proved by means of the following three lemmas.

Lemma 1. $[a, b] \leftrightarrow B$, $[a, c] \leftrightarrow B$, $[b, c] \leftrightarrow B$ implies that $G' \leftrightarrow G'$.

Proof. Since B generates G' , it follows immediately that $[a, b] \leftrightarrow G'$, $[a, c] \leftrightarrow G'$, and that $[b, c] \leftrightarrow G'$. Since G' is normal in G , conjugation by an element $x \in G$ induces an automorphism of G' . Hence

$$[a, b]^x \leftrightarrow (G')^x = G'.$$

Thus $[\overline{a}, \overline{b}] \leftrightarrow G'$ and likewise $[\overline{a}, \overline{c}] \leftrightarrow G'$ and $[\overline{b}, \overline{c}] \leftrightarrow G'$. But G' is generated by $[\overline{a}, \overline{b}]$, $[\overline{a}, \overline{c}]$, and $[\overline{b}, \overline{c}]$. This proves lemma 1.

To prove the theorem we will only prove that $[b, c] \leftrightarrow B$. The other relations in lemma 1 follow by symmetry. First we prove

Lemma 2. $[z, u] \leftrightarrow [u, x][x, z]$ for any elements x, u, z in G .

Proof. A straightforward computation shows that for $x, y, z \in G$,

$$[x, y, z][y, z, x][z, x, y] = [[z, x^{-1}y^{-1}]^{xy}, [y, x][z, x]^y]$$

and hence by our hypothesis that the Jacobi identity is valid in G ,

$$(3.1) \quad [z, x^{-1}y^{-1}]^{xy} \leftrightarrow [y, x][z, x]^y$$

for any elements x, y, z in G . (3.1) may be rewritten as

$$[z, x^{-1}y^{-1}]^{xy} \leftrightarrow ([y^{-1}, x^{-1}][x^{-1}, z])^{xy}$$

or equivalently

$$(3.2) \quad [z, x^{-1}y^{-1}] \leftrightarrow [y^{-1}, x^{-1}][x^{-1}, z].$$

By letting $u = x^{-1}y^{-1}$ and using (2.1), (3.2) can be rewritten as

$$(3.3) \quad [z, u] \leftrightarrow [u, x^{-1}][x^{-1}, z]$$

where x, u, z are still arbitrary elements in G . Hence by relabeling the letters in (3.3), lemma 2 is established.

Lemma 3. $[b, c] \leftrightarrow B$.

Proof. By lemma 2, we have

$$(3.4) \quad [b, c] \leftrightarrow [c, a][a, b].$$

Since (3.4) holds for arbitrary elements of G , replace b by $c^n b$ and use (2.4) to expand the resulting commutators. Then (3.4) becomes

$$(3.5) \quad [b, c] \leftrightarrow [c, a][a, b][a, c^n]^b.$$

This together with (3.4) and (2.2) yields

$$(3.6) \quad [b, c] \leftrightarrow [a, c^n]^b.$$

Since a is arbitrary, we may replace (3.6) by

$$(3.7) \quad [b, c] \leftrightarrow [a^j, c^n]^b.$$

Now replace b by b^{m-1} . Then (3.7) becomes

$$(3.8) \quad [b^m \cdot b^{-1}, c] \leftrightarrow [a^j, c^n]^{b^{m-1}}.$$

Expanding the left hand side of (3.8) and using (2.2) after noticing that

$$[b^m, c]^{b^{-1}} \leftrightarrow ([a^j, c^n]^{b^m})^{b^{-1}} = [a^j, c^n]^{b^{m-1}}$$

yields

$$(3.9) \quad [b^{-1}, c] \leftrightarrow [a^j, c^n]^{b^{m-1}}.$$

Since b is arbitrary and m is any integer, we finally conclude that

$$(3.10) \quad [b, c] \leftrightarrow [a^j, c^n]^{br}$$

for arbitrary integers j, n, r .

Now interchanging b and c in (3.10) yields

$$[b, c]^{-1} \leftrightarrow [a^j, b^n]^{cr}$$

and therefore, for arbitrary j, n, r

$$(3.11) \quad [b, c] \leftrightarrow [a^j, b^n]^{cr}.$$

Note that in (3.10) and (3.11), a^j may be replaced by an arbitrary element of G . In particular, taking $r=0$, we may conclude that

$$(3.12) \quad [b, c] \leftrightarrow [b^n, x], \quad x \in G.$$

To conclude the proof of lemma 3, we need only show

$$(3.13) \quad [b, c] \leftrightarrow [b^j, c^n]^{ar}.$$

Using (2.1), the right hand side of (3.13) can be written as

$$[b^j, c^n]^{ar} = [a^r, b^j] [b^j, c^n a^r].$$

Now

$$[b, c] \leftrightarrow [a^r, b^j]$$

by (3.11) and

$$[b, c] \leftrightarrow [b^j, c^n a^r]$$

by (3.12). This establishes (3.13) and completes the proof of lemma 3 and hence of theorem 1.

4. The free groups of $\mathcal{J}$

Our investigation is based upon the following fundamental result due to I. D. MACDONALD [3]: Let $G \in \mathcal{J}$. Then G'' is of exponent 2, and is contained in the center of G . Furthermore, $[G_3, G_2] = 1$.

For the remainder of this paper, J denotes the free group of rank n in $\mathcal{J}$. Since J/J'' is free metabelian, it is clear that J'' is exactly the center of J . With these facts in mind, we set about proving theorem 2.

Let A be a subset of J . We say that $[[a_1, a_2], [a_3, a_4]]$ is a "double commutator on A " whenever the a_i 's belong to A . Let $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ be a set of free generators for J . Let S_i , $i = 1, 2, \dots, C_4^n$ be the distinct subsets of S that consist of four elements, and let C_i be the set of double commutators on S_i .

We first observe that for arbitrary $w_1, w_2 \in J$

$$[[x_i, x_j]^{w_1}, [x_k, x_l]^{w_2}] = [[x_i, x_j, w_1] [x_i, x_j], [x_k, x_l] [x_k, x_l, w_2]].$$

Since J_3 is in the center of J_2 , it follows that

$$(4.1) \quad [[x_i, x_j]^{w_1}, [x_k, x_l]^{w_2}] = [[x_i, x_j], [x_k, x_l]].$$

Now it is well known (P. HALL [4]) that the set of elements

$$[[x_i, x_j]^{w_1}, [x_k, x_l]^{w_2}], \quad x_i, x_j, x_k, x_l \in S, \quad w_1, w_2 \in J$$

generate J'' . Hence by (4.1) the C_i generate J'' . Therefore to prove theorem 2, we need only show

- (a) each C_i consists of a single element c_i , and
- (b) the c_i 's generate their direct product.

To prove (a), we first note that since J'' is of exponent 2 and J'' is in the center of J ,

$$(4.2) \quad [[x_i, x_j]^{\varepsilon_1}, [x_k, x_l]^{\varepsilon_2}]^{\varepsilon_3} = [[x_i, x_j]^{\varepsilon_3}, [x_k, x_l]^{\varepsilon_3}] \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Let $S_i = \{x, y, z, w\}$. By virtue of (4.2) and the fact that $[u, v]^{-1} = [v, u]$, the proof of (a) reduces to showing that

$$(4.3) \quad [[x, y], [z, w]] = [[x, z], [y, w]] = [[x, w], [z, y]].$$

From the fact that the 3-generator subgroups of J are metabelian, and J'' is contained in the center of J , we have

$$\begin{aligned} 1 &= [[x, yz], [yz, w]] \\ &= [[x, z] [x, y] [x, y, z], [y, w] [y, w, z] [z, w]] \\ &= [[x, z], [y, w]] [[x, y], [z, w]]. \end{aligned}$$

Thus

$$[[x, y], [z, w]] = [[x, z], [y, w]]$$

since J'' is of exponent 2. The second identity in (4.3) is proved in a similar manner and thus (a) is proved.

Before proving (b) we need the following observation. Let H be the free $\mathcal{J}$ group on 4 generators a, b, c, d . Then $H'' = \{1, [[a, b], [c, d]]\}$. H'' is not trivial since B. H. NEUMANN [1] constructed a finite 4 generator 2-group T that belongs to $\mathcal{J}$, but such that T is not metabelian.

To prove (b), let $x \in J''$ and assume

$$(4.4) \quad x = c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_m}, \quad i_1 < i_2 < \dots < i_m, \quad m \leq C_4^m.$$

Let N be the normal subgroup generated by the set $K = S - S_{i_1}$. Clearly $J/N \cong H$. Let ν be the natural epimorphism $\nu: J \rightarrow H$. Then $S_{i_1} \nu = \{a, b, c, d\}$ and $K\nu = \{1\}$. Since $K \cap S_{i_j} \neq \emptyset$ for $j > 1$, it follows that

$$c_{i_j} \nu = \begin{cases} [[a, b], [c, d]] & \text{if } j = 1 \\ 1 & \text{if } j \neq 1 \end{cases}$$

and hence $x\nu = [[a, b], [c, d]] \neq 1$. Hence $x \neq 1$. This shows that every element of J'' can be expressed uniquely in the form (4.4). Since the c_i 's generate J'' and J'' is of exponent 2, it is clear that any element $x \in J''$ can be expressed in the form (4.4). This proves (b) and hence theorem 2.

We can now easily obtain our last results.

Theorem 3. *J is residually a finite 2-group.*

We first prove the theorem for H . Let $x \in H$, $x \neq 1$. If $x = [[a, b], [c, d]]$, then since T is a factor group of H , there exists an epimorphism $\varphi: H \rightarrow T$. Since T is not metabelian, $x\varphi \neq 1$. If $x \neq [[a, b], [c, d]]$, let $\mu: H \rightarrow H/H''$ be the natural homomorphism. Then by our above results, $x \notin H''$ and therefore $x\mu \neq 1$. Since $H/H'' \cong M$, the free metabelian group on 4 generators, and since M is residually a finite 2-group (GRUENBERG [5]), we conclude that H is residually a finite 2-group.

Now let $x \in J$, $x \neq 1$. If $x \in J''$, then

$$x = c_{i_1} \dots c_{i_m}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq C_4^m$$

and, as in the proof of (b) above, there exists an epimorphism $\nu: J \rightarrow H$ such that $x\nu \neq 1$. If $x \notin J''$, let $\mu: J \rightarrow J/J''$ be the natural epimorphism. Then $x\mu \neq 1$. Since $J/J'' \cong M$, the free metabelian group on n generators, and since M and H are both residually a finite 2-group, the proof is complete.

Let $\mathcal{V}$ be the variety defined by $[x, y]^2 = 1$. Then MACDONALD [3] has shown that $\mathcal{V}$ is a subvariety of $\mathcal{J}$ and that the group T mentioned above is in $\mathcal{V}$. Let V be the $\mathcal{V}$ free group of rank n . Then it follows from the same arguments used to prove Theorem 2 that V'' is canonically isomorphic to J'' . Let F be the absolutely free group of rank n . Then, it is clear that $V/V'' \cong F/(F')^2$. G. BAUMSLAG [7] has shown that $F/(F')^2$ is residually a finite 2-group. Now, an exact replica of the proof of Theorem 3 replacing J by V and M by $F/(F')^2$ shows that V is residually a finite 2-group. Thus we have proved Theorem 4.

Of course, if $n > 3$, then J and V contain elements of order 2 and hence cannot be residually a finite p -group for any prime $p \neq 2$.

It may be worth noting that since M and $F/(F')^2$ are both residually 2 generator groups (G. BAUMSLAG, B. H. NEUMANN, H. NEUMANN, and P. NEUMANN [6]), we have also shown that J and V are residually 4 generator groups.

References

- [1] BACHMUTH, S.: Automorphisms of Free Metabelian Groups. Thesis. New York University.
- [2] NEUMANN, B. H.: On a Conjecture of Hanna Neumann. Proc. Glasgow Math. Assoc. **3**, 13–17 (1956).
- [3] MACDONALD, I. D.: On Certain Varieties of Groups. Math. Z. **76**, 270–282 (1961).
- [4] HALL, P.: Some Sufficient Conditions for a Group to be Nilpotent. Ill. J. of Math. **2**, 787–801 (1958).
- [5] GRUENBERG, K. W.: Residual Properties of Infinite Soluble Groups. Proc. London Math. Soc. (3) **7**, 29–62 (1957).
- [6] BAUMSLAG, G., B. H. NEUMANN, H. NEUMANN and P. NEUMANN: Unpublished.
- [7] BAUMSLAG, G.: Wreath Products and Extensions. Math. Z. **81**, 286–299 (1963).

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York 3, N.Y. (U.S.A.)

(Received September 9, 1963)