Werk

Label: Periodical issue

Jahr: 1963

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0082|log31

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

X 80

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

B. ECKMANN ZÜRICH
E. HEINZ MÜNCHEN
R. NEVANLINNA HELSINKI
K. ZELLER TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

A. E. INGHAM H. KNESER W. MAGNUS
O. PERRON G. PICKERT

82. BAND, 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 24. SEPTEMBER 1963)

SPRINGER-VERLAG
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
1963

Math. Z.

4186

Niedersächsische Staats- u.
Universitätsbibliothek

Die **Mathematische Zeitschrift**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e.V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole *o* und *O*, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

Manuskripte nehmen entgegen:

B. Eckmann, Zürich (Schweiz), Eidgen. Technische Hochschule
E. Heinz, 8 München, Schellingstr. 2-8
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Math. Inst. d. Universität, Porthania.
H. Wielandt, 74 Tübingen, Ob dem Viehweidle 21b.
K. Zeller, 74 Tübingen, Sonnenstraße 11

Springer-Verlag OHG

1 Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3, Fernsprecher 830301, Fernschreibnummer 01-83319
69 Heidelberg 1, Postfach 3027, Fernsprecher 27901, Fernschreibnummer 04-61723

82. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

KNOBLOCH, H.-W., Eine neue Methode zur Approximation periodischer Lösungen nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung 177

GASCHÜTZ, W., und U. LUBESEDER, Kennzeichnung gesättigter Formationen . . . 198

SONNER, J., Universal and special problems 200

SCHNEIDER, A., Eine Verallgemeinerung der Kapteynschen Reihen 212

HOCHSTADT, H., Functiontheoretic properties of the discriminant of Hill's equation 237

SAH, C.-H., On the normality of Hall subgroups in finite groups 243

PIPER, F. C., Elations of finite projective planes 247

HOOLEY, C., On the representations of a number as the sum of two cubes 259

KNOBLOCH, H.-W.
Math. Zeitschr. 82, 177–197 (1963)

Eine neue Methode zur Approximation periodischer Lösungen nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

Von
HANS-WILHELM KNOBLOCH

Es wird in dieser Arbeit eine Reihe von hinreichenden Bedingungen dafür angegeben, daß eine Differentialgleichung $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)$ eine Lösung $\xi(t)$ besitzt, die der Randbedingung

$$\xi(0)=\xi(T), \qquad \dot{\xi}(0)=\dot{\xi}(T) \tag{1}$$

genügt und zudem die Eigenschaft besitzt, daß die Trajektorie $(\xi,\dot{\xi},t)$ für $0\leqq t\leqq T$ in einem gewissen endlichen Bereich $\tilde{\Omega}$ des Bewegungsraumes (d.h. des $x,\dot{x},t$-Raumes) verbleibt. T ist dabei eine vorgegebene Zahl >0. f soll stetig in $\tilde{\Omega}$ sein (abgesehen von Sprüngen an endlich vielen Ebenen $t=t_i$) und einer Lipschitz-Bedingung bezüglich x und $\dot{x}$ genügen. Es wird jedoch nicht ausdrücklich vorausgesetzt, daß f etwa periodisch mit der Periode T ist.

In analytischer Form werden die besagten Bedingungen in Satz 1 und Satz 4 aufgestellt. Die Aussage des ersten Satzes läßt sich geometrisch im Bewegungsraum interpretieren, wobei sich eine gewisse Verwandtschaft mit Resultaten zeigt, die man der topologischen Methode von WAŻEWSKI verdankt (vgl. [1], [10][1]). In der Tat ist ein Spezialfall von Satz 1 auf diesem Wege früher hergeleitet worden [5]. Über das, was dort erreicht wurde, führt unsere Methode jedoch wesentlich hinaus. Dies wird deutlich an einigen expliziten Existenzkriterien, die wir in Abschnitt 4 herleiten werden. Bei diesen Kriterien geht man von der Voraussetzung aus, daß zwei Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ mit $\alpha\leqq\beta$ gegeben sind, die folgenden Bedingungen genügen. Es ist

$$\begin{cases} -\ddot{\alpha}+f(\alpha,\dot{\alpha},t)\leqq 0, \qquad -\ddot{\beta}+f(\beta,\dot{\beta},t)\geqq 0 \quad \textit{für alle } t\in[0,T], \\ \alpha(0)=\alpha(T), \qquad \beta(0)=\beta(T), \qquad \dot{\alpha}(0)\geqq\dot{\alpha}(T), \qquad \dot{\beta}(0)\leqq\dot{\beta}(T). \end{cases} \tag{2}$$

In Verbindung mit einer Wachstumsbeschränkung der Form

$$|f(x,y,t)|\leqq C(x)\,y^2, \quad \text{falls} \quad y\geqq y_0, \tag{3}$$

reicht (2) aus, um die Existenz einer Lösung ξ zu gewährleisten, die der Randbedingung (1) sowie den Ungleichungen $\alpha\leqq\xi\leqq\beta$ für alle $t\in[0,T]$ genügt (Satz 2).

* Diese Arbeit entstand mit Unterstützung der National Science Foundation.

[1]) Zahlen in [ ] verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

Für Differentialgleichungen vom Liénardschen Typ, bei denen f also die Form $q(x, \dot{x})\,\dot{x} + p(x) + e(t)$ (e = eine Funktion von t allein) hat, ergibt sich daraus die folgende Aussage (Satz 3): Sind α und β zwei Konstante mit $\alpha < \beta$, ist $p(\alpha) + e(t) \leqq 0$, $p(\beta) + e(t) \geqq 0$ für alle $t \in [0, T]$, wächst ferner $|q|$ nicht stärker als $|\dot{x}|$ (für $|\dot{x}| \to \infty$) und ist f stetig und genügt einer (lokalen) Lipschitz-Bedingung in $x, \dot{x}$, so existiert eine Lösung ξ, die (1) genügt und für die $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ für alle $t \in [0, T]$ gilt. Dieses Resultat scheint in der vorliegenden umfangreichen Literatur über die Liénardsche Gleichung nicht enthalten zu sein. Lediglich mit einem von GOMORY [3] stammenden Kriterium ergeben sich gewisse Berührungspunkte, und zwar in dem Spezialfall, daß q von $\dot{x}$ unabhängig ist und q, p Polynome in x sind. — Insbesondere vermerken wir, daß keine Dissipativitätsbedingung im Sinne von LEVINSON [7] gestellt wird. Es werden also auch Differentialgleichungen erfaßt, bei denen sehr wohl unbeschränkte Lösungen auftreten können. Ein Beispiel hierfür ist die Differentialgleichung $\ddot{x} = |\dot{x}|\,\dot{x} - \sin x - \sin t$, die gemäß Satz 3 periodische Lösungen ξ mit $2\pi\nu + \frac{\pi}{2} \leqq \xi \leqq 2\pi\nu + \frac{3\pi}{2}$ besitzt.

Im 5. Abschnitt betrachten wir ein weiteres System von Bedingungen, durch dessen Erfülltsein die Existenz von periodischen Lösungen garantiert wird (Satz 4). Zum Unterschied von Satz 1 tritt hierbei die Forderung (2) nur in abgeschwächter Form auf. Anwendungsmöglichkeiten von Satz 4 werden am Beispiel der Differentialgleichung $\ddot{x} = -a\,\dot{x}^2 - \sin x - \sin t + c$, $c \geqq 0$, aufgezeigt. Diese Gleichung besitzt keine periodische Lösung, falls $c > 2$ ist (da nämlich dann, wie man sofort sieht, eine Lösung nie ein relatives Maximum haben kann). Wir werden nun aber beweisen, daß im Falle $c < 2$ Lösungen der Periode 2π existieren, vorausgesetzt, daß a oberhalb einer (von c abhängigen) Schranke liegt.

Im letzten Abschnitt wird ein Verfahren entwickelt, mit dessen Hilfe man die Approximation einer periodischen Lösung ξ durch zwei, der Bedingung (2) genügenden Funktionen α, β schrittweise verbessern kann. Bei jedem Schritt wird dabei die Differentialgleichung mit geändert, jedoch so, daß ihre periodischen Lösungen die gleichen bleiben und die neuen Schranken mindestens eine dieser Lösungen einschließen. Ob man auf diese Weise α und β einander beliebig nahe bringen kann, ist allerdings fraglich. Als heuristisches Prinzip dürfte das Verfahren aber vielleicht nicht ohne Interesse sein.

Die in dieser Arbeit zur Anwendung kommende Methode ist in einigen Teilen schon in [5] vorgebildet worden, baut aber im Gegensatz zu dort nicht auf den Arbeiten von MASSERA [8] und WAŻEWSKI [10] auf. Grundlage ist vielmehr ein von L. CESARI kürzlich entwickeltes, in der Störungstheorie entstandenes, jetzt aber unter sehr allgemeinen Voraussetzungen anwendbares Verfahren, durch welches die Frage nach der Existenz von periodischen Lösungen einer Differentialgleichung zurückgeführt wird auf die Frage, wann ein in gewisser Weise bestimmtes System von Funktionen eine gemeinsame Nullstelle hat (vgl. [2], [6]; eine zusammenfassende Darstellung findet man in [4], Abschnitt 11). Im Abschnitt 1 werden wir mittels dieser Methode

einen allgemeinen Existenzsatz für periodische Lösungen beweisen. Später wird nur noch Hilfssatz 1, nicht aber das Verfahren von CESARI selbst benutzt. Im übrigen wird ein einfaches Prinzip in vielen Variationen angewandt, das sich auf die kurze Formel bringen läßt: Man ändere die Differentialgleichung ab, ohne ihre periodischen Lösungen zu verändern.

Im Interesse einer möglichst einfachen Darstellung sind bei der Wahl unserer Bezeichnungen die folgenden Verabredungen benutzt worden. Allen Ausführungen liegt ein festes, mit I bezeichnetes t-Intervall $[0, T]$ zugrunde. Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt, ist von jeder auftretenden Funktion von t stets vorauszusetzen, daß sie auf I definiert, stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar ist (d.h. Funktion und Ableitung haben nur endlich viele Unstetigkeiten und dies sind Sprungstellen). Eine Funktion $h(t)$ heißt periodisch, falls h stetig ist und $h(0)=h(T)$ gilt. Eine Lösung ξ einer Differentialgleichung heißt eine periodische Lösung, falls ξ und $\dot{\xi}$ periodisch sind. Das zugehörige Kurvenstück $(\xi, \dot{\xi}, t)$ nennen wir kurz eine periodische Trajektorie. Von einer Funktion $F(x, t)$ (bzw. $F(x, y, t)$) sagen wir, sie sei in einem Bereich Σ der (x, t)-Ebene (bzw. des (x, y, t)-Raumes) stetig bis auf endlich viele t-Sprünge, falls I in endlich viele Intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ zerlegt werden kann, derart daß F in jedem durch $\{(x, t)\in\Sigma$ (bzw. $(x, y, t)\in\Sigma)$, $t_i\leqq t\leqq t_{i+1}\}$ charakterisierten Teilbereich stetig ist. Schließlich sagen wir, F sei auf einem abgeschlossenen Bereich Σ stetig differenzierbar, falls F in ein Gebiet, welches Σ im Inneren enthält, so fortgesetzt werden kann, daß dort alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind. Wenn F als eine auf Σ stückweise stetig differenzierbare Funktion bezeichnet wird, bedeutet dies, daß Σ in endlich viele abgeschlossene Bereiche zerlegt werden kann, in denen F stetig differenzierbar ist.

1. Existenz periodischer Lösungen für ein spezielles Gleichungssystem

Es soll hier ein System von Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i=f_i(x, t), \qquad x=(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.1}$$

$i=1, \ldots, n$, betrachtet werden, an dem sich die Methode von CESARI in einfacher Weise demonstrieren läßt. Wir nehmen an, daß jede der Funktionen $f_i=f$ folgenden Bedingungen genügt.

(1.2) *f ist definiert für alle $(x, t)\in R^n\times I$, abgesehen eventuell von den Punkten endlich vieler Hyperebenen $t=t_j$. In jedem durch $\{(x, t): t_i<t<t_{i+1}\}$ definierten Teil von $R^n\times I$ ist f in allen Veränderlichen stetig, beschränkt und genügt bezüglich x einer globalen L-Bedingung ($=$ Lipschitz-Bedingung).*

Mit $A=\infty$ (d.h. der Raum X ist hier $R^n\times I$) erfüllen die Funktionen f_i dann alle Voraussetzungen (i), (ii), die in [6] (Beginn von Abschnitt 3) an die rechten Seiten der dort betrachteten Differentialgleichungen gestellt werden. Die Abschätzungsfunktionen L, K_1 können hier als Konstante und es kann $L_0=0$ gewählt werden, der Exponent α ist 1. Der zu den Funktionen f_i gehörige Operator F ist auf dem gesamten Funktionenraum P_∞ erklärt und die Menge

$F(\mathsf{P}_\infty)$ ist beschränkt (gemäß [6], (3.6)). Die Gleichung $\xi = \lambda(a,t) + F(\xi)$ (vgl. [6], (3.11)) hat daher für jedes trigonometrische Polynom $\lambda(a,t)$ vom Grade $\leqq m$ (mit Koeffizientensystem a) genau eine Lösung $\xi(a,t)$ und es gilt $|\xi - \lambda| \leqq C$, wobei C von a, t unabhängig ist. Wir wollen dies kurz in der Form

$$\xi(a,t) = \lambda(a,t) + O(1) \tag{1.3}$$

niederschreiben. Die determinierenden Funktionen $A_{i\mu}(a)$ (s. [6], Schluß von Abschnitt 3) sind dann für alle $a = \{a_{i\mu}\} \in R^{(2m+1)n}$ erklärt und stetig. Aus (1.3) und [6], Formel (3.16), folgt ferner die asymptotische Beziehung

$$A_{i\mu}(a) = \gamma_\mu a_{i\mu^*} + O(1), \qquad i = 1, \ldots, n, \ \mu = 1, \ldots, 2m. \tag{1.4}$$

Die γ_μ sind dabei numerische Konstante $\neq 0$, $\mu \to \mu^*$ stellt eine Permutation der Ziffern $1, \ldots, n$ dar. Für die A_{i0} haben wir gemäß [6], (3.16), die Darstellung

$$A_{i0}(a) = -\sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^T f_i\big(\xi(a,\tau), \tau\big)\, d\tau, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Wir beweisen nunmehr folgenden

Hilfssatz 1. *Die Funktionen f_i mögen den Bedingungen* (1.2) *genügen. Ferner gebe es eine Permutation $i \to j(i)$ der Ziffern $1, \ldots, n$ und zu jedem i zwei Konstante S_i, T_i mit $S_i < T_i$, derart daß $f_{j(i)}(x,t)$ in den beiden Halbräumen $x_i < S_i$, $x_i > T_i$ entgegengesetzt konstantes Vorzeichen hat*[2]*. Dann hat das System* (1.1) *mindestens eine periodische Lösung, d.h. eine Lösung ξ mit $\xi_i(0) = \xi_i(T)$, $i = 1, \ldots, n$.*

Beweis. Gemäß [6], Theorem 1, haben wir zu zeigen, daß die Funktionen $A_{i\mu}$ mindestens eine gemeinsame Nullstelle haben. Zu diesem Zwecke wird im a-Raume ein Quader Q konstruiert werden, der folgende Eigenschaft besitzt. Es lassen sich jeder Funktion $A_{i\mu}$ ein Paar gegenüberliegender Seiten von Q eindeutig zuordnen, derart daß $A_{i\mu}$ auf den beiden Seiten entgegengesetzt konstantes Vorzeichen hat. Nach einem bekannten Satz von MIRANDA [9] enthält Q dann eine gemeinsame Nullstelle der $A_{i\mu}$.

Wählt man die Zahl K_1 hinreichend groß, so hat die Funktion $A_{i\mu}$ $(\mu > 0)$ auf den beiden Hyperebenen $a_{i\mu^*} = \pm K_1$ entgegengesetztes Vorzeichen, wie sich unmittelbar aus (1.4) ergibt. Wir halten K_1 von nun an fest und beschränken die $a_{i\mu}$ mit $\mu > 0$ auf den Bereich $|a_{i\mu}| \leqq K_1$. Indem man zur Komponentenschreibweise übergeht, erhält man nun aus (1.3) die n Relationen

$$\begin{aligned} \xi_i(a,t) &= \lambda_i(a,t) + O(1) \\ &= \sum_{\mu=0}^{2m} a_{i\mu}\, c_\mu(t) + O(1) \\ &= a_{i0} + O(K_1), \qquad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

[2] Konstantes Vorzeichen heißt: f kann in dem betreffenden Gebiet nicht sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Entgegengesetzt heißt: f ist $\geqq 0$ in einem, $\leqq 0$ in dem anderen Gebiet.

(vgl. auch [6], (3.8)). Es läßt sich daher ein K_0 so finden, daß

$$(1.6)\quad \begin{cases} \xi_i(a,t) < S_i \text{ ist, falls } a_{i0} = -K_0, & |a_{i\mu}| \leqq K_1 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, 2m, \\ \xi_i(a,t) > T_i \text{ ist, falls } a_{i0} = +K_0, & |a_{i\mu}| \leqq K_1 \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \ldots, 2m. \end{cases}$$

Q sei nun die Gesamtheit aller $a = \{a_{i\mu}\}$ mit $|a_{i0}| \leqq K_0$ $(i = 1, \ldots, n)$, $|a_{i\mu}| \leqq K_1$ $(i = 1, \ldots, n;\ \mu = 1, \ldots, 2m)$. Daß $A_{i\mu}$ auf den beiden Seiten $a_{i\mu^*} = \pm K_1$ entgegengesetzt konstantes Vorzeichen hat, falls $\mu > 0$, haben wir oben schon festgestellt. Schließlich folgt aus (1.6) und der Voraussetzung des Hilfssatzes, daß $f_{j(i)}(\xi(a,t), t)$ (als Funktion von a und t) auf den Seiten $a_{i0} = \pm K_0$ entgegengesetzt konstantes Vorzeichen hat, falls $a \in Q$, $t \in I$. Gemäß (1.5) hat daher auch $A_{j(i)0}$ auf $a_{i0} = \pm K_0$ entgegengesetzt konstantes Vorzeichen, womit alles gezeigt ist.

2. Vorbereitende Betrachtungen

Wir stellen hier einige Hilfsmittel zusammen, die wir im nächsten Abschnitt brauchen.

Es sei σ ein abgeschlossener, beschränkter Bereich der (x,t)-Ebene und Σ der durch $\{(x,y,t)\colon (x,t) \in \sigma\}$ definierte zylindrische Bereich des (x,y,t)-Raumes. Auf σ seien zwei stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktionen $\Phi(x,t)$, $\Psi(x,t)$ mit $\Phi \leqq \Psi$ gegeben. Φ, Ψ erfüllen eine lokale und somit — wegen der Beschränktheit von σ — auch globale L-Bedingung bezüglich x.

Wir setzen nun, für $(x,y,t) \in \Sigma$,

$$(2.1)\quad Y(x,y,t) = \begin{cases} \Phi(x,t), & \text{falls} \quad y < \Phi(x,t), \\ y, & \text{falls} \quad \Phi(x,t) \leqq y \leqq \Psi(x,t), \\ \Psi(x,t), & \text{falls} \quad y > \Psi(x,t). \end{cases}$$

Y ist eine in Σ beschränkte und stetige Funktion. Überdies gilt

Hilfssatz 2. *Y genügt bezüglich x und y in Σ einer globalen L-Bedingung.*

Beweis. Man braucht nur zu zeigen, daß eine solche Bedingung in jeder einzelnen Veränderlichen besteht, und zwar mit einer Konstanten, die von der anderen Veränderlichen unabhängig ist. Daß eine L-Bedingung in y besteht, liegt auf der Hand (Lipschitz-Konstante 1). Hinsichtlich der Abhängigkeit von x gehen wir so vor. Seien $P_i = (x_i, y, t)$ $(i = 1, 2)$ zwei Punkte von Σ und sei $\Delta = Y(P_1) - Y(P_2)$. Falls P_i beide zwischen den Flächen $y = \Phi(x,t)$, $y = \Psi(x,t)$ liegen, ist $\Delta = 0$, falls sie beide über ihnen liegen, ist $\Delta = \Psi(x_1,t) - \Psi(x_2,t)$, falls sie unter ihnen liegen, ist $\Delta = \Phi(x_1,t) - \Phi(x_2,t)$. Es bleibt somit noch der Fall zu betrachten, daß P_1, P_2 von einer oder beiden Flächen getrennt werden. Wenn etwa $\Phi(x_2,t) \leqq y < \Phi(x_1,t)$, so wird $Y(P_1) = \Phi(x_1,t)$, $\Phi(x_2,t) \leqq Y(P_2) \leqq y$, und man bekommt $\Phi(x_2,t) \leqq Y(P_2) \leqq \Phi(x_1,t) = Y(P_1)$. Daraus folgt $|\Delta| \leqq |\Phi(x_2,t) - \Phi(x_1,t)|$. Analog ergibt sich $|\Delta| \leqq |\Psi(x_2,t) - \Psi(x_1,t)|$, falls eines der P_i oberhalb der beiden Flächen liegt.

Wir benötigen später noch zwei weitere elementare Hilfssätze.

Hilfssatz 3. *Sei $\Delta(t)$ eine periodische Funktion mit folgender Eigenschaft. Aus $\Delta(t_0)<0$ folgt stets, daß Δ in einer Umgebung von t_0 monoton ist, und zwar soll dies für alle solche t_0 streng und im gleichen Sinne gelten. Dann ist $\Delta \geqq 0$ für alle $t \in I$.*

Beweis. Es genügt, den Beweis unter der Voraussetzung zu führen, daß die Funktion an allen Stellen monoton fällt, an denen sie negativ ist. (Im anderen Falle betrachte man $\Delta(T-t)$ an Stelle von $\Delta(t)$.) Wir denken uns Δ nach beiden Seiten über das Intervall I hinaus unbegrenzt periodisch fortgesetzt. Die erweiterte Funktion ist dann ebenfalls stetig und fällt monoton, sobald sie negativ wird. Daher kann es keine zwei Stellen t_0, t_1 geben, derart daß $t_0<t_1$, $\Delta(t_0)<0$, $\Delta(t_1)>0$ gilt. Wegen der Periodizität von Δ können die beiden letzten Ungleichungen dann aber auch nicht zutreffen, wenn $t_0>t_1$ ist. Daher gilt entweder $\Delta \geqq 0$ für alle t oder $\Delta<0$ für alle t. Die zweite Möglichkeit scheidet aber aus, da Δ dann durchweg monoton und somit nicht periodisch wäre.

Hilfssatz 4. *Sei die Funktion Δ stetig auf I, abgesehen von höchstens endlich vielen Sprungstellen, und sei eine der beiden Voraussetzungen* a), b) *erfüllt.*

a) *Es ist $\Delta(T) \leqq \Delta(0)$ und Δ in einer Umgebung jeder (eventuellen) Nullstelle streng monoton wachsend.*

b) *Es ist $\Delta(T) \geqq \Delta(0)$ und Δ in einer Umgebung jeder (eventuellen) Nullstelle streng monoton fallend.*

Dann kann Δ keine Nullstellen haben. Anmerkung: Als Nullstellen sind auch Sprungstellen anzusehen, falls die beiden Grenzwerte entgegengesetztes Vorzeichen haben oder einer von ihnen 0 *ist.*

Beweis. Aus der Monotonievoraussetzung folgt zunächst, daß Δ höchstens eine Nullstelle, etwa bei t_0, hat. Im Falle a) ist dann $\Delta<0$ für $t<t_0$, $\Delta>0$ für $t>t_0$ und daher $\Delta(0)<\Delta(T)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Entsprechend verfährt man im Falle b).

3. Existenz periodischer Lösungen

Es soll zunächst die Gestalt derjenigen Gebiete $\tilde{\Omega}$ näher beschrieben werden, in denen wir im folgenden periodische Trajektorien nachweisen wollen.

Gegeben seien zwei periodische Funktionen $\alpha(t)$, $\beta(t)$ mit der Eigenschaft $\alpha(t) \leqq \beta(t)$. Die erste und zweite Ableitung von α und β soll existieren und bis auf endlich viele Sprungstellen stetig sein. 0, T sind dabei als Sprungstellen z.B. von $\dot{\alpha}$ anzusehen, falls $\dot{\alpha}(0) \neq \dot{\alpha}(T)$ ist. Hinsichtlich der Sprungstellen für die ersten Ableitungen seien folgende Voraussetzungen erfüllt: Es ist für alle $t \in I$

$$(3.1) \qquad \lim_{h \to 0,\, h>0} \left(\dot{\alpha}(t+h) - \dot{\alpha}(t-h)\right) \geqq 0, \qquad \lim_{h \to 0,\, h>0} \left(\dot{\beta}(t+h) - \dot{\beta}(t-h)\right) \leqq 0.$$

(Falls $t=0$, T ist, hat man $t+h$ usw. modulo T zu nehmen).

Wir bezeichnen im folgenden mit ω, ω' bzw. $\Omega, \Omega', \widetilde{\Omega}$ die nachstehend beschriebenen Gebiete der (x, t)-Ebene bzw. des (x, y, t)-Raumes

$$
(3.2)\qquad \begin{cases} \omega = \{(x,t)\colon\ t \in I,\ \alpha(t) \leqq x \leqq \beta(t)\}, \\ \omega' = \{(x,t)\colon\ t \in I,\ \alpha(t) < x < \beta(t)\}, \\ \Omega = \{(x,y,t)\colon\ (x,t) \in \omega\}, \\ \Omega' = \{(x,y,t)\colon\ (x,t) \in \omega'\}, \\ \widetilde{\Omega} = \{(x,y,t)\colon\ (x,t) \in \omega,\ \Phi(x,t) \leqq y \leqq \Psi(x,t)\}. \end{cases}
$$

Von den Funktionen Φ, Ψ wird dabei angenommen, daß sie auf ω stetig und stetig differenzierbar sind und daß $\Phi(x,t) \leqq \Psi(x,t)$ für alle $(x,t) \in \omega$ gilt.

Wir formulieren nun

Satz 1. *Es sei die Funktion $f(x, y, t)$ bis auf endlich viele t-Sprünge stetig auf $\widetilde{\Omega}$ und genüge einer L-Bedingung bezüglich x und y. Ferner seien folgende weiteren Voraussetzungen erfüllt. a) Es ist für alle t*

$$
(3.3)\qquad \Phi(\alpha,t) \leqq \dot{\alpha} \leqq \Psi(\alpha,t), \qquad \Phi(\beta,t) \leqq \dot{\beta} \leqq \Psi(\beta,t),
$$

$$
(3.4)\qquad -\ddot{\alpha} + f(\alpha, \dot{\alpha}, t) \leqq 0, \qquad -\ddot{\beta} + f(\beta, \dot{\beta}, t) \geqq 0.
$$

b) Es ist

$$
(3.5)\qquad \Phi(x,0) = \Phi(x,T), \qquad \Psi(x,0) = \Psi(x,T).
$$

Jede der beiden Funktionen

$$
(3.6)\qquad \Phi_x \Phi + \Phi_t - f(x, \Phi, t) \quad \text{und} \quad \Psi_x \Psi + \Psi_t - f(x, \Psi, t)
$$

hat auf ω konstantes Vorzeichen. Dann besitzt die Differentialgleichung

$$
\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)
$$

eine periodische Trajektorie in $\widetilde{\Omega}$.

Beweis. Obige Differentialgleichung ist mit dem System

$$
(3.7)\qquad \dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t)
$$

äquivalent. Wir werden nun die rechten Seiten dieser Gleichungen durch geeignete Funktionen $f_1(x_1, x_2, t)$, $f_2(x_1, x_2, t)$ ersetzen, derart daß einerseits Hilfssatz 1 anwendbar wird, andererseits die periodischen Lösungen des abgeänderten Systemes auch Lösungen von (3.7) sind. f_1 wird wie folgt definiert

$$
f_1(x,y,t) = \begin{cases} -C, & \text{falls} \quad y < -C, \\ y, & \text{falls} \quad -C \leqq y \leqq C, \\ C, & \text{falls} \quad y > C, \end{cases}
$$

wobei C eine irgendwie gewählte Zahl ist, die der Bedingung

$$
(3.8)\qquad C > |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}|, |\Phi(x,t)|, |\Psi(x,t)|
$$

für alle $t \in I$ bzw. $(x, t) \in \omega$ genügt. f_1 ist periodisch in t und erfüllt die Bedingung (1.2). Ferner gilt

$$f_1 = y, \text{ falls } (x, y, t) \in \tilde{\Omega}, \tag{3.9}$$

$$f_1 > 0 \text{ für } y \geqq C, \quad f_1 < 0 \text{ für } y \leqq -C. \tag{3.10}$$

Als nächstes wird die Funktion $f(x, y, t)$ in den vollen Raum $R^2 \times I$ zu einer Funktion f_2 fortgesetzt. Zuerst erklären wir f_2 in Ω mit Hilfe der in (2.1) eingeführten Funktion Y wie folgt

$$f_2(x, y, t) = \begin{cases} f\big(x, Y(x, y, t), t\big) + c_1(f_1 - \Phi), & \text{falls } y < \Phi(x, t), \\ f\big(x, Y(x, y, t), t\big) = f(x, y, t), & \text{falls } (x, y, t) \in \tilde{\Omega}, \\ f\big(x, Y(x, y, t), t\big) + c_2(f_1 - \Psi), & \text{falls } y > \Psi(x, t), \end{cases} \tag{3.11}$$

c_1, c_2 sind dabei Konstante und seien so gewählt, daß

$$\begin{cases} \Phi_x f_1 + \Phi_t - f_2(x, y, t) \neq 0 \text{ ist, falls } y < \Phi(x, t), \\ \Psi_x f_1 + \Psi_t - f_2(x, y, t) \neq 0 \text{ ist, falls } y > \Psi(x, t). \end{cases} \tag{3.12}$$

Dies läßt sich stets erreichen. Man hat nämlich, z.B. für $y < \Phi(x, t)$,

$$\Phi_x f_1 + \Phi_t - f_2(x, y, t) = \Phi_x \Phi + \Phi_t - f(x, \Phi, t) + (f_1 - \Phi)(\Phi_x - c_1).$$

Da nun Φ_x beschränkt ist und $y < \Phi(x, t)$ stets $f_1 - \Phi < 0$ zur Folge hat, kann man durch passende Wahl von c_1 dafür sorgen, daß $(f_1 - \Phi)(\Phi_x - c_1) \neq 0$ ist und zudem ein Vorzeichen besitzt, das dem von $\Phi_x \Phi + \Phi_t - f(x, \Phi, t)$ (welches voraussetzungsgemäß konstant ist) nicht entgegengesetzt ist.

Wir bemerken noch, daß man die Darstellung (3.11) auch in der nachstehenden Form zusammenfassen kann.

$$f_2 = f\big(x, Y(x, y, t), t\big) + c_1\big(Y_1(x, y, t) - \Phi(x, t)\big) + c_2\big(Y_2(x, y, t) - \Psi(x, t)\big), \tag{3.11'}$$

wobei Y_1, Y_2 Funktionen vom gleichen Typ wie Y sind, und zwar erhält man z.B. Y_1, indem man in der Definition (2.1) Φ durch $-C$ und Ψ durch Φ ersetzt. Entsprechend wird Y_2 gebildet. Aus (3.11') und Hilfssatz 2 ergibt sich sofort, daß f_2 in Ω einer globalen L-Bedingung genügt.

Um die Definition von f_2 auf den vollen Raum $R^2 \times I$ ausdehnen zu können, benötigen wir eine Hilfsfunktion. Sei

$$k(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < u < 0, \\ C_1 u & \text{für } 0 \leqq u \leqq 1, \\ C_1 & \text{für } 1 \leqq u < \infty, \end{cases}$$

und sei die Konstante C_1 so gewählt, daß

$$C_1 > |f_2| \quad \text{für alle } (x, y, t) \in \Omega \tag{3.13}$$

ist. k ist beschränkt, stetig und genügt einer globalen L-Bedingung in u. Wir ergänzen nun die Definition (3.11) wie folgt

$$(3.11'') \quad f_2(x,y,t) = \begin{cases} f_2(\alpha(t),y,t) - k(\alpha(t)-x), & \text{falls} \quad x<\alpha(t), \\ f_2(\beta(t),y,t) + k(x-\beta(t)), & \text{falls} \quad x>\beta(t). \end{cases}$$

Die Feststellung (1.2) (mit $n=2$) trifft dann auf die Funktion f_2 zu, insbesondere besteht eine globale L-Bedingung. Letzteres folgt wie beim Beweis von Hilfssatz 2 einfach daraus, daß eine solche Bedingung in jeder Veränderlichen gleichmäßig bezüglich der anderen gilt. Daß eine L-Bedingung in y besteht, ist klar. Eine globale L-Bedingung in x besteht zunächst (bei festem t) in jedem der drei Intervalle $x<\alpha(t)$, $\alpha(t)\leqq x\leqq\beta(t)$, $x>\beta(t)$, und zwar mit L-Konstanten, die von t und y unabhängig sind. Dann existiert eine L-Bedingung aber auch für die x-Gerade als Ganzes, und zwar mit der größten der für die Teilbereiche gültigen L-Konstanten. Weiterhin hat f_2 die folgenden Eigenschaften:

$$(3.14) \qquad f_2(x,y,t) = f(x,y,t), \quad \text{falls} \quad (x,y,t)\in\tilde{\Omega},$$

$$(3.15) \qquad \begin{cases} f_2(x,y,t)<0 \text{ in einem gewissen Halbraum } x<S, \\ f_2(x,y,t)>0 \text{ in einem gewissen Halbraum } x>T. \end{cases}$$

$$(3.16) \qquad \begin{cases} \text{Falls } x<\alpha(t), \text{ ist } -\ddot{\alpha}+f_2(x,\dot{\alpha},t)<0, \\ \text{falls } x>\beta(t), \text{ ist } -\ddot{\beta}+f_2(x,\dot{\beta},t)>0. \end{cases}$$

(3.14) ergibt sich unmittelbar aus (3.11) und (3.11''). Gemäß (3.13) bestimmt k für hinreichend große x das Vorzeichen von f_2 und daraus resultiert die Feststellung (3.15). Was schließlich (3.16) anbetrifft, so bemerken wir zunächst, daß aus (3.14) in Verbindung mit den Voraussetzungen (3.3) und (3.4) $-\ddot{\alpha}+f_2(\alpha,\dot{\alpha},t)=-\ddot{\alpha}+f(\alpha,\dot{\alpha},t)\leqq 0$ folgt. Falls $x<\alpha(t)$, ist ferner $k(\alpha(t)-x)>0$ und daher erhalten wir gemäß (3.11'') die Ungleichungen $-\ddot{\alpha}+f_2(x,\dot{\alpha},t)<-\ddot{\alpha}+f_2(\alpha,\dot{\alpha},t)\leqq 0$. Entsprechend beweist man die zweite der Aussagen (3.16). f_1, f_2 sind also Funktionen vom Typ (1.2), sie erfüllen aber auch gemäß (3.10) und (3.15) die Vorzeichenbedingungen, die in Hilfssatz 1 verlangt werden. Das Differentialsystem

$$(3.17) \qquad \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2,t), \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2,t)$$

hat also mindestens eine periodische Lösung. Aus (3.9) und (3.14) folgt nun weiter, daß im Bereich $\tilde{\Omega}$ dieses System sich auf das Ausgangssystem (3.7) reduziert. Der Beweis unseres Satzes ist also erbracht, wenn wir zeigen können, daß die periodischen Trajektorien der Gln. (3.17) alle in $\tilde{\Omega}$ liegen müssen. Wir tun dies in zwei Schritten. Zunächst zeigen wir: Ist ξ_1, ξ_2 eine periodische Lösung von (3.17) mit der Eigenschaft $(\xi_1,\xi_2,t)\in\Omega$ für alle t, so gilt in Wirklichkeit $(\xi_1,\xi_2,t)\in\tilde{\Omega}$ für alle t, d.h.

$$\Phi(\xi_1(t),t)\leqq\xi_2(t)\leqq\Psi(\xi_1(t),t).$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Differenz $\Delta(t)=\xi_2-\Phi(\xi_1,t)$. Δ ist periodisch (wegen (3.5)) und differenzierbar mit der Ableitung

$$\dot{\Delta}=\dot{\xi}_2-\Phi_x\dot{\xi}_1-\Phi_t=f_2(\xi_1,\xi_2,t)-\Phi_x(\xi_1,t)f_1(\xi_1,\xi_2,t)-\Phi_t(\xi_1,t).$$

Aus (3.12) folgt nun, daß der Ausdruck auf der rechten Seite konstantes festes Vorzeichen $\neq 0$ hat, falls $\xi_2<\Phi(\xi_1,t)$, d.h. $\dot{\Delta}$ hat festes Vorzeichen $\neq 0$ in allen Punkten t mit $\Delta(t)<0$. Gemäß Hilfssatz 3 muß daher $\Delta(t)\geqq 0$ oder $\xi_2\geqq\Phi(\xi_1,t)$ für alle t gelten. Entsprechend zeigt man $\xi_2\leqq\Psi(\xi_1,t)$.

Den noch zu erbringenden Teil der Behauptung formulieren wir als

Hilfssatz 5. *Ist ξ_1, ξ_2 eine periodische Lösung des Differentialsystemes* (3.17), *so gilt $\alpha(t)\leqq\xi_1(t)\leqq\beta(t)$ für alle t.*

Beweis. Wir begnügen uns damit, hier die eine Hälfte der Ungleichung zu beweisen, nämlich $\alpha(t)\leqq\xi_1(t)$. Die Abschätzung von ξ_1 nach oben läßt sich dann in analoger Weise erbringen. Zunächst bemerken wir, daß nicht nur ξ_1, sondern auch $\dot{\xi}_1=f_1(\xi_1,\xi_2,t)$ periodisch ist, da $f_1(x,y,0)=f_1(x,y,T)$ ist. Es werde nun $\delta(t)=\xi_1(t)-\alpha(t)$ gesetzt. δ ist periodisch und differenzierbar bis auf endlich viele Sprungstellen, die aber nur von Unstetigkeiten von $\dot{\alpha}$ herrühren können.

Wegen (3.1) gilt für alle t

$$\lim_{h\to 0,\,h>0}\left(\dot{\delta}(t+h)-\dot{\delta}(t-h)\right)\leqq 0. \tag{3.18}$$

Es ist zu zeigen, daß $\delta(t)\geqq 0$ für alle t ist. Zu diesem Zwecke wählen wir eine der Stellen $t^*\in I$ aus, an denen $\delta(t)$ sein Minimum annimmt und werden beweisen, daß $\delta(t^*)\geqq 0$ ist, was offenbar $\delta(t)\geqq 0$ für alle übrigen t zur Folge hat. Aus der Minimaleigenschaft von $\delta(t^*)$ und (3.18) folgt zunächst, daß

$$\lim_{h\to 0,\,h>0}\dot{\delta}(t^*+h)=\lim_{h\to 0,\,h>0}\dot{\delta}(t^*-h)=0$$

ist (das gilt auch, falls $t^*=0$, T ist). Es existiert also $\dot{\alpha}$ an der Stelle $t=t^*$ und zudem gilt

$$\dot{\xi}_1(t^*)=\dot{\alpha}(t^*). \tag{3.19}$$

Insbesondere ist also $|\dot{\xi}_1(t^*)|<C$ — wegen (3.8) — und daher ist auch $|\dot{\xi}_1(t)|<C$ in einer gewissen Umgebung von t^* (in einer rechts- bzw. linksseitigen Umgebung, falls $t^*=0$, T). Da aber $\dot{\xi}_1=f_1(\xi_1,\xi_2,t)$ gilt, ist in dieser Umgebung notwendig $\dot{\xi}_1=\xi_2$ (vgl. die Definition von f_1). Dies wiederum hat zur Folge, daß ξ_1 eine zweite Ableitung (zumindest einseitig) an der Stelle t^* besitzt, welche durch

$$\ddot{\xi}_1(t^*)=\dot{\xi}_2(t^*)=f_2\left(\xi_1(t^*),\xi_2(t^*),t^*\right)$$

gegeben ist. Da wegen (3.19) $\xi_2(t^*)=\dot{\xi}_1(t^*)=\dot{\alpha}(t^*)$ ist, ergibt sich weiter

$$\ddot{\xi}_1(t^*)=f_2\left(\xi_1(t^*),\dot{\alpha}(t^*),t^*\right).$$

Somit folgt schließlich, daß auch δ an der Stelle t^* eine zweite Ableitung (zumindest eine einseitige) besitzt und es gilt

$$\ddot{\delta}(t^*) = -\ddot{\alpha}(t^*) + f_2\big(\xi_1(t^*), \dot{\alpha}(t^*), t^*\big).$$

Diese Beziehung erzwingt aber $\delta(t^*) \geqq 0$. $\delta(t^*) < 0$ würde nämlich $\xi_1(t^*) < \alpha(t^*)$ zur Folge haben und daher müßte gemäß (3.16) $\ddot{\delta}(t^*) < 0$ sein. Zusammen mit $\dot{\delta}(t^*) = 0$ stellt dies aber einen Widerspruch zur Minimaleigenschaft von $\delta(t^*)$ dar. Damit ist Satz 1 bewiesen.

4. Anwendungen von Satz 1. Beispiele

Es sollen nun aus Satz 1 einige explizite und einfach zu formulierende Existenzaussagen über periodische Lösungen hergeleitet werden. Zu diesem Zwecke werden wir für eine Reihe von Differentialgleichungen Gebiete $\tilde{\Omega}$ konstruieren, die alle in Satz 1 verlangten Eigenschaften besitzen. Ausgehen werden wir dabei stets von periodischen „Unterlösungen" und „Oberlösungen", d.h. von zwei periodischen Funktionen α, β $(\alpha \leqq \beta)$, die den Bedingungen (3.1) und (3.4) genügen. Falls die rechte Seite der Differentialgleichung nicht stärker wächst als $\dot{x}^2$ (für $|\dot{x}| \to \infty$), kann man aus dem durch α, β bestimmten zylindrischen Bereich Ω stets einen endlichen Teil $\tilde{\Omega}$ herausgreifen, auf den Satz 1 anwendbar wird, wie wir jetzt zeigen wollen. Wir benötigen zu diesem Zwecke

Hilfssatz 6. *Gegeben seien zwei Funktionen $f(x, y, t)$ und $m(y)$, wobei die erste definiert ist für alle $(x, y, t) \in \Omega$ mit $y \geqq y_0$, die zweite definiert und stetig ist für $y \geqq y_0$. Es seien ferner die nachstehenden Bedingungen erfüllt*

a) $y\, m(y) - f(x, y, t) \neq 0$ *für alle* $(x, y, t) \in \Omega$, $y \geqq y_0$,

b) $m(y)$ *hat entweder eine Nullstelle für* $y \geqq y_0$ *oder aber es ist*

$$\left| \int_{y_0}^{\infty} \frac{du}{m(u)} \right| > \operatorname{Max} \beta - \operatorname{Min} \alpha .$$

Dann gibt es eine Funktion $\Psi(x)$, definiert und differenzierbar in $\operatorname{Min} \alpha \leqq x \leqq \operatorname{Max} \beta$, *mit der Eigenschaft* $\Psi' \Psi - f(x, \Psi, t) \neq 0$, $\Psi \geqq y_0$ *für alle* $(x, t) \in \omega$.

Beweis. Falls m eine Nullstelle hat, etwa y_1, setze man einfach $\Psi = y_1$. Im anderen Falle betrachte man die Funktion $g(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{m(u)} + c$, die die Halbgerade $y \geqq y_0$ monoton und stetig auf ein Intervall der Länge $\left| \int_{y_0}^{\infty} \frac{du}{m(u)} \right|$ abbildet, welches man durch Wahl von c immer so legen kann, daß $\operatorname{Min} \alpha$ und $\operatorname{Max} \beta$ in seinem Inneren liegen. Die Umkehrfunktion $\Psi(x)$ zu g ist dann im Intervall $[\operatorname{Min} \alpha, \operatorname{Max} \beta]$ definiert und differenzierbar und es ist $\Psi \geqq y_0$, $\Psi' = m(\Psi)$. Es wird daher $\Psi' \Psi - f(x, \Psi, t) = \Psi m(\Psi) - f(x, \Psi, t) \neq 0$ für alle $(x, t) \in \omega$.

Wir beweisen nun

Satz 2. *Seien $\alpha(t), \beta(t)$ periodische Unter- und Oberlösungen der Differentialgleichung $\ddot{x} - f(x, \dot{x}, t) = 0$, d.h. sei $\alpha(t) \leqq \beta(t)$ für alle t und sei* (3.1) *und* (3.4) *erfüllt. Von der Funktion $f(x, y, t)$ werde vorausgesetzt, daß sie auf dem durch α und β bestimmten zylindrischen Bereich Ω* (vgl. (3.2)) *definiert ist und folgende Eigenschaften besitzt:*

(4.1) a) *f ist auf Ω stetig, abgesehen von t-Sprüngen, und genügt einer lokalen L-Bedingung bezüglich x, y.*

(4.2) b) *Es besteht eine Abschätzung der Form*

$$|f| \leqq C y^2 \quad \text{für} \quad |y| \to \infty.$$

Dann existiert eine periodische Trajektorie in Ω. Gilt zudem in (3.4) *das Ungleichheitszeichen für alle t, so liegt die Trajektorie sogar in Ω'.*

Beweis. Wir wählen eine Zahl $y_0 > \operatorname{Max} |\dot{\alpha}|, \operatorname{Max} |\dot{\beta}|$. Die Funktionen $f(x, y, t)$ und $m(y) = C|y|$ erfüllen die Voraussetzungen von Hilfssatz 6, es gibt mithin eine Funktion $\Psi(x) \geqq y_0$, derart daß $\Psi'\Psi - f(x, \Psi, t) \neq 0$ ist für alle $(x, t) \in \omega$. Nochmalige Anwendung des Hilfssatzes 6 (nämlich auf das Paar $f(x, -y, t)$ und $m = C|y|$) zeigt, daß es auch ein $\Phi(x)$ gibt derart daß $\Phi \leqq -y_0$, $\Phi_x \Phi - f(x, \Phi, t) \neq 0$ ist. Die beiden zylindrischen Flächen $y = \Phi(x)$, $y = \Psi(x)$ schneiden daher aus Ω ein Teilgebiet $\tilde{\Omega}$ aus, das allen Voraussetzungen von Satz 1 genügt, und das daher eine periodische Trajektorie enthält. Wendet man die Überlegungen von Hilfssatz 5 auf die Differenzen $\delta = \xi - \alpha$ bzw. $\xi - \beta$ an, so ergibt sich auch die restliche Behauptung von Satz 2.

Bei der Suche nach Unter- und Oberlösungen zu gegebener Differentialgleichung wird man zunächst versuchen, konstante α, β zu finden. Wir wollen am Beispiel der Liénardschen Differentialgleichung

$$\ddot{x} = q(x, \dot{x})\,\dot{x} + p(x) + e(t) \tag{4.3}$$

zeigen, wie weit man mit Hilfe unserer Sätze hierbei kommt.

Satz 3. *Sei $\alpha < \beta$, α und β konstant, sei $e(t)$ eine in I stückweise stetige Funktion, sei $p(x)$ stetig in $[\alpha, \beta]$, $q(x, y)$ stetig für alle $x \in [\alpha, \beta]$ und alle y, und mögen beide Funktionen einer lokalen L-Bedingung in x, y genügen. Sei ferner*

$$p(\alpha) + e(t) \leqq 0, \qquad p(\beta) + e(t) \geqq 0. \tag{4.4}$$

Schließlich sei für den Durchschnitt von Ω mit jedem der beiden Halbräume $y < 0$, $y > 0$ mindestens eine der folgenden zusätzlichen Voraussetzungen erfüllt:

a) *Es besteht eine Abschätzung der Form $|q| \leqq C|y|$.*

b) *Es gibt ein $y_1 > 0$ ($y_1 < 0$) derart, daß $q(x, y_1)\, y_1 + p(x) + e(t) \neq 0$ für alle $x \in [\alpha, \beta]$ ist.*

Dann besitzt (4.3) *eine periodische Lösung ξ mit $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$.*

Beweis. Voraussetzung (4.4) bedeutet, daß $\alpha(t) = \alpha$ und $\beta(t) = \beta$ periodische Unter- und Oberlösungen sind. Die Funktionen Φ, Ψ wähle man entweder konstant $= y_1$, falls die Voraussetzung b) erfüllt ist, oder, wie beim Beweis von Satz 2, als Funktionen von x.

5. Ein weiteres Existenzkriterium für periodische Lösungen

In den folgenden Ausführungen verstehen wir unter $\omega, \omega', \Omega, \Omega'$ stets Gebiete, wie sie in Nr. 3 (vgl. (3.2)) beschrieben wurden und unter f eine Funktion, die den Bedingungen (4.1), (4.2) genügt.

Mit Hilfe von Satz 2 läßt sich eine weitere allgemeine Existenzaussage über periodische Lösungen der Differentialgleichung $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)$ gewinnen. Sie unterscheidet sich von Satz 1 dadurch, daß die Forderungen (3.3), (3.4) an die Funktionen α, β abgeschwächt, dafür aber Φ, Ψ schärferen Einschränkungen unterworfen werden. Wir formulieren Satz 4 im Anschluß an die nachstehenden beiden Hilfssätze.

Hilfssatz 7. *Es sei die Funktion $\Theta(x,t)$ auf ω stetig, abgesehen von endlich vielen t-Sprüngen, und stückweise stetig differenzierbar. Ferner sei eine der folgenden Voraussetzungen* a), b) *erfüllt.*

(5.1) a) $\Theta(x,T)\leqq\Theta(x,0)$, $\lim\limits_{h\to 0,\,h>0}\big(\Theta(x,t+h)-\Theta(x,t-h)\big)\geqq 0$
für alle $(x,t)\in\omega$, $t\neq 0, T$, *und*
$f(x,\Theta,t)-\Theta_x\Theta-\Theta_t<0$ *für alle* $(x,t)\in\omega'$.

(5.2) b) $\Theta(x,T)\geqq\Theta(x,0)$, $\lim\limits_{h\to 0,\,h>0}\big(\Theta(x,t+h)-\Theta(x,t-h)\big)\leqq 0$
für alle $(x,t)\in\omega$, $t\neq 0, T$, *und*
$f(x,\Theta,t)-\Theta_x\Theta-\Theta_t>0$ *für alle* $(x,t)\in\omega'$.

Ist ξ dann eine periodische Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)$ und ist $(\xi(t),t)\in\omega'$ für alle $t\in I$, so gilt $\dot{\xi}\neq\Theta(\xi,t)$ für alle t (an Sprungstellen von Θ für beide Grenzwerte).

Beweis (für den Fall a)). Die Funktion $\Delta=\dot{\xi}-\Theta(\xi,t)$ ist stetig, abgesehen von endlich vielen Stellen, an denen Δ von größeren zu kleineren Werten springt, und es ist $\Delta(T)\leqq\Delta(0)$. Gemäß Hilfssatz 4 ist die Behauptung daher richtig, falls folgendes zutrifft: Ist $I_1\subseteqq I$ ein abgeschlossenes Intervall, in welchem Δ stetig ist und in einem der Endpunkte, etwa t_0, verschwindet, so ist Δ streng monoton fallend für alle $t\in I_1$, die in hinreichender Nähe von t_0 liegen. Dies ist sofort klar, falls Θ in dem Teilbereich $\omega_1=\{(x,t)\in\omega,\ t\in I_1\}$ stetig differenzierbar ist. Dann nämlich ist Δ in I_1 stetig differenzierbar mit der Ableitung $\dot{\Delta}=f(\xi,\dot{\xi},t)-\Theta_x(\xi,t)\,\dot{\xi}-\Theta_t(\xi,t)$. Insbesondere existiert an der Stelle t_0 eine (einseitige) Ableitung $\dot{\Delta}(t_0)$ und aus Voraussetzung a) folgt (wegen $\Delta(t_0)=0$, d.h. $\dot{\xi}(t_0)=\Theta(\xi(t_0),t_0)$) $\dot{\Delta}(t_0)<0$. Falls Θ in ω_1 nur stückweise stetig differenzierbar ist, hat man den Schluß in naheliegender Weise zu modifizieren. In ähnlicher Weise verfährt man im Falle b).

Hilfssatz 8. *Die Voraussetzungen über Θ und ξ seien die gleichen wie in Hilfssatz 7, mit folgender Ergänzung: Es möge eine integrierbare Funktion $\vartheta(t)$ existieren, derart daß entweder*

(5.3) $$\Theta(x,t)\leqq\vartheta(t),\qquad \int_0^T\vartheta(t)\,dt\leqq 0$$

oder

$$\Theta(x,t)\geqq\vartheta(t) \qquad \int_0^T \vartheta(t)\,dt\geqq 0 \tag{5.3'}$$

gilt. Im ersten Falle ist dann $\dot{\xi}>\Theta(\xi,t)$, *im zweiten* $\dot{\xi}<\Theta(\xi,t)$ *für alle* $t\in I$.

Beweis. Gemäß Hilfssatz 7 ist $\dot{\xi}\neq\Theta(\xi,t)$. Die Voraussetzung (5.3) verträgt sich aber wegen der Periodizität von ξ mit der Ungleichung $\dot{\xi}<\Theta(\xi,t)$ nicht. Es würde daraus nämlich $\xi(T)-\xi(0)=\int_0^T\dot{\xi}(t)\,dt<\int_0^T\vartheta(t)\,dt\leqq 0$ folgen.

Satz 4. *Es seien* $\Phi(x,t)$, $\Psi(x,t)$ *definiert auf* ω *und so beschaffen, daß sämtliche Voraussetzungen von Hilfssatz 7 sowohl mit* $\Theta=\Phi$ *als auch mit* $\Theta=\Psi$ *erfüllt sind. Ferner gebe es integrierbare Funktionen* φ,ψ *derart, daß*

$$\Phi(x,t)\leqq\varphi(t), \qquad \int_0^T\varphi(t)\,dt\leqq 0, \tag{5.4}$$

$$\Psi(x,t)\geqq\psi(t), \qquad \int_0^T\psi(t)\,dt\geqq 0 \tag{5.4'}$$

ist. Schließlich sei $\alpha<\beta$ *für alle* t *und es gelte (an Sprungstellen für beide Grenzwerte)*

$$-\ddot{\alpha}+f(\alpha,\dot{\alpha},t)<0 \quad \textit{falls} \quad \Phi(\alpha,t)\leqq\dot{\alpha}\leqq\Psi(\alpha,t), \tag{5.5}$$

$$-\ddot{\beta}+f(\beta,\dot{\beta},t)>0 \quad \textit{falls} \quad \Phi(\beta,t)\leqq\dot{\beta}\leqq\Psi(\beta,t). \tag{5.5'}$$

Dann besitzt die Differentialgleichung $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)$ *mindestens eine periodische Trajektorie* $(\xi,\dot{\xi},t)$ *in* Ω *und man hat* $\Phi(\xi,t)\leqq\dot{\xi}\leqq\Psi(\xi,t)$ *für alle* $t\in I$.

Beweis. Man denke sich I in Teilintervalle I_j derart zerlegt, daß f, Φ, Ψ, α, β und ihre Ableitungen auf I_j stetige Funktionen von t werden. Auf Grund der Voraussetzung (5.5) läßt sich nun ein $\varepsilon>0$ so finden, daß $-\ddot{\alpha}+f(\alpha,\dot{\alpha},t)<-\varepsilon$ überall dort in I_j gilt, wo $\dot{\alpha}=\Phi(\alpha,t)$ ist. Durch die nachstehende Definition wird daher eine auf I_j stetige Funktion $k_{1,j}(t)$ erklärt:

$$k_{1,j}=\begin{cases} 0, & \text{falls} \quad \dot{\alpha}\geqq\Phi(\alpha,t),\\ -\dfrac{\operatorname{Max}(0,-\ddot{\alpha}+f(\alpha,\Phi(\alpha,t),t)+\varepsilon)}{\dot{\alpha}-\Phi(\alpha,t)}, & \text{falls} \quad \dot{\alpha}<\Phi(\alpha,t), \end{cases}$$

und es ist

$$-\ddot{\alpha}+f\big(\alpha,\Phi(\alpha,t),t\big)+\big(\dot{\alpha}-\Phi(\alpha,t)\big)\,k_{1,j}<0, \quad \text{falls} \quad \dot{\alpha}<\Phi(\alpha,t). \tag{5.6}$$

In ähnlicher Weise lassen sich drei weitere auf I_j stetige Funktionen $k_{i,j}$ $(i=2,3,4)$ konstruieren, derart daß

$$-\ddot{\beta}+f\big(\beta,\Phi(\beta,t),t\big)+\big(\dot{\beta}-\Phi(\beta,t)\big)\,k_{2,j}>0, \quad \text{falls} \quad \dot{\beta}<\Phi(\beta,t),$$

$$-\ddot{\alpha}+f\big(\alpha,\Psi(\alpha,t),t\big)+\big(\dot{\alpha}-\Psi(\alpha,t)\big)\,k_{3,j}<0, \quad \text{falls} \quad \dot{\alpha}>\Psi(\alpha,t),$$

$$-\ddot{\beta}+f\big(\beta,\Psi(\beta,t),t\big)+\big(\dot{\beta}-\Psi(\beta,t)\big)\,k_{4,j}>0, \quad \text{falls} \quad \dot{\beta}>\Psi(\beta,t).$$

Wir bestimmen als Nächstes zwei Funktionen $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$ auf ω mit folgenden Eigenschaften:

a) $c_i(x,t)$ $(i=1,2)$ ist stetig auf ω, abgesehen von t-Sprüngen, und genügt bezüglich x einer L-Bedingung.

(5.7) b) Es ist $c_1(\alpha,t)=k_{1,j}$, $c_1(\beta,t)=k_{2,j}$, $c_2(\alpha,t)=k_{3,j}$, $c_2(\beta,t)=k_{4,j}$, für alle $t\in I_j$.

Da $\alpha<\beta$ für alle t gilt, lassen sich solche Funktionen sicher finden (z.B. als in x lineare Funktionen).

Es wird nun, ähnlich wie beim Beweis von Satz 1, die Funktion f außerhalb eines gewissen endlichen Teiles von Ω abgeändert. Dies muß diesmal für jedes Intervall I_j einzeln getan werden. Wir setzen

$$(5.8)\quad \tilde{f}(x,y,t)=\begin{cases} f(x,y,t), & \text{falls } \Phi(x,t)\leqq y\leqq \Psi(x,t),\\ f\big(x,Y(x,y,t),t\big)+\big(y-\Phi(x,t)\big)\,c_1(x,t), & \text{falls } y<\Phi(x,t),\\ f\big(x,Y(x,y,t),t\big)+\big(y-\Psi(x,t)\big)\,c_2(x,t), & \text{falls } y>\Psi(x,t).\end{cases}$$

(Zur Definition von $Y(x,y,t)$ vgl. (2.1).) $\tilde{f}$ ist stetig in Ω, abgesehen von t-Sprüngen, genügt einer lokalen L-Bedingung bezüglich x, y sowie einer Abschätzung der Form $|f|\leqq C\,|y|$. Ferner gilt für alle $t\in I$ (an Sprungstellen für die Grenzwerte)

$$(5.9)\qquad -\ddot{\alpha}+\tilde{f}(\alpha,\dot{\alpha},t)<0,\qquad -\ddot{\beta}+\tilde{f}(\beta,\dot{\beta},t)>0.$$

Die erste Ungleichung ist zunächst gemäß Voraussetzung richtig, falls $\Phi(\alpha,t)\leqq\dot{\alpha}\leqq\Psi(\alpha,t)$. Falls nun aber $\dot{\alpha}<\Phi(\alpha,t)$ ist, so tritt (5.8) in Kraft und es ergibt sich unter Beachtung von (5.6) und (5.7)

$$\begin{aligned}-\ddot{\alpha}+\tilde{f}(\alpha,\dot{\alpha},t)&=-\ddot{\alpha}+f\big(\alpha,\Phi(\alpha,t),t\big)+(\dot{\alpha}-\Phi(\alpha,t)\,c_1(\alpha,t)\\&=-\ddot{\alpha}+f\big(\alpha,\Phi(\alpha,t),t\big)+\big(\dot{\alpha}-\Phi(\alpha,t)\big)\,k_{1,j}<0.\end{aligned}$$

Entsprechend behandelt man den Fall $\dot{\alpha}>\Psi(\alpha,t)$. Durch eine analoge Betrachtung läßt sich dann auch die zweite der Ungleichungen (5.9) beweisen.

Aus allem folgt, daß sämtliche in Satz 2 aufgeführten Voraussetzungen auf die Funktion $\tilde{f}(x,y,t)$ zutreffen, und zwar in der verschärften Form (strenge Ungleichheit in (3.4)). Die Differentialgleichung $\ddot{x}=\tilde{f}(x,\dot{x},t)$ besitzt daher eine periodische Trajektorie $(\xi,\dot{\xi},t)$ in Ω'. Aus Hilfssatz 7, 8 und unseren Voraussetzungen über Φ, Ψ ergibt sich aber nun, daß $\Phi(\xi,t)<\dot{\xi}<\Psi(\xi,t)$ gilt für alle $t\in I_j$, und daher ist ξ in Wirklichkeit eine periodische Lösung der Differentialgleichung $\ddot{x}=f(x,\dot{x},t)$. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Wir wollen nun noch ein Verfahren angeben, mit dessen Hilfe man Funktionen Φ, Ψ konstruieren kann, die allen Voraussetzungen von Satz 4 genügen. Die Nützlichkeit dieser Methode werden wir später an einem Beispiel demonstrieren.

Wir bemerken zunächst folgendes: Hat man zwei (stückweise stetige) Funktionen $\sigma(t)$, $\tau(t)$, so kann man stets geeignete Funktionen $\eta_i(t)$, $c_i(t)$

$(i=1, 2)$ so finden, daß $\eta_i > 0$ und

$$f(x, y, t) \leqq f(\sigma, \tau, t) + c_1(x-\sigma) + c_2|y-\tau|, \tag{5.10}$$

$$\text{für alle } (x, y, t) \text{ mit } t \in I, \quad 0 \leqq x-\sigma \leqq \eta_1, \quad |y-\tau| \leqq \eta_2 \tag{5.11}$$

gilt. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß f einer L-Bedingung bezüglich x, y genügt.

Im folgenden Hilfssatz werden wir nun untersuchen, unter welchen Bedingungen man durch die Raumkurve $(\sigma(t), \tau(t), t)$ eine Fläche $y=\Theta(x, t)$ so hindurchlegen kann, daß Θ allen Voraussetzungen der Hilfssätze 7 und 8 genügt.

Hilfssatz 9. *Es sei $\sigma<\beta$ eine periodische, τ eine stückweise stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion, und es sei*

$$\lim_{h\to 0, h>0} \big(\tau(t+h) - \tau(t-h)\big) \geqq 0 \quad \textit{für alle } t \in I, \quad \tau(T) \leqq \tau(0). \tag{5.12}$$

Es mögen die Beziehungen (5.10), (5.11) *mit gewissen Funktionen η_i, c_i bestehen, und es möge weiterhin zwei stetige Funktionen λ, η geben, derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

$$\eta(T) = \eta(0), \qquad \lambda(T) \leqq \lambda(0), \tag{5.13}$$

es gilt für alle $t \in I$ (an Sprungstellen für beide Grenzwerte)

$$\lambda \neq 0, \qquad 0 < \eta < \operatorname{Min}\left(\beta-\sigma, \eta_1, \frac{\eta_2}{|\lambda|}\right) \tag{5.14}$$

$$-\dot{\tau} + f(\sigma, \tau, t) \leqq \operatorname{Min}\{\lambda(\tau-\dot{\sigma}), \lambda(\tau-\dot{\sigma}) + (\lambda^2 + \dot{\lambda} - c_1 - c_2|\lambda|)\eta\} \tag{5.15}$$

$$|\tau - \dot{\sigma} - \dot{\eta}| < |\lambda|\eta. \tag{5.16}$$

Dann existiert eine Funktion $\Theta(x, t)$ mit folgenden Eigenschaften: Im Bereich $\omega_\sigma = \{(x, t): \sigma(t) \leqq x \leqq \beta(t)\}$ ist Θ stetig bis auf t-Sprünge und stückweise stetig differenzierbar. Sämtliche Beziehungen (5.1) *sind erfüllt (falls man überall ω_σ anstelle von ω liest). Außerdem gilt*

$$\Theta(\sigma, t) = \tau, \qquad \Theta(x, t) \gtrless \tau \text{ für } x > \sigma(t), \tag{5.17}$$

je nachdem ob $\lambda \gtrless 0$ ist.

Beweis. Wir definieren Θ wie folgt

$$\Theta = \lambda(x-\sigma) + \tau, \qquad \text{falls} \quad \sigma \leqq x \leqq \sigma + \eta, \tag{5.18}$$

$$\Theta = \lambda\eta e^{(x-(\sigma+\eta))C} + \tau, \quad \text{falls} \quad x > \sigma + \eta. \tag{5.19}$$

Die Konstante $C>0$ wird später bestimmt. Aus diesem Ansatz ergibt sich sofort, daß Θ in ω_σ bis auf t-Sprünge stetig und stückweise stetig differenzierbar ist und daß die Aussage (5.17) zutrifft. Auch sind die beiden ersten der drei Bedingungen (5.1) sicher erfüllt, denn σ und η sind periodische Funktionen und für λ, τ gelten die Beziehungen (5.12), (5.13). Es bleibt noch zu zeigen, daß $f(x, \Theta, t) - \Theta_x\Theta - \Theta_t < 0$ gilt für $x > \sigma(t)$.

Sei zunächst $\sigma < x \leqq \sigma + \eta$. Gemäß (5.18), (5.14) ist dann $|\Theta - \tau| \leqq |\lambda|\,\eta \leqq \eta_2$, d.h. der Punkt $(x, \Theta(x,t), t)$ liegt stets in der durch (5.11) definierten Umgebung der Raumkurve $(\sigma(t), \tau(t), t)$. Es läßt sich daher $f(x, \Theta, t)$ mittels (5.10) abschätzen, und man erhält (mit $u = x - \sigma$)

$$\begin{aligned} f(x,\Theta,t) - \Theta_x\Theta - \Theta_t &\leqq -\lambda(\lambda u + \tau) - \dot{\lambda} u + \lambda\dot{\sigma} - \dot{\tau} + f(\sigma,\tau,t) + c_1 u + c_2|\lambda| u \\ &= f(\sigma,\tau,t) - \dot{\tau} - \lambda(\tau - \dot{\sigma}) - (\lambda^2 + \dot{\lambda} - c_1 - c_2|\lambda|)\,u. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist linear in u und $\leqq 0$ für $u = 0$, < 0 für $u = \eta$ (gemäß (5.15)), also ist sie < 0 für $0 < u \leqq \eta$.

Wir betrachten nun den Bereich $x > \sigma + \eta$ und setzen zur Abkürzung $\Lambda = \Theta - \tau$. Aus der Darstellung (5.19) ergeben sich dann die folgenden Beziehungen

$$\text{(5.20)} \qquad \begin{cases} |\Lambda| \geqq |\lambda|\,\eta, \\ \Theta_x = C\Lambda, \\ \Theta_t = \dfrac{(\lambda\eta)^{\cdot}}{\lambda\eta}\Lambda - C(\dot{\sigma} + \dot{\eta})\Lambda + \dot{\tau}. \end{cases}$$

Auf Grund der Voraussetzung (5.14) ist das Minimum m der stetigen Funktion $|\lambda|\,\eta$ auf dem Intervall I positiv und der Quotient $\dfrac{f(x,y,t)}{(y-\tau)^2}$ für alle $(x, y, t) \in \Omega$ mit $|y - \tau| \geqq m$ beschränkt (denn f soll ja einer Abschätzung der Form (4.2) genügen). Wegen (5.20) gilt nun stets $|\Lambda| \geqq m$, es existiert daher ein c, welches von C unabhängig ist, derart daß

$$f(x,\Theta,t) < c\Lambda^2$$

für alle (x, t) mit $\sigma + \eta \leqq x \leqq \beta$ gilt. Wir bekommen dann weiter

$$\begin{aligned} f(x,\Theta,t) - \Theta_x\Theta - \Theta_t &< c\Lambda^2 - C\Lambda(\Lambda + \tau) - \frac{(\lambda\eta)^{\cdot}}{\lambda\eta}\Lambda + C(\dot{\sigma} + \dot{\eta})\Lambda - \dot{\tau} \\ &= -(C - c)\Lambda^2 - \left(\frac{(\lambda\eta)^{\cdot}}{\lambda\eta} + (\tau - \dot{\sigma} - \dot{\eta})\,C\right)\Lambda - \dot{\tau} \\ &= -C\left\{(1 - cC^{-1})\Lambda^2\left[1 + \frac{\tau - \dot{\sigma} - \dot{\eta} + \dfrac{(\lambda\eta)^{\cdot}}{\lambda\eta}C^{-1}}{(1 - cC^{-1})\Lambda}\right] + \dot{\tau}\,C^{-1}\right\}. \end{aligned}$$

Nun ist, gemäß (5.16), $\dfrac{|\tau - \dot{\sigma} - \dot{\eta}|}{|\lambda|\,\eta} < 1$, und da diese Ungleichung an Sprungstellen für beide Grenzwerte zutreffen soll, kann man auf der rechten Seite 1 ersetzen durch $1 - \varepsilon$, für passendes $\varepsilon > 0$. Wegen (5.20) wird daher für hinreichend große C

$$\left|\frac{\tau - \dot{\sigma} - \dot{\eta} + \dfrac{(\lambda\eta)^{\cdot}}{\lambda\eta}C^{-1}}{(1 - cC^{-1})\Lambda}\right| \leqq 1 - \varepsilon,$$

und daher läßt sich somit auch durch geeignete Wahl von C der Ausdruck in $\{\ \}$ positiv machen. Damit ist Hilfssatz 9 bewiesen.

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -a\dot{x}^2 - \sin x - \sin t + c.$$

Für $c=0$ sind periodische Lösungen (jeder Periode) vorhanden, wie sich unmittelbar aus Satz 3 ergibt. Daß für $c>2$ keine periodischen Lösungen (gleich welcher Periode) existieren, wurde bereits in der Einleitung festgestellt. Wir werden hier nun mit Hilfe von Satz 4 zeigen, daß unter der Voraussetzung $0<c<2$ periodische Lösungen der Periode $T=2\pi$ jedenfalls dann auftreten, wenn a hinreichend groß ist.

Durch eine Verschiebung in t bringen wir die Differentialgleichung zunächst auf die Form

$$\ddot{x} = -a\dot{x}^2 - \sin x - \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) + c = -a\dot{x}^2 + g(x,t). \tag{5.21}$$

Aus der Annahme $c>0$ folgt, daß es Zahlen $\beta > \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k=0, 1, \ldots)$ gibt mit der Eigenschaft $g(\beta, t)>0$ für alle $t\in[0, 2\pi]$. Für jedes solche β ist dann die Bedingung (5.5′) von Satz 4 erfüllt, wie immer man Φ, Ψ auch wählt. — Wegen $c<2$ gibt es ferner eine Zahl $\sigma<\frac{\pi}{2}$, derart daß die Funktion $g(x, 0)=g(x, 2\pi)$ im Intervall $\sigma\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ negativ ist und monoton fällt. Insbesondere hat man dann

$$g(\sigma, 0) = g(\sigma, 2\pi) < 0. \tag{5.22}$$

Wir wählen nun ein t_0 mit $0<t_0<2\pi$ und eine Funktion $\tau(t)$, die folgendermaßen beschaffen ist. τ ist stetig bis auf einen Sprung an der Stelle t_0,

$$\begin{cases} \tau(0)=0, & \tau<0 \quad \text{für} \quad 0<t<t_0, & \lim\limits_{t\to t_0-0}\tau(t)<0 \\ \tau(2\pi)=0, & \tau>0 \quad \text{für} \quad t_0<t<2\pi, & \lim\limits_{t\to t_0+0}\tau(t)>0, \end{cases} \tag{5.23}$$

$$-\dot{\tau}(0) + g(\sigma, 0) < 0, \qquad -\dot{\tau}(2\pi) + g(\sigma, 2\pi) < 0, \tag{5.24}$$

$$\left|\int_0^{t_0}\tau(t)\,dt\right| < \frac{\pi}{2} - \sigma, \qquad \int_0^T \tau(t)\,dt = 0. \tag{5.25}$$

Es ist leicht einzusehen, daß man ein τ mit allen diesen Eigenschaften stets konstruieren kann, z.B. als stückweise lineare Funktion in t. Insbesondere beachte man, daß sich wegen (5.22) die Forderung (5.24) mit negativen $\dot{\tau}(0)$, $\dot{\tau}(2\pi)$ befriedigen läßt. Wir vermerken noch für später, daß τ der Bedingung (5.12) genügt, wie sich unmittelbar aus (5.23) ergibt.

Aus (5.24) folgt, daß für $a\geqq 0$ der Ausdruck

$$-\dot{\tau} + f(\sigma, \tau, t) = -\dot{\tau} - a\tau^2 + g(\sigma, t)$$

in einer gewissen, von a unabhängigen, Umgebung der beiden Nullstellen $t=0, 2\pi$ von τ negativ ist. Wählt man daher a hinreichend groß, wird dieser Ausdruck negativ für alle $t\in I$. Die Einschränkung, der a unterworfen werden

soll, besteht nun eben darin, daß wir verlangen: Es ist

$$-\dot{\tau}+f(\sigma,\tau,t)<0 \quad \text{für alle } t\in I. \tag{5.26}$$

Aus (5.23), (5.25) folgt weiter, daß

$$-\left(\frac{\pi}{2}-\sigma\right)<\int_0^{t_0}\tau(t)\,dt\leqq\int_0^{t}\tau(t)\,dt\leqq 0$$

für alle t gilt. Wählt man daher die positive Konstante ε_1 hinreichend klein, so besteht für die Funktion

$$\eta(t)=\int_0^t\tau(t)\,dt+\left|\int_0^{t_0}\tau(t)\,dt\right|+\varepsilon_1 \tag{5.27}$$

die Ungleichung

$$\varepsilon_1\leqq\eta<\frac{\pi}{2}-\sigma \quad \text{für alle} \quad t\in I. \tag{5.28}$$

Im Intervall $\sigma\leqq x\leqq\sigma+\eta$ ist dann $-\sin x$ und somit auch $g(x,t)$ als Funktion von x monoton fallend, und man erhält

$$\begin{aligned} f(x,y,t)&\leqq -a\,y^2+g(\sigma,t)\\ &= f(\sigma,\tau,t)-a\,(y-\tau)\,(y+\tau). \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung folgen nun sofort Abschätzungen der Form (5.10), (5.11), und zwar mit $\eta_1=\eta$, $c_1=0$, beliebigem $\eta_2>0$ und passendem (von η_2 abhängigem) c_2. Für diese Wahl von η_i, c_i wird aber — im Hinblick auf (5.26) — die Ungleichung (5.15) durch konstante λ befriedigt, sofern $|\lambda|$ hinreichend klein ist. Wie man sofort sieht, sind dann auch alle übrigen Voraussetzungen von Hilfssatz 9 erfüllt (man beachte, daß $\dot{\sigma}=0$ und gemäß (5.27) $\tau-\dot{\eta}=0$ ist). Da man für λ positive und negative Zahlen nehmen kann, existieren gemäß Hilfssatz 9 Funktionen Φ, Ψ, auf die Hilfssatz 7 anwendbar wird und für die zudem gilt

$$\Phi(x,t)\leqq\tau\leqq\Psi(x,t), \tag{5.29}$$

$$\Phi(\sigma,t)=\Psi(\sigma,t)=\tau. \tag{5.30}$$

Aus (5.25), (5.29) sieht man, daß — mit $\varphi=\psi=\tau$ — auch die Bedingungen (5.4), (5.4′) erfüllt sind. Um Satz 4 auf die Differentialgleichung (5.21) anwenden zu können, fehlt uns nun nur noch eine Funktion α, die der Forderung (5.5) genügt. Wir behaupten: $\alpha=\sigma$ tut dies. Aus (5.30) folgt nämlich, daß $\Phi(\alpha,t)\leqq\dot{\alpha}\leqq\Psi(\alpha,t)$ nur für $t=0,\,2\pi$ möglich ist. Dort aber wird $-\ddot{\alpha}+f(\alpha,\dot{\alpha},t)=g(\sigma,0)=g(\sigma,2\pi)<0$ (gemäß (5.22)).

6. Approximation periodischer Lösungen

Ω und f haben die gleiche Bedeutung wie bisher, und es soll

$$-\ddot{\alpha}+f(\alpha,\dot{\alpha},t)\leqq 0, \qquad -\ddot{\beta}+f(\beta,\dot{\beta},t)\geqq 0 \tag{6.1}$$

für alle $t \in I$ gelten. Ω enthält dann gemäß Satz 2 eine periodische Trajektorie der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t). \tag{6.2}$$

Wir machen für diesen Abschnitt folgende zusätzlichen Annahmen:

a) f ist stetig in Ω.

b) Es ist nicht nur α, β, sondern auch $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$ periodisch.

c) In keiner der beiden Ungleichungen (6.1) steht durchweg das Gleichheitszeichen. (Andernfalls wäre α oder β periodische Lösung.)

Wie man sich leicht überlegt, folgt aus diesen drei Annahmen, daß jede in Ω gelegene periodische Trajektorie der Differentialgleichung (6.2) in Wirklichkeit bereits in Ω' verläuft. Wir werden nun zeigen, daß man in einer Umgebung einer Stelle t, an der $-\ddot{\alpha} + f(\alpha, \dot{\alpha}, t) < 0$ ist, die Kurve α in wohlbestimmter Weise anheben kann, so daß β und die neue untere Schranke wieder eine periodische Lösung von (6.2) einschließen. In ähnlicher Weise kann man β an jeder Stelle senken, wo $-\ddot{\beta} + f(\beta, \dot{\beta}, t) > 0$ ist.

Zunächst bemerken wir, daß man durch die Raumkurve $(\alpha, \dot{\alpha}, t)$ Flächen $y = \Theta(x, t)$ hindurchlegen kann, die alle in Hilfssatz 9 aufgeführten Eigenschaften besitzen. Wegen (6.1) sind nämlich die Bedingungen (5.12) bis (5.15) erfüllt, wenn man $\sigma = \alpha$, $\tau = \dot{\alpha}$ und λ, η beide konstant, $\lambda \gtrless 0$, $|\lambda|$ hinreichend groß und η hinreichend klein nimmt. Man erhält auf diese Weise zwei Flächen $y = \Phi(x, t)$, $y = \Psi(x, t)$, derart daß Φ und Ψ auf ω stetig sind und der von ihnen begrenzte Teilbereich $\tilde{\Omega}$ alle periodischen Trajektorien von (6.2) enthält. Außerdem gilt

$$\Phi(x, t) \leqq \dot{\alpha} \leqq \Psi(x, t), \qquad \Phi(\alpha, t) = \Psi(\alpha, t) = \dot{\alpha}. \tag{6.3}$$

Es läßt sich ferner erreichen, daß die Kurve $(\beta, \dot{\beta}, t)$ ganz im Inneren von $\tilde{\Omega}$ verläuft (man hat bei der Konstruktion von Φ und Ψ nur η_1 hinreichend klein und C hinreichend groß zu wählen, vgl. den Beweis von Hilfssatz 9).

Wir setzen nun

$$\tilde{f}(x, y, t) = \begin{cases} f(x, y, t), & \text{falls} \quad (x, y, t) \in \Omega, \\ f\big(x, \Phi(x, t), t\big), & \text{falls} \quad y < \Phi(x, t), \\ f\big(x, \Psi(x, t), t\big), & \text{falls} \quad y > \Psi(x, t). \end{cases}$$

Da f und $\tilde{f}$ auf $\tilde{\Omega}$ übereinstimmen, hat die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = \tilde{f}(x, \dot{x}, t) \tag{6.2'}$$

die gleichen periodischen Lösungen wie (6.2) und es gilt

$$-\ddot{\beta} + \tilde{f}(\beta, \dot{\beta}, t) = -\ddot{\beta} + f(\beta, \dot{\beta}, t) > 0, \tag{6.4}$$

d.h. β ist auch eine Oberlösung von (6.1'). Es soll nun gezeigt werden, daß (6.2') eine Unterlösung $\tilde{\alpha}$ besitzt, die „besser" als α ist. Dabei werden wir

die Tatsache benutzen, daß $\tilde{f}$ im unbeschränkten Bereich Ω gleichmäßig stetig und daß

$$\tilde{f}(\alpha, y, t) = f(\alpha, \dot{\alpha}, t)$$

für alle y ist (vgl. (6.3)).

Wird nämlich $f(\alpha, \dot{\alpha}, t) < \ddot{\alpha}$ an einer Stelle t_0, so kann man auf Grund dieser Eigenschaften Zahlen $\varepsilon_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ finden, derart daß

$$\tilde{f}(x, y, t) < \ddot{\alpha}(t) - \varepsilon_3$$

gilt, sofern $(x, t) \in \omega$, $|t - t_0| \leqq \varepsilon_1, |x - \alpha(t)| \leqq \varepsilon_2$ ist.

Man wähle nun eine Funktion $\delta(t)$, die stetig differenzierbar, zweimal stückweise stetig differenzierbar ist, und für die gilt

$$\begin{aligned} \delta(t) &= 0, \quad \text{falls} \quad |t - t_0| > \varepsilon_1, \\ 0 < \delta(t) &\leqq \varepsilon_2, \quad \text{falls} \quad |t - t_0| < \varepsilon_1 \\ |\ddot{\delta}| &\leqq \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Dann gilt für $\tilde{\alpha} = \alpha + \delta$

$$-\ddot{\tilde{\alpha}} + \tilde{f}(\tilde{\alpha}, \dot{\tilde{\alpha}}, t) \leqq 0 \quad \text{für alle } t.$$

Literatur

[1] Barbălat, I.: Applications du principe topologique de T. Ważewski aux équations différentielles du second ordre. Ann. Polon. Math. **5**, 303–317 (1958).

[2] Cesari, L.: Functional Analysis and Periodic Solutions of Nonlinear Differential Equations. Contributions to Differential Equations, vol. I. Nr. 2, 149—187 (1963).

[3] Gomory, R. E.: Critical Points at Infinity and Forced Oscillations, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. III. Annals of Mathematics Studies **36**, 85–126 (1956).

[4] Hale, Jack K.: Oscillations in Nonlinear Systems. McGraw-Hill Series in Advanced Mathematics with Applications. New York-Toronto-London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1963.

[5] Knobloch, H. W.: Zwei Kriterien für die Existenz periodischer Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Archiv der Mathematik **14**, 182—185 (1963).

[6] — Remarks on a Paper of L. Cesari on Functional Analysis and Nonlinear Differential Equations. (Erscheint demnächst im Michigan Mathematical Journal.)

[7] Levinson, N.: Transformation theory of non-linear differential-equations of the second order. Annals of Mathematics **45**, 723–737 (1944).

[8] Massera, J. L.: The existence of periodic solutions of differential equations. Duke Mat. J. **17**, 457–475 (1950).

[9] Miranda, C.: Un'osservazione su un teorema di Brouwer. Boll. Un. Mat. Ital. (2) **3**, 5–7 (1940).

[10] Ważewski, T.: Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires. Ann. Soc. Polon. Math. **20**, 279–313 (1948).

Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Dänemark

(Eingegangen am 5. März 1963)

GASCHÜTZ, W., u. U. LUBESEDER
Math. Zeitschr. 82, 198/199 (1963)

Kennzeichnung gesättigter Formationen

Von
WOLFGANG GASCHÜTZ und URSULA LUBESEDER

In der Arbeit [2] werden zur Konstruktion gewisser kanonischer Klassen konjugierter Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen sog. *gesättigte Formationen* eingeführt. Unter einer Formation F wird dabei eine Menge endlicher auflösbarer Gruppen verstanden, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) $\mathfrak{G} \in F$, $\mathfrak{G}^\varphi$ *homomorphes Bild von* $\mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{G}^\varphi \in F$,

(2) $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ *Normalteiler von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1 \in F$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_2 \in F \Rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{N}_2 \in F$.

Eine nichtleere Formation F wird *gesättigt* genannt, wenn außerdem gilt:

(3) $\mathfrak{G}$ *endliche auflösbare Gruppe,* $\mathfrak{G} \notin F$, $\mathfrak{M}$ *minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F \Rightarrow \mathfrak{M}$ *besitzt ein Komplement in* $\mathfrak{G}$ *und alle Komplemente von* $\mathfrak{M}$ *sind unter* $\mathfrak{G}$ *konjugiert.*

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß in (3) das Konjugiertsein der Komplemente aus ihrer Existenz folgt.

Satz 1. *Eine nichtleere Formation F ist dann und nur dann gesättigt, wenn gilt:*

(3′) $\mathfrak{G}$ *endliche auflösbare Gruppe,* $\mathfrak{G} \notin F$, $\mathfrak{M}$ *minimaler Normalteiler von* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F \Rightarrow \mathfrak{M}$ *besitzt ein Komplement in* $\mathfrak{G}$.

Bevor wir Satz 1 beweisen, leiten wir aus ihm eine einfache Kennzeichnung des Gesättigtseins von Formationen her:

Satz 2. *Eine nichtleere Formation F ist dann und nur dann gesättigt, wenn gilt:*

(3″) $\mathfrak{G}/\Phi(\mathfrak{G}) \in F$, $\Phi(\mathfrak{G})$ *Frattini-Gruppe von* $\mathfrak{G} \Rightarrow \mathfrak{G} \in F$.

Beweis. F sei gesättigt. Wir zeigen allgemeiner: Ist $\mathfrak{M} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{M}$ Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F$, so ist auch $\mathfrak{G} \in F$. Für $\mathfrak{M} = 1$ ist nichts zu beweisen. Sei $\mathfrak{M} \neq 1$ und $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$ maximaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ ist dann minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. $\mathfrak{M} \subseteq \Phi(\mathfrak{G})$ zufolge besitzt $\mathfrak{M}/\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ kein Komplement. Da $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F$ und F gesättigt ist, ist nach (3) auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F$. Mit vollständiger Induktion nach der Ordnung von $\mathfrak{M}$ erschließt man dann $\mathfrak{G} \in F$; also gilt (3″).

Es gelte (3″) und es sei $\mathfrak{M}$ minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G} \notin F$, $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F$. $\mathfrak{M}$ kann nicht in der Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}$ liegen. Daher besitzt $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}$ ein Komplement. Nach Satz 1 ist also F gesättigt; w.z.b.w.

Beweis zu Satz 1. Es genügt zu zeigen, daß (3) aus (3′) folgt: Die Klassen konjugierter Komplemente $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{G}$ entsprechen eineindeutig den unter

$\mathfrak{G}$ invarianten Komplementen $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{M}$ in dem in $\mathfrak{G}$ gebildeten Zentralisator $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{M}$; ([1], Satz 3.2). Gäbe es zwei verschiedene invariante Komplemente $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, so wäre $\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2) \neq \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}/\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{C}/\mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{M}$ — unter den inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ als $\mathfrak{G}$-Moduln betrachtet — wären auf Grund des Isomorphiesatzes für $\mathfrak{G}$-Moduln $\mathfrak{G}$ isomorph (s. Fig. 1) und, da $\mathfrak{M}$ minimaler

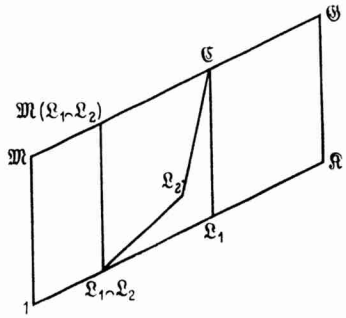


Fig. 1

Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, $\mathfrak{G}$-irreduzibel. Da sie unter $\mathfrak{C}$ elementweise invariant blieben, könnten sie in natürlicher Weise auch als $\mathfrak{g}$-Moduln, $\mathfrak{g} = \mathfrak{G}/\mathfrak{C}$, betrachtet werden und wären auch als solche $\mathfrak{g}$-isomorph und $\mathfrak{g}$-irreduzibel. Nochmalige Anwendung des Isomorphiesatzes ergäbe die $\mathfrak{g}$-Isomorphie von $\mathfrak{C}/\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1/\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2$ und $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$. Da $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$ in $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$ sein eigener Zentralisator wäre, wäre $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$ zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$ mit $\mathfrak{g}$ ([1], Satz 3.2). $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_1$ ist zerfallende Erweiterung von $\mathfrak{C}/\mathfrak{L}_1$ mit $\mathfrak{g}$. Aus der $\mathfrak{g}$-Isomorphie von $\mathfrak{C}/\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{C}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$ folgte dann die Isomorphie von $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$. Da $\mathfrak{G} \notin F$ und $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F$ ist, ist (2) zufolge $\mathfrak{G}/\mathfrak{L}_1 \notin F$. Dann wäre auch $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2) \notin F$ nach (1) im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{M}(\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2)$ homomorphes Bild von $\mathfrak{G}/\mathfrak{M} \in F$ ist.

Literatur

[1] Gaschütz, W.: Praefrattinigruppen. Arch. Math. **13**, 418–426 (1962).
[2] — Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen. Math. Z. **80**, 300–305 (1963).

Kiel, Mathematisches Seminar der Universität
(Eingegangen am 17. Mai 1963)

SONNER, J.
Math. Zeitschr. 82, 200—211 (1963)

Universal and special problems

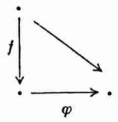
By
JOHANN SONNER*

The purpose of this paper is to investigate a situation which is best described by the following examples.

I. Call a connected, locally connected and locally simply connected topological space with base-point perfectly connected in brief. By a covering we mean a base-point preserving, surjective local homeomorphism of a perfectly connected topological space into a like one. Let φ be a *universal covering* of e'. Then φ plays a *double rôle.*

1° To each base-point preserving, continuous mapping φ' of a simply and perfectly connected topological space into e', there exists one and only one base-point preserving, continuous function f rendering the diagram

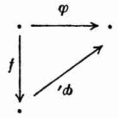
(LU)



commutative ([5], Chap. III, theorem 16.2).

2° To each covering φ' of e', there exists one and only one covering f rendering the diagram

(LS)



commutative ([5], Chap. III, theorem 16.4).

Every covering φ of e' possessing the above property departs from a simply and perfectly connected topological space ([5], Chap. III, remark after theorem 17.1).

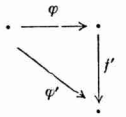
II. By an algebraic extension we mean an injective homomorphism of a commutative field into a like one such that the latter is algebraic over the image. Let φ be an *algebraic closure* of e. Then φ plays a *double rôle.*

1° To each homomorphism φ' of e into an algebraically closed, commutative field, there exists one and, up to an automorphism of the field of arrival of φ,

* This work is part of research sponsored by the U.S. Army Research Office (Durham).

only one homomorphism f' rendering the diagram

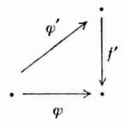
(RU)



commutative ([2], Chap. V, § 4, cor. to prop. 1).

2° To each algebraic extension φ' of e, there exists one and, up to an automorphism of the field of arrival of φ, only one algebraic extension f' rendering the diagram

(RS)



commutative ([2], Chap. V, § 4, theorem 1).

Every algebraic extension φ of e possessing the above property arrives at an algebraically closed, commutative field ([2], Chap. V, § 4, prop. 3).

The problem represented by the diagram (RU) is well known in the literature under the name "universal problem". In the general situation, two different categories are linked by quasimorphisms (or α-morphisms, cf. [1], Chap. IV, § 3). The problem represented by the diagram (LS) is briefly mentioned in [1], Chap. IV, § 3, n° 3, the quasimorphisms being called β-morphisms; in a colloquium at the University of South Carolina, Dr. HELMUT RÖHRL suggested the name special problem. Obviously, (LU) and (RS) are the duals of (RU) and (LS) respectively.

1. Linked categories

Let $(x, y) \to x \top y$ be a (not necessarily everywhere defined) internal composition law between the elements of X, with graph G. We say the pair (x, y) is composable (or, by abuse of the language, $x \top y$ is defined), if $(x, y) \in pr_1 \langle G \rangle$. Note that, if for instance $(x \top y) \top z$ is defined, then (x, y) and $(x \top y, z)$ are composable. An element $e \in X$ is called *neutral* if $x \top e = x$ and $e \top y = y$, provided the left sides exist. Denote by X_0 the set of the neutral elements of X. If the pair (e, e') of neutral elements is composable, then $e = e \top e' = e'$.

Definition 1. We say $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ is a category if $\mathscr{C}$ is the graph of an internal composition law $(f, g) \to f \circ g$ between the elements of $\mathscr{F}$ verifying the following axioms:

(MO_I) *If one of the elements $(f \circ g) \circ h$, $f \circ (g \circ h)$ is defined, then so is the other, and they are equal.*

(MO_{II}) *If $f \circ g$ and $g \circ h$ are defined, then so is $(f \circ g) \circ h$.*

(MO_{III}) *For all $f \in \mathscr{F}$, there exist neutral elements e and e', such that $f \circ e$ and $e' \circ f$ are defined.*

We refer to the elements of a category as morphisms, to the neutral elements as objects.

Remark 1. Denote by $\mathscr{C}^0$ the opposite algebraic structure on $\mathscr{F}$. Obviously, $(\mathscr{C}^0, \mathscr{F})$ is a category called the *opposite* of $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$. The privileged neutral element e such that $f \circ e = f$ (resp. $e \circ f = f$) is called the *right unit* or *source* (resp. *left unit* or *sink*) associated with f, and it is denoted by $\alpha(f)$ (resp. $\beta(f)$).

Example 1. Call group morphism a quintuple (G, V, X, V', X') such that (V, X) and (V', X') are groups, and that (G, X, X') is a group representation. Denote by $\mathscr{G}_M$ the set of the group morphisms (G, V, X, V', X') with $X \in M$, $X' \in M$. In a natural way, $\mathscr{G}_M$ can be endowed with a composition law $(f, g) \to f \circ g$, whose graph is $\mathscr{C}_M$, say. Then $(\mathscr{C}_M, \mathscr{G}_M)$ is a category, the neutral elements being the morphisms (Δ_X, V, X, V, X) which can be identified with the groups (V, X). Moreover, one has $\alpha(G, V, X, V', X') = (\Delta_X, V, X, V, X)$ and $\beta(G, V, X, V', X') = (\Delta_{X'}, V', X', V', X')$. If M is a universe (cf. [6]) such that $\boldsymbol{N} \in M$, then $\mathscr{G}_M$ contains the classical groups.

Proposition 1. *In a category $\mathscr{F}$, the pair (f, g) is composable if and only if $\alpha(f) = \beta(g)$.*

Let $(\alpha, x) \to \alpha \perp x$ be a (not necessarily everywhere defined) external composition law between the elements of A and X, with graph G. We say the pair (α, x) is composable (or, by abuse of the language, $\alpha \perp x$ is defined) if $(\alpha, x) \in pr_1 \langle G \rangle$. Note that, if for instance $\alpha \perp (\beta \perp x)$ is defined, then (β, x) and $(\alpha, \beta \perp x)$ are composable. An element $\varepsilon \in A$ is called a *neutral operator*, if $\varepsilon \perp x = x$ for all composable pairs (ε, x).

Definition 2. Let $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ be a category. We say that (Γ, Φ) is a left $\mathscr{F}$-set if Γ is the graph of an external composition law $(f, \varphi) \to f \circ \varphi$ between the elements of $\mathscr{F}$ and Φ verifying the following axioms:

($\mathrm{QM_I}$) *If one of the elements $f \circ (g \circ \varphi)$, $(f \circ g) \circ \varphi$ is defined, then so is the other, and they are equal.*

($\mathrm{QM_{II}}$) *If $f \circ g$ and $g \circ \varphi$ are defined, then so is $f \circ (g \circ \varphi)$.*

($\mathrm{QM_{III}}$) *For all $\varphi \in \Phi$, there exists a neutral element $e \in \mathscr{F}$ such that $e \circ \varphi$ is defined; moreover, every neutral element of $\mathscr{F}$ is a neutral operator.*

We say that (Γ, Φ) is a right $\mathscr{F}$-set if it is a left $\mathscr{F}^0$-set.

(In the terminology of [3]: $\mathscr{F}$ is a left (resp. right) category of operators on Φ.)

If (e, φ) and (e', φ) are composable, then e is composable with $e' \circ \varphi$, which equals φ ($\mathrm{QM_{III}}$). We infer from ($\mathrm{QM_I}$) that (e, e') is composable, hence $e = e \circ e' = e'$. The privileged neutral element e such that $e \circ \varphi = \varphi$ is called the *unit* associated with φ, and it is denoted by $q(\varphi)$. If the pair (f, φ) is composable, then $q(f \circ \varphi) = \beta(f)$. In fact, if $(e, f \circ \varphi)$ is composable, then so is (e, f) by virtue of ($\mathrm{QM_I}$). For a right $\mathscr{F}$-set Φ, we mostly write $\varphi \circ f$ instead of $f \circ \varphi$, and $p(\varphi)$ instead of $q(\varphi)$.

Proposition 2. *Let $\mathscr{F}$ be a category. In a left (resp. right) $\mathscr{F}$-set Φ, the pair (f, φ) is composable, if and only if $\alpha(f) = q(\varphi)$ (resp. $\beta(f) = p(\varphi)$).*

Let $e \in \mathscr{F}_0$. If $e \circ \varphi$ and $f \circ \varphi$, which equals $f \circ (e \circ \varphi)$, are defined, then so is $f \circ e$ (resp. $e \circ f$) in virtue of ($\mathrm{QM_I}$). On the other hand, if $f \circ e$ (resp. $e \circ f$) and

$e \circ \varphi$ are defined, then so is $f \circ (e \circ \varphi)$, which equals $f \circ \varphi$, in view of (QM_{II}).

Definition 3. Let $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ and $(\mathscr{C}', \mathscr{F}')$ be categories. We say that $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}'$ are linked by (Γ'', Γ, Φ) if (Γ, Φ) is a right $\mathscr{F}$-set, if (Γ'', Φ) is a left $\mathscr{F}'$-set and if the additional axioms below are verified:

(QM_{IV}) *If one of the elements $(f' \circ \varphi) \circ f$, $f' \circ (\varphi \circ f)$ is defined, then so is the other, and they are equal.*

(QM_{V}) *If $f' \circ \varphi$ and $\varphi \circ f$ are defined, then so is $(f' \circ \varphi) \circ f$.*

We refer to the elements of a biset as quasimorphisms.

Remark. 2) If $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ are linked by Φ, then, to each $\varphi \in \Phi$, there are assigned a right unit $p(\varphi) \in \mathscr{F}$ and a left unit $q(\varphi) \in \mathscr{F}'$. In addition to the relations

$$p(\varphi \circ f) = \alpha(f) \quad \text{and} \quad q(f' \circ \varphi) = \beta(f'),$$

we have the relations

$$q(\varphi \circ f) = q(\varphi) \quad \text{and} \quad p(f' \circ \varphi) = p(\varphi),$$

as can readily be shown.

Examples. 2) Let $\mathscr{F}$ be a category, and let Φ the set of the $\varphi \in \mathscr{F}^I$ such that $i \to \alpha(\varphi_i)$ $(i \in I)$ is constant. $\mathscr{F}$ operates in Φ from the right by $(f, \varphi) \to (\varphi_i \circ f)_{i \in I}$; $\mathscr{F}^I$ operates in Φ from the left by $(f', \varphi) \to (f'_i \circ \varphi_i)_{i \in I}$. It is easy to see that $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}^I$ are categories linked by Φ.

3) Let, in the above example, Ψ be the set of the $\psi \in \mathscr{F}^I$ such that $i \to \beta(\psi_i)$ $(i \in I)$ is constant. $\mathscr{F}^I$ operates in Ψ from the right by $(f, \psi) \to (\psi_i \circ f_i)_{i \in I}$; $\mathscr{F}$ operates in Ψ from the left by $(f', \psi) \to (f' \circ \psi_i)_{i \in I}$. It is easy to see that $\mathscr{F}^I$ and $\mathscr{F}$ are categories linked by Ψ.

4) Let $\mathscr{G}$ and $\mathscr{H}$ be subcategories of a category $\mathscr{F}$, and let Φ be the set of the $\varphi \in \mathscr{F}$ such that $\alpha(\varphi) \in \mathscr{G}$ and $\beta(\varphi) \in \mathscr{H}$. It is obvious that the categories $\mathscr{G}$ and $\mathscr{H}$ are linked by Φ. Moreover, one has $p(\varphi) = \alpha(\varphi)$, $q(\varphi) = \beta(\varphi)$.

2. Universal and special problems

In what follows, let $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}'$ be categories linked by Φ. Most of the definitions to be given and most of the propositions to be proved have right and left counterparts, one of which may be obtained from the other by passing to opposite algebraic structures. For the sake of completeness, we state in this section the definitions for both cases, while, in the propositions and their proofs, we restrict ourselves to the right case. Even if not mentioned explicitly most of the definitions and propositions have to be augmented by the phrase "with respect to the categories $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}'$ linked by Φ". For convenience, write $\Phi(e, \bullet)$ (resp. $\Phi(\bullet, e')$) for the set of the $\varphi \in \Phi$ such that $p(\varphi) = e$ (resp. $q(\varphi) = e'$).

Definition 4a. We say that φ is a right universal (resp. right weak universal) solution of $e \in \mathscr{F}_0$ if $\varphi \in \Phi(e, \bullet)$ and if, for all $\varphi' \in \Phi(e, \bullet)$, there exists one and only one (resp. up to an automorphism of $q(\varphi)$, only one) $f' \in \mathscr{F}'$ such that $\varphi' = f' \circ \varphi$. (See diagram (RU) *of the introduction.)*

Definition 4b. We say that φ is a left universal (resp. left weak universal solution of $e' \in \mathscr{F}_0'$ if $\varphi \in \Phi(\bullet, e')$ and if, for all $\varphi' \in \Phi(\bullet, e')$ there exists one and only one (resp. up to an automorphism of $p(\varphi)$, only one) $f \in \mathscr{F}$ such that $\varphi' = \varphi \circ f$. (See diagram (LU) *of the introduction.)*

Proposition 3. *Let φ be a right universal (resp. right weak universal) solution of $e \in \mathscr{F}_0$, and let $\varphi' \in \Phi$. In order that φ' be a right universal (resp. right weak universal) solution of e, it is necessary and sufficient that there exist an isomorphism u of $\mathscr{F}'$ such that $\varphi' = u \circ \varphi$.*

Suppose that φ and φ' are right weak universal solutions of e. Then there exist morphisms u, v of $\mathscr{F}'$ such that $\varphi' = u \circ \varphi$, $\varphi = v \circ \varphi'$. It follows that $\varphi' = (u \circ v) \circ \varphi'$, $\varphi = (v \circ u) \circ \varphi$. Because $u \circ v$, $v \circ u$ are morphisms of $\mathscr{F}'$, and since φ, φ' are weak universal solutions the above equations lead to $u \circ v = \xi$, $v \circ u = \eta$ or to $u \circ (v \circ \overset{-1}{\xi}) \in \mathscr{F}_0'$, $(\overset{-1}{\eta} \circ v) \circ u \in \mathscr{F}_0'$, where ξ, η are automorphisms of $q(\varphi')$, $q(\varphi)$ respectively; whence the existence of an isomorphism u. The converse is trivial.

Definition 5a. We say that f' is a right universal (resp. right weak universal) attachment of $f \in \mathscr{F}$ if $f' \in \mathscr{F}'$ and if there exist right universal (resp. right weak universal) solutions φ, ψ of $\alpha(f)$, $\beta(f)$ respectively such that $f' \circ \varphi = \psi \circ f$.

Definition 5b. We say that f is a left universal (resp. left weak universal) attachment of $f' \in \mathscr{F}'$ if $f \in \mathscr{F}$ and if there exist left universal (resp. left weak universal) solutions φ, ψ of $\alpha(f')$, $\beta(f')$ respectively such that $\psi \circ f = f' \circ \varphi$.

Proposition 4. *Let f' be a right universal (resp. right weak universal) attachment of $f \in \mathscr{F}$, and let $f'' \in \mathscr{F}'$. In order that f'' be a right universal (resp. right weak universal) attachment of f, it is necessary and sufficient that there exist isomorphisms u, v of $\mathscr{F}'$ such that $f'' = v \circ f' \circ u$.*

Suppose that f' and f'' are right weak universal attachments of f. Then there exist right weak universal solutions φ, φ' of $\alpha(f)$, ψ, ψ' of $\beta(f)$, and, according to proposition 3 isomorphisms u', v of $\mathscr{F}'$ such that $f' \circ \varphi = \psi \circ f$, $f'' \circ \varphi' = \psi' \circ f$, $\varphi = u' \circ \varphi'$, $\psi' = v \circ \psi$. It follows that $v \circ f' \circ u' \circ \varphi' = v \circ f' \circ \varphi = v \circ \psi \circ f = \psi' \circ f = f'' \circ \varphi'$. Because $v \circ f' \circ u'$, f'' are morphisms of $\mathscr{F}'$, and since φ' is a weak universal solution, the above equations lead to $f'' = v \circ f' \circ u' \circ \xi$ where ξ is an automorphism of $q(\varphi')$. Write u in place of $u' \circ \xi$ to obtain $f'' = v \circ f' \circ u$. The converse is trivial.

Definition 6a. We say that φ is a right special (resp. right weak special) solution of $e \in \mathscr{F}_0$ if $\varphi \in \Phi(e, \bullet)$ and if, for all $\varphi' \in \Phi(e, \bullet)$, there exists one and only one (resp. up to an automorphism of $q(\varphi)$, only one) $f' \in \mathscr{F}'$ such that $\varphi = f' \circ \varphi'$. (See diagram (RS) *of the introduction.)*

Definition 6b. We say that φ is a left special (resp. left weak special) solution of $e' \in \mathscr{F}_0'$ if $\varphi \in \Phi(\bullet, e')$ and if, for all $\varphi' \in \Phi(\bullet, e')$, there exists one and only one (resp. up to an automorphism of $p(\varphi)$, only one) $f \in \mathscr{F}$ such that $\varphi = \varphi' \circ f$. (See diagram (LS) *of the introduction.)*

Proposition 5. *Let φ be a right special (resp. right weak special) solution of $e \in \mathscr{F}_0$, and let $\varphi' \in \Phi$. In order that φ' be a right special (resp. right weak special)*

solution of e, it is necessary and sufficient that there exist an isomorphism u of $\mathscr{F}'$ such that $\varphi' = u \circ \varphi$.

The proof is, *mutatis mutandis*, the same as the proof of proposition 3, and is left to the reader.

Definition 7a. We say that f' is a right special (resp. right weak special) attachment of $f \in \mathscr{F}$ if $f' \in \mathscr{F}'$ and if there exist right special (resp. right weak special) solutions φ, ψ of $\alpha(f)$, $\beta(f)$ respectively such that $\varphi = f' \circ \psi \circ f$.

Definition 7b. We say that f is a left special (resp. left weak special) attachment of $f' \in \mathscr{F}'$ if $f \in \mathscr{F}$ and if there exist left special (resp. left weak special) solutions ψ, φ of $\alpha(f')$, $\beta(f')$ respectively such that $\varphi = f' \circ \psi \circ f$.

Proposition 6. *Let f' be a right special (resp. right weak special) attachment of $f \in \mathscr{F}$, and let $f'' \in \mathscr{F}'$. In order that f'' be a right special (resp. right weak special) attachment of f, it is necessary and sufficient that there exist isomorphisms u, v of $\mathscr{F}'$ such that $f'' = v \circ f' \circ u$.*

The proof is, *mutatis mutandis*, the same as the proof of proposition 4, and is left to the reader.

3. G-universal and H-special problems

For the remainder of this paper "universal" and "special" always means "right universal" and "right special" respectively.

Proposition 7. *Let $(\mathscr{C}, \mathscr{F})$ be a category, and $\mathscr{G}$ a subset of $\mathscr{F}$. The following relations are equivalent.*

a) *There exists a substructure of $\mathscr{C}$ on $\mathscr{G}$ (in the sense of* [1], Chap. IV, § 2, n° 4; *functors as morphisms)*;

b) *$\mathscr{G}$ is a stable subset of $\mathscr{F}$, and $f \in \mathscr{G}$ implies $\alpha(f) \in \mathscr{G}$ and $\beta(f) \in \mathscr{G}$.*

The proof is standard.

Corollary. *Let $\mathscr{G}$ be a subcategory of $\mathscr{F}$.*

(i) *For each pair $(f, g) \in \mathscr{G} \times \mathscr{G}$, which is composable in $\mathscr{F}$, $f \circ g$ is the composite of f and g in $\mathscr{G}$.*

(ii) *For all $f \in \mathscr{G}$, $\alpha(f)$ and $\beta(f)$ are source and sink of f in $\mathscr{G}$ resp.*

(iii) *One has $\mathscr{G}_0 = \mathscr{F}_0 \cap \mathscr{G}$.*

In slight modification of [4], p. 111, we pose:

Definition 8. A subcategory $\mathscr{G}$ of $\mathscr{F}$ is called full, if it verifies:

(i) $(a \in \mathscr{G} \wedge b \in \mathscr{G} \wedge f : a \to b) \Rightarrow (f \in \mathscr{G})$;

(ii) $(a \in \mathscr{G} \wedge f : a \to b \text{ isomorphism}) \Rightarrow (b \in \mathscr{G})$.

Let Φ be the set of the $\varphi \in \mathscr{F}$ such that $\beta(\varphi) \in \mathscr{G}$. It is obvious that the categories $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ are linked by Φ. Moreover, one has $p(\varphi) = \alpha(\varphi)$, $q(\varphi) = \beta(\varphi)$ for $\varphi \in \Phi$ (see n° 1, example 4). A universal (resp. weak universal) solution with respect to the categories $\mathscr{F}$ and $\mathscr{G}$ linked by Φ will henceforth be referred to as a *$\mathscr{G}$-universal* (resp. *weak $\mathscr{G}$-universal*) solution. Similarly for attachments.

Proposition 8. *Let $\mathcal{G}$ be a subcategory of $\mathcal{F}$ verifying* (i) *of def.* 8, *and let* $a \in \mathcal{G}_0$.

(i) *a is a $\mathcal{G}$-universal solution of a.*

(ii) *Every weak $\mathcal{G}$-universal solution of a is an isomorphism of $\mathcal{G}$.*

Let $\varphi \in \Phi(a, \bullet)$. Because $\mathcal{G}$ verifies def. 8, (i), one has $\varphi \in \mathcal{G}$ and $\varphi \circ a = \varphi$. Moreover, $f_1 \circ a = f_2 \circ a$ implies $f_1 = f_2$. This proves (i), which immediately leads to (ii), using prop. 3.

Corollary. *Let $\mathcal{G}$ be a subcategory of $\mathcal{F}$ verifying* (i) *of def.* 8 *and $f \in \mathcal{G}$.*

(i) *f is a $\mathcal{G}$-universal attachment of f.*

(ii) *Every weak $\mathcal{G}$-universal attachment of f is of the form $v \circ f \circ u$ where u, v are isomorphisms of $\mathcal{G}$.*

If f belongs to $\mathcal{G}$, then so do $\alpha(f)$ and $\beta(f)$. The latter are $\mathcal{G}$-universal solutions of themselves and verify $f \circ \alpha(f) = \beta(f) \circ f$, which proves (i). (ii) follows then easily by applying prop. 4.

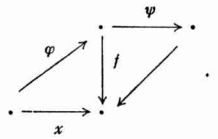
Proposition 9. *Let $\mathcal{G}$ be a subcategory of $\mathcal{F}$, verifying* (i) *of def.* 8, *and let f be an isomorphism of $\mathcal{G}$. Then f is a $\mathcal{G}$-universal solution of $\alpha(f)$.*

Observe that the relations $\varphi = g \circ f$ and $g = \varphi \circ f^{-1}$ are equivalent, and that every quasimorphism φ such that $\alpha(\varphi) = \alpha(f)$ belongs to $\mathcal{G}$.

For a subcategory $\mathcal{H}$ of $\mathcal{F}$, the categories $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}$ are linked by the set $\mathcal{H}$. Moreover, one has $p(\varphi) = \alpha(\varphi)$, $q(\varphi) = \beta(\varphi)$ for $\varphi \in \mathcal{H}$ (see n° 1, example 4). A special (resp. weak special) solution with respect to the categories $\mathcal{H}$ and $\mathcal{H}$ linked by $\mathcal{H}$ will henceforth be referred to as *$\mathcal{H}$-special* (resp. *weak $\mathcal{H}$-special*) solution. Similarly for attachments.

Proposition 10. *Let $\mathcal{H}$ be a subcategory of $\mathcal{F}$, and let x, φ, f be elements of $\mathcal{H}$ such that $x = f \circ \varphi$. If x is an $\mathcal{H}$-special solution of $\alpha(\varphi)$, then f is an $\mathcal{H}$-special solution of $\beta(\varphi)$. Conversely, if f is an $\mathcal{H}$-special solution of $\beta(\varphi)$, and if $\alpha(\varphi)$ admits an $\mathcal{H}$-special solution, then x is an $\mathcal{H}$-special solution of $\alpha(\varphi)$. The proposition remains true if "$\mathcal{H}$-special" is everywhere replaced by "weak $\mathcal{H}$-special".*

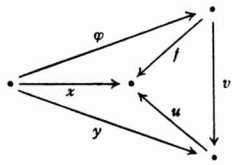
1° Let ψ be a quasimorphism such that $\alpha(\psi) = \beta(\varphi)$, and consider the diagram



Then $\psi \circ \varphi$ is a quasimorphism such that $\alpha(\psi \circ \varphi) = \alpha(\varphi)$. x being (in any case) a weak $\mathcal{H}$-special solution of $\alpha(\varphi)$, there exists a morphism g' such that $g' \circ \psi \circ \varphi = x = f \circ \varphi$, and this in turn implies $f = \xi \circ g' \circ \psi$ where ξ is an automorphism of $\beta(x)$. Write g for $\xi \circ g'$ to obtain $f = g \circ \psi$.

Suppose now that $g_1 \circ \psi = f = g_2 \circ \psi$. Then $g_1 \circ (\psi \circ \varphi) = x = g_2 \circ (\psi \circ \varphi)$. These equations lead to $g_2 = g_1$ if x is an $\mathcal{H}$-special solution, to $g_2 = \eta \circ g$ (where η is an automorphism of $\beta(x)$ which equals $\beta(f)$), if x is a weak $\mathcal{H}$-special solution.

2° Let y be an $\mathscr{H}$-special (resp. weak $\mathscr{H}$-special) solution of $\alpha(\varphi)$, and consider the diagram



in which v is such that $y=v\circ\varphi$. From the first part of the proof we know that v is an $\mathscr{H}$-special (resp. weak $\mathscr{H}$-special) solution of $\beta(\varphi)$. The same being true of f by hypothesis, we infer that there exists an isomorphism u of $\mathscr{H}$ such that $f=u\circ v$ (prop. 5). Consequently, $f\circ\varphi=u\circ v\circ\varphi$ or $x=u\circ y$. Hence x is also an $\mathscr{H}$-special (resp. weak $\mathscr{H}$-special) solution of $\alpha(\varphi)$ (prop. 5). Q.E.D.

Corollary 1. *The following relations are equivalent:*

a) $b\in\mathscr{H}_0$, *and* b *is an* $\mathscr{H}$*-special solution of itself.*

b) *There exists a morphism* $x\colon a\to b$ *of* $\mathscr{H}$ *such that* x *is an* $\mathscr{H}$*-special solution of* a.

The corollary remains true if "$\mathscr{H}$*-special" is everywhere replaced by "weak* $\mathscr{H}$*-special".*

Corollary 2. *Every weak* $\mathscr{H}$*-special attachment of an element of* $\mathscr{H}$ *— and a fortiori every* $\mathscr{H}$*-special attachment — is an isomorphism of* $\mathscr{H}$.

Let g be a weak $\mathscr{H}$-special attachment of φ. Then $\alpha(\varphi)$ admits a weak $\mathscr{H}$-special solution x. Let f be such that $x=f\circ\varphi$, which can also be written in the form $x=\beta(x)\circ f\circ\varphi$. Due to prop. 10, f is a weak $\mathscr{H}$-special solution of $\beta(\varphi)$, hence $\beta(x)$ is a weak $\mathscr{H}$-special attachment of φ by def. 7a. It follows that g is of the form $v\circ\beta(x)\circ u$ where u, v are isomorphisms of $\mathscr{H}$ (prop. 6).

Proposition 11. *Let* $\mathscr{H}$ *be a subcategory of* $\mathscr{F}$. *If each object of* $\mathscr{H}$ *admits a weak* $\mathscr{H}$*-special solution which is an injective morphism (resp. a monomorphism) of* $\mathscr{F}$, *then every element of* $\mathscr{H}$ *is an injective morphism (resp. a monomorphism) of* $\mathscr{F}$. *(In the left case, one has to replace "injective" (resp. "monomorphism") by "surjective" (resp. "epimorphism")).*

Indeed, let $\varphi\in\mathscr{H}$, and let x be an $\mathscr{H}$-special solution of $\alpha(\varphi)$. Pick $f\in\mathscr{H}$ such that $x=f\circ\varphi$. If $\varphi\circ h_1=\varphi\circ h_2$, then $x\circ h_1=f\circ\varphi\circ h_1=f\circ\varphi\circ h_2=x\circ h_2$, hence $h_1=h_2$, provided x is injective. If $r\circ x=\alpha(x)$ for some $r\in\mathscr{F}$, then $r\circ f\circ\varphi=r\circ x=\alpha(x)=\alpha(\varphi)$ (cf. [6] for definitions).

4. A characterization of G-universal solutions

We introduce the set $\varrho(\mathscr{G})$ (resp. $\varrho_w(\mathscr{G})$) of the $f\in\mathscr{F}$ such that f admits a $\mathscr{G}$-universal (weak $\mathscr{G}$-universal) attachment which is an isomorphism of $\mathscr{G}$.

Definition 9. *A subcategory* $\mathscr{H}$ *of* $\mathscr{F}$ *is called complete, if it verifies:*

(i) $f\circ g\in\mathscr{H}\wedge f\in\mathscr{H}$ (*resp.* $g\in\mathscr{H}$) $\Rightarrow g\in\mathscr{H}$ (*resp.* $f\in\mathscr{H}$);

(ii) *Every isomorphism of* $\mathscr{F}$ *belongs to* $\mathscr{H}$.

Proposition 12. *If $\mathcal{G}$ is a subcategory of $\mathcal{F}$, then $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$) is a subcategory of $\mathcal{F}$. If, in addition, each object of $\mathcal{F}$ admits a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution, then $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$) is a complete subcategory of $\mathcal{F}$.*

Let f and g be $\mathcal{F}$-composable elements of $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$). Then there exist isomorphisms f', g' of $\mathcal{G}$ which are $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) attachments of f, g resp. Because $f \circ g$ has an attachment of the form $f' \circ u \circ g'$ where u is an isomorphism of $\mathcal{G}$ (prop. 3), the composite $f \circ g$ belongs to $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$); whence its stability. Let $f \in \varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$). Then there exist $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solutions φ, ψ of $\alpha(f)$, $\beta(f)$ resp.; in particular, $\beta(\varphi)$, $\beta(\psi)$ are $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) attachments of $\alpha(f)$, $\beta(f)$ resp., the latter being therefore elements of $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$). Apply prop. 7 to finish the proof of the first part of the proposition.

Suppose now that, in addition, each object of $\mathcal{F}$ admits a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution. In order to verify (i) of def. 9, observe that, if for example f' and g' are $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) attachments of f and g respectively, then any like attachment of $f \circ g$ is of the form $f' \circ u \circ g'$ where u is an isomorphism of $\mathcal{G}$ (prop. 3). Furthermore, each isomorphism of $\mathcal{F}$ admits a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) attachment which is an isomorphism of $\mathcal{G}$ as follows easily from def. 5 a and prop. 4 Q.E.D.

We introduce another set $\sigma(\mathcal{H})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{H})$) consisting of the $f \in \mathcal{F}$ such that $\alpha(f)$ and $\beta(f)$ are $\mathcal{H}$-special (resp. weak $\mathcal{H}$-special) solutions of themselves (cf. cor. 1 of prop. 10).

Proposition 13. *If $\mathcal{H}$ is a subcategory of $\mathcal{F}$, then $\sigma(\mathcal{H})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{H})$) is a subcategory of $\mathcal{F}$ verifying* (i) *of def.* 8. *If, in addition, $\mathcal{H}$ verifies* (ii) *of def.* 9, *then $\sigma(\mathcal{H})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{H})$) is a full subcategory of $\mathcal{F}$.*

Let f and g be $\mathcal{F}$-composable elements of $\sigma(\mathcal{G})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{G})$). By definition, $\alpha(g)$ and $\beta(g)$ are $\mathcal{H}$-special (resp. weak $\mathcal{H}$-special) solutions of themselves, and are equal to $\alpha(f \circ g)$ resp.; whence the stability of $\sigma(\mathcal{H})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{H})$). Let $f \in \sigma(\mathcal{H})$ (resp. $f \in \sigma^w(\mathcal{H})$). Then $\alpha(f)$ and $\beta(f)$ are $\mathcal{H}$-special (resp. weak $\mathcal{H}$-special) solutions of themselves. Note that $\alpha(f)$ and $\beta(f)$ are objects, and apply prop. 7 in order to see that $\sigma(\mathcal{H})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{H})$) is a subcategory of $\mathcal{F}$.

Now, let a, b be objects of $\sigma(\mathcal{H})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{H})$), and let $f: a \to b$ be a morphism of $\mathcal{F}$. Then $\alpha(f) = a = \alpha(a)$, $\beta(f) = b = \beta(b)$, the right sides of both equations being $\mathcal{H}$-special (resp. weak $\mathcal{H}$-special) solutions of themselves by assumption. Hence $f \in \sigma(\mathcal{H})$ (resp. $f \in \sigma^w(\mathcal{H})$). Thus def. 8, (i) is fulfilled.

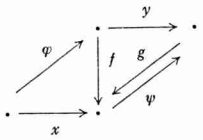
If, in addition, $\mathcal{H}$ verifies (ii) of def. 9, then $\sigma(\mathcal{H})$ (resp. $\sigma^w(\mathcal{H})$) verifies (ii) of def. 8. Indeed, let $a \in \sigma(\mathcal{H})$ (resp. $a \in \sigma^w(\mathcal{H})$) and $f: a \to b$ an isomorphism of $\mathcal{F}$. Then f, and in turn b, belong to $\mathcal{H}$. Because $\alpha(f)$, which equals a, is an $\mathcal{H}$-special (resp. weak $\mathcal{H}$-special) solution of itself by hypothesis, the same is true of $\beta(f)$ which equals b (prop. 5 and 10). Q.E.D.

Theorem 1. *Let $\mathcal{F}$ be a category, and $\mathcal{G}$ a full subcategory of $\mathcal{F}$. Assume that a is an object of $\mathcal{F}$, and that x is a morphism of $\mathcal{F}$ with source a. The following relations are equivalent:*

a) *x is a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution of a.*

b) *$a \in \varrho(\mathcal{G})$ (resp. $a \in \varrho^w(\mathcal{G})$), and x is a $\varrho(\mathcal{G})$-special (resp. weak $\varrho^w(\mathcal{G})$-special) solution of a.*

a)⇒b). Let x be a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution of a. Then $\beta(x)$ belongs to $\mathcal{G}$ and is a $\mathcal{G}$-universal solution of itself (prop. 8, (i)). From the equation $\beta(x) \circ x = \beta(x) \circ x$, we learn that $\beta(x)$ is a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) attachment of x; whence $x \in \varrho(\mathcal{G})$ (resp. $x \in \varrho^w(\mathcal{G})$). Now let φ be a quasimorphism of $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$) with source a. By definition, there exists a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) attachment ψ of φ with respect to the $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution x of $\alpha(\varphi)$ and some $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution y of $\beta(\varphi)$, and ψ is an isomorphism of $\mathcal{G}$. Consider the diagram



in which x, y, φ and ψ are already fixed.

If f is such that $x = f \circ \varphi$, then $f = g \circ y$ for some $g \in \mathcal{G}$, because $\beta(f) = \beta(x) \in \mathcal{G}$ (x being a weak $\mathcal{G}$-universal solution) and since y is a weak $\mathcal{G}$-universal solution of $\beta(\varphi)$. Therefore, we have $x = g \circ y \circ \varphi$, which can also be written in the form $\beta(x) \circ x = g \circ \psi \circ x$. Because $\beta(x)$ and $g \circ \psi$ are elements of $\mathcal{G}$, and since x is a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution of a, the above equation results in $g \circ \psi = \beta(x) \circ \xi$ where ξ is equal to (resp. an automorphism of) $\beta(x)$. Consequently, g is of the form $\xi \circ \bar{\psi}^1$ and f of the form $\xi \circ \bar{\psi}^1 \circ y$; whence the uniqueness (resp. uniqueness, up to an automorphism of $\beta(x)$) of f.

Conversely, let f stand for the term $\bar{\psi}^1 \circ y$. Then one has immediately $x = \bar{\psi}^1 \circ y \circ \varphi = f \circ \varphi$. It remains to show that f belongs to $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$). Observe that the argument at the onset of the proof (applied to y rather than x) leads to $y \in \varrho(\mathcal{G})$ (resp. $y \in \varrho^w(\mathcal{G})$). Moreover, $\bar{\psi}^1$ belongs to $\varrho(\mathcal{G})$ — and a fortiori to $\varrho^w(\mathcal{G})$ — since $\bar{\psi}^1$ is an isomorphism of $\mathcal{G}$ (cor., (i), of prop. 8).

b)⇒a). Let $a \in \varrho(\mathcal{G})$ (resp. $a \in \varrho^w(\mathcal{G})$), and let x be a $\varrho(\mathcal{G})$-special (resp. weak $\varrho^w(\mathcal{G})$-special) solution of a. We know that x, being an element of $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$), admits a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) attachment. In particular, there exists a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution u of a. According to the first part of the proof, u is also a $\varrho(\mathcal{G})$-special (resp. weak $\varrho^w(\mathcal{G})$-specialf solution of a. Hence there exists an isomorphism h of $\varrho(\mathcal{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathcal{G})$) such that $x = h \circ u$ (prop. 5). Because $\mathcal{G}$ is a full subcategory of $\mathcal{F}$ (def. 8, (ii)), h is also an isomorphism of $\mathcal{G}$. We infer that x is a $\mathcal{G}$-universal (resp. weak $\mathcal{G}$-universal) solution of a (prop. 3). Q.E.D.

Corollary 1. *If $\mathcal{G}$ is a full subcategory of $\mathcal{F}$, then the equations $\sigma(\varrho(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$ and $\sigma^w(\varrho^w(\mathcal{G})) = \mathcal{G}$ hold.*

Let $g \in \mathcal{G}$. Because $\alpha(g)$ and $\beta(g)$ are objects of $\mathcal{G}$, they are $\mathcal{G}$-universal (and a fortiori weak $\mathcal{G}$-universal) solutions of themselves (prop. 8, (i)). Due

to theorem 1, they are also $\varrho(\mathscr{G})$-special (resp. weak $\varrho^w(\mathscr{G})$-special) solutions of themselves. Hence g belongs to $\sigma(\varrho(\mathscr{G}))$ (resp. $\sigma^w(\varrho^w(\mathscr{G}))$). Conversely, let g be an element of $\sigma(\varrho(\mathscr{G}))$ (resp. $\sigma^w(\varrho^w(\mathscr{G}))$). Because $\mathscr{G}$ is a full subcategory, it suffices to show that $\alpha(g)$ and $\beta(g)$ are objects of $\mathscr{G}$. By definition, $\alpha(g)$ and $\beta(g)$ are $\varrho(\mathscr{G})$-special (resp. weak $\varrho^w(\mathscr{G})$-special) solutions of themselves. In view of theorem 1, they are also $\mathscr{G}$-universal (resp. weak $\mathscr{G}$-universal) solutions of themselves. Hence they belong to $\mathscr{G}$.

Corollary 2. *Suppose that $a \in \mathscr{F}_0$ admits a weak $\mathscr{G}$-universal solution. Let $\varphi \in \mathscr{G}$ and $\varphi' \in \varrho(\mathscr{G})$ be such that $\alpha(\varphi) = \alpha(\varphi') = a$. Then there exists $f \in \mathscr{F}$ such that $\varphi = f \circ \varphi'$.*

Remark. Let A, B, X be given, subject to the conditions $A \subset B \subset X$, $A \neq B$, $B \neq X$. Denote by $\mathscr{F}$ the set of the canonical injections (Δ_A, A, A), (Δ_A, A, B), (Δ_A, A, X), (Δ_B, B, B), (Δ_B, B, X), (Δ_X, X, X), by $\mathscr{H}$ the set obtained from $\mathscr{F}$ by deleting (Δ_A, A, B) and (Δ_B, B, X). If one endows $\mathscr{F}$ and $\mathscr{H}$ with the usual composition laws between functions $\mathscr{F}$ becomes a category and $\mathscr{H}$ a complete subcategory of $\mathscr{F}$. It can easily be seen that (Δ_A, A, X) is a right $\mathscr{H}$-special solution, but *not* a right $\sigma(\mathscr{H})$-universal solution, of (Δ_A, A, A).

5. Applications

According to the cor. of theorem 1, the objects of $\mathscr{G}$ can be characterized as being precisely the $\varrho(\mathscr{G})$-special (resp. weak $\varrho^w(\mathscr{G})$-special) solutions of a (naturally) associated problem. Thus, in example I of the introduction one can *define* the concept of simple connectedness by means of a special problem. Similarly in example II of the introduction, one can *define* the concept of being algebraically closed by means of a special problem. It remains to check that the elements of $\varrho(\mathscr{G})$ (resp. $\varrho^w(\mathscr{G})$) are exactly the coverings in example I, the algebraic extensions in example II.

I. Take for $\mathscr{F}$ the category of type M (M a universe) of basepoint preserving, continuous mappings of perfectly connected topological spaces into like ones (cf. [6]). Let $\mathscr{G}$ be the subcategory of $\mathscr{F}$ consisting of the mappings which depart from and arrive at simply and perfectly connected topological spaces. We are going to show that $\varrho(\mathscr{G})$ is the subcategory of $\mathscr{F}$ consisting of the coverings.

Consider the equation $f \circ \varphi = \psi \circ g$ in which g is a left $\mathscr{G}$-universal attachment of $f \in \mathscr{F}$, φ and ψ being universal coverings of $\alpha(f)$ and $\beta(f)$ resp. If f is a covering, then g exists and is necessarily an isomorphism ([5], Chap. III, theorem 16. 5). It follows that $f \in \varrho(\mathscr{G})$. Conversely, assume that g exists and is an isomorphism. By [5], Chap. III, theorem 17. 1, we know that φ and ψ are coverings. Because $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ implies $h_1 \circ f \circ \varphi = h_2 \circ f \circ \varphi$, which can also be written in the form $h_1 \circ \psi \circ g = h_2 \circ \psi \circ g$, and since g, ψ are surjective, we obtain $h_1 = h_2$. Therefore f is surjective. Let t be an element of the set of departure of f, and choose t' such that $\varphi(t') = t$. Because g (as an isomorphism) and, ψ (by construction) are local homeomorphisms, the same is true of $\psi \circ g$, which equals $f \circ \varphi$. There exist open neighborhoods U (resp. U', V) of t (resp.

t', $f(t)$) such that the mapping $\bar{\varphi}$ (resp. ξ) deduced from φ (resp. $f \circ \varphi$) by passing to the subsets U', U (resp. U', V) is a homeomorphism. Consequently, the mapping $\bar{f}$ which is deduced from f by passing to the subsets U, V and which is of the form $\xi \circ \bar{\varphi}^{-1}$, is a homeomorphism, too. t being arbitrary, we conclude that f is a local homeomorphism.

II. Take for $\mathscr{F}$ the category of type M (M a universe) of homomorphisms of commutative fields into like ones (cf. [6]). Let $\mathscr{G}$ be the subcategory of those $f \in \mathscr{F}$ which depart from and arrive at algebraically closed, commutative fields. We are going to show $\varrho^w(\mathscr{G})$ is the subcategory of $\mathscr{F}$ consisting of the algebraic extensions.

Consider the equation $\psi \circ f = g \circ \varphi$ in which g is a right weak $\mathscr{G}$-universal attachment of $f \in \mathscr{F}$, φ and ψ being algebraic closures of $\alpha(f)$ and $\beta(f)$ resp. If f is an algebraic extension, then g exists and is necessarily an isomorphism ([2], Chap. V, § 4, theorem 2). It follows that $f \in \varrho^w(\mathscr{G})$. Conversely, assume that g exists and is an isomorphism. By [2], Chap. V, § 4, theorem 2, we know that φ and ψ are algebraic extensions. Therefore, g (as an isomorphism) and φ, ψ (by construction) being algebraic extenxions, the same is true of $g \circ \varphi$, which equals $\varphi \circ f$; hence f is an algebraic extension ([2], Chap. V, § 3, prop. 8).

The following two examples are due to Dr. EDGAR E. ENOCHS.

III. Take for $\mathscr{F}$ the category of type M (M a universe) of injective A-linear mappings of A-modules into A-modules. Let $\mathscr{G}$ be the subcategory of the $f \in \mathscr{F}$ which depart and arrive at injective A-modules. It can be shown that $\varrho^w(\mathscr{G})$ is the subcategory of $\mathscr{F}$ consisting of the essential A-linear mappings. The right weak $\mathscr{G}$-universal solutions are called injective envelopes.

IV. Take for $\mathscr{F}$ the category of type M (M a universe) of homomorphisms of commutative groups into commutative groups. Let $\mathscr{G}$ be the subcategory of the $f \in \mathscr{F}$ which depart and arrive at torsion free groups. In this case left $\mathscr{G}$-universal solutions do not exist, but only so-called very weak $\mathscr{G}$-universal solutions φ in the sense that, referring to the diagram (LU) of the introduction, to each quasimorphism φ' there exists a morphism f which renders the diagram commutative and φ is determined uniquely up to an isomorphism in the sense of prop. 3. Still, the proof of theorem 1 carries through.

References

[1] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles. Paris: Hermann 1957.

[2] — Algèbre. Paris: Hermann 1959.

[3] EHRESMANN, C.: Gattungen von lokalen Strukturen. Jber. dtsch. Math.-Ver. **60**, 49—77 (1957).

[4] EILENBERG, S., and N. STEENROD: Foundations of algebraic topology. Princeton: Princeton Univ. Press 1952.

[5] HU, S.: Homotopy Theory. New York: Academic Press 1959.

[6] SONNER, J.: On the formal definition of categories. Math. Z. **80**, 163—176 (1962).

Dept. of Math. University of S. C., Columbia, South Carolina (U.S.A.)

(Received November 5, 1962)

SCHNEIDER, A.
Math. Zeitschr. 82, 212—236 (1963)

Eine Verallgemeinerung der Kapteynschen Reihen

Von
ALBERT SCHNEIDER

1. Einleitung

Als Kapteynsche Reihe erster Art bezeichnet man die Entwicklung einer analytischen Funktion $f(z)$ in eine Reihe der Form:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z], \tag{1.1}$$

wobei $J_\mu(z)$ die Bessel-Funktion zum Index μ ist. Für $\nu=0$ wurde (1.1) zuerst von W. KAPTEYN [*1*, 91—122] untersucht. Zwei spezielle Reihen vom Typ (1.1) waren zuvor von E. MEISSEL [*2*, 363—367] angegeben worden. Eine eingehende Untersuchung, gestützt auf die Methode der Reihenumordnung, stammt von N. NIELSEN [*3*, 39—75].

F. W. SCHÄFKE [*4*, 167] hat in Anwendung eines sehr allgemeinen Entwicklungstheorems für die Hillsche Differentialgleichung eine Verallgemeinerung von (1.1) hergeleitet, nämlich die Entwicklung einer analytischen Funktion $f(z)$ in eine Reihe der Form:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_{\nu+n}[(\nu+n)z]. \tag{1.2}$$

Im folgenden nennen wir Entwicklungen Reihen vom Potenzreihentyp, wenn der Summationsindex n von 0 bis $+\infty$ läuft, und vom Laurent-Typ, wenn n von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft.

Als Neumannsche Reihe erster Art bezeichnet man die Entwicklung einer analytischen Funktion $f(z)$ in eine Reihe der Form:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n J_{\nu+n}(z). \tag{1.3}$$

C. NEUMANN [*7*, *6*, 310—314] hat den Entwicklungssatz für $\nu=0$ untersucht, und für beliebiges ν ist (1.3) von L. GEGENBAUER [*8*, 124—130] und N. NIELSEN [*9*, 270—292] betrachtet worden.

Eine Verallgemeinerung der Entwicklung (1.3) gibt A. ERDÉLYI [*10*, 1092—1098] an. Es ist die Entwicklung nach Whittakerschen Funktionen:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n M_{\varkappa,\nu+n}(z). \tag{1.4}$$

Für $\varkappa=0$ liefert dies bis auf eine ganze lineare Transformation die Reihe (1.3).

Die entsprechenden Entwicklungen einer analytischen Funktion in eine Reihe vom Laurent-Typ:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n J_{\nu+n}(z) \tag{1.5}$$

bzw.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n M_{\varkappa,\nu+n}(z) \tag{1.6}$$

sind von F. W. SCHÄFKE [*5*, 155, 177] behandelt worden.

Das Hauptziel dieser Arbeit soll nun vor allem ein Satz über die Entwickelbarkeit einer analytischen Funktion $f(z)$ in eine Reihe der Form:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z] \tag{1.7}$$

sein, die eine naturgemäße Verallgemeinerung von (1.2) darstellt, wie in 3 näher begründet wird. In Abschnitt 2 wird zuvor ein Entwicklungstheorem für die Hillsche Differentialgleichung zitiert, das F. W. SCHÄFKE [*4*, 458] bewiesen hat. In 3.1 wird dann die Whittakersche Differentialgleichung transformiert durch einen Ansatz der Form:

$$t=t(z) \tag{1.8}$$

und die Transformation in 3.2 vor allem auf ihre Abbildungseigenschaft hin untersucht. In 4 folgt dann der Beweis der Entwickelbarkeit einer analytischen Funktion in eine Reihe der Form (1.7) durch Anwendung des in 2 zitierten Satzes. Abschnitt 5 bringt einige spezielle Entwicklungen der Form (1.7), insbesondere enthält 5.3 eine Verallgemeinerung der Polynome von NIELSEN. In 6 wird ein zweiter Entwicklungssatz für analytische Funktionen abgeleitet (man vgl. [*10*], S. 1098), und 7 gibt noch eine asymptotische Formel für die Funktionen $M_{\varkappa\mu,\mu}(\mu z)$.

2. Ein Entwicklungstheorem für die Hillsche Differentialgleichung

An dieser Stelle soll nur kurz das in [*4*] S. 458 hergeleitete Entwicklungstheorem für die Hillsche Differentialgleichung zitiert werden. Mit einer leichten Modifikation bezüglich der Periode lautet es:

Die Funktion $g(t)$ sei für

$$\mathfrak{S}: r_1<\Im\mathfrak{m}\, t<r_2 \tag{2.1}$$

holomorph und 2π-periodisch: $g(t+2\pi)=g(t)$.

Betrachtet wird die Hillsche Differentialgleichung

$$y''(t)+\big(\lambda+g(t)\big)\,y(t)=0. \tag{2.2}$$

t_0 sei eine Stelle aus $\mathfrak{S}$. $y_1(t)$ und $y_2(t)$ seien die Lösungen von (2.2) mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} y_1(t_0)=1, & y_1'(t_0)=0 \\ y_2(t_0)=0, & y_2'(t_0)=1. \end{cases} \tag{2.3}$$

Sei 2ν nicht ganz. Gesucht werden nun Lösungen von (2.2) mit:

$$y(t+2\pi)=e^{2\pi i\nu}y(t)\not\equiv 0. \tag{2.4}$$

Wir definieren:

$$\Delta_\nu(\lambda)=\tfrac{1}{2}[y_1(t_0+2\pi)+y_2'(t_0+2\pi)]-\cos 2\pi\nu. \tag{2.5}$$

Aus der Theorie der Floquetschen Lösungen folgt dann, daß $\Delta_\nu(\lambda)=0$ notwendig und hinreichend ist für die Existenz einer Lösung von (2.2) mit der Eigenschaft (2.4). Wegen $\Delta_\nu(\lambda)=\Delta_{-\nu}(\lambda)$ ergibt sich, daß mit $y(t)$ auch eine Lösung $y^*(t)$ existiert mit

$$y^*(t+2\pi)=e^{-2\pi i\nu}y^*(t)\not\equiv 0. \tag{2.6}$$

Es gilt dann folgender

Satz. *2ν sei nicht ganz, $\Delta_\nu(\lambda)$ besitze keine mehrfachen Nullstellen. Dann hat das Eigenwertproblem* (2.2), (2.4) *zugleich mit* (2.2), (2.6) *abzählbar unendlich viele Eigenwerte:*

$$\lambda_{\nu+r}\qquad (r=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

die so numeriert werden können, daß

$$\lambda_{\nu+r}=(\nu+r)^2-\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi}g(t)\,dt+O\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.7}$$

gilt.

Die zu $\lambda_{\nu+r}$ gehörenden Eigenlösungen von (2.2), (2.4) *bzw.* (2.2), (2.6), *$y_{\nu+r}(t)$, $y^*_{\nu+r}(t)$ können so normiert werden, daß die Biorthogonalitäts- und Normierungsrelationen:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi}y_{\nu+r}(t)\,y^*_{\nu+s}(t)\,dt=\delta_{rs} \tag{2.8}$$

gelten.

Für $r\to\pm\infty$ hat man:

$$y_{\nu+r}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi}y_{\nu+r}(\tau)\,e^{-i(\nu+r)\tau}\,d\tau\cdot e^{i(\nu+r)t}\left[1+O\left(\frac{1}{r}\right)\right] \tag{2.9}$$

mit $O(1/r)$ gleichmäßig in abgeschlossenen Teilstreifen innerhalb $\mathfrak{S}$:

$$\varrho_1\leqq\Im\mathfrak{m}\,t\leqq\varrho_2,\qquad r_1<\varrho_1<\varrho_2<r_2. \tag{2.10}$$

Jede im Streifen $\mathfrak{S}$ reguläre analytische Funktion $f(t)$ mit

$$f(t+2\pi)=e^{2\pi i\nu}f(t) \tag{2.11}$$

kann in die in kompakten Teilgebieten absolut gleichmäßig konvergente Reihe:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,y_{\nu+n}(t) \tag{2.12}$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\, y^*_{\nu+n}(t)\, dt \tag{2.13}$$

entwickelt werden.

3. Transformation der Whittakerschen Differentialgleichung auf eine Hillsche Differentialgleichung

3.1 Ansatz und Transformationsformeln

Die Bessel-Funktionen $J_\mu(z)$ genügen der Differentialgleichung

$$z(z\,y')' + (z^2 - \mu^2)\, y = 0. \tag{3.1}$$

Ersetzt man hier z durch $\mu\, z$, so läßt sich der Faktor μ^2 ausklammern. Man erhält somit für die Funktionen $J_\mu(\mu\, z)$ die Differentialgleichung:

$$z(z\,y')' + \mu^2(z^2 - 1)\, y = 0. \tag{3.2}$$

Die Funktionen:

$$u(z) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa,\mu}(z) \tag{3.3}$$

genügen der Differentialgleichung:

$$z(z\,u')' + (-\tfrac{1}{4} z^2 + \varkappa\, z - \mu^2)\, u = 0. \tag{3.4}$$

Ersetzt man hier z durch $\mu\, z$ und $\varkappa$ durch $\mu\, \varkappa$, so läßt sich der Faktor μ^2 wieder ausklammern, und man bekommt für die Funktionen:

$$w(z) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa\mu,\mu}(\mu\, z) \tag{3.5}$$

die Differentialgleichung:

$$z(z\,w')' + \mu^2(-\tfrac{1}{4} z^2 + \varkappa\, z - 1)\, w = 0. \tag{3.6}$$

Setzt man hier $\varkappa = 0$ und transformiert noch $z = 2i\zeta$, so geht (3.6) in (3.2) über. Damit zeigt sich, daß man zu einer naturgemäßen Verallgemeinerung der Reihe (1.2) gelangt, wenn man die Möglichkeit der Entwicklung einer analytischen Funktion $f(z)$ in eine Reihe der Form (1.7) betrachtet.

Sei nun 2ν nicht ganz. Wir suchen Lösungen von (3.6) mit

$$w(z\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \nu}\, w(z) \not\equiv 0. \tag{3.7}$$

Setzt man in (3.6) $\mu^2 = \lambda$, so hat man genau die Eigenwerte

$$\lambda_n = (\nu + n)^2 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{3.8}$$

und die Eigenlösungen lauten bis auf einen konstanten Faktor:

$$w_n(z) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),(\nu+n)}\,[(\nu + n)\, z]. \tag{3.9}$$

Das adjungierte Problem:

$$w^*(z\, e^{2\pi i}) = e^{-2\pi i \nu}\, w^*(z) \not\equiv 0 \tag{3.10}$$

hat genau dieselben Eigenwerte, und die Eigenlösungen lauten bis auf einen konstanten Faktor:

$$w^*_n(z) = z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu + n)\, z]. \tag{3.11}$$

Um nun den gewünschten Entwicklungssatz zu erhalten, transformieren wir (3.6) auf eine Hillsche Differentialgleichung. Wir machen dazu den Ansatz:

$$t=t(z),\quad \frac{dt}{dz}=b(z),\quad w(z)=a(z)\,v(t)\,. \tag{3.12}$$

Die Ableitungen nach z wollen wir mit $'$ und die nach t mit $\cdot$ bezeichnen. Dann folgt:

$$w'(z)=a'(z)\,v(t)+a(z)\,b(z)\,\dot{v}(t)\,. \tag{3.13}$$

Daher gilt:

$$\begin{cases}(z\,w')'=a'(z)\,v(t)+z\,a''(z)\,v(t)+2\,z\,a'(z)\,b(z)\,\dot{v}(t)+a(z)\,b(z)\,\dot{v}(t)+\\ \qquad\qquad +z\,a(z)\,b'(z)\,\dot{v}(t)+z\,a(z)\,b^2(z)\,\ddot{v}(t)\,.\end{cases} \tag{3.14}$$

Damit geht für $z\,a(z)\,b(z)\neq 0$ (3.6) über in

$$\begin{cases}\ddot{v}(t)+\dfrac{2z^2a'(z)\,b(z)+z\,a(z)\,b(z)+z^2a(z)\,b'(z)}{z^2a(z)\,b^2(z)}\,\dot{v}(t)+\\ \qquad+\left\{\dfrac{\mu^2}{z^2b^2(z)}\left(-\frac{1}{4}z^2+\varkappa z-1\right)+\dfrac{a'(z)+z\,a''(z)}{z\,a(z)\,b^2(z)}\right\}v(t)=0\,.\end{cases} \tag{3.15}$$

Um nun auf eine Hillsche Differentialgleichung zu kommen, muß gelten:

$$2z^2\,a'(z)\,b(z)+z\,a(z)\,b(z)+z^2a(z)\,b'(z)=0 \tag{3.16}$$

und

$$-\tfrac{1}{4}z^2+\varkappa z-1=z^2b^2(z)\,. \tag{3.17}$$

(3.16) wird erfüllt durch

$$a(z)=[z\,b(z)]^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{3.18}$$

(3.17) ergibt

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)^2=-\frac{1}{4z^2}(4-4\varkappa z+z^2)\,. \tag{3.19}$$

Für $\varkappa=\pm 1$ erfüllt

$$it=\log\left(\pm\frac{z}{2}\right)+\left(1\mp\frac{z}{2}\right) \tag{3.20}$$

die Bedingung (3.19), wie man sofort durch Differenzieren erkennt, und mit $w=e^{it}$ folgt

$$w_\varkappa(z)=e^{it}=\pm\frac{z}{2}e^{1\mp\frac{z}{2}},\qquad \varkappa=\pm 1\,. \tag{3.21}$$

Für $\varkappa^2\neq 1$ erklären wir $(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}$ durch die Schnitte $(-\infty,-1]$, $[+1,+\infty)$, Zuordnung des Schnittes $(-\infty,-1]$ zum unteren, $[+1,+\infty)$ zum oberen Ufer und Verabredung des Hauptwertes für $\varkappa>1$. Für $\varkappa\neq 0$ können wir dann schreiben:

$$0\leqq\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}<\pi\quad\text{für}\quad 0\leqq\arg\varkappa<2\pi \tag{3.22}$$

und $(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}$ ist invariant beim Übergang von $\varkappa$ auf $-\varkappa$.

Die Nullstellen von (3.19) sind:

$$\begin{cases}\alpha_1=2\varkappa+2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}\\ \alpha_2=2\varkappa-2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}.\end{cases} \tag{3.23}$$

Wegen $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 4$ ist $\alpha_2 \neq 0$, so daß $\alpha_1 = \frac{4}{|\alpha_2|^2} \cdot \bar{\alpha}_2$ ist, also

$$\Im\mathfrak{m}\,\alpha_1 = -\frac{4}{|\alpha_2|^2} \cdot \Im\mathfrak{m}\,\alpha_2. \tag{3.24}$$

Nach (3.22) ist sicher $\Im\mathfrak{m}\alpha_1 \geqq 0$ für $0 \leqq \arg\varkappa < \pi$, und $\Im\mathfrak{m}\alpha_2 \leqq 0$ für $\pi \leqq \arg\alpha < 2\pi$. Mit (3.24) gilt also $\Im\mathfrak{m}\alpha_1 \geqq 0$ und $\Im\mathfrak{m}\alpha_2 \leqq 0$ und wir können

$$0 \leqq \arg\alpha_1 \leqq \pi, \quad 0 \geqq \arg\alpha_2 \geqq -\pi \tag{3.25}$$

wählen. Es gilt dann: $\arg\alpha_1 = -\arg\alpha_2$.

Indem wir nun die z-Ebene von α_1 und α_2 aus radial bezüglich Null nach Unendlich aufschneiden und außerhalb der Schnitte $(4 - 4\varkappa z + z^2)^{\frac{1}{2}}$ durch $\arg(4 - 4\varkappa z + z^2) = 0$ für $z = 0$ definieren, setzen wir

$$it = \frac{1}{2} \int_{\beta}^{z} \frac{(4 - 4\varkappa\zeta + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{\zeta}\, d\zeta, \tag{3.26}$$

wobei β die Nullstelle mit kleinstem Betrag sein soll.

Nun ist mit (3.22)

$$\begin{cases} |\alpha_2| \leqq |\alpha_1| & \text{für} \quad 0 \leqq \arg\varkappa < \pi \\ |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| & \text{für} \quad \pi \leqq \arg\varkappa < 2\pi, \end{cases} \tag{3.27}$$

also

$$\beta = \begin{cases} \alpha_2 & \text{für} \quad 0 \leqq \arg\varkappa < \pi \\ \alpha_1 & \text{für} \quad \pi \leqq \arg\varkappa < 2\pi. \end{cases}$$

Für $\varkappa > 1$ liegt α_1 auf dem Schnitt von α_2 aus und wir zählen α_1 zum oberen Ufer. Für $\varkappa < -1$ entsprechend rechnen wir α_2 zum unteren Ufer des Schnittes von α_1 aus. Mit diesen Festsetzungen erreichen wir vollständige Symmetrie bezüglich der Übergänge $\varkappa \to -\varkappa$, $z \to -z$, $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$, da

$$\int_{\alpha_{1,2}}^{z} \frac{(4 - 4\varkappa\zeta + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{\zeta}\, d\zeta \tag{3.28}$$

invariant ist gegenüber dieser Transformation. Die Symmetrie in $\varkappa$ und z ist ja auch auf Grund der Differentialgleichung (3.6) zu erwarten, die sich nicht ändert, wenn man $\varkappa$ durch $-\varkappa$ und z durch $-z$ ersetzt. (3.28) aber geht dabei über in

$$\int_{\alpha_{2,1}}^{z} \frac{(4 - 4\varkappa\zeta + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}{\zeta}\, d\zeta.$$

Man hat also in (3.26) nur $\varkappa$ durch $-\varkappa$ und z durch $-z$ zu ersetzen und erhält aus dem Fall $\varkappa$ mit $0 \leqq \arg\varkappa < \pi$ sofort den Fall $\pi \leqq \arg\varkappa < 2\pi$ und umgekehrt.

Damit ist nun eine Abbildung $t = t(z)$ definiert, die (3.19) erfüllt. Es gilt:

$$t(ze^{2\pi i}) = t(z) + 2\pi.$$

(3.26) ergibt nun

$$(3.29)\quad \begin{cases} it = \frac{1}{2}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}} - \varkappa \cdot \log\left[\dfrac{z-2\varkappa+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]+ \\ \quad +\log z - \log[2-\varkappa z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}] + \text{const}, \end{cases}$$

wie man durch Differenzieren sofort bestätigt. Da

$$(3.30)\quad [2\varkappa - z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}][z-2\varkappa+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}] = 4(1-\varkappa^2)\neq 0$$

für $\varkappa^2 \neq 1$, ebenso

$$2-\varkappa z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}} \neq 0,$$

ist $w_\varkappa(z) = e^{it(z)}$ eindeutig auf der durch die Schnitte gekennzeichneten z-Ebene. Nach (3.26) gilt für $0 \leqq \arg\varkappa < \pi$: $t(\alpha_2) = 0$ und wir erhalten unter Anwendung von (3.30):

$$(3.31)\quad w_\varkappa(z) = e^{it} = (\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}} \frac{z\, e^{\frac{1}{2}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\dfrac{2\varkappa - z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\varkappa}}{2-\varkappa z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

mit

$$\left[\frac{2\varkappa - z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\varkappa}_{z=\alpha_2} = 1.$$

Die Symmetrie $\varkappa \to -\varkappa$, $z \to -z$ liefert daraus sofort für $\pi \leqq \arg\varkappa < 2\pi$

$$(3.32)\quad w_\varkappa(z) = e^{it} = (\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}} \frac{-z\, e^{\frac{1}{2}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\dfrac{z-2\varkappa+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-\varkappa}}{2-\varkappa z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

mit

$$\left[\frac{z-2\varkappa+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-\varkappa}_{z=\alpha_1} = 1.$$

Geht man in (3.31) zur Grenze $\varkappa \to 1$ über, bzw. in (3.32) $\varkappa \to -1$, so ergeben sich genau die Ausartungen (3.20). Der Grenzübergang $\varkappa \to 0$ in (3.31) bzw. (3.32) liefert

$$(3.33)\quad w_0(z) = e^{it} = \pm \frac{i z\, e^{\frac{1}{2}(4+z^2)^{\frac{1}{2}}}}{2+(4+z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

was mit Hilfe von $z = \mp 2i\zeta$ genau in $w(\zeta) = \dfrac{\zeta\, e^{(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}}{1+(1-\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}$ übergeht, also den für $\varkappa = 0$ bekannten Ausdruck (vgl. [5] S. 166 (7)).

3.2 Diskussion der Abbildung

$\mathfrak{Z}$ sei die Menge aller Punkte der z-Ebene ohne die Mengen $\{\lambda\alpha_1\}$ und $\{\lambda\alpha_2\}$, $1 < \lambda < \infty$. Durch $w_\varkappa(z)$ wird ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}_\varkappa \subset \mathfrak{Z}$ um $z=0$ umkehrbar eindeutig auf $|w| \leqq 1$ abgebildet. $|w| = 1$ ist das Bild des Randes von $\mathfrak{G}_\varkappa$, welcher eine einfach geschlossene Kurve $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{Z}$

ist, die durch α_2 geht für $\Im\mathfrak{m}\,\varkappa > 0$ und $\Im\mathfrak{m}\,\varkappa = 0$, $\Re\mathfrak{e}\,\varkappa > 1$; durch α_2 und α_1 für $\Im\mathfrak{m}\,\varkappa = 0$, $0 \leqq \Re\mathfrak{e}\,\varkappa < 1$. $\mathfrak{C}$ ist analytisch bis auf α_2 bzw. auch α_1 und hat dort eine Spitze mit dem Winkel $2\pi/3$.

Wir werden den Beweis für $\Im\mathfrak{m}\,\varkappa > 0$, $\Re\mathfrak{e}\,\varkappa > 0$ führen und zunächst einige Hilfssätze beweisen. In den anderen Fällen verläuft der Beweis an den wesentlichen Stellen fast völlig analog.

Hilfssatz 1. *Es gilt:* $|w_\varkappa(\alpha_1)| \geqq 1$.

Beweis. Wir haben den Fall $0 < \arg\varkappa < \pi$. Aus (3.31) folgt dann: $w_\varkappa(\alpha_1) = -(-1)^\varkappa$, wobei wir im folgenden den Wert der Potenz bestimmen.

Für $\mathfrak{D} = \{z = \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2,\ \lambda + \mu = 1,\ 0 \leqq \lambda, \mu \leqq 1\}$ ergibt sich sofort, daß $\dfrac{2\varkappa - z}{2(\varkappa^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$ reell ist.

Für $z = 0$ war definiert:

$$\arg(4 - 4\varkappa z + z^2) = \arg(z - \alpha_1) + \arg(z - \alpha_2) = 0.$$

Indem wir nun (vgl. Fig. 1) die stetige Änderung der Argumente von $z = 0$ aus betrachten, ergibt sich für $z \in \mathfrak{D}$:

$$\arg(z - \alpha_1) = \arg(z - \alpha_1)_{z=0} - \arg\alpha_1 + \arg(\varkappa^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\arg(z - \alpha_2) = \arg(z - \alpha_2)_{z=0} - \pi + \arg\alpha_1 + \arg(\varkappa^2 - 1)^{\frac{1}{2}},$$

so daß

$$\arg\left\{\frac{(4 - 4\varkappa z + z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\right\} = -\frac{\pi}{2},$$

und wegen

$$\left[\frac{2\varkappa - z + (4 - 4\varkappa z + z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\right]^\varkappa_{z=\alpha_2} = 1$$

ist somit

$$\left[\frac{2\varkappa - z + (4 - 4\varkappa z + z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}\right]^\varkappa_{z=\alpha_1} = e^{-i\pi\varkappa},$$

also $w_\varkappa(\alpha_1) = e^{i\pi(1-\varkappa)}$.

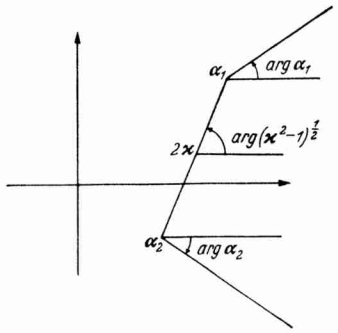


Fig. 1

Daraus folgt: $|w_\varkappa(\alpha_1)| = e^{\pi\Im\mathfrak{m}\,\varkappa} \geqq 1$.

Hilfssatz 2. *Es gilt:*

I. $w_\varkappa(z) = e^{\frac{1}{2}z(1+o(1)) - \varkappa\log|z| + O(1)}$ $\quad |z| \to \infty,\ |\arg z| \leqq \arg\alpha_1$ [1]),

II. $w_\varkappa(z) = e^{-\frac{1}{2}z(1+o(1)) + \varkappa\log|z| + O(1)}$ $\quad |z| \to \infty,\ \arg\alpha_1 \leqq |\arg z| \leqq \pi$.

Beweis zu I. Wir betrachten wieder die stetige Änderung der Argumente von $z = 0$ aus. Für hinreichend große z gilt dann offenbar:

$$\arg(z - \alpha_1) = \arg(z - \alpha_1)_{z=0} + \pi + \arg z - \arg\alpha_1 + o(1)$$

[1]) Die Einschränkung auf $|\arg z| \leqq \pi$ ist erlaubt, da alle auftretenden Funktionen eindeutige Funktionen von z sind.

und

$$\arg(z-\alpha_2)=\arg(z-\alpha_2)_{z=0}-\pi+\arg z+\arg\alpha_1+o(1),$$

also

$$\arg(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}=\arg z+o(1),$$

so daß

$$\tfrac{1}{2}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}z\big(1+o(1)\big).$$

Damit ergibt sich dann aus (3.31) unter Beachtung von (3.30) sofort

$$w_\varkappa(z)=e^{\frac{1}{2}z(1+o(1))-\varkappa\log|z|+O(1)} \qquad |z|\to\infty,\ |\arg z|\leqq\arg\alpha_1,$$

also I. II ergibt sich vollständig analog.

Hilfssatz 3. *Sei* $z=\lambda\alpha_1$, $\lambda\geqq 1$. *Dann gilt:*

$|w_\varkappa(\lambda\alpha_1)|$ *strebt monoton gegen* $\left\{\begin{matrix}Null\\Unendlich\end{matrix}\right\}$ *für* $\lambda\to\infty$, *wenn wir z zum* $\left\{\begin{matrix}oberen\\unteren\end{matrix}\right\}$ *Ufer rechnen.*

Beweis. Im ersten Fall ergibt die stetige Fortsetzung der Argumente von $z=0$ aus:

$$\arg(z-\alpha_1)=\arg(z-\alpha_1)_{z=0}-\pi$$

$$\arg(z-\alpha_2)=\arg(z-\alpha_2)_{z=0}-\pi+\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}+\arg\alpha_1-\gamma(z)$$

mit

$$0\leqq\gamma(z)\leqq\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}-\arg\alpha_1,$$

und somit ist

$$\arg(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}=-\pi+\tfrac{1}{2}\left[\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}+\arg\alpha_1\right]-\frac{\gamma(z)}{2}.$$

Da $0<\frac{1}{2}\left[\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}+\arg\alpha_1\right]<\frac{\pi}{2}$ ist, folgt

$$-\pi<\arg(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}<-\frac{\pi}{2}.$$

Wegen (3.26) strebt also $\Re e(it)$ monoton gegen $-\infty$, und mit $w=e^{it}$ folgt sofort die Behauptung.

Der zweite Fall ergibt sich ganz analog und braucht nicht mehr bewiesen zu werden. Ebenso klar ist der Beweis von

Hilfssatz 4. *Sei* $z=\lambda\alpha_2$, $\lambda\geqq 1$. *Dann gilt:*

$|w_\varkappa(\lambda\alpha_2)|$ *strebt monoton gegen* $\left\{\begin{matrix}Unendlich\\Null\end{matrix}\right\}$ *für* $\lambda\to\infty$, *wenn wir z zum* $\left\{\begin{matrix}oberen\\unteren\end{matrix}\right\}$ *Ufer rechnen.*

Hilfssatz 5. *Es gilt:*

$$\frac{dw}{dz}\neq 0 \quad \textit{für} \quad z\neq\alpha_1,\alpha_2.$$

Beweis. Da $w=e^{it}$ ist, folgt

$$\frac{dw}{dz}=i\,e^{it}\frac{dt}{dz}=e^{it}\,\frac{(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2z}$$

und damit die Behauptung.

Nach Hilfssatz 5 ist für jedes $z_0 \neq \alpha_1, \alpha_2$ und $w_0 = w_\varkappa(z_0)$ die Gleichung $w - w_\varkappa(z) = 0$ eindeutig lokal auflösbar um (z_0, w_0) und liefert ein in einer Umgebung von w_0 reguläres Funktionselement $z = z_0(w)$ (Satz über implizite Funktionen). Da $w_\varkappa(0) = 0$, ist also $w - w_\varkappa(z) = 0$ eindeutig lokal auflösbar in $(0, 0)$ und liefert ein in einer Umgebung von $w = 0$ reguläres Funktionselement $z = z(w)$. Wir beweisen nun für $z = z(w)$ den

Hilfssatz 6. *Sei $z = z(w)$ eindeutig analytisch fortsetzbar in $|w| < \varrho$, $0 < \varrho \leqq 1$. Dann gilt: Für jedes w_0 mit $|w_0| = \varrho$ gibt es ein z_0 mit $w_0 = w_\varkappa(z_0)$.*

Beweis. Man wähle w_0 mit $|w_0| = \varrho$ und ε mit $0 < \varepsilon < \varrho$. Sei

$$\mathfrak{M} = \{w \mid \varepsilon < |w| < \varrho, \arg w = \arg w_0\}.$$

Sicher ist $z = z(w)$ stetig für $w \in \mathfrak{M}$. Auf Grund von Hilfssatz 2 gibt es für $\delta > 0$, $0 < \delta < 1$, ein $R(\varepsilon, \delta) > 0$, so daß für $w \in \mathfrak{M}$ $z(w)$ nicht in

$$\mathfrak{N} = \left\{z \mid |z| > R(\varepsilon, \delta), \left|\arg z\right| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta, \left|\arg z - \pi\right| \leqq \frac{\pi}{2} - \delta\right\}$$

liegt. Wir können nun $w_\nu \in \mathfrak{M}$ mit $w_\nu \to w_0$ so finden, daß $z_\nu = z(w_\nu)$ beschränkt ist, denn sonst gäbe es für jedes $M > R(\varepsilon, \delta) > 0$ ein ε_1 mit $\varepsilon < \varepsilon_1 < \varrho$ derart, daß $|z(w)| > M$, $\left|\arg z - \frac{\pi}{2}\right| \leqq \delta$ bzw. $\left|\arg z - \frac{3\pi}{2}\right| \leqq \delta$ wäre für $\varepsilon_1 < |w| < \varrho$, $w \in \mathfrak{M}$.

Dann folgt aber $\Im\mathfrak{m}\, z \to \pm\infty$ für $w \to w_0$, $w \in \mathfrak{M}$. Nach Hilfssatz 2 gilt für hinreichend großes z:

$$\arg w = -\tfrac{1}{2}\Im\mathfrak{m}\, z\,(1 + o(1)) + \Im\mathfrak{m}\, \varkappa \log|z| + O(1).$$

Weiterhin ist für $z \in \widetilde{\mathfrak{N}}$ $|\Im\mathfrak{m}\, z| > \alpha(\delta)|z|$, $\alpha(\delta) > 0$, falls $|z| > R(\varepsilon, \delta)$. Folglich strebt $\arg w$ stetig gegen $\pm\infty$ im Widerspruch zur Annahme. Die beschränkte Folge z_ν besitzt nun einen Häufungspunkt z_0, und wir wählen eine konvergente Teilfolge $z_{\nu_n} \to z_0$ aus. Aus der Stetigkeit von $w_\varkappa(z)$ ergibt sich dann $w_\varkappa(z_0) = w_0$, und somit ist die Behauptung bewiesen.

Nun können wir zeigen:

Satz 1. *Das zu $w = 0$ gehörige reguläre Funktionselement $z = z(w)$ läßt sich eindeutig analytisch in ganz $|w| < 1$ fortsetzen mit Werten aus $\mathfrak{Z}$ ungleich α_1 und α_2.*

Beweis. Man setze $z = z(w)$ bis zum größtmöglichen Kreise mit Radius r eindeutig fort derart, daß die z-Werte aus $\mathfrak{Z}$ sind, ungleich α_1 und α_2.

Annahme: $r < 1$.

Man wähle dann w_0 mit $|w_0| = r$. Nach Hilfssatz 6 gibt es dann ein z_0 mit $w_0 = w_\varkappa(z_0)$ und z_0 ist sicher ungleich α_1 und α_2. Nach Hilfssatz 5 kann man dann aber $z = z(w)$ in einer Umgebung von w_0 eindeutig analytisch fortsetzen. z_0 ist auch kein Randpunkt von $\mathfrak{Z}$. Nach Hilfssatz 3 und 4 gäbe es sonst nämlich ein w_1 mit $0 < |w_1| < r$ und einen Randpunkt z_1, $|z_1| > |z_0|$, auf dem gleichen Rande wie z_0 mit $w_1 = w_\varkappa(z_1)$ und das Bild des Randes von z_0 bis z_1 ergibt eine stetige Kurve in $|w| < r$ bis auf den Randpunkt $w_\varkappa(z_0)$, längs der

man fortsetzen kann. Das aber ist ein Widerspruch zur eindeutigen Fortsetzbarkeit in $|w|<r$. z_0 ist also kein Randpunkt von $\mathfrak{Z}$, und es folgt, daß $z=z(w)$ über $|w|\leqq r$ hinaus eindeutig analytisch fortsetzbar ist mit Werten aus $\mathfrak{Z}$.

Damit gilt $r\geqq 1$ und Satz 1 ist bewiesen.

Aus Satz 1 und Hilfssatz 5 folgt sofort

Satz 2. *$|w|<1$ wird durch $w_\varkappa(z)$ umkehrbar eindeutig auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}_\varkappa\subset\mathfrak{Z}$ ohne α_1 und α_2 abgebildet.*

Wir beweisen jetzt

Satz 3. *$|w|=1$ geht in eine einfach geschlossene bis auf $z=\alpha_2$ analytische Kurve $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{Z}$ um $z=0$ über und hat in α_2 eine Spitze mit dem Winkel $2\pi/3$.*

Beweis. Sei $w'\neq 1$, $|w'|=1$. Die gleichen Schlüsse wie bei Satz 1 ergeben die eindeutige analytische Fortsetzbarkeit von $z=z(w)$ in einer Umgebung von w' mit Werten aus $\mathfrak{Z}$ ungleich α_1 und α_2. Man kann also zunächst noch, $w=1$ ausgenommen, über den Einheitskreis hinaus analytisch fortsetzen.

Sei nun $z=\lambda\alpha_2$, $0\leqq\lambda\leqq 1$. Dann ist (vgl. Fig. 1):

$$\arg(z-\alpha_2)=\arg(z-\alpha_2)_{z=0}$$

$$\arg(z-\alpha_1)=\arg(z-\alpha_1)_{z=0}+\delta(z),\qquad 0\leqq\delta(z)\leqq\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}-\arg\alpha_1.$$

Folglich gilt

$$\arg(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{\delta(z)}{2}.$$

Die Festlegung von $(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}$ für $0<\arg\varkappa<\pi/2$ liefert:

$$0<\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}-\arg\alpha_1<\frac{\pi}{2},$$

also gilt sicher: $0\leqq\arg(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}<\pi/2$.

Wegen

$$it(\lambda\alpha_2)=\frac{1}{2}\int_{\alpha_2}^{\lambda\alpha_2}(4-4\varkappa\zeta+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

und der Divergenz des Integrals für $\lambda\to 0$ folgt, wenn man beachtet, daß $\arg z$ konstant ist:

$$\Re\mathfrak{e}(it)\to-\infty,\quad \Im\mathfrak{m}(it)\text{ konvergent},$$

also $w_\varkappa(\lambda\alpha_2)\to 0$ für $\lambda\to 0$.

Somit ergibt sich für die Fortsetzung von $z=z(w)$, daß $z(1)=\alpha_2$ ist. Daher geht $|w|=1$ in eine einfach geschlossene Kurve $\mathfrak{C}\subset\mathfrak{Z}$ über, die bis auf α_2 analytisch ist.

Den Rest der Behauptung erhält man wie folgt.

Wegen $w_\varkappa(z)=e^{it}$ brauchen wir in der z-Ebene nur die Richtungen von α_2 aus zu bestimmen, wo it rein imaginär ist, also $\arg(it)=\frac{2n+1}{2}\pi$. Nach (3.26) ist

$$2it=\int_{\alpha_2}^{z}(4-4\varkappa\zeta+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Für $z=\alpha_2+o(1)$ folgt

$$2it=\int_{\alpha_2}^{z}(\zeta-\alpha_2)^{\frac{1}{2}}\,g(\zeta)\,d\zeta,$$

wobei $g(\zeta)$ holomorph ist um α_2 und $g(\alpha_2)\neq 0$.

Mit $\zeta-\alpha_2=\xi$, $g(\zeta)=h(\xi)$ folgt:

$$2it=\int_{0}^{z-\alpha_2}\xi^{\frac{1}{2}}\,h(\xi)\,d\xi,$$

und da $\xi^{\frac{1}{2}}h(\xi)=a_1\xi^{\frac{1}{2}}+\xi^{\frac{3}{2}}\cdot O(1)$ ist mit $a_1\neq 0$, erhalten wir

$$2it=\tfrac{2}{3}a_1(z-\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\cdot[1+O(z-\alpha_2)].$$

Also ist $\lim\limits_{z\to\alpha_2}\arg t=k\pi$ genau dann (k ganz), wenn

$$\lim_{z\to\alpha_2}\arg(z-\alpha_2)=\frac{2}{3}k\pi-\arg\frac{a_1}{3i}.$$

Daraus liest man für $\mathfrak{C}$ sofort ab, daß bei α_2 eine Spitze mit dem Winkel $2\pi/3$ vorhanden ist. Damit ist Satz 3 bewiesen. Satz 2 und Satz 3 ergeben nun zusammen die volle Behauptung.

Wir wollen jetzt noch kurz die anderen Fälle durchgehen. Sei zunächst $\mathfrak{Im}\,\varkappa\geqq 0$, $\mathfrak{Re}\,\varkappa=0$. Hilfssatz 1 und Hilfssatz 2 gelten unverändert. Da $\arg\alpha_1=-\arg\alpha_2=\pi/2$ ist, sind die Mengen $\{\lambda\alpha_1\}$ und $\{\lambda\alpha_2\}$, $1<\lambda<\infty$, rein imaginär. Hilfssatz 3 und Hilfssatz 4 sind zu ersetzen durch

Hilfssatz 3'. *Sei* $z=\lambda\alpha_1$, $\lambda\geqq 1$. *Dann gilt:*

$w_\varkappa(\lambda\alpha_1)$ *durchläuft unendlich oft* $\left\{\begin{matrix}positiv\\negativ\end{matrix}\right\}$ *den Kreis um* $z=0$ *mit dem Radius* $|w_\varkappa(\alpha_1)|$ *für* $\lambda\to\infty$, *wenn wir* z *zum* $\left\{\begin{matrix}rechten\\linken\end{matrix}\right\}$ *Ufer rechnen.*

Der Beweis ist klar nach dem Vorgehen bei Hilfssatz 3.

Entsprechend gilt:

Hilfssatz 4'. *Sei* $z=\lambda\alpha_2$, $\lambda\geqq 1$. *Dann gilt:*

$w_\varkappa(\lambda\alpha_2)$ *durchläuft unendlich oft* $\left\{\begin{matrix}negativ\\positiv\end{matrix}\right\}$ *den Kreis um* $z=0$ *mit dem Radius* $|w_\varkappa(\alpha_2)|=1$ *für* $\lambda\to\infty$, *wenn wir* z *zum* $\left\{\begin{matrix}rechten\\linken\end{matrix}\right\}$ *Ufer rechnen.*

Hilfssatz 5 und Hilfssatz 6 gelten ebenfalls.

Damit gilt sofort wieder Satz 1. Der Beweis, daß die z-Werte in $\mathfrak{Z}$ liegen, folgt einfach aus Hilfssatz 3' und Hilfssatz 4', wonach das Bild von $\{\lambda\alpha_1\}$ und $\{\lambda\alpha_2\}$, $\lambda\geqq 1$ in $|w|\geqq 1$ liegt. Folglich gilt dann aber auch Satz 2. Satz 3 gilt unverändert für $\mathfrak{Im}\,\varkappa>0$. Für $\varkappa=0$ erhalten wir

Satz 3'. $|w|=1$ *geht in eine einfach geschlossene bis auf* $z=\alpha_1$ *und* $z=\alpha_2$ *analytische Kurve* $\mathfrak{C}<\mathfrak{Z}$ *um* $z=0$ *über und hat in* α_1 *und* α_2 *eine Spitze mit dem Winkel* $2\pi/3$.

Der Beweis ist analog wie bei Satz 3 und kann ausgelassen werden.

Wir betrachten jetzt den Fall $\Im\mathfrak{m}\,\varkappa=0$, $0<\Re\mathfrak{e}\,\varkappa<1$. Es gelten dann die Hilfssätze 1 bis 6 unverändert, und damit auch Satz 1 und Satz 2. Anstelle von Satz 3 erhalten wir wieder Satz 3', dessen Beweis den früheren Überlegungen analog verläuft.

Schließlich bleibt der Fall $\Im\mathfrak{m}\,\varkappa=0$, $\Re\mathfrak{e}\,\varkappa>1$ zu betrachten. Hilfssatz 1 bleibt erhalten mit $|w_\varkappa(\alpha_1)|=1$. Hilfssatz 2 wird ersetzt durch

Hilfssatz 2''. *Es gilt:*

$$w_\varkappa(z)=e^{-\frac{1}{2}z(1+o(1))+\varkappa\log|z|+O(1)} \text{ für } |z|\to\infty.$$

Hilfssatz 3 und 4 sind zu ersetzen durch

Hilfssatz 3''. *Sei* $z=\lambda(\alpha_1-\alpha_2)+\alpha_2$, $0\leqq\lambda\leqq1$. *Dann gilt (vgl. Fig. 2):* $w_\varkappa(z)$ *durchläuft den Einheitskreis von* $w=1$ *aus* $\left\{\begin{matrix}positiv\\negativ\end{matrix}\right\}$ *bis* $\left\{\begin{matrix}\overline{w_\varkappa(\alpha_1)}\\w_\varkappa(\alpha_1)\end{matrix}\right\}$ *für* λ *von* 0 *bis* 1, *wenn wir* z *zum* $\left\{\begin{matrix}unteren\\oberen\end{matrix}\right\}$ *Ufer rechnen.*

Der Beweis ist analog wie bei Hilfssatz 3 und kann ausgelassen werden.

Ebenso beweist man

Hilfssatz 4''. *Sei* $z=\lambda\alpha_1$, $\lambda\geqq1$. *Dann strebt* $|w_\varkappa(\lambda\alpha_1)|$ *monoton gegen Null für* $\lambda\to\infty$ *mit* $\left\{\begin{matrix}\arg w_\varkappa(\lambda\alpha_1)=\ \ \arg w_\varkappa(\alpha_1)\\\arg w_\varkappa(\lambda\alpha_1)=-\arg w_\varkappa(\alpha_1)\end{matrix}\right\}$, *wenn wir* z *zum* $\left\{\begin{matrix}oberen\\unteren\end{matrix}\right\}$ *Ufer rechnen.*

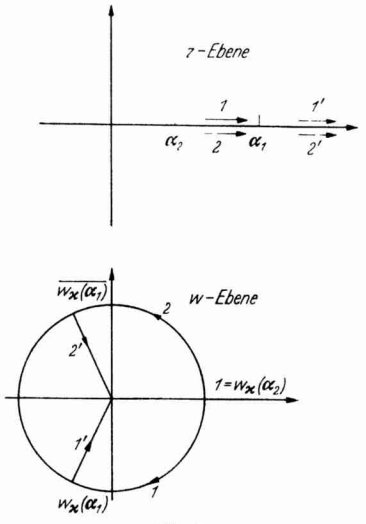


Fig. 2

Hilfssatz 5 und 6 gelten unverändert, also gilt auch Satz 1 und folglich Satz 2. Auch Satz 3 gilt, nur der Beweis ist nicht ganz wörtlich wie zuvor, und wir wollen ihn daher kurz notieren.

Wir setzen $z=\lambda\alpha_2$, $0\leqq\lambda\leqq1$ und finden sofort wieder, daß $w_\varkappa(\lambda\alpha_2)$ monoton gegen Null strebt für $\lambda\to0$, so daß für $w\to1$ $z(w)\to\alpha_2$ strebt. Ganz analog den Überlegungen im Fall $\Im\mathfrak{m}\,\varkappa>0$, $\Re\mathfrak{e}\,\varkappa>0$ findet man, daß Kurven, auf denen $|w_\varkappa(z)|=1$ ist, bei α_2 nur unter den Winkeln 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$ von der reellen positiven Achse aus gerechnet einmünden können, und bei α_1 nur unter den Winkeln $\pi/3$, π, $5\pi/3$. Daher folgt, daß bei der Fortsetzung von $z=z(w)$ $|w|=1$ in einer Umgebung von $w=1$ in einen stetigen, bis auf $z=\alpha_2$ analytischen Kurvenbogen übergeht, der symmetrisch zur reellen Achse ist und in α_2 eine Spitze hat mit dem Winkel $2\pi/3$. Man schließt dann, daß von $w=1$ aus mit wachsendem Argument auf $|w|=1$ fortgesetzt werden kann ohne einen Randpunkt von $\mathfrak{Z}$ zu erreichen, der ungleich α_1 ist. Aber

auch α_1 kann nicht erreicht werden. Denn bei der Fortsetzung mit wachsendem Argument auf $|w|=1$ kann α_1 nur unter dem Winkel $\pi/3$ erreicht werden, was sofort wieder aus

$$2it=\int_{\alpha_2}^{z}(4-4\varkappa\zeta+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

folgt, wenn man $z=\alpha_1+o(1)$ setzt. Verbinden wir dann die einlaufende Kurve durch einen passend gewählten stetigen Kurvenbogen mit $z>\alpha_1$, so ist das Bild dieses Bogens eine bis auf einen Randpunkt ganz in $|w|<1$ verlaufende Kurve, längs der man fortsetzen kann. Das aber ergibt einen Widerspruch zu Satz 1. Damit ist dann auch in diesem Falle Satz 3 bewiesen.

Der Fall $\pi\leqq\arg\varkappa<2\pi$ braucht wegen der Symmetrie, $\varkappa\to-\varkappa$, $z\to-z$ nicht mehr diskutiert zu werden. Wir bemerken, daß α_1 und α_2 sich vertauschen, so daß also der Rand von $\mathfrak{G}_\varkappa$ eine ganz in $\mathfrak{Z}$ verlaufende, einfach geschlossene Kurve um $z=0$ ist, die bis auf $z=\alpha_1$ bzw. auch $z=\alpha_2$ analytisch ist und dort eine Spitze mit dem Winkel $2\pi/3$ hat.

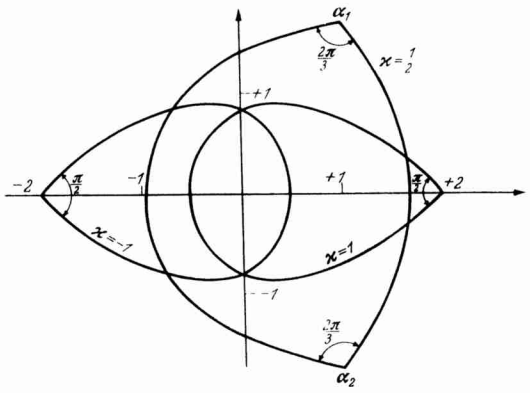


Fig. 3

Die Diskussion im Falle $\varkappa^2=1$ ist wesentlich einfacher, und wir erwähnen nur, daß $|w|\leqq1$ auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet um $z=0$ übergeht und $|w|=1$ auf eine bis auf $z=\pm2$ ($\varkappa=\pm1$) analytische Kurve $\mathfrak{C}$. In $z=\pm2$ hat $\mathfrak{C}$ eine Spitze mit dem Winkel $\pi/2$.

Die Fig. 3 enthält noch das Bild von $|w|=1$ für $\varkappa=\pm1$ und $\varkappa=\frac{1}{2}$, das auf numerischem Wege ermittelt wurde.

4. Erster Entwicklungssatz für analytische Funktionen

Nach 3.2 folgt nun, daß durch $w_\varkappa(z)$ $|w|<1$ umkehrbar eindeutig auf ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}_\varkappa$ um $z=0$ abgebildet wird. Damit geht $\Im\mathfrak{m}\,t>0$ auf ein unendlich oft überdecktes Gebiet vom Ringtypus um $z=0$ über. (3.18) lautet nun:

$$a(z)=(4-4\varkappa z+z^2)^{-\frac{1}{4}}\,2^{\frac{1}{2}}. \tag{4.1}$$

In $\mathfrak{G}_\varkappa$ ist $a(z)$ eindeutig holomorph, d.h. $a[z(t)]=a^*(t)$ ist 2π-periodisch. Ebenso ist $a'(z)$ und $a''(z)$ eindeutig holomorph. Daraus folgt:

$$g(t)=\frac{a'(z)+z\,a''(z)}{z\,a(z)\,b^2(z)} \tag{4.2}$$

ist eindeutig holomorph für $z \in \mathfrak{G}_\varkappa$, also gilt:

$$g(t+2\pi) = g(t)$$

für $\Im\mathfrak{m}\, t > 0$ und $g(t)$ ist dort holomorph. Daher genügt[2])

$$v_\mu(t) = a(z)^{-1} w_\mu(z) = (2\mu z)^{-\frac{1}{2}} (4 - 4\varkappa z + z^2)^{\frac{1}{4}} M_{\varkappa\mu,\,\mu}(\mu z) \tag{4.3}$$

einer Hillschen Differentialgleichung

$$v''(t) + \big(\lambda + g(t)\big)\, v(t) = 0\,. \tag{4.4}$$

Bildet man zu vorgegebenem ν die Funktion

$$\Delta_\nu(\lambda) = \tfrac{1}{2}[y_1(t_0+2\pi) + y_2'(t_0+2\pi)] - \cos 2\pi\nu\,, \tag{4.5}$$

so hat $\Delta_\nu(\lambda) = 0$ nur einfache Nullstellen. Denn dies bedeutet, daß $\mu = 1$ normaler Wert [vgl. **4**, 450] ist, wenn man das Eigenwertproblem in

$$v''(t) + \big(\lambda + \mu \cdot g(t)\big)\, v(t) = 0 \tag{4.6}$$

einbettet. Diese Voraussetzung ist aber erfüllt, denn anderenfalls müßte es ein n geben [vgl. **4**, 450], so daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} v_{\nu+n}(t)\, v^*_{\nu+n}(t)\, dt = 0 \tag{4.7}$$

wäre. Transformiert man auf z, so erhält man:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint [(\nu+n)\, z]^{-1} M_{\varkappa(\nu+n),\,\nu+n}[(\nu+n)\, z]\, M_{\varkappa(\nu+n),\,-(\nu+n)}[(\nu+n)\, z] \times \right. \tag{4.8}$$
$$\left. \times \frac{4 - 4\varkappa z + z^2}{4z}\, dz \right.$$

und der Residuensatz liefert für (4.8) den Wert 1. Also hat $\Delta_\nu(\lambda) = 0$ nur einfache Nullstellen.

Wir merken uns noch die Beziehung:

$$\left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint M_{\varkappa(\nu+n),\,\nu+n}[(\nu+n)\, z]\, M_{\varkappa(\nu+m),\,-(\nu+m)}[(\nu+m)\, z]\, \frac{4 - 4\varkappa z + z^2}{z^2}\, dz \right. \tag{4.9}$$
$$\left. = 4(\nu+n)\, \delta_{nm}\,. \right.$$

(4.9) folgt wie üblich aus der Biorthogonalität der Eigenlösungen zu denen des adjungierten Problems und mit Hilfe von (4.8).

Damit können wir nun den Satz aus 2 anwenden. Danach gilt:

Ist $f(z)$ in $0 \leqq r_1 < |w_\varkappa(z)| < r_2 \leqq 1$, $z \in \mathfrak{G}_\varkappa$ holomorph und erfüllt die Bedingung

$$f(z\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})} f(z)\,, \tag{4.10}$$

[2]) Die Faktoren sind so gewählt, daß die Funktionen $v_{\nu+n}(t)$ normiert sind.

so ist dort auch

$$f^*(z) = z^{-\frac{1}{2}} f(z) (4 - 4\varkappa z + z^2)^{\frac{1}{4}}$$

holomorph und erfüllt die Bedingung:

$$f^*(z\, e^{2\pi i}) = e^{2\pi i \nu} f^*(z). \tag{4.11}$$

Denkt man sich z auf t transformiert, so gilt die in kompakten Teilgebieten absolut gleichmäßig konvergente Entwicklung:

$$f^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n) z] (4 - 4\varkappa z + z^2)^{\frac{1}{4}}, \tag{4.12}$$

so daß

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n) z] \tag{4.13}$$

folgt mit den Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{4(\nu+n)} \oint f(z)\, M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n) z] \frac{4 - 4\varkappa z + z^2}{z^2}\, dz. \tag{4.14}$$

Nach 7 gilt die asymptotische Formel

$$M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n) z] = a_n(\nu)\, h(z,\nu) [w_\varkappa(z)]^n \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{4.15}$$

mit beschränktem $h(z,\nu)$ gleichmäßig für z aus kompakten Teilgebieten:

$$0 \leqq r_1 < \varrho_1 \leqq |w_\varkappa(z)| \leqq \varrho_2 < r_2 \leqq 1, \qquad z \in \mathfrak{G}_\varkappa,$$

so daß jede in $r_1 < |w_\varkappa(z)| < r_2$ konvergente Reihe der Form (4.13) in kompakten Teilgebieten absolut gleichmäßig konvergiert.

Damit ist unser Ziel erreicht und wir können notieren:

Satz 4. *Sei 2ν nicht ganz, $\varkappa$ beliebig.*

Dann gelten die Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \oint M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n) z]\, M_{\varkappa(\nu+m),-(\nu+m)}[(\nu+m) z)] \frac{4 - 4\varkappa z + z^2}{z^2}\, dz \\ \qquad = 4(\nu+m)\, \delta_{nm}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Jede in einem Gebiet vom Ringtypus:

$$0 \leqq r_1 < |w_\varkappa(z)| < r_2 \leqq 1 \quad \textit{innerhalb } \mathfrak{G}_\varkappa$$

holomorphe Funktion $f(z)$ mit der Umlaufseigenschaft

$$f(z e^{2\pi i}) = e^{2\pi i(\nu+\frac{1}{2})} f(z) \tag{4.17}$$

läßt sich eindeutig in eine Reihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n) z] \tag{4.18}$$

entwickeln. Die Reihe ist in kompakten Teilgebieten absolut gleichmäßig konvergent. Die Koeffizienten sind:

$$(4.19)\qquad c_n=\frac{1}{4(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n)\,z]\,\frac{4-4\varkappa z+z^2}{z^2}\,dz.$$

Unmittelbar klar wegen der Eigenschaften von $M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]$ sind die folgenden Zusätze:

1) $f(z)$ ist darstellbar als $f(z)=z^{\nu+\frac{1}{2}}\,g(z)$, wobei $g(z)$ eindeutig holomorph ist in:

$$0\leqq r_1<|w_\varkappa(z)|<r_2\leqq 1,\qquad z\in\mathfrak{G}_\varkappa.$$

2) Ist $g(z)$ auch um Null holomorph, so sind die $c_n=0$ für $n<0$. Die Reihe ist dann in kompakten Teilgebieten von $|w_\varkappa(z)|<r_2$, $z\in\mathfrak{G}_\varkappa$ absolut gleichmäßig konvergent.

Setzt man in Satz 4 $\varkappa=0$ und beachtet man [*11*, 265 (11)]

$$(4.20)\qquad M_{0,\mu}(2iz)=\Gamma(\mu+1)\,i^{\mu+\frac{1}{2}}\,2^{2\mu+\frac{1}{2}}\,z^{\frac{1}{2}}\,J_\mu(z),$$

so ergibt sich genau der Kapteynsche Entwicklungssatz in der Form, die F. W. SCHÄFKE [*5*, 167] angegeben hat.

5. Anwendungen

5.1 Die Entwicklung von $z^{\nu+\frac{1}{2}}$

Bekanntlich gilt (vgl. etwa [*5*] S. 178 (13))

$$(5.1)\qquad M_{\varkappa\mu,\,\mu}(\mu z)=(\mu z)^{\frac{1}{2}+\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n{}_2F_1\left(-n,\,\mu-\varkappa\mu+\frac{1}{2},\,2\mu+1,\,2\right)\frac{(\mu z)^n}{n!},$$

solange $2\mu+1\neq 0,\,-1,\,-2,\ldots$ ist.

Nach Satz 4 gilt nun die Entwicklung

$$(5.2)\qquad \frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{4-4\varkappa z+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\,M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]$$

für $z\in\mathfrak{G}_\varkappa$, $z\neq 0$ mit den Koeffizienten

$$(5.3)\qquad c_n=\frac{1}{4(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint z^{\nu+\frac{1}{2}}\,M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n)\,z]\,\frac{dz}{z^2}$$

und nach dem Residuensatz erhält man unter Beachtung von (5.1) für das Integral den Wert:

$$(5.4)\qquad -\frac{1}{(\nu+n)^{\nu-\frac{1}{2}}}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,\,-\nu-n-\varkappa(\nu+n)+\frac{1}{2},\,1-2\nu-2n,\,2\right)$$

und es folgt:

$$(5.5)\qquad \begin{cases}\dfrac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{4-4\varkappa z+z^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4(\nu+n)^{\nu+\frac{1}{2}}}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\times\\ \times\,{}_2F_1\left(-n,\,-(\nu+n)(1+\varkappa)+\frac{1}{2},\,1-2\nu-2n,\,2\right)M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z].\end{cases}$$

Der Faktor $(4-4\varkappa z+z^2)^{-1}$ läßt sich noch fortschaffen. Dazu schreiben wir die Entwicklung (5.5) auf für $\nu+2$, dann für $\nu+1$ mit $-4\varkappa$ multipliziert und schließlich für ν mit 4 multipliziert. Man hat dann nach der Addition nur noch die Glieder mit gleichem Index zusammenzufassen.

5.2 Die Entwicklung der Whittakerschen Funktion $M_{\varrho,\mu}(\alpha z)$

Man betrachte

$$\frac{z^{\nu-\mu}}{4-4\varkappa z+z^2}\, e^{\frac{1}{2}\alpha z} M_{\varrho,\mu}(\alpha z). \tag{5.6}$$

Dabei sei $2\mu+1 \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Nach Satz 4 gilt dann wieder

$$\frac{z^{\nu-\mu}}{4-4\varkappa z+z^2}\, e^{\frac{1}{2}\alpha z} M_{\varrho,\mu}(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n) z] \tag{5.7}$$

für $0<|w_\varkappa(z)|<1$, $z \in \mathfrak{H}_\varkappa$.

Die Koeffizienten sind

$$c_n = \frac{1}{4(\nu+n)} \frac{1}{2\pi i} \oint z^{\nu-\mu} e^{\frac{1}{2}\alpha z} M_{\varrho,\mu}(\alpha z)\, M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n) z] \frac{dz}{z^2} \tag{5.8}$$

und mit Hilfe von (5.1) und der Beziehung [*5*, 170 (15)]

$$e^{\frac{1}{2}\alpha z} M_{\varrho,\mu}(\alpha z) = (\alpha z)^{\frac{1}{2}+\mu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}+\mu-\varrho)_l}{l!\,(1+2\mu)_l} (\alpha z)^l \tag{5.9}$$

bekommt man für das Integral den Wert:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(\nu+n)^{\nu-\frac{1}{2}}}\, \alpha^{\mu+\frac{1}{2}} \displaystyle\sum_{l=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2}+\mu-\varrho)_l}{l!\,(1+2\mu)_l}\, \alpha^l \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-l} \frac{1}{(n-l)!} \times \\ \qquad \times {}_2F_1\left(l-n, -(\nu+n)(1+\varkappa)+\frac{1}{2}, 1-2\nu-2n, 2\right)(\nu+n)^{-l} \\ = \dfrac{1}{(\nu+n)^{\nu-\frac{1}{2}}}\, \alpha^{\mu+\frac{1}{2}} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \displaystyle\sum_{l=0}^{n} \frac{(\frac{1}{2}+\mu-\varrho)_l\,(-n)_l}{l!\,(1+2\mu)_l} \left(\frac{2\alpha}{\nu+n}\right)^l \times \\ \qquad \times {}_2F_1\left(l-n, -(\nu+n)(1+\varkappa)+\frac{1}{2}, 1-2\nu-2n, 2\right). \end{cases} \tag{5.10}$$

Beachtet man die Potenzreihendarstellung der hypergeometrischen Funktion und die Beziehung $(-n)_l (l-n)_k = (-n)_{k+l}$, so läßt sich die Summe umformen zu:

$$\sum_{k,l} \frac{(-n)_{k+l}\,(\frac{1}{2}+\mu-\varrho)_l\,(\frac{1}{2}-(\nu+n)(1+\varkappa))_k}{(1+2\mu)_l\,(1-2\nu-2n)_k\, l!\, k!} \left(\frac{2\alpha}{\nu+n}\right)^l 2^k.$$

Mit Hilfe der Funktion [*11* I, 224 (7)]

$$F_2(a, b, b', c, c', x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n}\,(b)_m\,(b')_n}{(c)_m\,(c')_n\, m!\, n!}\, x^m y^n \tag{5.11}$$

bekommt man für die Summe:

$$F_2\Big(-n, \frac{1}{2}+\mu-\varrho, \frac{1}{2}-(\varkappa+1)(\nu+n), 1+2\mu, 1-2\nu-2n, \frac{2\alpha}{\nu+n}, 2\Big).$$

Daher:

$$(5.11')\begin{cases}\dfrac{4z^{\nu-\mu}e^{\frac{1}{2}\alpha z}\alpha^{-\mu-\frac{1}{2}}}{4-4\varkappa z+z^2}M_{\varrho,\mu}(\alpha z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-\frac{1}{2})^n}{(\nu+n)^{\nu+\frac{1}{2}}n!}F_2\Big(-n, \dfrac{1}{2}+\mu-\varrho, \dfrac{1}{2}-\\ -(\varkappa+1)(\nu+n), 1+2\mu, 1-2\nu-2n, \dfrac{2\alpha}{\nu+n}, 2\Big)M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z].\end{cases}$$

Geht man in (5.11') mit α gegen Null, so erhält man wieder (5.5).

5.3 Die Verallgemeinerung der Polynome von NIELSEN [*5*, 170 (15)]

Man betrachte $\frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z}$. Für $0<|w_\varkappa(z)|<\varrho\leqq 1$, $z\in\mathfrak{G}_\varkappa$ und t aus dem Komplement von $|w_\varkappa(z)|<\varrho$, $z\in\mathfrak{G}_\varkappa$ gilt nach Satz 4 die Entwicklung:

$$(5.12)\qquad \frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(t)\,M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z]$$

mit den Koeffizienten

$$(5.13)\begin{cases}c_n(t)=\dfrac{1}{4(\nu+n)}\dfrac{1}{2\pi i}\oint\dfrac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z}M_{\varkappa(\nu+n),\,-(\nu+n)}[(\nu+n)z]\dfrac{4-4\varkappa z+z^2}{z^2}dz\\ \quad=-\dfrac{1}{4(\nu+n)}\mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t),\end{cases}$$

wenn man definiert

$$(5.14)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t)=Ph\,\{t^{\nu-\frac{3}{2}}M_{\varkappa(\nu+n),\,-(\nu+n)}[(\nu+n)t](4-4\varkappa t+t^2)\}.$$

Dabei ist:

$$(5.15)\qquad Ph\Big\{\sum_{n=-m}^{\infty}a_n z^n\Big\}=\sum_{n=-m}^{-1}a_n z^n.$$

(5.14) stellt die Verallgemeinerung der Polynome von NIELSEN dar. Denn für $\varkappa=0$ erhält man mit (4.20)

$$(5.16)\qquad \mathfrak{A}_{0,\nu+n,n}(2it)=2^{-\nu-2n-1}i^{-n-1}\frac{4(\nu+n)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\nu+n+1)}\mathfrak{U}_{n,\nu}(t),$$

wobei $\mathfrak{U}_{n,\nu}(t)$ die von NIELSEN betrachteten Polynome sind. Aus (5.12) folgt sofort mit (5.16) und (4.20) die Reihe

$$(5.17)\qquad \frac{z^\nu}{t-z}\sum_{n=0}^{\infty}\mathfrak{U}_{n,\nu}(t)\,J_{\nu+n}[(\nu+n)z].$$

Vergleicht man (5.12) mit der Entwicklung von ERDELYI [*10*, 1094 (2, 2)]:

$$(5.18)\qquad \frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{\varkappa,\nu+n,n}(t)\,M_{\varkappa,\nu+n}(z),$$

und beachtet man [5, 179 (17)]

$$A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = Ph\left\{t^{\nu-\frac{3}{2}} M_{\varkappa,-\nu-n}(t)\right\}, \tag{5.19}$$

so bekommt man mit (5.14)

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t) = 4(\nu+n)^{-\nu+\frac{3}{2}} A_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}[(\nu+n)t] - \\ \qquad - 4\varkappa(\nu+n)^{-\nu+\frac{1}{2}} A_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n-1}[(\nu+n)t] + \\ \qquad + (\nu+n)^{-\nu-\frac{1}{2}} A_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n-2}[(\nu+n)t], \end{cases} \tag{5.20}$$

und damit hat man auch hier:

$\mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t)$ ist ein Polynom in $1/t$ vom Grade $n+1$ ohne freies Glied.

Weiterhin gilt:

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t) = (\nu+n)^{-\nu+\frac{3}{2}}(4-4\varkappa t+t^2) A_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}[(\nu+n)t] + \\ \quad + (4\varkappa - t)(\nu+n)^{-\nu+\frac{1}{2}} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n!} {}_2F_1\left(-n, \frac{1}{2} - (\nu+n)(\varkappa+1), \right. \\ \quad \left. 1-2\nu-2n, 2\right) - (\nu+n)^{-\nu-\frac{1}{2}} \frac{(-\frac{1}{2})^{n-1}}{(n-1)!} \times \\ \quad \times {}_2F_1\left(-n+1, \frac{1}{2} - (\nu+n)(\varkappa+1), 1-2\nu-2n, 2\right). \end{cases} \tag{5.21}$$

Man benötigt dazu nur (5.1) und die Beziehung

$$\begin{cases} Ph\left\{\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n (4-4\varkappa z+z^2)\right\} \\ \qquad = (4-4\varkappa z+z^2)\, Ph\left\{\sum_{n=-m}^{\infty} a_n z^n\right\} - a_{-2} + (4\varkappa - z) a_{-1}. \end{cases} \tag{5.22}$$

Aus (5.14) kann man sofort eine explizite Darstellung ermitteln. Man kann aber auch (5.21) benutzen und die Beziehung [5, 179 (18)]

$$A_{\varkappa,\nu+n,n}(t) = t^{-n-1} \sum_{s=0}^{n} {}_2F_1\left(-s, \frac{1}{2} - \nu - n - \varkappa, 1-2\nu-2n, 2\right) \frac{\left(-\frac{t}{2}\right)^s}{s!} \tag{5.23}$$

und dann folgt:

$$\begin{cases} \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t) = (\nu+n)^{-\nu+\frac{3}{2}}(4-4\varkappa t+t^2)[(\nu+n)t]^{-n-1} \times \\ \quad \times \sum_{s=0}^{n} {}_2F_1\left(-s, \frac{1}{2} - \nu - n - \varkappa(\nu+n), 1-2\nu-2n, 2\right) \frac{\left(-\frac{(\nu+n)}{2}\right)^s}{s!} + \\ \quad + (4\varkappa - t)(\nu+n)^{-\nu+\frac{1}{2}} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n!} {}_2F_1\left(-n, \frac{1}{2} - (\nu+n)(\varkappa+1), \right. \\ \quad \left. 1-2\nu-2n, 2\right) - (\nu+n)^{-\nu-\frac{1}{2}} \frac{(-\frac{1}{2})^{n-1}}{(n-1)!} \times \\ \quad \times {}_2F_1\left(-n+1, \frac{1}{2} - (\nu+n)(\varkappa+1), 1-2\nu-2n, 2\right). \end{cases} \tag{5.24}$$

Auf eine weitere Untersuchung wollen wir hier verzichten. Wir notieren nur noch

$$\frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4(\nu+n)}\, \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t)\, M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z]. \tag{5.25}$$

6. Zweiter Entwicklungssatz für analytische Funktionen

Wir wollen jetzt noch einen Satz ableiten, der dem Entwicklungssatz von ERDELYI [*10*, 1098] analog ist.

Ist $g(z)$ in $0 \leqq r_1 < |w_\varkappa(z)| < r_2 \leqq 1$, $z \in \mathfrak{G}_\varkappa$ holomorph, so können wir schreiben:

$$g(z) = g_0(z) + g_\infty(z), \tag{6.1}$$

wo $g_0(z)$ um $z=0$ holomorph ist und $g_\infty(z)$ um $z=\infty$. Dabei sei $g_\infty(\infty)=0$. Satz 4 liefert dann für $|w_\varkappa(z)| < r_2$, $z \in \mathfrak{G}_\varkappa$ die Reihe:

$$z^{\nu+\frac{1}{2}} g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z] \tag{6.2}$$

mit

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{4(\nu+n)} \dfrac{1}{2\pi i} \oint g_0(z)\, z^{\nu-\frac{3}{2}}\, M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n)z]\,(4-4\varkappa z+z^2)\,dz \\ \quad = \dfrac{1}{4(\nu+n)} \dfrac{1}{2\pi i} \oint g_0(z)\, \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(z)\,dz, \end{cases} \tag{6.3}$$

und da $g_\infty(z)$ holomorph im Komplement von $|w_\varkappa(z)| \leqq r_1$, $z \in \mathfrak{G}_\varkappa$ ist mit $g_\infty(\infty)=0$, so folgt

$$a_n = \frac{1}{4(\nu+n)} \frac{1}{2\pi i} \oint g(z)\, \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(z)\,dz. \tag{6.4}$$

Entsprechend gilt in $r_1 < |w_\varkappa(z)| < 1$, $z \in \mathfrak{G}_\varkappa$ bei absolut gleichmäßiger Konvergenz in kompakten Teilgebieten:

$$\frac{z^{-\nu-\frac{1}{2}} g_\infty(z)\, z^2}{4-4\varkappa z+z^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n\, M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n)z] \tag{6.5}$$

mit

$$b_n = \frac{1}{4(\nu+n)} \frac{1}{2\pi i} \oint g_\infty(z)\, z^{-\nu-\frac{1}{2}}\, M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z]\,dz, \tag{6.6}$$

also gilt

$$g_\infty(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^{\nu+\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n)z] \frac{(4-4\varkappa z+z^2)}{z^2}. \tag{6.7}$$

Wir multiplizieren mit $\frac{1}{t-z}$. Sei $r_1 < \varrho < \varrho_1$, $\varrho_1 < 1$. Für $|w_\varkappa(z)| = \varrho$, $z \in \mathfrak{G}_\varkappa$ und t aus dem Komplement von $|w_\varkappa(\tau)| < \varrho_1$, $\tau \in \mathfrak{G}_\varkappa$ kann dann $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|w_\varkappa(z)|=\varrho} \ldots dz$ gliedweise angewendet werden und wir finden

$$g_\infty(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \oint \frac{z^{\nu-\frac{3}{2}}}{t-z}\, M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n)z]\,(4-4\varkappa z+z^2)\,dz. \tag{6.8}$$

Hieraus erkennt man, daß die Glieder für $n<0$ verschwinden und es folgt

$$(6.9)\quad \begin{cases} g_\infty(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \, Ph\{t^{\nu-\frac{3}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),-(\nu+n)}[(\nu+n)\,t]\,(4-4\varkappa t+t^2)\} \\ \qquad = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n \, \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(t)\,. \end{cases}$$

Dabei gilt

$$(6.10)\quad \begin{cases} b_n = \frac{1}{4(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint g_\infty(z)\, z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\,dz \\ \quad = \frac{1}{4(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint g(z)\, z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\,dz\,. \end{cases}$$

Als Ergebnis können wir somit notieren:

Satz 5. *2ν sei nicht ganz, $\varkappa$ beliebig.*

Ist $g(z)$ in $0\leqq r_1<|w_\varkappa(z)|<r_2\leqq 1$, $z\in\mathfrak{G}_\varkappa$ eindeutig analytisch, so gilt die in kompakten Teilgebieten absolut konvergente Entwicklung

$$(6.11)\quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z] + \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(z)$$

mit den Koeffizienten

$$(6.12)\quad a_n = \frac{1}{4(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint g(z)\,\mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(z)\,dz\,,$$

$$(6.13)\quad b_n = \frac{1}{4(\nu+n)}\,\frac{1}{2\pi i}\oint g(z)\, z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\,dz\,.$$

Trivial ist nun

$$(6.14)\quad \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\oint z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\, z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+m),\nu+m}[(\nu+m)\,z]\,dz \\ \qquad = \frac{1}{2\pi i}\oint \mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+n),\nu+n,n}(z)\cdot\mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+m),\nu+m,m}(z)\,dz = 0 \\ n,m = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Nach (4.9) gilt weiter:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\, z^{\nu+\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+m),-(\nu+m)}[(\nu+m)\,z]\times$$
$$\times\,\frac{(4-4\varkappa z+z^2)}{z^2}\,dz$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint z^{-\nu-\frac{1}{2}} M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\,\mathfrak{A}_{\varkappa(\nu+m),\nu+m,m}(z)\,dz = 4(\nu+n)\,\delta_{nm}$$
$$n,m = 0,1,2,\ldots.$$

Damit haben wir auch die Eindeutigkeit der Entwicklung (6.11).

7. Asymptotische Formeln

(2.9) liefert für die Eigenlösungen $v_{\nu+n}(t)$ die asymptotische Formel

$$(7.1)\qquad v_{\nu+n}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} v_{\nu+n}(\tau)\,e^{-i(\nu+n)\tau}\,d\tau\cdot e^{i(\nu+n)t}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

mit $O(1/n)$ gleichmäßig in $0<\varepsilon\leqq\Im\mathfrak{m}\,t\leqq T<\infty$.

Indem wir auf z übergehen, erhalten wir:

$$(7.2)\qquad \begin{cases}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{4}}\,z^{-\frac{1}{2}}M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\\ \quad=\dfrac{1}{2\pi i}\oint z^{-\frac{1}{2}}M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]\left(w_\varkappa(z)\right)^{-\nu-n}\dfrac{(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{3}{4}}}{2z}\,dz\times\\ \qquad\times[w_\varkappa(z)]^{\nu+n}\left[1+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]\end{cases}$$

mit $O(1/n)$ gleichmäßig für $0<\varrho_1\leqq|w_\varkappa(z)|\leqq\varrho_2<1$, $z\in\mathfrak{G}_\varkappa$. Wir setzen nun $2\nu+n\neq 0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$ für jedes n voraus und werten das Integral mit Hilfe der Potenzreihe für $M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)\,z]$ aus. Der Integrand lautet ohne den Faktor $1/z$:

$$(7.3)\qquad \begin{cases}\dfrac{1}{2}(\nu+n)^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1}{2}(\nu+n)z}\,{}_1F_1\left(\dfrac{1}{2}+(1-\varkappa)(\nu+n),\,1+2\nu+2n,\,(\nu+n)\,z\right)\times\\ \qquad\times\left[\dfrac{w_\varkappa(z)}{(\nu+n)\,z}\right]^{-\nu-n}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{3}{4}}.\end{cases}$$

$\frac{w_\varkappa(z)}{z}$ ist holomorph um $z=0$. Das Integral hat daher den Wert

$$(7.4)\qquad \frac{1}{2}(4)^{\frac{3}{4}}(\nu+n)^{\nu+n+\frac{1}{2}}\lim_{z\to0}\left[\frac{w_\varkappa(z)}{z}\right]^{-\nu-n}.$$

Wir bestimmen zunächst den Grenzwert.

Für $0\leqq\arg\varkappa<\pi$ folgt aus (3.31)

$$(7.5)\qquad \lim_{z\to0}\frac{w_\varkappa(z)}{z}=\frac{(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}\,e}{4}\left[\frac{\varkappa+1}{(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]^{\varkappa}$$

mit $-\pi\leqq\arg(\varkappa+1)-\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}\leqq0$.

Sei zunächst $\varkappa\neq a>1$. Die Gerade durch α_1 und α_2 geht nicht durch $z=0$. Setzen wir

$$\beta=\frac{2\varkappa-z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}},$$

so gilt nach (3.31): $(\arg\beta)_{z=\alpha_2}=0$.

Ist $z=\lambda\alpha_2+\mu\cdot2\varkappa$, $\lambda+\mu=1$, $0\leqq\lambda,\,\mu\leqq1$, so folgt wie in Hilfssatz 1:

$$\frac{2\varkappa-z}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\geqq0,\qquad \arg\frac{(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}{2(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\pi}{2},$$

also haben wir $-\pi/2\leqq\arg\beta\leqq0$.

Für $z=\lambda 2\varkappa$, $0\leqq\lambda\leqq 1$ ist β nicht reell, denn β ist nur reell für

$$z=2\varkappa+\frac{\lambda^2+1}{\lambda}(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}},\quad -\infty<\lambda+\infty,$$

und wegen $\left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right|\geqq 2$ β also nicht reell für $z=\lambda 2\varkappa$. Damit gilt für die obigen z sicher

$$-\pi\leqq\arg\beta\leqq 0.$$

Das Ergebnis ist aber auch richtig im Falle $\varkappa>1$, denn für $z=\lambda\alpha_2$, $0\leqq\lambda\leqq 1$ ist β stets reell, also $\arg\beta=0$ zu setzen, da in $z=0$ $\arg(4-4\varkappa z+z^2)=0$ gewählt war.

Ist $\pi\leqq\arg\varkappa<2\pi$, so folgt aus (3.32) sofort

$$\lim_{z\to 0}\frac{w_\varkappa(z)}{z}=-\frac{(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot e}{4}\left[\frac{1-\varkappa}{(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-\varkappa} \tag{7.6}$$

mit

$$-\pi\leqq\arg(1-\varkappa)-\arg(\varkappa^2-1)^{\frac{1}{2}}\leqq 0,$$

was analog bewiesen wird, aber auch aus der Symmetrie schon folgt.

Wir notieren nun zunächst:

$$\left\{\begin{aligned}&M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z]=2^{\frac{1}{2}}(\nu+n)^{\nu+n}[(\nu+n)z]^{\frac{1}{2}}(4-4\varkappa z+z^2)^{-\frac{1}{4}}\times\\&\quad\times\lim_{z\to 0}\left[\frac{w_\varkappa(z)}{z}\right]^{-\nu-n}w_\varkappa(z)^{\nu+n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right].\end{aligned}\right. \tag{7.7}$$

Damit folgt nun

$$\left\{\begin{aligned}&M_{\varkappa(\nu+n),\nu+n}[(\nu+n)z]=2^{\frac{1}{2}}(\nu+n)^{\nu+n}[(\nu+n)z]^{\frac{1}{2}}\times\\&\quad\times(4-4\varkappa z+z^2)^{-\frac{1}{4}}2^{\mp\varkappa(\nu+n)}\left[\frac{e}{4}(1\pm\varkappa)^{\pm\varkappa}\right]^{-\nu-n}\times\\&\quad\times\left\{\frac{z\,e^{\frac{1}{2}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}[\pm 2\varkappa\mp z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}]^{\pm\varkappa}}{2-\varkappa z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\nu+n}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right],\end{aligned}\right. \tag{7.8}$$

wobei das obere Vorzeichen für $0\leqq\arg\varkappa<\pi$, das untere für $\pi\leqq\arg\varkappa<2\pi$ zu nehmen ist.

Die Ableitung dieser asymptotischen Formel hat ihren Ursprung in Satz 9 von [4] S. 453. Geht man dort in den Abschätzungen die bestimmenden Konstanten durch, so zeigt sich, daß man das $O(1/n)$ auch gleichmäßig bezüglich ν aus kompakten Bereichen bekommt, die keine der Zahlen $2\nu=n$, n ganz enthalten. Damit ergibt sich für $\Re\mathrm{e}\,\mu\to\pm\infty$ gleichmäßig bezüglich $|\Im\mathrm{m}\,\mu|\leqq\mathrm{const}$, wenn nur $|2\mu+n|\geqq\mathrm{const}>0$ für $n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$ ist:

$$\left\{\begin{aligned}&M_{\varkappa\mu,\mu}(\mu z)=2^{\frac{1}{2}\mp\varkappa\mu}\mu^\mu\cdot(\mu z)^{\frac{1}{2}}(4-4\varkappa z+z^2)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{e}{4}(1\pm\varkappa)^{\pm\varkappa}\right)^{-\mu}\times\\&\quad\times\left\{\frac{z\,e^{\frac{1}{2}(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}[\pm 2\varkappa\mp z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}]^{\pm\varkappa}}{2-\varkappa z+(4-4\varkappa z+z^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\mu}\left[1+O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right].\end{aligned}\right. \tag{7.9}$$

Im Falle $\varkappa = \pm 1$ erhält man die wesentlich einfachere Formel

$$M_{\pm\mu,\mu}(\mu z) = 2^{\frac{1}{2}} \mu^{\mu} (\mu z)^{\frac{1}{2}} (2 \mp z)^{-\frac{1}{2}} \left(z e^{\mp \frac{z}{2}}\right)^{\mu} \left[1 + O\left(\frac{1}{\mu}\right)\right]. \tag{7.10}$$

Literatur

[1] KAPTEYN, W.: Recherches sur les fonctions de Fourier-Bessel. Ann. sci. de l'Ecole norm. sup. (3) **10**, 91—122 (1893).

[2] MEISSEL, E.: Weitere Entwicklungen über die Besselschen Funktionen. Astron. Nach. **130**, 363—367 (1892).

[3] NIELSEN, N.: Recherches sur les series de fonctions cylindriques. Ann. sci. de l'Ecole norm. sup. (3) **18**, 39—75 (1901).

[4] SCHÄFKE, F. W.: Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. I. Math. Z. **74**, 436—470 (1960).

[5] — Reihenentwicklungen analytischer Funktionen nach Biorthogonalsystemen spezieller Funktionen. II. Math. Z. **75**, 154—191 (1961).

[6] NEUMANN, C.: Über die Entwicklung beliebig gegebener Funktionen nach den Besselschen Funktionen. J. f. Math. **67**, 310—314 (1867).

[7] — Theorie der Besselschen Funktionen. Leipzig: Teubner 1867.

[8] GEGENBAUER, L.: Über die Besselschen Funktionen. Wiener Sitzungsber. **74** (2), 124—130 (1876).

[9] NIELSEN, N.: Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig: Teubner 1904.

[10] ERDELYI, A.: Entwicklung einer analytischen Funktion nach Whittakerschen Funktionen. Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **39**, 1092—1098 (1936).

[11] —, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and F. G. TRICOMI: Higher Transcendental Functions. New York: McGraw-Hill Book Comp. Inc. 1953.

Köln, Institut für Angewandte Mathematik der Universität

(Eingegangen am 18. März 1963)

HOCHSTADT, H.
Math. Zeitschr. 82, 237—242 (1963)

Functiontheoretic properties of the discriminant of Hill's equation*

By
HARRY HOCHSTADT

1. Introduction and Summary

The differential equation

$$y''+(\lambda+q(x))\,y=0 \tag{1.1}$$

where $q(x)$ is a real valued function of period π and λ is a parameter is customarily known as Hill's equation. Let y_1 and y_2 be two solutions of (1.1) with the initial values

$$y_1(0)=1\,,\qquad y_1'(0)=0\,,$$
$$y_2(0)=0\,,\qquad y_2'(0)=1\,.$$

The discriminant of Hill's equation $\Delta(\lambda)$ is given by

$$\Delta(\lambda)=y_1(\pi)+y_2'(\pi)\,. \tag{1.2}$$

It is known [2], that if ϱ is a root of the equation

$$\varrho^2-\Delta(\lambda)\,\varrho+1=0 \tag{1.3}$$

then it must be possible to find a solution of (1.1) such that

$$y(x+\pi)=\varrho\,y(x)\,. \tag{1.4}$$

In particular when $\Delta=2$, (1.1) clearly must then have a solution of period π and when $\Delta=-2$ (1.1) must have a solution of period 2π.

Furthermore, when $|\Delta(\lambda)|<2$ the roots of (1.3) are complex conjugates of magnitude 1 and all solutions of type (1.4) are uniformly bounded. If, however, $|\Delta(\lambda)|>2$ both roots of (1.3) are real and one must be such that $|\varrho|>1$. It follows that the corresponding solution (1.4) must be unbounded. One can easily show [10] that $\Delta(\lambda)$ is an entire function of λ of growth order $\frac{1}{2}$. This can be done by showing that the solutions of

$$\omega''=(|\lambda|+R)\,\omega\,,\qquad \omega(0)=\omega'(0)=1\,,$$

where $R=\pi\max|q(x)|$, majorize those of (1.1).

In section 2 of this article a theorem of HAUPT [4, 5] will be proved exploiting primarily, the functiontheoretic nature of $\Delta(\lambda)$. This theorem asserts

* This research was supported by the N.S.F. under grant GP-165.

that the λ axis can be split into alternating intervals known as stability and instability intervals respectively. The former are characterized by $|\Delta(\lambda)|<2$ and the latter by $|\Delta(\lambda)|>2$. The end points of the intervals are characterized by $|\Delta(\lambda)|=2$. All previous proofs of this theorem rest on a strong use of the differential equation; see for example [2, 8].

Whenever λ is a simple root of $|\Delta(\lambda)|=2$ (1.1) will have one periodic solution of period π or 2π and any other linearly independent solution will no longer be periodic [8]. It can happen that λ is a double root of $|\Delta(\lambda)|=2$. In such a case all solutions of (1.1) will be periodic. In this case two stability intervals are contiguous and the instability interval separating them vanishes. It can even happen that all, but a finite number of instability intervals vanish. The only known cases where this can happen arise when $q(x)$ in (1.1) is a Lamé function [3]. In section III an explicit representation of $\Delta(\lambda)$ will be given, which becomes particularly simple, when all, but a finite number of instability intervals, vanish. In particular it will follow that if all, but the 0 th, instability intervals vanish then $q(x)$ in (1.1) must be a constant. This result has previously been proved in [1, 10].

The only two previous articles, which exploit the functiontheoretic properties of $\Delta(\lambda)$ are [7, 10].

2. Haupt's oscillation theorem

Theorem. *There exists an infinite sequence*

$$\lambda_0<\lambda_1\leqq\lambda_2<\lambda_3\leqq\lambda_4<\cdots$$

such that $\Delta(\lambda_i)=2$. *There exists a second infinite sequence*

$$\lambda_1'\leqq\lambda_2'<\lambda_3'\leqq\lambda_4'<\cdots$$

such that $\Delta(\lambda_i')=-2$. *These interlace in such a way that*

$$\lambda_0<\lambda_1'\leqq\lambda_2'<\lambda_1\leqq\lambda_2<\lambda_3'\leqq\lambda_4'<\lambda_3\leqq\lambda_4<\cdots.$$

Whenever λ *lies in one of the intervals*

$$(\lambda_0, \lambda_1'), (\lambda_2', \lambda_1), (\lambda_2, \lambda_3'), (\lambda_4', \lambda_3), \ldots, |\Delta(\lambda)|<2.$$

If λ *lies in* $(-\infty, \lambda_0)$, (λ_1', λ_2') (λ_1, λ_2), (λ_3', λ_4'), $\ldots$, $|\Delta(\lambda)|>2$.

The proof of this theorem will be accomplished by using the following theorem due to LAGUERRE [9]:

If $f(z)$ *is an entire function, real for real* z, *of growth order less than* 2, *with real zeros, then the zeros of* $f'(z)$ *are also all real, and are separated from each other by the zeros of* $f(z)$.

The function $\Delta(\lambda)-2$ is an entire function of growth order $\frac{1}{2}$. It must therefore have an infinite number of zeros, which we shall denote by $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$. It follows that

$$\Delta(\lambda)-2=K_1\prod_0^\infty\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_n}\right). \tag{2.1}$$

In the infinite product each λ_n must appear as often as its multiplicity. In (2.1) it was assumed that none of the λ_n vanish. The case where one of the λ_n vanishes can be treated with obvious modifications. Clearly $\Delta(\lambda)-2$ is real for real λ. We will now show that all of its zeros are also real. This follows from the fact that the zeros represent the eigenvalues of (1.1) with the periodicity boundary conditions

$$y(0)=y(\pi),$$

$$y'(0)=y'(\pi).$$

Since this is a self adjoint boundary value [2] problem all eigenvalues are real. One can also show [1, 6] that the asymptotic form of the eigenvalues is given by

$$\lambda_{2n}=4n^2+o(n) \tag{2.2}$$

for large values of n. From these estimates one can again see that $\Delta(\lambda)-2$ has growth order $\frac{1}{2}$. One can also show that the zeros can be arranged in an increasing sequence which approaches infinity. The hypotheses of Laguerre's theorem are now satisfied and we can conclude that the zeros of $\Delta'(\lambda)$ are also real and are separated from each other by those of $\Delta(\lambda)-2$.

For the sake of completeness, we will now sketch the proof of Laguerre's theorem for $\Delta(\lambda)-2$. From (2.1) it follows that

$$\frac{\Delta'}{\Delta-2}=\sum_0^\infty \frac{1}{\lambda-\lambda_n}. \tag{2.3}$$

If $\lambda=\sigma+i\tau$ is a zero of Δ' we have

$$0=\sum_0^\infty \frac{(\sigma-\lambda_n)+i\tau}{(\sigma-\lambda_n)^2+\tau^2},$$

but from this expression we see directly that $\tau=0$, so that all zeros of Δ' are real. By differentiating (2.3) we find, for real λ,

$$\left(\frac{\Delta'}{\Delta-2}\right)'=-\sum_0^\infty \frac{1}{(\lambda-\lambda_n)^2}<0.$$

This shows that $\Delta'/\Delta-2$ is a decreasing function and therefore the zeros of Δ' are separated from each other by those of $\Delta-2$. We denote the zeros of Δ' by $\mu_1, \mu_2, \ldots$, arranged in increasing order. Then

$$\lambda_0\leqq\mu_1\leqq\lambda_1\leqq\mu_2\leqq\lambda_2\leqq\cdots. \tag{2.4}$$

The eigenvalues of the self-adjoint boundary value problem (1.1) with boundary conditions

$$y(0)=-y(\pi),$$

$$y'(0)=-y'(\pi),$$

are also real and correspond to the zeros of $\Delta(\lambda)+2$. We denote these by $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$ and find as above that

$$\lambda_1' \leqq \mu_1 \leqq \lambda_2' \leqq \mu_2 \leqq \lambda_3' \leqq \cdots. \tag{2.5}$$

One can easily see from (1.1) that for λ sufficiently small, so that $\lambda+q(x)<0$, both y_1 and y_2 are increasing functions of x. Therefore it follows from (1.2) that $\Delta(\lambda)$ for such λ is large, and for sufficiently small λ, $\Delta(\lambda)>2$. As λ increases a value λ_0 will be reached where $\Delta(\lambda_0)-2=0$. Since $\Delta'<0$ for $\lambda<\mu_1$ we see that as λ increases beyond λ_0 a value λ_1' is reached where $\Delta(\lambda_1')+2=0$. For $\mu_1<\lambda<\mu_2$, $\Delta(\lambda)$ must be increasing and it follows that values of λ are reached namely λ_2' and λ_1, such that $\Delta(\lambda_2')+2=0$ and $\Delta(\lambda_1)-2=0$. By extending this argument it follows that

$$\lambda_0 < \lambda_1' \leqq \lambda_2' < \lambda_1 \leqq \lambda_2 < \lambda_3' \leqq \lambda_4' < \cdots,$$

which proves part of Haupt's Oscillation Theorem. It is also clear that if λ lies in any of the intervals

$$(\lambda_0, \lambda_1'), (\lambda_2', \lambda_1), (\lambda_2, \lambda_3'), \ldots, |\Delta(\lambda)|<2$$

and outside $\Delta(\lambda)>2$. This completes the proof of the theorem.

Equality in the above sequence implies that two zeros of $\Delta(\lambda)-2$ or $\Delta(\lambda)+2$ coalesce. One can show that no zero has multiplicity higher than 2. A higher order would imply that more than two eigenvalues coalesce. But we are dealing with a second order self adjoint boundary value problem, which can have at most a double eigenvalue. One can also prove this result by showing that $\Delta''\neq 0$ near the maxima and minima of Δ, by a perturbation procedure [2, 8].

3. Representation of $\Delta(\lambda)$

We shall establish the notation that μ_k will denote the zero of Δ' such that

$$\lambda_{2k-1} \leqq \mu_k \leqq \lambda_{2k} \tag{3.1}$$

and similarly for μ_k'

$$\lambda_{2k-1}' \leqq \mu_k' \leqq \lambda_{2k}'. \tag{3.2}$$

It follows that

$$\Delta' = C_1 \prod_1^\infty \left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k'}\right)$$

$$4-\Delta^2 = C_2 \prod_1^\infty \left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k-1}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k'}\right)$$

so that

$$\frac{\Delta'^2}{4-\Delta^2} = K \prod_1^\infty \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)^2\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k'}\right)^2}{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k-1}}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k'}\right)}. \tag{3.3}$$

If the function on the right of (3.3) is denoted by $f^2(\lambda)$ it follows that

$$\Delta(\lambda)=2\cos\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} f(\lambda)\,d\lambda\right]. \tag{3.4}$$

One can now characterize the eigenvalues λ_k as solutions of the equations

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_{2k}} f(\lambda)\,d\lambda=\int_{\lambda_0}^{\lambda_{2k-1}} f(\lambda)\,d\lambda=2k\pi,$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda'_{2k}} f(\lambda)\,d\lambda=\int_{\lambda_0}^{\lambda'_{2k-1}} f(\lambda)\,d\lambda=(2k-1)\pi.$$

In the case where all, but a finite number, of the instability intervals vanish we find that (3.1) and (3.2) reduce to equalities for an infinite number of k, and become strict inequalities for a finite number of k. Then the product in (3.3) reduces to a finite product. This leads to a particularly simple characterization of the discriminant in those cases where only a finite number of instability intervals do not vanish.

Theorem. *The discriminant of Hill's equation in case only a finite number of instability intervals do not vanish is given by*

$$\Delta(\lambda)=2\cos\left[K\int_{\lambda_0}^{\lambda}\prod_{1}^{n}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\mu_k}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\mu'_k}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_{k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda'_k}\right)^{\frac{1}{2}}}\,d\lambda\right].$$

When all instability intervals with the exception of $(-\infty, \lambda_0)$, vanish we find that

$$\Delta=2\cos\left[K\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]=2\cos\left[-2\lambda_0\sqrt{K\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)}\right].$$

By means of the asymptotic estimate (2.2) K can be found and then

$$\Delta=2\cos\pi\sqrt{\lambda-\lambda_0}. \tag{3.5}$$

From this last result one can show that $q(x)$ must be constant. For details see [*10*].

From (3.3) it can also be shown that Δ must satisfy a second order linear differential equation

$$f\Delta''-f'\Delta'+f^3\Delta=0. \tag{3.6}$$

Whenever only a finite number of instability intervals do not vanish the coefficients in (3.6) are rational functions.

References

[*1*] Borg, G.: Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Acta Math. **78**, 1–95 (1946).

[*2*] Coddington, E. A., and N. Levinson: Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill 1955.

[3] ERDELYI, A., W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and F. G. TRICOMI: Higher Transcendental Functions; Bateman Manuscript Project, Vol. III. New York: McGraw-Hill 1955.
[4] HAUPT, O.: Über eine Methode zum Beweis von Oszillationstheoremen. Math. Ann. **76**, 67—104 (1914).
[5] — Über lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Math. Ann. **79**, 278—285 (1919).
[6] HOCHSTADT, H.: Asymptotic Estimates for the Sturm-Liouville Spectrum. Comm. Pure Appl. Math. **14**, 749—764 (1961).
[7] MAGNUS, W.: Infinite Determinants associated with Hill's Equation. Pac. J. Math. **5**, 941—951 (1955).
[8] —, and A. SHENITZER: Hill's Equation. Part I: General Theory, N.Y.U. Inst. Math. Sci., Div. EM Res., Research Report No. BR-22, 1957.
[9] TICHMARSH, E. C.: The theory of Functions. Oxford 1939.
[10] UNGAR, P.: Stable Hill's Equations. Comm. Pure Appl. Math. **14**, 707—710 (1961).

Dept. of Math., Polytechnic Institute of Brooklyn, New York, N.Y.

(Received April 8, 1963)

SAH, C.-H.
Math. Zeitschr. 82, 243—246 (1963)

On the normality of Hall subgroups in finite groups

By

CHIH-HAN SAH*

The purpose of this note is to prove the following theorems:

Theorem 1. *Let H and K be complementary Hall subgroups of the finite group G. Then the following two conditions are equivalent:*

(1) *K is normal in G.*

(2) *(a) H is c-closed in G, i.e., two elements of H conjugate in G are already conjugate in H.*

(b) For each $x \in H$, $C_G(x) = C_K(x)\, C_H(x)$, where $C_M(T)$ denotes the centralizer of the subset T in the subgroup M of G.

Theorem 2. *Let S be a 2-Sylow subgroup of the finite group G. Then the following conditions are equivalent:*

(1) *S is normal in G (G is then called 2-closed).*

(2) *G contains a c-closed 2-complement K to S.*

(3) *Each real element of G has order a power of 2, where $x \in G$ is called real (in G) if and only if x and x^{-1} are conjugate in G.*

(4) *G has no real element of odd prime order.*

Corollary. *Let H and K be complementary Hall subgroups of the finite group G.*

(1) *If K is 2-closed and H is c-closed of odd order then K is normal in G.*

(2) *If K has odd order and H is c-closed with a normal 2-complement then K is normal in G.*

We note that in general the condition (2), (b) of Theorem 1 cannot be dropped [*4*; p. 290]. Besides Theorem 2, there are several cases where it may be dropped [*4*; Theorem 1 and 3, p. 282]. Theorem 2 does not generalize to odd primes p, i.e., the condition that p-subgroups of G induce only the trivial automorphism on subgroups of order prime to p will not imply that G has a normal p-Sylow subgroup. Counter-examples may be obtained by looking at $PSL(2, 2^3)$ for $p=3$ and $PSL(2, p)$ for $p>3$.

In the following, $H \leqq G$, $H < G$, $H \trianglelefteq G$ will mean that H is a subgroup, a proper subgroup, a normal subgroup of G respectively. $S^x = x^{-1} S x$. $[H, K]$ is the subgroup generated by $[h, k] = h^{-1} h^k$, $h \in H$, $k \in K$. $N_G(H)$ denotes the normalizer of H in G.

* This work was supported by Office of Army Research (Durham) and NSF contract G-23833.

Proof of Theorem 1. We first remark that if H and K are complementary Hall subgroups of G then $G=HK=KH$, $K\cap H=1$. Thus, each element of G may be written uniquely as $uv=v'u'$, $u, u'\in K$, $v, v'\in H$.

Let $K\trianglelefteqq G$. (2), (a) then follows from [4; Lemma 2.3, p. 284]. Let $x\in H$ and $uv\in C_G(x)$, $u\in K$, $v\in H$. Thus, $x^{uv}=x$. Hence we see that $x^u x^{-1}\in H\cap K=1$. Therefore, $u\in C_K(x)$ and $v\in C_H(x)$. Hence (1) implies (2).

Suppose that (2) holds; then we have the following:

(A) If $x\in H$, $y\in K$ such that $x^y\in H$, then $x^y=x$.

Proof. By (2), (a) we can find $z\in H$ such that $x^y=x^z$. Thus, $yz^{-1}\in C_G(x)$. From (2), (b) and the remark, we have $y\in C_K(x)$.

(B) If $S\leqq G$ such that $S=(S\cap K)(S\cap H)$, then S, $S\cap K$ and $S\cap H$ satisfy (2).

Proof. From $S=(S\cap K)(S\cap H)$, we see that $S\cap K$ and $S\cap H$ are complementary Hall subgroups of S. (2) for G together with (A) now imply that (2) holds for S, $S\cap K$, $S\cap H$.

We now assume that G is of least order such that (1) does not hold.

(C) G is simple, non-abelian.

Proof. Let $1<M\trianglelefteqq G$ be a minimal normal subgroup. Thus, $M=(M\cap K)\cdot(M\cap H)$ [4; p. 289]. Suppose that $M<G$. Then, by (B), $M\cap K$ is a characteristic subgroup of M. Thus we have:

Case 1. $M\cap K=1$. Hence $M\leqq H$. H/M is c-closed in G/M by [4; Lemma 2.2, p. 283]. $M\cap K=1$ implies that H/M and MK/M are complementary Hall subgroups of G/M. Let $x\in H$, $u\in K$, $v\in H$ such that $x^{uv}x^{-1}\in M$. By (A), $x^u=x$. Thus $Mu\in C_{MK/M}(Mx)$ and $Mv\in C_{H/M}(Mx)$. From the minimality of G, we see that $MK\trianglelefteqq G$. If $MK<G$, then from (B) we can conclude that K is a characteristic subgroup of MK; thus $K\trianglelefteqq G$, a contradiction. Hence $MK=G$, or $H=M$. Thus by [2; Theorem II, p. 89], $[H, K]=1$, or $K\trianglelefteqq G$, a contradiction.

Case 2. $M\cap K=M$. Hence $M\cap H=1$, and K/M, MH/M are complementary Hall subgroups of G/M. By [4; Lemma 2.2, p. 283], MH/M is c-closed in G/M. Let $x\in H$, $u\in K$, $v\in H$ such that $x^{vu}=zx$ with $z\in M$. Let $T=\langle M, x\rangle$ be the subgroup generated by M and x. Since x^{vu} and x have the same order which is prime to that of M, we see that $\langle x^{vu}\rangle$ and $\langle x\rangle$ are complements of M in T. Thus, since T/M cyclic, we can find $w\in M$ such that $x^{vuw}=x^m$ for some integer m [5; Theorem 27, p. 132]. Using $x^{vu}=zx$ and reading the equation in T/M, we see that $m=1$. Thus by (2) (b), $v\in C_H(x)$ and $uw\in C_K(x)$. Hence (2) (b) holds for G/M, K/M and MH/M. By the minimality of G, we have $K\trianglelefteqq G$, a contradiction.

Thus G must be simple and non-abelian.

(D) If $1\neq x\in H$, $[x, y]=1$ where y has order prime to that of H, then $y\in K$.

Proof. By (C), $C_G(x)<G$. By the minimality of G, we see that (2) (b) and (B) imply that $C_K(x)$ is a normal complement of $C_H(x)$ in $C_G(x)$. Thus, $y\in C_K(x)$ follows from $[x, y]=1$ and y has order prime to that of H.

(E) If $1 \neq x \in H$, then $C_G(x) = C_H(x)$.

Proof. Suppose that $T = C_K(x) \neq 1$. Let $z \in H$. Thus $[T^z, x^z] = 1$. By (D), $T^z \leqq K$. Thus $T^{zu} \leqq K$ for $z \in H$ and $u \in K$. Hence the normal subgroup of G generated by T in G is contained in K. Since K is not normal in G, this contradicts (C).

(F) $K \trianglelefteq G$.

Proof. By (C), we see that if K is not normal in G then $1 < H \leqq N_G(H) < G$. By (A), $N_G(H) = C_K(H)H$. By (E), $N_G(H) = H$. By (A) and (E), $H \cap H^u = 1$ for $1 \neq u \in K$. Thus by the theorem of Frobenius, $K \trianglelefteq G$ [2; Theorem IV, p. 334].

(F) contradicts the assumption that G does not satisfy (1). This establishes Theorem 1.

Proof of Theorem 2. Remark 1. The set of real elements in G is closed under conjugation and raising to a power. For other results, see [1].

Remark 2. Under homomorphisms, real elements are mapped onto real elements. If $N \trianglelefteq G$ and Nx is a real element of order prime to the order of N, then Nx contains a real element of G. To see this, we let $H = \langle N, x \rangle$. By [5; Theorem 25, p. 132], N has a complement in H. We may assume that this is $\langle x \rangle$. Let $y \in G$ such that $Ny^{-1}xy = Nx^{-1}$. Thus $x^y = tx^{-1}$ for some $t \in N$. Now x^y generates a complement of N in H. Thus by [5; Theorem 27, p. 132] we have $x^{yu} = x^k = (tx^{-1})^u$ for some integer k, where $u \in N$. Reading this in G/N, we see that $k = -1$, thus x is real in G.

(1) implies (2). This follows from [5; Theorem 25, p. 132] and [4; Lemma 2.3, p. 284].

(3) and (4) are equivalent by Remark 1.

(2) implies (4). Let y be a real element of odd prime order in G. By Remark 1 and Sylow's theorem, we may assume that $y \in K$. Since K is c-closed, y is real implies that $y^{-1} = y^x$ for some $x \in K$. Thus $[y, x^2] = 1$. Since K has odd order, x and x^2 generate the same subgroup of K. Thus $[x, y] = 1$ or $y = y^{-1}$. Thus $y^2 = 1$. This contradicts the choice of y. Thus (2) implies (4).

(4) implies (1). Suppose that G has more than one 2-Sylow subgroup. Let S and T be distinct 2-Sylow subgroups of G such that $S \cap T = D$ has maximal order. If $D > 1$, then $N_G(D)/D$ has more than one 2-Sylow subgroup [5; Theorem 7, p. 108]. Thus by induction and Remark 2, (4) would be violated. Hence we may assume that distinct 2-Sylow subgroups of G have only the identity element in common. Let $s \in S$, $t \in T$ be elements of order 2. Then $s^{-1}(st)s = ts = (st)^{-1}$. Thus st has order a power of 2, say 2^n. $\langle s, t \rangle = \langle s, st \rangle$ then has order 2^{n+1}. Let U be a 2-Sylow subgroup of G containing $\langle s, t \rangle$. Then $s \in S \cap U$ and $t \in T \cap U$. Thus $S = U = T$, a contradiction to the choice of S and T. Hence (4) implies (1). Q.E.D.

Proof of Corollary. (1) The argument used in showing (2) implies (4) in Theorem 2 allows us to conclude that G is 2-closed. (1) then follows from [4; Theorem 1, p. 282] and the solvability of groups of odd order [3].

(2) By [4; Lemma 2.2, p. 283] and [4; Theorem 3, p. 282], G has a normal 2-complement. Thus G is solvable by [3]. (2) now follows from [4; Theorem 1, p. 282]. Q.E.D.

Added with galley proof: Profs. R. BRAUER and M. SUZUKI have obtained different and stronger versions of Theorem 1.

References

[1] BRAUER, R., and K. A. FOWLER: *On groups of even order.* Ann. of Math. **62**, 565–583 (1955).

[2] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd ed. New York: Dover Publications 1955.

[3] FEIT, W., and J. G. THOMPSON: *A solvability criterion for finite groups and some consequences.* Proc. Nat. Acad. Sci. **48**, 968–970 (1962).

[4] SAH, C. H.: *Existence of normal complements and extension of characters in finite groups.* Illinois J. Math. **6**, 282–291 (1962).

[5] ZASSENHAUS, H.: Theory of groups. New York: Chelsea Publishing Co. 1949.

Dept. of Math., University of Pennsylvania, Philadelphia 4, Pa. (USA)

(Received April 11, 1963)

PIPER, F. C.
Math. Zeitschr. 82, 247—258 (1963)

Elations of finite projective planes

By

F. C. PIPER

§ 1. Introduction

The purpose of this paper is to generalize the following recent result due to WAGNER [*10*].

Theorem A. Let $\mathfrak{P}$ be a finite projective plane and let Π be a collineation group of $\mathfrak{P}$ with the following properties:

(i) For every point $C \in \mathfrak{P}$ there exists an element $\lambda \in \Pi$ such that λ is an elation with centre C.

(ii) For every line $l \in \mathfrak{P}$ there exists an element $\varrho \in \Pi$ such that ϱ is an elation with axis l. Then $\mathfrak{P}$ is desarguesian and Π contains the little projective group of $\mathfrak{P}$ as a subgroup.

This theorem postulates that every point of $\mathfrak{P}$ is the centre of an elation and every line of $\mathfrak{P}$ is the axis of an elation. In § 3 we postulate only that every point is the centre of an elation. From this weaker assumption we show that either the conclusions of Theorem A follow or a point of $\mathfrak{P}$ is left fixed by Π.

When a point is left fixed, $\mathfrak{P}$ is the dual of a translation plane and Π contains the dual of a translation group as a subgroup.

In § 4 we weaken our postulates further by assuming that every flag is left fixed by an elation. This new postulate allows either a point of $\mathfrak{P}$ or a line of $\mathfrak{P}$ to be left fixed by Π. If a point is left fixed, the conclusion is the same as in § 3, while a line being fixed gives the dual result.

When no point or line is fixed, $\mathfrak{P}$ must be desarguesian and, except for $n=4$, Π contains the little projective group. When $n=4$, Π either contains the little projective group or $\Pi \cong A_6$ or S_6. That this situation actually occurs is shown in § 5.

§ 2. Definitions and previous results

Projective plane and *collineation* are defined in the usual way, see for example PICKERT [*7*]. It is well known that the collineations of a plane form a group which we call the *collineation group* of $\mathfrak{P}$.

Since collineation groups may be regarded as permutation groups on the points (or lines) of a plane, we shall adopt the following conventions.

If Π is a permutation group on a set S and if $P \in S$, then we denote the subgroup of Π fixing P by Π_P. The set of points $P\pi$, for all $\pi \in \Pi$, is called the *orbit* (or *transitive class*) of P. We note that $|\Pi| = |\Pi_p| \cdot |\text{orbit of } P|$.

A collineation of order 2 is an *involution*.

A (P, l)-perspectivity is a collineation fixing all the points of a line, l, and all the lines through a point, P. P is called the *centre* of the perspectivity and l its *axis*. If $P \in l$ the perspectivity is an *elation*. The term elation will normally be understood to mean an elation $\neq 1$.

The group generated by all the elations of P is called the *little projective group*.

An affine plane is a projective plane with a distinguished line l_∞.

An elation of the affine plane $\mathfrak{P}^*$ with axis l_∞ is a *translation*. The group generated by all the translations of a plane is the *translation group*. If the translation group of $\mathfrak{P}^*$ is transitive on the affine points of $\mathfrak{P}^*$, then $\mathfrak{P}^*$ will be called a *translation plane*.

A projective plane will be said to be (C, l)-*transitive* if for the fixed point C, the fixed line l and any pair of points Q and Q' with $Q, Q' \notin l$; $Q, Q' \neq C$; $CQ = CQ'$, there exists a (C, l)-perspectivity, α, with $Q\alpha = Q'$.

For a definition of a desarguesian plane see, for example, PICKERT [7]. We note here, however, that a finite plane is desarguesian if, and only if, it may be coordinatized by elements of a field.

If $\mathfrak{P}$ is a finite projective plane of even order n, then a set of $n+2$ point such that no three are collinear will be called an *oval*.

If $\mathfrak{P}$ is a desarguesian plane of even order n and $\mathscr{C}$ is a conic in $\mathfrak{P}$, then the $n+1$ tangents to $\mathscr{C}$ are concurrent at a point called the *nucleus* of $\mathscr{C}$. (For a definition of conic and a proof of the above property see SEGRE [9].)

We now list some well known results which we shall repeatedly use:

Result 1. (See GLEASON [3].)

$\mathfrak{P}$ is a finite projective plane and Π a collineation group of $\mathfrak{P}$. If for two distinct points X, Y, $(X \in l,\ Y \in l)$ Π contains non-trivial (X, l) and (Y, l)-elations, then all elations in Π with axis l have the same prime order.

Result 2. (This is a simple extension to Lemma 1.7, GLEASON [3]. Gleason's proof essentially still applies.)

G is a permutation group on a set S. T is a subset of S such that, given any $A \in T$, there exists an element $g \in G$ of given order p such that g fixes A and no other element of S. Then T is contained in an orbit of G.

Result 3. (See DEMBOWSKI [2], HUGHES [5], PARKER [6].)

Let $\mathfrak{P}$ be a finite projective plane and let Π be any collineation group of $\mathfrak{P}$. Then the number of transitive classes into which Π splits the points of $\mathfrak{P}$ is equal to the number of transitive classes of lines.

Result 4. (See GLEASON [3].)

Notation. $G_{X,l}$ = group of all (X, l)-elations;

$$G_l = \bigcup_{X \in l} G_{X,l}.$$

$\mathfrak{P}$ is a finite projective plane of order n. Suppose for some line, l, all the groups $G_{X,l}$ have the same order $h > 1$, then G_l is transitive on the points of $\mathfrak{P} \setminus l$.

Corollary. If Π is transitive on the points of l and if $|G_{X,l}|>1$ for some point $X\in l$, then G_l is transitive on the points of $\mathfrak{P}\setminus l$ and $\mathfrak{P}$ is a translation plane.

Result 5. (Unpublished; due to HUGHES.)

$\mathfrak{P}^*$ is a finite affine plane and O is a point of l_∞. If for every point $P\in l_\infty$, $P\neq O$, there is a non-trivial (P, l_∞)-translation in Π, then Π contains a non-trivial (O, l_∞)-translation.

As this result is unpublished we sketch a proof.

Let P_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ be the centres of non-trivial translations α_i, $(i=1, 2, \ldots, n)$. Let m be any line through P_{n+1}, $m\neq l_\infty$. There are $n-1$ possible positions for $m\,\alpha_i$ and n different α_i. Hence there exist α_j, α_k, $j\neq k$, such that $m\,\alpha_j=m\,\alpha_k$. Thus $\alpha_j\,\alpha_k^{-j}$, $\neq 1$, leaves l_∞ fixed pointwise and fixes m, i.e. $\alpha_j\,\alpha_k^{-1}$ is a (P_{n+j}, l_∞)-translation.

Result 6. (See BAER [1].)

Let $\mathfrak{P}$ be a projective plane of order n, and let α be an involutory collineation of $\mathfrak{P}$. Then either α is a perspectivity or n is a square and α fixes elementwise a subplane of $\mathfrak{P}$ of order $\sqrt{n}$. Further if n is even and α is a perspectivity, then α is an elation.

Result 7. (This is more precise statement of Theorem 1, WAGNER [10].)

$\mathfrak{P}$ is a finite projective plane and Π a collineation group of $\mathfrak{P}$. If $l\in\mathfrak{P}$ is the axis of an elation in Π and if $C\in l$ is the centre of an elation in Π, then Π contains a (C, l)-elation.

§ 3. Every point is the centre of an elation

Theorem 1. *$\mathfrak{P}$ is a finite projective plane and Π a collineation group of $\mathfrak{P}$. For every point of $\mathfrak{P}$ there exists an elation in Π with that point as centre. Then either*

(i) *Π fixes a point of $\mathfrak{P}$. Then $\mathfrak{P}$ is the dual of a translation plane and Π contains the dual of the translation group as a subgroup. Also, Π is transitive on flags not containing the fixed point.*

(ii) *Π does not fix a point of $\mathfrak{P}$. Then $\mathfrak{P}$ is desarguesian and Π contains the little projective group as a subgroup.*

Proof. We first prove the following lemma:

Lemma 1. If every point of $\mathfrak{P}$ is the centre of an elation in Π, then all the elations in Π have the same prime order.

Proof. Let C be any point of $\mathfrak{P}$. Let C be the centre of an elation with axis l and prime order p.

Consider another point D $(D\notin l)$ with axis m.

Case 1. $l\cap m=C$.

From Result 7, there exists a (C, m)-elation.

From the dual Result 1, this (C, m)-elation has order p and so, from Result 1, the (D, m)-elation has order p.

Case 2. $l \cap m = C'$, $C' \neq C$.

By hypothesis C' is a centre so, from Result 7, there exists a (C', m)-elation and a (C', l)-elation. Repeated use of Result 1 and its dual give: the order of the (D, m)-elation = the order of the (C', m)-elation = the order of the (C', l)-elation = the order of the (C, l)-elation = p.

Thus for any point $D \in \mathfrak{P} \setminus l$ the order of elations centre D is p. But any point $P \in l$ is the centre of an elation, axis l, which must have order p. If $P \in l$ is the centre of an elation with axis m, $(m \neq l)$, then the order of (P, m)-elation = the order of (P, l)-elation = p.

Thus all elations of $\mathfrak{P}$ have the same prime order p.

Theorem 1 is now proved by the following sequence of remarks.

Remark 1.1. Let l be any line of $\mathfrak{P}$. If for every point $P \in l$ there exists a line m through P $(m \neq l)$ such that m is the axis of an elation, then Π is transitive on the points of l. In particular, Π is transitive on the points of non-axes.

Proof. From Result 7 every point $P \in l$ is the centre of an elation whose axis is not l. Consequently, for every point $P \in l$ there exists an elation of order p in Π_l which fixes P and no other point of l. But Π_l is a permutation group on the points of l. Hence, from Result 2, Π_l is transitive on the points of l.

Remark 1.2. Either Π is transitive on the points of $\mathfrak{P}$ or Π fixes a point of $\mathfrak{P}$.

Proof. From Remark 1.1, Π is transitive on the points of any line l unless there exists a point $P \in l$ such that l is the only axis through P. Hence either Π is transitive on the points of $\mathfrak{P}$ or there exists a point P as above.

Assume Π is not transitive on the points of $\mathfrak{P}$, i.e. that there exists a point P with only one axis, l, through it. Since Π is transitive on the points of non-axes and since every line through P, except of course l, is a non-axis, Π maps P onto any point of $\mathfrak{P} \setminus l$. Let Q be any point of l, $Q \neq P$. If $Q\pi = R$, $R \notin l$, then there exists a collineation, α, of Π such that $P\alpha = R$, and $\alpha\pi^{-1}$ maps P onto Q. Hence, since Π is not transitive on the points of P, there exists a point $O \in l$ such that $O\pi \in l$ for all $\pi \in \Pi$.

Let D be any point of $\mathfrak{P} \setminus l$. D is the centre of a (D, m)-elation, α. Since $O\alpha \in DO$ and since $O\alpha \in l$, O must be left fixed by α and m must pass through O. Thus every point $D \in \mathfrak{P} \setminus l$ is the centre of a (D, OD)-elation and can have no other axis.

Hence D has the same property as P and, repeating the above argument with D instead of P, it follows that Π is transitive on the points of $\mathfrak{P} \setminus O$. Hence O is left fixed by Π and, if X is any point of $\mathfrak{P} \setminus O$, all elations with centre X have axis XO.

We are now in a position to complete the proof of Theorem 1.

Case (i). Π fixes a point, O.

From the proof of Remark 1.2, it follows that Π is transitive on the points of $\mathfrak{P}\backslash O$. Hence the number of transitive classes of points of $\mathfrak{P}$ is two and it follows, from Result 3, that the number of transitive classes of lines is also two. Π cannot map a line through O onto a line not through O, so Π must be transitive on the lines through O and also on the lines not through O. Hence, from the dual of the corollary to Result 4, $\mathfrak{P}$ is the dual of a translation plane.

The number of lines through O is $n+1$. The number of lines not through O is n^2. But $(n^2, n+1)=1$. So, for any two lines l, m, through O and any two lines l_1, m_1, not through O, there exists a collineation $\pi \in \Pi$ such that $l\pi = m$ and $l_1\pi = m_1$, i.e. Π is transitive on the flags of $\mathfrak{P}$ not through O.

Case (ii). Π does not fix a point of $\mathfrak{P}$.

From Remark 1.2 we know that Π is transitive on the points of $\mathfrak{P}$. But it has been shown by WAGNER [*10*] that if Π is transitive on the points of $\mathfrak{P}$ and if Π contains a perspectivity, then $\mathfrak{P}$ is desarguesian and Π contains the little projective group.

§ 4. Every flag is fixed by an elation

Theorem 2. *$\mathfrak{P}$ is a finite projective plane of order n and Π is a collineation group of $\mathfrak{P}$. For every flag of $\mathfrak{P}$ there exists an elation in Π fixing that flag. Then either*

(i) *Π fixes a point of $\mathfrak{P}$. Then $\mathfrak{P}$ is the dual of a translation plane and Π contains the dual of a translation group.*

(ii) *Π fixes a line of $\mathfrak{P}$. Then $\mathfrak{P}$ is a translation plane and Π contains the translation group of $\mathfrak{P}$.*

(iii) *Π does not fix a point or a line of $\mathfrak{P}$. Then $\mathfrak{P}$ is desarguesian. If $n \neq 4$, then Π contains the little projective group, while if $n=4$ Π either contains the little projective group or is isomorphic to A_6 or S_6.*

Proof. We note that if the flag (P, l) is fixed by an elation, then either P is a centre or l is an axis. Hence every point on a non-axis is a centre and every line through a non-centre is an axis.

Lemma 2. If every flag of $\mathfrak{P}$ is left fixed by an elation in Π, then all elations in Π have the same prime order.

Proof. Suppose Π contains elations of order p_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ $p_i \neq p_j$ if $i \neq j$. From Results 1 and 7 we assert that no axis can contain centres of different orders.

Let l be a non-axis and let n_i be the number of p_i-centres on $l\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n+1\right)$. Without loss of generality we may assume $n_1 \leqq n_j$ $(j=2, 3, \ldots, k)$.

Let m be an axis through a p_1-centre on l. Clearly m contains only p_1-centres and non-centres. Let k_1 be the number of p_1-centres on m and let k_2 be the number of non-centres on m $(k_1+k_2=n+1)$.

Let $l \cap m = P_1$, and let Q be a non-centre on m. Each line joining Q to a p_i-centre on l is a p_i-axis. Hence there are n_1 p_1-axes through Q. Each

p_1-elation with axis m is a permutation on the n_1-1 p_1-axes through Q, other than m. Let α_i be a (P_i, m)-elation $(i=1, 2, \ldots, k_1)$ and let l' be a p_1-axis through Q, $l' \neq m$.

If $l'\alpha_i = l'\alpha_j$ for $i \neq j$, then $\alpha_i \alpha_j^{-1}$ is a (Q, m)-elation. But Q is a non-centre. This contradiction shows $l'\alpha_i \neq l'\alpha_j$ for $i \neq j$. Hence:

(i) $$k_1 < n_1 - 1 .$$

Let R be a p_j-centre on l, $j \neq 1$. The lines joining R to the k_2 non-centres on m are p_j-axes. Hence there are k_2 p_j-axes through R. Let m_i $(i=1, 2, \ldots, k_2)$ be these axes and let λ_i be a (R, m_i)-elation. Each λ_i is a permutation on the n_1 p_1-centres on l. If $P\lambda_i = P\lambda_j$ for $i \neq j$, then $\lambda_i \lambda_j^{-1}$ is a (R, l)-elation. But l is a non-axis. This contradiction shows

(ii) $$k_2 < n_1 .$$

From (i) and (ii), $n+1 = k_1 + k_2 < 2n_1 - 1$. But $2n_1 \leqq \sum_{i=1}^{k} n_i = n+1$ $(2n_1 = n+1$ if $k=2$ and $n_1 = n_2)$. Thus $n+1 = k_1 + k_2 < 2n_1 - 1 \leqq n$, which is impossible. Hence all elations in Π must have the same prime order.

We now prove Theorem 2: —

Case (i) Π fixes a point of $\mathfrak{P}$.

Let the point be O. Clearly every axis passes through O.

Take any point $P \neq O$ and any line l such that $P \in l$, $O \notin l$. P is the centre of a (P, OP)-elation. Any line l through O is the axis for n different centres. So, from Result 5, l is an axis for $n+1$ centres i.e. there exists an (O, l)-elation. Hence every point of $\mathfrak{P}$ is the centre of an elation and case (i), Theorem 1 applies.

Case (ii). The dual argument establishes this case.

Case (iii). Π fixes no point and no line.

We assume that there is a point of $\mathfrak{P}$ which is not the centre of an elation in Π, and a line which is not an axis. If this is not so, then the conditions of Theorem 1, or its dual, are satisfied.

Theorem 2 is proved by the following sequence of remarks.

Remarks 2.1. Π is transitive on the points of non-axes and the lines of non-centres.

Proof. Consider a non-axis l. For every point $P \in l$, Π_l contains an elation of prime order p which fixes P and no other point of l. Hence, from Result 2, Π_l is transitive on the points of l.

The dual of the above argument completes the proof of Remark 2.1.

Remark 2.2. Every point of $\mathfrak{P}$ has at least two axes through it.

Proof. Remark 2.2. is certainly true for non-centres. Suppose there exists a point $P \in \mathfrak{P}$ with n non-axes through it. Let l be the axis of P. In view of Remark 2.1, we can map P onto any point of $\mathfrak{P} \setminus l$. Hence, as in the proof of Theorem 1, either Π is transitive on the points of $\mathfrak{P}$ or there is a point

$Q \in l$ such that $Q\pi \in l$ for all $\pi \in \Pi$. The first alternative contradicts our assumption that there exists a non-centre, so the second alternative must hold. Consider any point $R \in \mathfrak{P} \setminus l$. The flag (R, RP) is fixed by an elation, RP is not an axis, so R must be the centre of an elation α. $Q\alpha \in RQ$ and $Q\alpha \in l$. Hence $Q\alpha = Q$ i.e. Every point of $\mathfrak{P} \setminus l$ is the centre of an elation with axis passing through Q, and can have no other axis. But every line not through Q will contain some point of $\mathfrak{P} \setminus l$, so, from Result 7, there can be no axis not passing through Q. This means that Q is a fixed point and contradicts our assumption.

Thus every point has at least two axes through it.

Remark 2.3. Π is transitive on centres and on axes. Hence every centre contains the same number of non-axes and every axis the same number of non-centres.

Proof. Π is transitive on the centres of non-axes.

Consider an axis l. From Remark 2.2 and Result 7, it follows that every centre $P \in l$ is the centre of an elation whose axis is not l. This elation fixes P and no other point of l. So, from Result 2, the centres on l lie in an orbit of Π_l. They must, in fact, be an orbit since it is impossible to map a centre onto a non centre. Hence Π is transitive on the centres of $\mathfrak{P}$ and, by a dual argument, is also transitive on the axes of $\mathfrak{P}$.

Remark 2.4. Π is transitive on non-centres and Π is transitive on non-axes.

Proof. Consider an axis l and a point $P \in l$. An elation α centre P axis m $(m \neq l)$ permutes the points of l. Since the order of the elation is p, the points of $\mathfrak{P} \setminus l$ lie in orbits under of length divisible by p. Thus the number of non-centres on an axis must be divisible by p.

Let the number of non-centres on each axis be kp. Any non-centre has $n+1$ axes through it. Each axis has kp non-centres, so the total number of non-centres is $(n+1)\,kp - n$.

Assume there exist at least 2 orbits of non-centres. Let P and Q lie in different orbits and let S_Q be the number of points in the orbit containing Q which lie on the line PQ. Every line through P is an axis and is in the orbit of the line PQ. So every line through P must contain S_Q points of the orbit of Q.

Hence $|\text{orbit of } Q| = (n+1)\,S_Q$. Repeating for P gives $|\text{orbit of } P| = (n+1)\,S_P$. The total number of non centres is equal to the sum of the orbit lengths i.e. $(n+1)\,kp - n = \sum_P (n+1)\,S_P$. This is impossible since $n+1 \nmid (n+1)\,kp - n$.

Hence, all non centres lie in one orbit. The dual argument completes the proof of Remark 2.4.

Remark 2.5. If there are kp non-centres on an axis, then the number of non-axes through a centre is $\frac{n}{kp}$.

Proof. Let C be a centre and let t be the number of axes through it. Each axis contains kp non-centres and each non-centre is on one of these axes. So

tkp = number of non-centres in $\mathfrak{P} = (n+1)\,kp - n$, i.e. $t = n+1-\frac{n}{kp}$. Hence the number of non-axes through a centre is $n+1-t = \frac{n}{kp}$.

Remark 2.6. Every point of $\mathfrak{P}$ must be the centre of an elation except, possibly, when $n=4$.

Proof. Either $kp \leqq \sqrt{n}$ or $\frac{n}{pk} \leqq \sqrt{n}$ i.e. either the number of non-centres on an axis is $\leqq \sqrt{n}$ or the number of non-axes through a centre is $\leqq \sqrt{n}$. We may assume, without loss of generality, that $kp \leqq \sqrt{n}$ since otherwise the dual of the following argument will apply.

Let l be an axis. Since Π is transitive on the centres of l, $|G_{P,l}| = h > 1$ for all centres $P \in l$. But every element of $G_{P,l}$ has order p, hence $h = p^\alpha$. $G_l = \bigcup_{P \in l} G_{P,l}$ so $|G_l| = (n+1-kp)(p^\alpha - 1) + 1$. But every element of G_l has order p, so $|G_l| = p^\beta$ where $\beta > \alpha$. Hence

$$(n+1-kp)(p^\alpha - 1) + 1 = p^\beta. \tag{i}$$

Let m be any line through a centre, O, on l and let G_l^m be the subgroup of G_l fixing m. Then $|G_l| = |G_l^m| \cdot |\text{orbit of } m \text{ under } G_l|$. But $G_l^m = G_{0,l}$, hence $|\text{orbit of } m \text{ under } G_l| = p^{\beta-\alpha}$. Thus the n lines like m, through O, distinct from l split into orbit of length $p^{\beta-\alpha}$ i.e. $p^{\beta-\alpha} \mid n$.

Let $ap^\beta = np^\alpha$ $(a \geqq 1)$, then, from (i)

$$np^\alpha - n + p^\alpha - kp^{\alpha+1} + ap = p^\beta. \tag{ii}$$

Case (i). $a = 1$:

Substituting $np^\alpha = p^\beta$ in (ii) gives

$$\begin{aligned} n &= p^\alpha - kp^{\alpha+1} + kp \\ &= p^\alpha + kp(1-p^\alpha). \end{aligned}$$

But $n > kp$, hence $p^\alpha + kp(1-p^\alpha) > kp$ i.e. $p^\alpha - kp^{\alpha+1} > 0$. This is impossible since $p > 1$ and $k > 0$.

Case (ii). $a > 1$:

Substituting $n = ap^{\beta-\alpha}$ in (ii) gives

$$ap^\beta - ap^{\beta-\alpha} + p^\alpha - kp^{\alpha+1} + kp = p^\beta,$$

and hence $p^\beta(a-1) + p^\alpha = ap^{\beta-\alpha} + kp^{\alpha+1} - kp$.

But $kp \leqq \sqrt{n}$, hence $kp \leqq \sqrt{ap^{\beta-\alpha}} = \sqrt{a}\,p^{\frac{\beta-\alpha}{2}}$.

Thus $p^\beta(a-1) + p^\alpha \leqq ap^{\beta-\alpha} + \sqrt{a}\,p^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(p^\alpha - 1)$,

i.e.

$$ap^\beta - p^\beta + p^\alpha \leqq ap^{\beta-\alpha} + \sqrt{a}\,p^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(p^\alpha - 1),$$

$$a(p^\beta - p^{\beta-\alpha}) - \sqrt{a}\,p^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(p^\alpha - 1) + p^{\beta-\alpha}(p^\alpha - 1) \leqq 0,$$

i.e.

$$a p^{\beta-\alpha}(p^\alpha - 1) - \sqrt{a}\, p^{\frac{\beta-\alpha}{2}}(p^\alpha - 1) + p^{\beta-\alpha}(p^\alpha - 1) \leqq 0.$$

But $p^\alpha - 1 > 0$, so that

$$\text{(i)} \qquad a p^{\beta-\alpha} - \sqrt{a}\, p^{\frac{\beta-\alpha}{2}} + p^{\beta-\alpha} \leqq 0.$$

Put $X^2 = a p^{\beta-\alpha}$ in (i) where $X > 0$; then

$$X^2 - X - \frac{1}{a} X^2 \leqq 0,$$

whence

$$X - 1 - \frac{1}{a} X \leqq 0,$$

i.e.

$$X\left(1 - \frac{1}{a}\right) \leqq 1.$$

Hence

$$\text{(ii)} \qquad X \leqq \frac{a}{a-1}.$$

Putting $a = 2$ in (ii) gives $X \leqq 2$, $X^2 \leqq 4$ and hence $p^{\beta-\alpha} \leqq 2$. But $\beta > \alpha$, and so $p^{\beta-\alpha} > 1$. Thus $p^{\beta-\alpha} = 2$ and $n = a p^{\beta-\alpha} = 4$.

If, however, $a \geqq 3$ then it follows from (i) that $X \geqq 3$, and from (ii) that $X \leqq \frac{3}{2}$ which is impossible. Hence, unless $n = 4$, all points are centres.

The proof of Theorem 2 is now complete except for the case $n = 4$. There is only one plane of this order, and, as this is known to be desarguesian, our last problem is to discuss its collineation groups.

Remark 2.7. If a point of $\mathfrak{P}$ is not the centre of an elation[1]), then $n = 4$, the points which are not centres form an oval, the lines which are not axes form the dual of an oval and $\Pi \cong A_6$ or S_6.

Proof. As before, kp is the number of non-centres on an axis, $kp = 2$ or 4. Suppose $kp = 4$. Then the number of non-axes through a centre is $\frac{n}{kp} = 1$. But, by the dual of Result 5, this is impossible. Hence we will assume $kp = 2$.

The number of centres is 15. Hence $|\Pi| = 15.\ |\Pi_C|$ where Π_C is the subgroup of Π fixing a centre, C. Π is transitive on the axes through C and on the non axes through C. Hence $|\Pi| = 15.3.2.\ |\Pi_{C,l,\bar{l}}|$ where $\Pi_{C,l,\bar{l}}$ is the subgroup fixing a centre, C, an axis, l, through it and a non-axis, $\bar{l}$, through it. $\Pi_{C,l,\bar{l}}$ contains three elations of order 2 with centre C and different axes. These, together with the indentity, are a four group. Hence $|\Pi_{C,l,\bar{l}}| = 4h$ and $|\Pi| = 360\, h$ (where h is some constant).

There are six non-centres and no three are collinear i.e. the non-centres form an oval. Since Π is transitive on the non-centres, Π maps the oval onto itself.

Suppose there exists a collineation $\pi \in \Pi$ such that π fixes the oval pointwise. Four points of the oval form a non degenerate quadrangle, so π fixes a 7 point

[1]) The proof that this situation actually occurs is found in § 5.

subplane of $\mathfrak{P}$. This subplane cannot contain any other point of the oval because a 7 point plane does not contain five points such that no three are collinear. Hence, since this subplane is maximal in the plane of order four, Π must fix the whole plane and must be faithful on the oval. But the only groups of order $360\,h$ faithful on six letters are A_6, when the order is 360, and S_6, when the order is 720.

This proves Remark 2.7. and completes the proof of Theorem 2.

§ 5. Collineation groups of $\mathfrak{P}_4$

In this section we prove four remarks which completely answer two questions posed by Theorem 2. They are; (i) Does $\mathfrak{P}_4$ have a collineation group isomorphic to A_6 or S_6?: and (ii) If $\Pi \cong A_6$ or S_6 is a collineation group of $\mathfrak{P}_4$, is every flag of $\mathfrak{P}_4$ left fixed by an elation in Π?

The fact that A_6 can be represented on $\mathfrak{P}_4$ was shown by HARTLEY [4].

Remark 3.1. Given any oval of $\mathfrak{P}$, there exists a collineation group $\Pi \cong S_6$ mapping the oval onto itself.

Proof. Let Π be the collineation group fixing an oval (such a group certainly exists, though it may consist of the identity alone).

Let A, B, C, D, E, F be the points of the oval. $\mathfrak{P}$ is desarguesian and can be coordinatized by elements of $GF(4)$. Choose $A=(1, 0, 0)$, $B=(0, 1, 0)$, $C=(0, 0, 1)$, $D=(1, 1, 1)$. The two remaining points of the oval must be $(\omega, \omega^2, 1)$ and $(\omega^2, \omega, 1)$. $BCDEF$ is therefore the conic $yz=x^2$ and A is its nucleus[2]).

There is only one non-trivial automorphism, α, of $GF(4)$. α maps $0\to 0$, $1\to 1$, $\omega\to\omega^2$, $\omega^2\to\omega$, i.e. α fixes A, B, C, D and interchanges E and F. We can choose any four points of the oval as our triangle of reference and unit point. So, for any four points of the oval, there exists an element of Π fixing those four points and interchanging the other other two.

Hence $\Pi \cong S_6$.

Corollary. There exists a collineation group $\cong A_6$ which maps an oval onto itself.

Remark 3.2. Every collineation group $\Pi \cong A_6$ fixes an oval and contains only linear transformations.

Proof. The derived subgroup of Π consists only of linear transformations (since the automorphism group of a finite field is cyclic). Π is simple and non-abelian. Hence Π coincides with its derived group and Π contains only linear transformations. A similar argument shows that Π must contain only transformations whose determinant is one i.e. Π is a subgroup of the little

[2]) The relationship between ovals and conics in desarguesian planes is discussed by SEGRE [8].

projective group, L, of $\mathfrak{P}$.

$$|\Pi| = 360 \qquad |L| = 21.20.16.3$$
$$|\Pi| = 360 \qquad |L_p| = 20.16.3. \qquad \text{But } 360 \nmid 20.16.3.$$

so Π cannot fix a point of $\mathfrak{P}$.

The smallest orbit of Π must have length at least six because A_6 cannot be faithfully represented on less than six letters. Hence |smallest orbit of Π| = 6, 7, 8, 9, 10 or 21. But $7 \nmid 360$, hence |smallest orbit of Π| $\neq 7, \neq 21$. If |smallest orbit of Π| = 8 or 10, the remaining points must form one orbit of length 13 or 11 respectively. But neither of these numbers divides 360, so now we have only to eliminate 9.

Let P be a point of an orbit of length 9. $|\Pi_P| = 40$, $|L_P| = 20.16.3$. Π_P is a permutation of the eight remaining points of this orbit. Hence |smallest orbit of Π_P| = 2, 3, 4, 8. Now $3 \nmid 40$, so |smallest orbit of Π_P| = 2, 4, 8. Let Q be a point of the smallest orbit of Π_P. If |smallest orbit of Π_P| = 8, $|\Pi_{PQ}| = 5$ and $|L_{PQ}| = 16.3$. But $5 \nmid 48$ so |smallest orbit of Π_P| = 8. Similarly it is impossible for |the smallest orbit of Π_P| to be 2 or 4 and there can be no orbit of length 9.

Hence |smallest orbit of Π| = 6. Suppose P, Q, R are 3 collinear points of this orbit. Π_{PQ} is certainly transitive on the remaining points, so all six points must be collinear. This is impossible. Hence no 3 points of the orbit are collinear i.e. the orbit is an oval.

Remarks 3.3. If $\Pi \cong A_6$ then every flag of $\mathfrak{P}$ is left fixed by an elation.

Proof. Let $\mathfrak{P}'$ be the set of points of the plane not on the oval fixed by Π. Since we have shown that Π cannot have an orbit of length 7 or 9, Π must split the points of $\mathfrak{P}$ into 2 transitive classes.
$|\Pi| = 360$ so Π contains an element of order 2. This must either be an elation or fix a 7 point plane (see Result 6). But Π contains only linear transformations and cannot have an element fixing a subplane. Hence Π contains an elation.

Suppose a point A of the oval is the centre of an elation with axis l. Let B be another point of the oval $B \notin l$. Then $B\alpha \neq B$ but $B\alpha \in AB$ i.e. $B\alpha$ is not in the oval. This is impossible, so there exists a point, $P \in \mathfrak{P}'$, which is the centre of an elation. Π is transitive on the points of $\mathfrak{P}'$, so every point of $\mathfrak{P}'$ is the centre of an elation.

Every flag of $\mathfrak{P}$ with a point of $\mathfrak{P}'$ is fixed by the elation with that point as centre. Let A be a point of the oval, let l be any line through A and l cut the oval again at B $|\Pi_{A,B}| = 12$. Hence $\Pi_{A,B}$ contains an elation fixing the flag (A, l). This proves Remark 3.3.

Remark 3.4. If $\Pi \cong S_6$ then Π fixes an oval and every flag of $\mathfrak{P}$ is left fixed by an elation.

Proof. Let Π' be the subgroup of Π isomorphic to A_6. Π' is normal in Π and fixes a unique oval. Hence Π fixes the oval fixed by Π'. $\Pi' < \Pi$, so every flag of $\mathfrak{P}$ is left fixed by an elation in Π.

Finally, we observe that if every flag is left fixed by an elation and if Π is generated by these elations, then $\Pi \cong A_6$.

I wish to express my gratitude to Dr. A. WAGNER for suggesting the problem and for his valuable assistance with this paper.

References

[1] BAER, R.: Projectivities with fixed points on everyline of the plane. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 273—286 (1946).

[2] DEMBOWSKI, H. P.: Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Math. Z. **69**, 59—89 (1958).

[3] GLEASON, A. M.: Finite Fano planes. Amer. J. Math. **78**, 797—807 (1956).

[4] HARTLEY, R. W.: Determination of the ternary collineation groups whose coefficients lie in $GF(2^n)$. Annals of Math. **27**, 140—158 (1925/26).

[5] HUGHES, D. R.: Collineations and generalized incidence matrices. Trans. Amer. Math. Soc. **86**, 284—296 (1957).

[6] PARKER, E. T.: On collineations of symmetric designs. Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 350—351 (1957).

[7] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Heidelberg 1955.

[8] SEGRE, B.: Ovals in a finite projective plane. Canad. J. Math. **7**, 414—416 (1955).

[9] — Sulle geometrie proiettive finite. Convegno internazionale Palermo 46—61 (1957).

[10] WAGNER, A.: On perspectivities of finite projective planes. Math. Z. **71**, 113—123 (1959).

Mathematics Department, Imperial College, London

(Received March 9, 1963)

HOOLEY, C.
Math. Zeitschr. 82, 259–266 (1963)

On the representations of a number as the sum of two cubes

By
CHRISTOPHER HOOLEY

1. Introduction

The sum

$$S(x) = \sum_{n \leqq x} r^2(n),$$

where $r(n)$ is the number of representations of the positive integer n as the sum of two non-negative cubes, is familiar in connection with WARING's problem for cubes. The treatment of the minor arcs in the application of the circle method to this problem often depends on the estimate $S(x) = O(x^{\frac{2}{3}+\varepsilon})$, which holds in virtue of $r(n) = O\{d(n)\} = O(n^{\varepsilon})$, where $d(n)$ is the number of divisors of n. The behaviour of the sum $S(x)$ is also related to the problem of determining the distribution of the numbers that are sums of two cubes. Some results on the latter problem are already known. Let $N(x)$ be the number of positive integers not exceeding x that can be expressed as a sum of two non-negative cubes, where each such integer is counted only once regardless of multiplicity of representation. Then results due to ERDÖS and MAHLER[1]), [2]) imply that there is a positive constant C such that

$$N(x) > C x^{\frac{3}{5}}.$$

The main purpose of this paper is to obtain an asymptotic formula for the sum $S(x)$. As a corollary we prove an asymptotic formula for $N(x)$; this implies that "almost always" the representation of a number as a sum of two non-negative cubes is essentially unique.

2. Notation

The following notation will be adopted throughout.

The letters $d, f, g, k, m, n, r, \varrho$ are positive integers: $l, m, \lambda, \mu, s, \sigma, \omega$ are non-negative integers: u, v are integers: p is a (positive) prime number: y is a real number not less than 1; x is a continuous variable, which is to be regarded as tending to infinity.

[1]) ERDÖS, P., and K. MAHLER: On the number of integers which can be represented by a binary form. J. London Math. Soc. **13**, 134–139 (1938).

[2]) ERDÖS, P.: On the integers of the form $x^k + y^k$. J. London Math. Soc. **14**, 250–254 (1939).

The equation $\varphi=O(|\psi|)$ denotes an inequality of the form $|\varphi|\leqq C|\psi|$, true for all values of the variables consistent with stated conditions, where C is a positive absolute constant.

3. Preliminary decomposition of sum and estimation of Σ_1

We have

$$\left\{\begin{aligned}\sum_{n\leqq x} r^2(n) &= \sum_{0<l^3+m^3=\lambda^3+\mu^3\leqq x} 1 = \sum_{\substack{0<l^3+m^3=\lambda^3+\mu^3\leqq x\\ l=\lambda,\,\mu;\ m=\mu,\,\lambda}} 1 + \sum_{\substack{0<l^3+m^3=\lambda^3+\mu^3\leqq x\\ l,\,m\neq\lambda,\,\mu}} 1 \\ &= 2\sum_{0<l^3+m^3\leqq x} 1 - \sum_{0<l^3\leqq x} 1 + \sum_{\substack{0<l^3+m^3=\lambda^3+\mu^3\leqq x\\ l,\,m\neq\lambda,\,\mu}} 1 \\ &= 2\Sigma_1 + O(x^{\frac{1}{3}}) + \Sigma_2, \text{ say.}\end{aligned}\right. \tag{1}$$

We first estimate Σ_1. The remainder of the paper is almost entirely devoted to estimating Σ_2, which, as we shall see, is of a lower order of magnitude than Σ_1.

Let $A(a)$ be the area of the region defined in terms of rectangular cartesian coordinates (X, Y) by the inequalities

$$X^3+Y^3\leqq a^3, \qquad X\geqq 0, \qquad Y\geqq 0.$$

Then standard lattice point problem methods give

$$A(x^{\frac{1}{3}})-1\leqq \Sigma_1\leqq A(x^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}). \tag{2}$$

Now

$$\left\{\begin{aligned}A(a) &= \int_0^a (a^3-t^3)^{\frac{1}{3}}\,dt = \frac{1}{3}a^2\int_0^1 z^{-\frac{2}{3}}(1-z)^{\frac{1}{3}}\,dz \\ &= \frac{1}{3}a^2 B\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{6}a^2\frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

We deduce from (1), (2), and (3)

$$\sum_{n\leqq x} r^2(n) = 2Ax^{\frac{2}{3}} + \Sigma_2 + O(x^{\frac{1}{3}}), \tag{4}$$

where $A=\frac{1}{6}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}$. We observe also from the preceding argument that

$$\sum_{n\leqq x} r(n) = Ax^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{5}$$

We now undertake a preliminary decomposition of Σ_2. The conditions of summation in Σ_2 imply that

$$(l+m)[(l+m)^2+3(l-m)^2] = (\lambda+\mu)[(\lambda+\mu)^2+3(\lambda-\mu)^2],$$

where $l+m$, $\lambda+\mu$ are unequal and non-zero. Hence, in accordance with the notation already defined, we have

$$(6)\qquad \begin{cases} \Sigma_2 = O\left(\sum\limits_{\substack{r(r^2+3s^2)=\varrho(\varrho^2+3\sigma^2)\\ 0\leqq s\leqq r<\varrho<2x^{\frac{1}{3}}}} 1\right) \\ \quad = O\left(\sum\limits_{\substack{3rs^2-3\varrho\sigma^2=\varrho^3-r^3>0\\ r,\varrho,s,\sigma,<2x^{\frac{1}{3}}\\ (r,\varrho)\geqq\log^7 x}} 1\right)+O\left(\sum\limits_{\substack{r(r^2+3s^2)=\varrho(\varrho^2+3\sigma^2)\\ 0\leqq s\leqq r<\varrho<2x^{\frac{1}{3}}\\ (r,\varrho)<\log^7 x}} 1\right) \\ \quad = O(\Sigma_3)+O(\Sigma_4), \text{ say.} \end{cases}$$

4. Estimation of Σ_3

We have

$$(7)\qquad \begin{cases} \Sigma_3 = \sum\limits_{k\geqq\log^7 x}\ \sum\limits_{\substack{(r,\varrho)=k\\ r<\varrho<2x^{\frac{1}{3}}}}\ \sum\limits_{\substack{3rs^2-3\varrho\sigma^2=\varrho^3-r^3\\ s,\sigma<2x^{\frac{1}{3}}}} 1 \\ = \sum\limits_{k\geqq\log^7 x}\ \sum\limits_{\substack{(r',\varrho')=1\\ r'<\varrho'<2x^{\frac{1}{3}}/k}}\ \sum\limits_{\substack{3r's^2-3\varrho'\sigma^2=k^2(\varrho'^3-r'^3)\\ s,\sigma<2x^{\frac{1}{3}}}} 1 = \sum\limits_{k\geqq\log^7 x}\ \sum\limits_{\substack{(r',\varrho')=1\\ r'<\varrho'<2x^{\frac{1}{3}}/k}} \delta_{r',\varrho'}[k^2(\varrho'^3-r'^3)], \end{cases}$$

where $\delta_{r',\varrho'}(n)=\delta_{r',\varrho'}(n,x)$ is the number of representations of n by the indefinite binary quadratic form $3r's^2-3\varrho'\sigma^2$ under the restriction $s,\sigma<2x^{\frac{1}{3}}$. We now estimate $\delta_{r',\varrho'}(n)$.

Let $r'=r''f^2$, $\varrho'=\varrho''g^2$, where r'', ϱ'' are square-free. Then $\delta_{r',\varrho'}(n)$ does not exceed $\Delta_{r'',\varrho''}(m)$, the number of representations of $m=n/3$ by the form $\varphi(u,v)=r''u^2-\varrho''v^2$, where $0\leqq u,\ v<2x^{\frac{1}{3}}[\max(f,g)]<x$. We observe that the determinant $D=r''\varrho''$ of $\varphi(u,v)$ is square-free, since $(r'',\varrho'')=1$. If $D=1$, then $r''=\varrho''=1$, and we have $m=u^2-v^2=(u-v)(u+v)$, from which it is clear that $\Delta_{1,1}(m)=O[d(m)]$. We deal with the case $D>1$ as follows.

A classical result[3]) in the theory of quadratic forms states that the number of sets of primitive representations of m by $\varphi(u,v)$ does not exceed the number of roots of the congruence $\Omega^2\equiv D \pmod m$. Since D is square-free, it is easily verified that the congruence has $O[d'(m)]$ roots, where $d'(m)$ denotes the number of square-free divisors of m. Let $\psi_\Omega(m)$ be the number of primitive representations of m by $\varphi(u,v)$ for which $0\leqq u,\ v<x$ in the set appertaining to Ω. If $\psi_\Omega(m)>0$, let u_1, v_1 be the values of u, v that correspond to some definite representation that contributes to $\psi_\Omega(m)$. Then all other primitive representations of m by $\varphi(u,v)$ in the set (without restriction on u and v) are given by the formula[4])

$$u=Tu_1+\varrho''Uv_1, \qquad v=Tv_1+r''Uu_1,$$

[3]) Gauss, C. F.: Disquisitiones Arithmeticae, Chap. 5. There is an excellent summary by H. J. S. Smith in his Report on the Theory of Numbers, Part III; cf. Smith, H. J. S.: Collected Works, Vol. 1.

[4]) Ibid.

where T, U is the general solution of the Pellian equation

$$T^2 - D U^2 = 1; \qquad (U \neq 0). \tag{8}$$

Hence $|u_1 v - v_1 u| = |U(r'' u_1^2 - \varrho'' v_1^2)| \geqq |U|$, and so, if $0 \leqq u, v < x$, we have

$$|U| < x^2. \tag{9}$$

Since D is not a perfect square, T, U are given by

$$T + U\sqrt{D} = \pm (T_1 \pm U_1 \sqrt{D})^q,$$

where T_1, U_1 is the least positive solution of (8). Hence the number of solutions of (8) satisfying (9) is $O(\log x)$, and thus

$$\psi_\Omega(m) = O(\log x).$$

Therefore the total number of primitive representations of m by $\varphi(u, v)$ with $0 \leqq u, v < x$ is $O[d'(m) \log x]$. The derived representations may be considered similarly, and it follows that

$$\Delta_{r'', \varrho''}(m) = O\Big(\log x \sum_{d^2 k = m} d'(k)\Big) = O\big(d(m) \log x\big).$$

Hence in all cases

$$\delta_{r', \varrho'}(n) = O[d(n) \log x]. \tag{10}$$

The equation

$$\sum_{n \leqq y} d^q(n) = O(y \log^{2^q - 1} 2y), \tag{11}$$

valid for an absolutely bounded range of real q, will be required[5]).

We have, by (7) and (10),

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma_3 &= O\Big(\sum_{k \geqq \log^7 x} \sum_{r < \varrho < 2 x^{\frac{1}{3}}/k} \log x \cdot d[k^2(\varrho^3 - r^3)] \Big) \\ &= O\Big(\log x \sum_{k \geqq \log^7 x} d^2(k) \sum_{r < \varrho < 2 x^{\frac{1}{3}}/k} d(\varrho - r)\, d(\varrho^2 + \varrho r + r^2)\Big) \\ &= O\Big(\log x \sum_{k \geqq \log^7 x} d^2(k)\, \Sigma_{5,k}\Big), \quad \text{say,} \end{aligned} \right. \tag{12}$$

and, by the Cauchy-Schwarz inequality,

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma_{5,k}^2 &= O\Big\{\Big(\sum_{r < \varrho < 2 x^{\frac{1}{3}}/k} d^2(\varrho - r)\Big)\Big(\sum_{r < \varrho < 2 x^{\frac{1}{3}}/k} d^2(\varrho^2 + \varrho r + r^2)\Big)\Big\} \\ &= O\{(\Sigma_{6,k})\,(\Sigma_{7,k})\}, \text{ say.} \end{aligned} \right. \tag{13}$$

Now

$$\Sigma_{6,k} = O\Big(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{k} \sum_{n < 2 x^{\frac{1}{3}}/k} d^2(n)\Big) = O\Big(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{k^2} \log^3 x\Big), \tag{14}$$

---

[5]) WILSON, B. M.: Proofs of some formulae enunciated by RAMANUJAN. Proc. London Math. Soc. (2) **21**, 235–255 (1922).

by (11). Also, since the number of representations of n by the form $\varrho^2+\varrho r+r^2$ is $O[d(n)]$, we have

$$\Sigma_{7,k}=O\Big(\sum_{n<12x^{\frac{2}{3}}/k^2} d^3(n)\Big)=O\Big(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{k^2}\log^7 x\Big), \tag{15}$$

by (11). Hence, by (13), (14), and (15),

$$\Sigma_{5,k}=O\Big(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{k^2}\log^5 x\Big),$$

and, by this and (12), we have

$$\Sigma_3=O\Big(x^{\frac{2}{3}}\log^6 x\sum_{k\geqq\log^7 x}\frac{d^2(k)}{k^2}\Big)=O\Big(x^{\frac{2}{3}}\log^6 x\,\frac{(\log\log x)^3}{\log^7 x}\Big).$$

Therefore

$$\Sigma_3=O\Big(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\log^{\frac{1}{3}} x}\Big). \tag{16}$$

5. Estimation of Σ_4

We have

$$\begin{cases}\Sigma_4=\displaystyle\sum_{k<\log^7 x}\sum_{\substack{(r,\varrho)=k\\ r<\varrho<2x^{\frac{1}{3}}}}\sum_{\substack{r(r^2+3s^2)=\varrho(\varrho^2+3\sigma^2)\\ s\leqq r}}1\\ \quad=\displaystyle\sum_{k<\log^7 x}\sum_{\substack{(r',\varrho')=1\\ r'<\varrho'<2x^{\frac{1}{3}}/k}}\sum_{\substack{r'(k^2r'^2+3s^2)=\varrho'(k^2\varrho'^2+3\sigma^2)\\ s\leqq kr'}}1.\end{cases} \tag{17}$$

Let the subscript 1 attached to appropriate letters indicate that these letters denote either 1 or positive integers composed entirely of prime factors p such that either $p=3$ or $p\equiv 1 \pmod 6$; let the subscript 3 indicate similarly either 1 or positive integers none of whose prime factors p satisfy $p=3$ or $p\equiv 1 \pmod 6$; let also R be the set of all positive integers of the form $n_1 d_3^2$, and let the members of R be indicated by the subscript 2. Thus all positive numbers represented by the quadratic form $k^2u^2+3v^2$ must belong to R. Hence the conditions of summation in (17) imply a relationship of the type $r'f_2=\varrho' g_2$. Since $f_2/(f_2,g_2)$, $g_2/(f_2,g_2)$ belong to R, we may write $r'f_2'=\varrho' g_2'$, where $f_2'=f_2/(f_2,g_2)$, $g_2'=g_2/(f_2,g_2)$. Since $(r',\varrho')=(f_2',g_2')=1$, we deduce that $r'=g_2'$, $\varrho'=f_2'$, and hence that it is legitimate to write r', ϱ' as r_2, ϱ_2, respectively. Also $r_2(k^2r_2^2+3s^2)=\varrho_2(k^2\varrho_2^2+3\sigma^2)$ implies that $k^2r_2^2+3s^2$ is of the torm $l\,\varrho_2$, where k, r_2, s, and ϱ_2 determine σ uniquely. Hence

$$\begin{aligned}\Sigma_4&=O\Big(\sum_{k<\log^7 x}\sum_{\substack{(r_2,\varrho_2)=1\\ r_2<\varrho_2<2x^{\frac{1}{3}}/k}}\sum_{\substack{k^2r_2^2+3s^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\varrho_2)\\ s\leqq kr_2}}1\Big)\\ &=O\Big(\sum_{k<\log^7 x}\sum_{\varrho_2<2x^{\frac{1}{3}}/k}\sum_{\substack{k^2r_2^2+3s^2\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\varrho_2)\\ r_2<2x^{\frac{1}{3}}/k;\,(r_2,\varrho_2)=1;\,s<k\varrho_2}}1\Big).\end{aligned}$$

Since, in the innermost sum, the condition $s<k\varrho_2$ restricts s to k complete residue systems (modulo ϱ_2) and $(r_2, \varrho_2)=1$, we may replace s by $r_2\omega$, where $\omega<k\varrho_2$. The congruence is then equivalent to $k^2+3\omega^2\equiv 0 \pmod{\varrho_2}$. Hence the innermost sum equals

$$k\,\tau_k(\varrho_2) \sum_{\substack{r_2<2x^{\frac{1}{3}}/k \\ (r_2,\varrho_2)=1}} 1,$$

where $\tau_k(\varrho_2)$ is the number of roots of $k^2+3\omega^2\equiv 0 \pmod{\varrho_2}$. Therefore

$$\Sigma_4 = O\Big(\sum_{k<\log^7 x} k\,\pi_2(2x^{\frac{1}{3}}/k) \sum_{\varrho_2<2x^{\frac{1}{3}}/k} \tau_k(\varrho_2)\Big), \tag{18}$$

where $\pi_2(y)$ denotes the number of integers in R not exceeding y.

An upper bound is required for the inner sum in (18). A variety of familiar methods are available for the estimation; since we do not require a particularly precise result, we adopt as short a procedure as possible. We note that

(i) $\tau_k(n)$ is a multiplicative function of n, i.e., if $(u, v)=1$, then $\tau_k(uv)=\tau_k(u)\,\tau_k(v)$;

(ii) if $(n, 6k)=1$, $\tau_k(n)$ does not exceed the number of primitive representations of n by the form u^2+3v^2.[6])

(iii) $\tau_k(n)=O\{(k^2, n)^{\frac{1}{2}}d(n)\}=O\{n^{\frac{1}{2}}d(n)\}$.

Property (i) follows from the elementary theory of congruences. The condition $(n, 6k)=1$ in (ii) implies that $\tau_k(n)$ is equal to the number of roots of the congruence $\Omega^2\equiv -3 \pmod{n}$. Hence here $\tau_k(n)$ is equal to the number of sets of primitive representations of n by the representative system u^2+3v^2, $2u^2+2uv+2v^2$ of quadratic forms of determinant -3 (see the discussion on quadratic forms in Section 4). Since n is odd, there are no sets corresponding to the improperly primitive form, and property (ii) must thus hold. Property (iii) may be proved by considering the case $n=p^\alpha$ first, and then using (i).[7])

Let n' denote, generally, a positive integer prime to $6k$, and m' a positive integer (possibly 1) such that $p\,|\,m'$ implies $p\,|\,6k$. Then, since any positive integer n can be expressed uniquely in the form $m'n'$, we have

$$\sum_{n<y}\tau_k(n) = \sum_{m'n'<y}\tau_k(m')\,\tau_k(n') = \sum_{m'<y}\tau_k(m') \sum_{n'<y/m'}\tau_k(n')$$
$$= O\Big(\sum_{m'<y}\tau_k(m') \sum_{u^2+3v^2<y/m'} 1\Big)$$

[6]) In fact $\tau_k(n)$ equals half the number of representations, but the weaker result stated in (ii) is all that is required here.

[7]) Property (iii) is essentially implied by the results in Section 4 of the author's paper. On the representation of a number as the sum of a square and a product. Math. Z. **69**, 211—227 (1958).

$$= O\left(y \sum_{m'<y} \frac{\tau_k(m')}{m'}\right)$$

$$= O\left(y \sum_{m'<y} \frac{d(m')}{m'^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= O\left\{y \prod_{p|6k} \left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}\right\}.$$

Since

$$\left(1 - \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}\right)^2 > \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{4}}}\right)^{-1}$$

for $p > 81$, we have

$$\sum_{n<y} \tau_k(n) = O\left\{y \prod_{p|6k} \left(1 + \frac{1}{p^{\frac{1}{4}}}\right)\right\} = O\{y\, \sigma_{-\frac{1}{4}}(k)\}, \tag{19}$$

where $\sigma_{-\frac{1}{4}}(k) = \sum_{d|k} d^{-\frac{1}{4}}$.

Furthermore, if $\pi_1(y)$ denotes the number of integers of the form u_1 not exceeding y, then a simple application of either BRUN's or SELBERG's sieve method gives[8])

$$\pi_1(y) = O\left\{y \prod_{\substack{p<y^c \\ p\equiv 5 \pmod 6}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right\} = O\left(\frac{y}{\log^{\frac{1}{2}} 2y}\right).$$

Therefore

$$\begin{cases} \pi_2(y) = \sum\limits_{d_3 \leqq y^{\frac{1}{2}}} \pi_1(y/d_3^2) = O\left\{\sum\limits_{d \leqq y^{\frac{1}{2}}} \frac{y}{d^2} \log^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2y}{d^2}\right)\right\} \\ \qquad = O\left(\frac{y}{\log^{\frac{1}{2}} 2y}\right). \end{cases} \tag{20}$$

Substituting the results (19) and (20) in (18) we obtain

$$\Sigma_4 = O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\log^{\frac{1}{2}} x} \sum_{k<\log^7 x} \frac{\sigma_{-\frac{1}{4}}(k)}{k}\right) = O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}} \log\log x}{\log^{\frac{1}{2}} x}\right). \tag{21}$$

6. The final theorems

The first theorem follows at once from (4), (6), (16), and (21).

Theorem 1. *As* $x \to \infty$,

$$\sum_{n \leqq x} r^2(n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} x^{\frac{2}{3}} + O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}} \log\log x}{\log^{\frac{1}{2}} x}\right).$$

We now turn our attention to $N(x)$ (as defined in the introduction).

Since $r(n) > 0$ implies that $r(n) \geqq 2$, unless n is twice a perfect cube, we have

$$\begin{cases} N(x) \leqq \frac{1}{2} \sum\limits_{n \leqq x} r(n) + O(x^{\frac{1}{3}}) \\ \qquad = \frac{1}{2} A\, x^{\frac{2}{3}} + O(x^{\frac{1}{3}}), \text{ by (5).} \end{cases} \tag{22}$$

[8]) For an alternative method see LANDAU, E., Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, pp. 668–669.

Also, by the Cauchy-Schwarz inequality,

$$\Big(\sum_{n\leqq x} r(n)\Big)^2 \leqq N(x) \sum_{n\leqq x} r^2(n),$$

from which we have by Theorem 1 and (5)

$$N(x) \geqq \frac{1}{2} A\, x^{\frac{2}{3}} + O\Big(\frac{x^{\frac{2}{3}} \log\log x}{\log^{\frac{1}{2}} x}\Big). \tag{23}$$

The second theorem now follows from (22) and (23).

Theorem 2. *As* $x \to \infty$,

$$N(x) = \frac{1}{12} \cdot \frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}\, x^{\frac{2}{3}} + O\Big(\frac{x^{\frac{2}{3}} \log\log x}{\log^{\frac{1}{2}} x}\Big).$$

Department of Mathematics, Bristol University, England

(Received March 9, 1963)