Werk

Titel: Zur Theorie der Permutationsgruppen mit regulärer Untergruppe. I.

Autor: Tamaschke, Olaf

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0080|log46

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

TAMASCHKE, O.
Math. Zeitschr. 80, 328–354 (1963)

Zur Theorie der Permutationsgruppen mit regulärer Untergruppe*. I

Von
OLAF TAMASCHKE

Einleitung und Übersicht

Es sei $\mathfrak{G}$ eine endliche Permutationsgruppe auf einer Ziffernmenge Ω', und $\mathfrak{G}$ enthalte eine reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$. Dann läßt sich die Ziffernmenge Ω' in naheliegender Weise durch die Menge Ω der Elemente von $\mathfrak{H}$ ersetzen, und $\mathfrak{G}$ kann als Permutationsgruppe auf Ω aufgefaßt werden. Es sei E das Einheitselement von $\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{G}_E$ sei die Untergruppe der Elemente von $\mathfrak{G}$, die die „Ziffer" $E \in \Omega$ fest lassen. Dann gilt der Satz: *Sind* $\mathfrak{T}_1 = \{E\}, \mathfrak{T}_2, \ldots, \mathfrak{T}_r$ *die Transitivitätsgebiete von* $\mathfrak{G}_E$ *auf* Ω, *so bilden die Elemente* $\tau_1 = E$, $\tau_i = \sum_{H \in \mathfrak{T}_i} H$ $(i = 2, \ldots, r)$ *eine Basis einer Teilalgebra* $R(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_E)$ *der Gruppenalgebra* H *von* $\mathfrak{H}$ (WIELANDT [8] und [9, 24.1]). Dabei ist R ein kommutativer Ring mit Einselement, und H ist die Gruppenalgebra von $\mathfrak{H}$ über R. Die Algebra $R(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_E)$ heißt nach WIELANDT [9, § 21] der *Transitivitätsmodul* von $\mathfrak{G}_E$ über $\mathfrak{H}$.

Dieser wichtige Satz, dessen Entdeckung auf I. SCHUR [5] zurückgeht, bildet eine Grundlage für die Untersuchung endlicher Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$ mit regulärer Untergruppe $\mathfrak{H}$. Mit seiner Hilfe können Eigenschaften von $\mathfrak{G}$ allein durch die Betrachtung der Gruppe $\mathfrak{H}$ ermittelt werden. Genauer gesagt: Man untersucht eine Klasse von Teilalgebren der Gruppenalgebra H von $\mathfrak{H}$, die alle Transitivitätsmoduln $R(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_E)$ enthält, nämlich die von WIELANDT ([8] und [9, § 23]) eingeführten *S-Ringe* über $\mathfrak{H}$. Aus der Struktur der vorhandenen S-Ringe über $\mathfrak{H}$ lassen sich Rückschlüsse ziehen auf die Eigenschaften der Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$, die eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe reguläre Untergruppe besitzen. Wir führen als Beispiel die Gruppen $\mathfrak{H}$ an mit der Eigenschaft (B): *Jeder S-Ring* T *über* $\mathfrak{H}$ *mit* $E \in \mathsf{T}$ *und* $\mathsf{T} \neq RE \oplus R\left(\sum_{E \neq H \in \mathfrak{H}} H\right)$ *enthält einen S-Ring* T' *über einer eigentlichen Untergruppe* $\mathfrak{H}'$ *von* $\mathfrak{H}$. Hat die Gruppe $\mathfrak{H}$ die Eigenschaft (B), so ist jede Permutationsgruppe $\mathfrak{G}$, die eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe reguläre Untergruppe besitzt, entweder imprimitiv oder zweifach transitiv [9, 24.13 und § 25]. Bei der Untersuchung der S-Ringe über einer Gruppe $\mathfrak{H}$ leistet der ebenfalls von WIELANDT [9, 21.5] geschaffene Begriff des *S-Moduls* gute Dienste.

Wir beschäftigen uns hier mit den S-Moduln und S-Ringen über einer beliebigen endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$, die im Zentrum Z der Gruppenalgebra H

---

* Von der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Eberhard-Karls-Universität in Tübingen als Habilitationsschrift angenommen.

von $\mathfrak{H}$ über dem Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen liegen. Wir nennen sie kurz *zentrale S-Moduln* und *zentrale S-Ringe*. Die hier entwickelte Theorie der zentralen S-Ringe liefert Aussagen über die Permutationsgruppen $\mathfrak{G}$, die eine reguläre Untergruppe $\mathfrak{H}$ besitzen, und deren Transitivitätsmodul $\boldsymbol{C}(\mathfrak{H}, \mathfrak{G}_E)$ ein zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist (Teil II, Abschnitt 7 dieser Arbeit).

Sind $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ die Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{H}$, so bilden die Klassensummen $\varkappa_\alpha = \sum_{K \in \mathfrak{K}_\alpha} K$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ eine Basis der Algebra Z. Auf der anderen Seite bilden die irreduziblen Charaktere χ_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, n)$ von $\mathfrak{H}$ eine Basis einer Algebra $\mathsf{Z}^\#$ über $\boldsymbol{C}$. Wir führen den Begriff des S-Moduls in $\mathsf{Z}^\#$ ein. Jedem zentralen S-Modul M über $\mathfrak{H}$ ordnen wir einen S-Modul $\mathsf{M}^\#$ in $\mathsf{Z}^\#$ zu, den wir den zu M *dualen S-Modul* nennen (Definition (1.1)). Jedem S-Modul N in $\mathsf{Z}^\#$ ordnen wir einen zentralen S-Modul $\mathsf{N}^\#$ über $\mathfrak{H}$ als dualen S-Modul zu (Definition (1.1$^\#$)). Auf diese Weise gelangen wir durch zweimaliges Dualisieren von einem zentralen S-Modul M über $\mathfrak{H}$ zu einem zentralen S-Modul $\mathsf{M}^{\#\#}$ über $\mathfrak{H}$, der stets M enthält (1.5).

Diese Begriffsbildungen gestatten einfache Kriterien dafür, daß ein zentraler S-Modul über $\mathfrak{H}$ ein unitärer S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist, d.h. ein S-Ring, der das Einheitselement E von $\mathfrak{H}$ enthält [(1.13), (1.14) und (1.15)]. Kernstück des 1. Abschnittes sind die Sätze (1.9), (1.10) und (1.10$^\#$), die unter anderem zeigen, daß der duale S-Modul $\mathsf{T}^\#$ eines unitären zentralen S-Ringes T über $\mathfrak{H}$ ein unitärer S-Ring in $\mathsf{Z}^\#$ ist, daß $\mathsf{T}^{\#\#} = \mathsf{T}$ gilt, und daß $\mathsf{T} \to \mathsf{T}^\#$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller unitären zentralen S-Ringe über $\mathfrak{H}$ auf die Menge aller unitären S-Ringe in $\mathsf{Z}^\#$ ist.

Im 2. Abschnitt untersuchen wir die Beziehungen, die zwischen jedem unitären zentralen S-Ring T über $\mathfrak{H}$ und seinem dualen S-Ring $\mathsf{T}^\#$ bestehen. Primitivität und Rationalität von T übertragen sich auf $\mathsf{T}^\#$ [(2.2) und (2.7)]. Darüber hinaus existieren numerische Beziehungen zwischen T und $\mathsf{T}^\#$ (die Aussagen (2.10) ff.). Hervorzuheben ist der Zusammenhang zwischen den Anzahlen n_i der Elemente $H \in \mathfrak{H}$ in den einfachen Basisgrößen von T und den positiven ganz rationalen Zahlen $n_k^\#$, die den einfachen Basisgrößen von $\mathsf{T}^\#$ zugeordnet sind [(2.18) und (2.19)].

Begriffe und Bezeichnungen

Um im Verlaufe dieser Arbeit über bequeme Bezeichnungen zu verfügen, verallgemeinern wir die von WIELANDT ([8] und [9, Kapitel IV]) geprägten Begriffe des S-Moduls und des S-Ringes.

Es sei R ein kommutativer Ring mit Einselement 1 und A eine Algebra über R mit Einselement e, die eine endliche R-Basis $\alpha_1 = e, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ besitzt. Es sei $a \to \bar{a}$ ein Automorphismus von R mit $\bar{\bar{a}} = a$. Es existiere ein involutorischer Antiautomorphismus der Ringstruktur von A, das ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung von A auf sich:

$$\alpha \to \alpha^*,$$

$$\alpha^{**} = \alpha, \qquad (\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*, \qquad (\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^* \quad \textit{für alle } \alpha, \beta \in \mathsf{A},$$

der die folgenden Eigenschaften besitzt:

(I) $$(a\alpha)^* = \bar{a}\,\alpha^* \textit{ für alle } a \in R,\ \alpha \in \mathsf{A}.$$

(II) *Zu jedem* $j = 1, \ldots, n$ *gibt es ein* $j^* \in \{1, \ldots, n\}$ *so, daß* $\alpha_j^* = \alpha_{j^*}$ *gilt.*

In der von uns entwickelten Theorie ist die Abbildung $\alpha \to \alpha^*$ von der Art, daß aus $\mathsf{B}^* = \mathsf{B}$ für eine Teilalgebra B von A die Halbeinfachheit von B folgt.

Mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen wir die Menge der α_j $(j = 1, \ldots, n)$. Ein Element $\alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j \neq 0$ von A, $a_j \in R$ für $j = 1, \ldots, n$, heißt eine *einfache Größe* von A (bezüglich $\mathfrak{A}$), wenn $a_j = 0$ oder $a_j = 1$ gilt für alle $j = 1, \ldots, n$. Ist $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $\underline{\mathfrak{M}} = \sum_{\alpha_i \in \mathfrak{M}} \alpha_i$ die zugehörige einfache Größe von A.

Ein in A enthaltener R-Modul M heißt ein *S-Modul* über $\mathfrak{A}$, wenn es eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in paarweise elementefremde, nichtleere Teilmengen $\mathfrak{T}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ gibt, derart, daß die einfachen Größen $\tau_i = \underline{\mathfrak{T}_i}$ eine R-Basis von M bilden. Dann ist $\underline{\mathfrak{A}} = \sum_{i=1}^{r} \tau_i$ ein Element von M. Die τ_i heißen die *einfachen Basisgrößen* des S-Moduls M. Mit $n_i = |\mathfrak{T}_i|$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{T}_i$.

Eine Teilalgebra T von A heißt ein *S-Ring* über $\mathfrak{A}$, wenn T, als R-Modul aufgefaßt, ein S-Modul über $\mathfrak{A}$ ist, mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß mit jeder einfachen Basisgröße τ_i auch stets τ_i^* eine einfache Basisgröße von T ist. Die Algebra A ist ein S-Ring über $\mathfrak{A}$.

Ein S-Modul M (bzw. ein S-Ring T) über $\mathfrak{A}$ heißt *unitär*, wenn das Einselement $\alpha_1 = e$ von A in M (bzw. in T) liegt. Dann ist e eine einfache Basisgröße von M, die wir mit τ_1 bezeichnen werden.

Ein S-Ring T über $\mathfrak{A}$ heißt *imprimitiv*, wenn eine von T und Re verschiedene Teilalgebra P von T existiert mit der Eigenschaft, daß eine Teilmenge der einfachen Basisgrößen $\tau_1, \ldots, \tau_r$ von T eine Basis von P bildet und mit jedem Basiselement τ_i von P auch τ_i^* ein Basiselement von P ist. Im anderen Falle nennen wir den S-Ring T über $\mathfrak{A}$ *primitiv*. Man beachte: In diesen beiden Definitionen wird nicht verlangt, daß das Einselement $\alpha_1 = e$ von A in T liegt.

Es sei in dieser Arbeit stets $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe der Ordnung h. Mit H bezeichnen wir die Gruppenalgebra von $\mathfrak{H}$ über dem Körper $\boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen. Die Elemente von $\mathfrak{H}$ bilden eine Basis von H, die bei dem involutorischen Antiautomorphismus

$$\alpha = \sum_{H \in \mathfrak{H}} a_H H \to \alpha^* = \sum_{H \in \mathfrak{H}} \bar{a}_H H^{-1}$$

von H in sich übergeht ($a_H \in \boldsymbol{C}$, $\bar{a}_H$ ist konjugiert-komplex zu a_H). Auf diesen Antiautomorphismus (für den (I) gilt) und auf die Basis $\mathfrak{A} = \mathfrak{H}$ der Algebra $\mathsf{A} = \mathsf{H}$ wenden wir die Begriffe des S-Moduls und des S-Ringes an. Es existiert stets der S-Ring $\mathsf{T}_1 = \boldsymbol{C}\,\underline{\mathfrak{H}}$ über $\mathfrak{H}$, den wir den *trivialen* S-Ring über $\mathfrak{H}$ nennen.

Ein S-Ring T über $\mathfrak{H}$ ist ein primitiver S-Ring über $\mathfrak{H}$ genau dann, wenn es keine von der Einheitsgruppe $\langle E\rangle$ und von $\mathfrak{H}$ verschiedene Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{H}$ gibt, für die $\underline{\mathfrak{U}}\in\mathsf{T}$ gilt. Dabei braucht E nicht in T enthalten zu sein. Den trivialen S-Ring T_1 wollen wir jedoch nicht zu den primitiven S-Ringen rechnen. Wir definieren: T_1 sei imprimitiv. Wenn $\mathfrak{H}\neq\langle E\rangle$ ist, dann spannen die einfachen Größen $\tau_1=E$ und $\tau_2=\underline{\mathfrak{H}}-E$ einen primitiven S-Ring T_2 auf, den wir als den *trivialen primitiven* S-Ring über $\mathfrak{H}$ bezeichnen.

Ist T ein S-Ring über $\mathfrak{H}$ und τ_1 diejenige einfache Basisgröße von T, in der E auftritt, so existiert eine Untergruppe $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{H}$ mit $\tau_1=\underline{\mathfrak{L}}$, und $e=\frac{1}{|\mathfrak{L}|}\sum_{L\in\mathfrak{L}} L$ ist das Einselement von T [WIELANDT *8*, (1.6)]. Jeder primitive S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist daher unitär.

Ein S-Modul M (bzw. ein S-Ring T) über $\mathfrak{H}$ heiße *zentral*, wenn M (bzw. T) im Zentrum Z der Gruppenalgebra H von $\mathfrak{H}$ enthalten ist. Jedes $\mathfrak{T}_i$ ist dann die Vereinigung von Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{H}$. Die trivialen S-Ringe T_1 und T_2 sind zentrale S-Ringe über $\mathfrak{H}$. Jeder zentrale S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist kommutativ. Nicht jeder kommutative S-Ring ist zentral. Ist z.B. $\mathfrak{H}$ die von einer Involution A und einem Element B einer Ordnung größer als 2 erzeugte Diedergruppe: $A^2=E$, $ABA=B^{-1}$, $\mathfrak{B}=\langle B\rangle$, so ist der von den einfachen Basisgrößen

$$\tau_1=E,\qquad \tau_2=A,\qquad \tau_3=\underline{\mathfrak{B}}-E,\qquad \tau_4=A\,\underline{\mathfrak{B}}-A=\tau_2\tau_3=\tau_3\tau_2$$

erzeugte S-Ring kommutativ, aber nicht zentral.

Es seien $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ endliche Gruppen, T sei ein S-Ring über $\mathfrak{H}$ mit den einfachen Basisgrößen τ_i $(i=1,\ldots,r)$ und T' ein S-Ring über $\mathfrak{H}'$ mit den einfachen Basisgrößen τ_j' $(j=1,\ldots,r')$. Die S-Ringe T und T' heißen *S-isomorph*, wenn es einen Isomorphismus σ von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ gibt, derart, daß die $\tau_i^\sigma=\sum_{H\in\mathfrak{T}_i} H^\sigma$ $(i=1,\ldots,r)$ die einfachen Basisgrößen von T' sind. Es ist dann $r=r'$ und bei geeigneter Numerierung gilt $\tau_i^\sigma=\tau_i'$ $(i=1,\ldots,r)$.

Es sei, wie verabredet, $\mathfrak{H}$ eine endliche Gruppe der Ordnung h. Mit $\mathfrak{K}_1=\{E\}$, $\mathfrak{K}_2,\ldots,\mathfrak{K}_n$ bezeichnen wir stets die Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{H}$, mit $k_\alpha=|\mathfrak{K}_\alpha|$ die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{K}_\alpha$ und mit H_α einen Vertreter von $\mathfrak{K}_\alpha$. Die einfachen Größen $\varkappa_\alpha=\underline{\mathfrak{K}}_\alpha$ $(\alpha=1,\ldots,n)$ bilden eine Basis des Zentrums Z der Gruppenalgebra H über $\boldsymbol{C}$.

Es seien $\chi_1,\ldots,\chi_n$ die irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{H}$, χ_1 der identische Charakter von $\mathfrak{H}$ und $x_\varrho=\chi_\varrho(E)$ der Grad von χ_ϱ $(\varrho=1,\ldots,n)$. Weil jede der Abbildungen

$$\chi_\varrho\chi_\sigma\colon H\to(\chi_\varrho\chi_\sigma)(H)=\chi_\varrho(H)\,\chi_\sigma(H),\qquad H\in\mathfrak{H},$$

eine Linearkombination der χ_τ $(\tau=1,\ldots,n)$ (mit nicht negativen ganz rationalen Koeffizienten) ist, so bilden die χ_τ eine Basis einer Algebra über $\boldsymbol{C}$. Wir nennen sie die *Algebra der Charaktere* von $\mathfrak{H}$.

1. Der duale S-Modul eines zentralen S-Moduls

Wir stellen den grundlegenden Definitionen unserer Theorie einige einleitende Bemerkungen voran. Wir bezeichnen im folgenden stets mit $[\mathfrak{H}]$ die Menge der Klassensummen $\varkappa_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$. Es sei $\mathsf{Z}^\#$ die Algebra aller komplexwertigen Funktionen auf $[\mathfrak{H}]$. Weil jeder irreduzible Charakter von $\mathfrak{H}$ eine Klassenfunktion ist, so können wir jedem Charakter χ_ϱ umkehrbar eindeutig die Abbildung

$$\varkappa_\alpha \to \chi_\varrho(H_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, n,$$

aus $\mathsf{Z}^\#$ zuordnen $(\varrho = 1, \ldots, n)$. Diese Abbildungen bilden eine $\boldsymbol{C}$-Basis von $\mathsf{Z}^\#$. Da dem Produkt zweier Charaktere das Produkt der ihnen zugeordneten Funktionen auf $[\mathfrak{H}]$ entspricht, so können wir $\mathsf{Z}^\#$ mit der Algebra der Charaktere von $\mathfrak{H}$ identifizieren. Auch die Funktionen

$$\psi_\varrho : \varkappa_\alpha \to \psi_\varrho(\varkappa_\alpha) = x_\varrho \chi_\varrho(H_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, n,$$

$\varrho = 1, \ldots, n$, bilden eine Basis von $\mathsf{Z}^\#$. Die ψ_ϱ entsprechen den Charakteren der „homogenen" Bestandteile in der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}$. Es sei Ψ die Menge der ψ_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, n)$. Für die Elemente φ von $\mathsf{Z}^\#$ bedeutet der Übergang $\varphi \to \overline{\varphi}$ zur konjugiert-komplexen Funktion einen (Anti-)Automorphismus von $\mathsf{Z}^\#$, der (I) erfüllt und der die Basis Ψ von $\mathsf{Z}^\#$ in sich überführt. Mit diesem Automorphismus und mit der Basis $\mathfrak{A} = \Psi$ von $\mathsf{A} = \mathsf{Z}^\#$ bilden wir die Begriffe des S-Moduls und des S-Ringes über Ψ.

Man erhält jeden S-Modul über Ψ auch dadurch, daß man die „homogenen" Bestandteile der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}$ in geeigneter Weise in elementefremde Klassen einteilt und alle „homogenen" Bestandteile aus einer Klasse zu einer Darstellung von $\mathfrak{H}$ zusammensetzt. Die Spuren der so gewonnenen Darstellungen entsprechen den einfachen Basisgrößen des S-Moduls über Ψ.

$\mathsf{Z}^\#$ enthält auch die n linear unabhängigen Abbildungen

$$\omega_\varrho : \varkappa_\alpha \to \omega_\varrho(\varkappa_\alpha) = \frac{k_\alpha}{x_\varrho} \chi_\varrho(H_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Setzen wir die Abbildungen ω_ϱ von $[\mathfrak{H}]$ in $\boldsymbol{C}$ linear fort zu Abbildungen von Z in $\boldsymbol{C}$, die wir ebenfalls mit ω_ϱ bezeichnen, so erhalten wir bekanntlich die sämtlichen irreduziblen Darstellungen von Z über $\boldsymbol{C}$. Wir nennen daher $\mathsf{Z}^\#$ auch die zu Z *duale* Algebra. Mit $\mathfrak{H}^\#$ bezeichnen wir die Menge aller ω_ϱ $(\varrho = 1, \ldots, n)$, aufgefaßt als homomorphe Abbildungen von Z in $\boldsymbol{C}$.

In $\mathsf{Z}^\#$ ist das Produkt von ω_ϱ mit ω_σ erklärt durch

$$\omega_\varrho \omega_\sigma : \varkappa_\alpha \to (\omega_\varrho \omega_\sigma)(\varkappa_\alpha) = \omega_\varrho(\varkappa_\alpha)\, \omega_\sigma(\varkappa_\alpha), \qquad \alpha = 1, \ldots, n.$$

Setzen wir daher die Abbildungen

$$\omega_\varrho \to \omega_\varrho(\varkappa_\alpha), \qquad \varrho = 1, \ldots, n,$$

linear fort zu Abbildungen von $\mathsf{Z}^\#$ in $\boldsymbol{C}$, so erhalten wir die sämtlichen irreduziblen Darstellungen von $\mathsf{Z}^\#$ in $\boldsymbol{C}$. Wenn wir die $\varkappa_\alpha$ mit den irreduziblen Darstellungen von $\mathsf{Z}^\#$ identifizieren, so können wir Z als die zu $\mathsf{Z}^\#$ duale Algebra $\mathsf{Z}^{\#\#} := (\mathsf{Z}^\#)^\#$ auffassen. Wir setzen $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}^{\#\#}$.

Wir schränken den Antiautomorphismus $\alpha \to \alpha^*$ von H auf Z ein und erhalten einen (Anti-)Automorphismus von Z, der die Menge $[\mathfrak{H}] = \{\varkappa_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, n\}$ in sich überführt. Mit diesem Automorphismus und der Basis $\mathfrak{A} = [\mathfrak{H}]$ der Algebra $\mathsf{A} = \mathsf{Z}$ bilden wir die Begriffe des S-Moduls und des S-Ringes über $[\mathfrak{H}]$. Diese Begriffe fallen zusammen mit dem Begriff des zentralen S-Moduls über $\mathfrak{H}$ bzw. mit dem Begriff des zentralen S-Ringes über $\mathfrak{H}$. Wir werden im folgenden stets die beiden letzten Begriffe verwenden.

Mit den Orthogonalitätsrelationen der Charaktere rechnet man leicht nach, daß die Elemente

$$e_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{H \in \mathfrak{H}} x_\varrho \chi_\varrho(H^{-1}) H = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\varrho(\varkappa_\alpha^*) \varkappa_\alpha, \qquad \varrho = 1, \ldots, n,$$

die paarweise orthogonalen, primitiven Idempotenten von Z und die Elemente

$$e_\alpha^\# = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \frac{k_\alpha}{x_\varrho} \chi_\varrho(H_\alpha^{-1}) \psi_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\varkappa_\alpha) \psi_\varrho, \qquad \alpha = 1, \ldots, n,$$

die paarweise orthogonalen, primitiven Idempotenten von $\mathsf{Z}^\#$ sind. Es gilt

$$e_\varrho^* = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{\psi}_\varrho(\varkappa_\alpha^*) \varkappa_\alpha^* = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \overline{\psi}_\varrho(\varkappa_\alpha) \varkappa_\alpha = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\varrho(\varkappa_\alpha^*) \varkappa_\alpha = e_\varrho$$

für alle $\varrho = 1, \ldots, n$ und

$$\overline{e}_\alpha^\# = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \omega_\varrho(\varkappa_\alpha) \overline{\psi}_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\varkappa_\alpha) \psi_\varrho = e_\alpha^\#$$

für alle $\alpha = 1, \ldots, n$. Das Auftreten der ψ_ϱ und der ω_ϱ in den Idempotenten e_ϱ und $e_\alpha^\#$ gibt den Anlaß zu den beiden folgenden Definitionen, deren Begründung im Beweis unseres Hauptsatzes (1.9) sichtbar werden wird. Wir beachten, daß jede einfache Basisgröße eines zentralen S-Moduls eine Summe von Klassensummen $\varkappa_\alpha$ ist.

(1.1) *Definition. Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$ *mit den einfachen Basisgrößen* $\tau_1, \ldots, \tau_r$, *und* $\omega_\varrho, \omega_\sigma$ *seien Elemente von* $\mathfrak{H}^\#$. *Wir setzen* $\omega_\varrho \underset{\mathsf{M}}{\sim} \omega_\sigma$ *genau dann, wenn* $\omega_\varrho(\tau_i) = \omega_\sigma(\tau_i)$ *gilt für alle* $i = 1, \ldots, r$. *Es seien* $\mathfrak{X}_k^\#$ $(k = 1, \ldots, r^\#)$ *die Äquivalenzklassen von* $\mathfrak{H}^\#$ *nach der Äquivalenzrelation* $\underset{\mathsf{M}}{\sim}$. *Wir bilden in* $\mathsf{Z}^\#$ *die einfachen Größen* $\tau_k^\# = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{X}_k^\#} \psi_\varrho$. *Der von den* $\tau_k^\#$ $(k = 1, \ldots, r^\#)$ *aufgespannte S-Modul* $\mathsf{M}^\#$ *über* Ψ *heißt der zu* M *duale S-Modul.*

Zwei Abbildungen $\omega_\varrho, \omega_\sigma$ von $[\mathfrak{H}]$ in $\boldsymbol{C}$ gelten demnach als äquivalent bezüglich M, wenn die zugehörigen irreduziblen Darstellungen von Z in $\boldsymbol{C}$ die gleichen Funktionen auf $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{Z}$ liefern. Fassen wir alle irreduziblen Bestandteile der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}$, deren Charaktere χ_ϱ zu bezüglich M äquivalenten ω_ϱ gehören, zu einer einzigen Darstellung von $\mathfrak{H}$ bzw. von H zusammen, so entspricht $\tau_k^\#$ der Spur dieser Darstellung bei Einschränkung auf $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{H}$.

(1.1#) *Definition. Es sei* N *ein S-Modul über* Ψ *mit den einfachen Basisgrößen* $\sigma_i = \underline{\mathfrak{S}}_i$, $\mathfrak{S}_i \subseteq \Psi$; $i = 1, \ldots, s$. *Wir setzen* $\varkappa_\alpha \underset{\mathsf{N}}{\sim} \varkappa_\beta$ *genau dann, wenn*

$\sigma_i(\varkappa_\alpha)=\sigma_i(\varkappa_\beta)$ *gilt für alle* $i=1,\ldots,s$. *Es seien* $\mathfrak{S}_k^{\#}$ $(k=1,\ldots,s^{\#})$ *die Äquivalenzklassen von* $[\mathfrak{H}]$ *nach der Äquivalenzrelation* $\underset{\mathsf{N}}{\sim}$. *Wir bilden in* Z *die einfachen Größen* $\sigma_k^{\#}=\underline{\mathfrak{S}}_k^{\#}$. *Der von den* $\sigma_k^{\#}$ $(k=1,\ldots,s^{\#})$ *aufgespannte zentrale S-Modul* $\mathsf{N}^{\#}$ *über* $\mathfrak{H}$ *heißt der zu* N *duale S-Modul.*

Ist M ein zentraler S-Modul über $\mathfrak{H}$, dann ist auch $\mathsf{M}^{\#\#}:=(\mathsf{M}^{\#})^{\#}$ ein zentraler S-Modul über $\mathfrak{H}$. Wir nennen $\mathsf{M}^{\#\#}$ den zu M *bidualen* S-Modul.

Im folgenden sei stets M ein zentraler S-Modul über $\mathfrak{H}$ mit den einfachen Basisgrößen $\tau_i=\underline{\mathfrak{T}}_i$ $(i=1,\ldots,r)$. Wir leiten einige Hilfssätze her und benützen die folgende Bezeichnung.

(1.2) *Wir setzen* $\omega_\varrho(\tau_i)=c_{ki}$, *wenn* $\omega_\varrho\in\mathfrak{T}_k^{\#}$ $(i=1,\ldots,r;\ k=1,\ldots,r^{\#})$.

(1.3) *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$. *Dann enthält* $\mathsf{M}^{\#}$ *die paarweise orthogonalen, idempotenten Elemente*

$$E_i^{\#}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{r^{\#}}\bar{c}_{ki}\,\tau_k^{\#}\qquad(i=1,\ldots,r)$$

der Algebra $\mathsf{Z}^{\#}$, *die eine Teilalgebra* $\mathsf{M}_0^{\#}$ *von* $\mathsf{Z}^{\#}$ *erzeugen vom Rang* $[\mathsf{M}_0^{\#}:\boldsymbol{C}]=r$. *Das Einselement* ψ_1 *von* $\mathsf{Z}^{\#}$ *liegt in* $\mathsf{M}_0^{\#}\subseteqq\mathsf{M}^{\#}$. *Daher ist* $\mathsf{M}^{\#}$ *ein unitärer S-Modul über* Ψ.

Beweis. Die r Elemente

$$E_i^{\#}=\sum_{\mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{T}_i}e_\alpha^{\#}=\frac{1}{h}\sum_{\varrho=1}^{n}\sum_{\mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{T}_i}\bar{\omega}_\varrho(\varkappa_\alpha)\,\psi_\varrho=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{r^{\#}}\bar{c}_{ki}\,\tau_k^{\#}$$

sind paarweise orthogonale Idempotente von $\mathsf{Z}^{\#}$, die in $\mathsf{M}^{\#}$ liegen. Es ist

$$\psi_1=\frac{1}{h}\sum_{\varrho=1}^{n}\frac{1}{x_\varrho}\Big(\sum_{H\in\mathfrak{H}}\chi_\varrho(H^{-1})\Big)\psi_\varrho=\sum_{i=1}^{r}\Big(\frac{1}{h}\sum_{\varrho=1}^{n}\bar{\omega}_\varrho(\tau_i)\,\psi_\varrho\Big)=\sum_{i=1}^{r}E_i^{\#}$$

das Einselement von $\mathsf{M}_0^{\#}$.

Als unmittelbare Folgerung aus (1.3) erhalten wir:

(1.4) *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$. *Dann gilt* $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}\leqq\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}^{\#}$.

(1.5) *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$. *Dann gilt* $\mathsf{M}\subseteqq\mathsf{M}^{\#\#}$.

Beweis. $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\beta$ gehören nach $(1.1^{\#})$ zur selben einfachen Basisgröße $\tau_l^{\#\#}$ von $\mathsf{M}^{\#\#}$ genau dann, wenn $\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha)=\tau_k^{\#}(\varkappa_\beta)$ gilt für alle $k=1,\ldots,r^{\#}$. Daraus folgt $E_i^{\#}(\varkappa_\alpha)=E_i^{\#}(\varkappa_\beta)$ für alle Idempotenten $E_i^{\#}=\sum_{\mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{T}_i}e_\alpha^{\#}$ $(i=1,\ldots,r)$. Es ist

$$E_i^{\#}(\varkappa_\alpha)=\begin{cases}1, & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{T}_i,\\ 0, & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\alpha\nsubseteqq\mathfrak{T}_i.\end{cases}$$

Folglich gehören $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\beta$ auch zur selben einfachen Basisgröße τ_j von M, d.h. es gilt $\mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{T}_j$ und $\mathfrak{K}_\beta\subseteqq\mathfrak{T}_j$ für ein $j\in\{1,\ldots,r\}$. Mithin ist jede einfache Basisgröße τ_i von M eine Summe von einfachen Basisgrößen $\tau_l^{\#\#}$ von $\mathsf{M}^{\#\#}$. Es ist $\mathsf{M}\subseteqq\mathsf{M}^{\#\#}$.

Ist N ein S-Modul über Ψ, so ist auch $\mathsf{N}^{\#\#}:=(\mathsf{N}^{\#})^{\#}$ ein S-Modul über Ψ. Wir nennen $\mathsf{N}^{\#\#}$ den zu N *bidualen* S-Modul.

Im folgenden sei stets N ein S-Modul über Ψ mit den einfachen Basisgrößen $\sigma_i = \underline{\mathfrak{S}}_i$, $\mathfrak{S}_i \subseteqq \Psi$ $(i = 1, \ldots, s)$. Wir zeigen, daß auch die zu (1.3) bis (1.5) „dualen" Aussagen gelten.

(1.2#) *Wir setzen* $\sigma_i(\varkappa_\alpha) = d_{ki}$, *wenn* $\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{S}_k^{\#}$ $(i = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, s^{\#})$.

(1.3#) *Es sei* N *ein S-Modul über* Ψ. *Dann enthält* $\mathsf{N}^{\#}$ *die paarweise orthogonalen Idempotenten*

$$E_i = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{s^{\#}} \bar{d}_{ki}\, \sigma_k^{\#} \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

von Z, *die eine Teilalgebra* $\mathsf{N}_0^{\#}$ *von* Z *erzeugen vom Rang* $[\mathsf{N}_0^{\#} : \boldsymbol{C}] = s$. *Das Einheitselement* E *von* $\mathfrak{H}$ *liegt in* $\mathsf{N}_0^{\#} \subseteqq \mathsf{N}^{\#}$. *Daher ist* $\mathsf{N}^{\#}$ *ein unitärer zentraler S-Modul über* Ψ.

Beweis. Die s Elemente

$$E_i = \sum_{\psi_\varrho \in \mathfrak{S}_i} e_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(\sum_{\psi_\varrho \in \mathfrak{S}_i} \psi_\varrho(\varkappa_\alpha^*) \Big) \varkappa_\alpha = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{s^{\#}} \bar{d}_{ki}\, \sigma_k^{\#}$$

sind paarweise orthogonale Idempotente von Z, die in $\mathsf{N}^{\#}$ liegen. Es ist

$$E = \frac{1}{h} \sum_{H \in \mathfrak{H}} \sum_{\varrho=1}^{n} x_\varrho \chi_\varrho(H^{-1})\, H = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{s} \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i(\varkappa_\alpha^*)\, \varkappa_\alpha = \sum_{i=1}^{s} E_i$$

das Einselement von $\mathsf{N}_0^{\#}$.

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

(1.4#) *Es sei* N *ein S-Modul über* Ψ. *Dann gilt* $\dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{N} \leqq \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{N}^{\#}$.

(1.5#) *Es sei* N *ein S-Modul über* Ψ. *Dann gilt* $\mathsf{N} \subseteqq \mathsf{N}^{\#\#}$.

Beweis. ω_ϱ und ω_σ gehören nach (1.1) zur selben einfachen Basisgröße $\sigma_l^{\#\#}$ von $\mathsf{N}^{\#\#}$ genau dann, wenn $\omega_\varrho(\sigma_k^{\#}) = \omega_\sigma(\sigma_k^{\#})$ gilt für alle $k = 1, \ldots, s^{\#}$. Daraus folgt $\omega_\varrho(E_i) = \omega_\sigma(E_i)$ für alle Idempotenten $E_i = \sum_{\psi_\varrho \in \mathfrak{S}_i} e_\varrho$. Es ist

$$\omega_\varrho(E_i) = \begin{cases} 1, & \textit{wenn } \psi_\varrho \in \mathfrak{S}_i, \\ 0, & \textit{wenn } \psi_\varrho \notin \mathfrak{S}_i. \end{cases}$$

Folglich gehören ψ_ϱ und ψ_σ auch zur selben einfachen Basisgröße σ_j von N, d.h. es gilt $\psi_\varrho \in \mathfrak{S}_j$ und $\psi_\sigma \in \mathfrak{S}_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, s\}$. Mithin ist jede einfache Basisgröße σ_i von N eine Summe von einfachen Basisgrößen $\sigma_l^{\#\#}$ von $\mathsf{N}^{\#\#}$. Es ist $\mathsf{N} \subseteqq \mathsf{N}^{\#\#}$.

Wir ziehen aus den vorangegangenen Hilfssätzen einige Folgerungen.

(1.6) Satz. *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$. *Es gelte* $\dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{M} = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{M}^{\#}$. *Dann ist* M *ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$, *und* $\mathsf{M}^{\#}$ *ist ein unitärer S-Ring über* Ψ. *Es gilt* $\mathsf{M}^{\#\#} = \mathsf{M}$.

Beweis. Aus der Voraussetzung $\dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{M} = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{M}^{\#}$ und (1.3) folgt, daß $\mathsf{M}^{\#} = \mathsf{M}_0^{\#}$ eine Teilalgebra von $\mathsf{Z}^{\#}$ ist, die das Einselement ψ_1 von $\mathsf{Z}^{\#}$ enthält. Jede einfache Basisgröße $\tau_k^{\#}$ von $\mathsf{M}^{\#}$ ist eine Linearkombination der $E_i^{\#} = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{T}_i} e_\alpha^{\#}$.

Weil $\overline{E}_i^{\#}=E_i^{\#}$ gilt für alle $i=1,\ldots,r$, so tritt mit jedem $\tau_k^{\#}$ auch stets $\overline{\tau}_k^{\#}$ unter den einfachen Basisgrößen von $\mathsf{M}^{\#}$ auf. Daher ist $\mathsf{M}^{\#}$ ein unitärer S-Ring über Ψ.

Wie im Beweis von (1.5) gezeigt wurde, gehören $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\beta$ zur selben einfachen Basisgröße τ_i von M genau dann, wenn $E_i^{\#}(\varkappa_\alpha)=E_i^{\#}(\varkappa_\beta)$ gilt für alle $i=1,\ldots,r$. Weil jedes $\tau_k^{\#}$eine Linearkombination der Idempotenten $E_i^{\#}$ ist, so ist dies gleichwertig mit $\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha)=\tau_k^{\#}(\varkappa_\beta)$ für alle $k=1,\ldots,r^{\#}$. Wir erhalten $\mathsf{M}=\mathsf{M}^{\#\#}=(\mathsf{M}^{\#})^{\#}$. Mit $(1.3^{\#})$ und $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}=\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}^{\#}$ folgt daraus, daß M eine Teilalgebra von Z ist, die E enthält und die Idempotenten $E_k=\sum\limits_{\omega_\varrho\in\mathfrak{T}_k^{\#}} e_\varrho$ als Basis hat. Da $E_k^*=E_k$ gilt, so ist mit jedem τ_i auch τ_i^* in M enthalten. Daher ist M ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$.

$(1.6^{\#})$ Satz. *Es sei* N *ein S-Modul über* Ψ. *Es gelte* $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{N}=\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{N}^{\#}$. *Dann ist* N *ein unitärer S-Ring über* Ψ, *und* $\mathsf{N}^{\#}$ *ist ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$. *Es gilt* $\mathsf{N}^{\#\#}=\mathsf{N}$.

Beweis. Aus der Voraussetzung $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{N}=\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{N}^{\#}$ folgt nach $(1.3^{\#})$, daß $\mathsf{N}^{\#}=\mathsf{N}_0^{\#}$ eine Teilalgebra von Z ist, die das Einheitselement E von $\mathfrak{H}$ enthält. Jede einfache Basisgröße $\sigma_k^{\#}$ von $\mathsf{N}^{\#}$ ist eine Linearkombination der $E_i=\sum\limits_{\psi_\varrho\in\mathfrak{S}_i} e_\varrho$. Da $E_i^*=E_i$ gilt für alle $i=1,\ldots,s$, so tritt mit jedem $\sigma_k^{\#}$ auch stets $(\sigma_k^{\#})^*$ unter den einfachen Basisgrößen von $\mathsf{N}^{\#}$ auf. Daher ist $\mathsf{N}^{\#}$ ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$.

Wie im Beweis von $(1.5^{\#})$ gezeigt wurde, gehören ψ_ϱ und ψ_σ zur selben einfachen Basisgröße σ_i von N genau dann, wenn $\omega_\varrho(E_i)=\omega_\sigma(E_i)$ gilt für alle $i=1,\ldots,s$. Weil jedes $\sigma_k^{\#}$ eine Linearkombination der Idempotenten E_i ist, so ist dies gleichwertig mit $\omega_\varrho(\sigma_k^{\#})=\omega_\sigma(\sigma_k^{\#})$ für alle $k=1,\ldots,s^{\#}$. Wir erhalten $\mathsf{N}=\mathsf{N}^{\#\#}=(\mathsf{N}^{\#})^{\#}$. Mit (1.3) und $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{N}=\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{N}^{\#}$ folgt daraus, daß N eine Teilalgebra von $\mathsf{Z}^{\#}$ ist, die das Einselement ψ_1 von $\mathsf{Z}^{\#}$ enthält und die Idempotenten $E_k^{\#}=\sum\limits_{\mathfrak{R}_\alpha\subseteq\mathfrak{S}_k^{\#}} e_\alpha^{\#}$ als Basis hat. Da $\overline{E}_k^{\#}=E_k$ gilt, so ist mit jedem σ_i auch stets $\overline{\sigma}_i$ in N enthalten. Daher ist N ein unitärer S-Ring über Ψ.

(1.7) *Sei* $\mathfrak{H}\neq\langle E\rangle$. *Es gibt zentrale S-Moduln (und zentrale S-Ringe)* M *über* $\mathfrak{H}$, *für die* $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}<\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}^{\#}$ *gilt.*

Als einfachstes Beispiel betrachten wir den trivialen S-Ring T_1 über einer Gruppe $\mathfrak{H}\neq\langle E\rangle$. Er wird von der einfachen Basisgröße $\tau_1=\underline{\mathfrak{H}}$ aufgespannt. Es gilt

$$\omega_\varrho(\tau_1)=\begin{cases} h, & \text{wenn } \varrho=1,\\ 0, & \text{wenn } \varrho\neq 1.\end{cases}$$

$\mathfrak{H}^{\#}$ zerfällt in zwei Äquivalenzklassen nach $\underset{\mathsf{M}}{\sim}$, die die einfachen Basisgrößen $\tau_1^{\#}=\psi_1$ und $\tau_2^{\#}=\underline{\Psi}-\psi_1$ liefern. Daher ist $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}^{\#}=2>1=\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}$.

(1.8) *Es seien* M *und* M_1 *zentrale S-Moduln über* $\mathfrak{H}$, *und* M_1 *sei ein Teilmodul von* M. *Dann ist* $\mathsf{M}_1^{\#}$ *ein Teilmodul von* $\mathsf{M}^{\#}$.

Beweis. Jede der einfachen Basisgrößen $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_s$ von M_1 ist eine Summe von einigen der einfachen Basisgrößen $\tau_1, \ldots, \tau_r$ von M. Sind $\omega_\varrho, \omega_\sigma$ Elemente von $\mathfrak{H}^\#$ und gilt $\omega_\varrho(\tau_i) = \omega_\sigma(\tau_i)$ für alle $i = 1, \ldots, r$, so gilt auch $\omega_\varrho(\tilde{\tau}_j) = \omega_\sigma(\tilde{\tau}_j)$ für alle $j = 1, \ldots, s$. Jede der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{H}^\#$ nach $\widetilde{\mathsf{M}}_1$ ist daher die Vereinigung von einigen der Äquivalenzklassen von $\mathfrak{H}^\#$ nach $\widetilde{\mathsf{M}}$. Folglich ist $\mathsf{M}_1^\#$ ein Teilmodul von $\mathsf{M}^\#$.

Es ist möglich, daß $\mathsf{M}_1 < \mathsf{M}$ und $\mathsf{M}_1^\# = \mathsf{M}^\#$ gilt. Als Beispiel dienen die trivialen S-Ringe. $\mathsf{T}_1 = \boldsymbol{C}\,\underline{\mathfrak{H}}$ ist ein echter Teilmodul von $\mathsf{T}_2 = \boldsymbol{C}E \oplus \boldsymbol{C}(\underline{\mathfrak{H}} - E)$ über einer Gruppe $\mathfrak{H} \neq \langle E \rangle$. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathsf{T}_1^\# = \mathsf{T}_2^\# = \boldsymbol{C}\,\psi_1 \oplus \boldsymbol{C}(\underline{\Psi} - \psi_1)$ gilt.

Ebenso wie (1.8) beweist man die „duale" Aussage:

(1.8#) *Es seien* N *und* N_1 *S-Moduln über* Ψ, *und* N_1 *sei ein Teilmodul von* N. *Dann ist* $\mathsf{N}_1^\#$ *ein Teilmodul von* $\mathsf{N}^\#$.

Wir wenden uns jetzt den zentralen S-Ringen über $\mathfrak{H}$ zu.

(1.9) Hauptsatz. *Es sei* T *ein zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathsf{T}^\#$ *der duale S-Modul von* T. *Es seien* $\tau_i = \underline{\mathfrak{T}}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ *die einfachen Basisgrößen von* T. *Mit* $\mathsf{T}_0^\#$ *bezeichnen wir die von den Idempotenten*

$$E_i^\# = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{r^\#} \bar{c}_{ki}\, \tau_k^\# \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

aufgespannte Teilalgebra von $\mathsf{Z}^\#$. *Dann gilt:*

(a) *Es gibt einen Normalteiler* $\mathfrak{L}$ *von* $\mathfrak{H}$ *der Ordnung* l, *so daß* $\underline{\mathfrak{L}} = \tau_1$ *eine einfache Basisgröße und* $e = \frac{1}{l}\,\underline{\mathfrak{L}}$ *das Einselement von* T *ist. Jede der einfachen Basisgrößen* τ_i *von* T *besteht demnach aus vollen Nebenklassen von* $\mathfrak{H}$ *nach* $\mathfrak{L}$.

(b) $\mathsf{T}_0^\#$ *ist die Algebra der Elemente* $\sigma^\# \in \mathsf{Z}^\#$, *für die gilt:*

Aus $\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta \subseteqq \mathfrak{T}_i$ *folgt* $\sigma^\#(\varkappa_\alpha) = \sigma^\#(\varkappa_\beta)$; $\quad i = 1, \ldots, r$.

(c) *Es sei* Λ *die Menge der* $\psi_\varrho \in \Psi$ *mit* $\chi_\varrho(L) = x_\varrho$ *für alle* $L \in \mathfrak{L}$. *Dann bilden die* $\psi_\varrho \in \Lambda$ *eine Basis einer Teilalgebra von* $\mathsf{Z}^\#$, *und* $\mathsf{T}_0^\#$ *ist ein unitärer S-Ring über* Λ.

(d) *Die Elemente* eH, $H \in \mathfrak{H}$, *der Gruppenalgebra* H *bilden eine Gruppe, die wir mit der Faktorgruppe* $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ *identifizieren. Die Charaktere* χ_ϱ *mit* $\psi_\varrho \in \Lambda$ *identifizieren wir mit den irreduziblen Charakteren von* $\tilde{\mathfrak{H}}$. *Dann läßt sich* T *als unitärer zentraler S-Ring* $\tilde{\mathsf{T}}$ *über* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *auffassen, der die* r *verschiedenen Elemente*

$$\tilde{\tau}_i = \frac{1}{l}\,\tau_i = \sum_{eH \in \tilde{\mathfrak{T}}_i} eH, \qquad \tilde{\mathfrak{T}}_i = \{eH \mid H \in \mathfrak{T}_i\},$$

als einfache Basisgrößen besitzt, und der duale S-Modul $\tilde{\mathsf{T}}^\#$ *ist gleich dem unitären S-Ring* $\mathsf{T}_0^\#$ *über* Λ.

Wir setzen $\tilde{\mathfrak{K}}_\alpha = \{eH \mid H \in \mathfrak{K}_\alpha\}$, $\tilde{\varkappa}_\alpha = \underline{\tilde{\mathfrak{K}}}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n$. *Bezeichnen wir mit* $\tilde{\mathsf{H}}$ *die Gruppenalgebra von* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *über* $\boldsymbol{C}$, *mit* $\tilde{\mathsf{Z}}$ *das Zentrum von* $\tilde{\mathsf{H}}$ *und mit* $\tilde{\mathsf{Z}}^\#$ *die von den* $\psi_\varrho \in \Lambda$ *erzeugte Algebra, so gilt:*

(i) $\widetilde{\mathsf{T}}^{\#}=\mathsf{T}_0^{\#}$ *ist die Algebra der* $\sigma^{\#}\in\widetilde{\mathsf{Z}}^{\#}$ *mit der Eigenschaft:*
Aus $\widetilde{\mathfrak{K}}_\alpha, \widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteqq \mathfrak{T}_i$ *folgt* $\sigma^{\#}(\tilde{\varkappa}_\alpha)=\sigma^{\#}(\tilde{\varkappa}_\beta)$; $i=1,\ldots,r$.

(ii) *Es ist* $\widetilde{\mathsf{T}}^{\#\#}=\widetilde{\mathsf{T}}$ *und* $\dim_{\boldsymbol{C}}\widetilde{\mathsf{T}}^{\#}=\dim_{\boldsymbol{C}}\widetilde{\mathsf{T}}$.

Die Aussage (1.9a) folgt aus einem wesentlich allgemeineren Satz von WIELANDT [*8*, (1.6)]; sie ergibt sich unabhängig davon beim Beweis der übrigen Aussagen von (1.9).

Beweis. I. T ist eine halbeinfache Algebra; denn aus $\sigma\mathsf{T}\sigma=0$, $\sigma\in\mathsf{T}$, folgt $\sigma\sigma^*(\sigma\sigma^*)^*=0$, also $\sigma\sigma^*=0$ und daher $\sigma=0$. Somit ist T die direkte Summe von r Körpern, die alle isomorph sind zu $\boldsymbol{C}$. Daher existiert eine Zerlegung (δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol)

$$\mathsf{T}=\boldsymbol{C}E_1\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{C}E_r,\qquad E_iE_j=\delta_{ij}E_j,\qquad 0\neq E_j\in\mathsf{T}\qquad (i,j=1,\ldots,r).$$

Die primitiven Idempotenten E_i von T sind auch Idempotente im Zentrum Z der Gruppenalgebra H von $\mathfrak{H}$. Folglich ist jedes E_i in eindeutiger Weise darstellbar als Summe von paarweise orthogonalen, primitiven Idempotenten e_ϱ von Z. Zu jedem E_i ($i=1,\ldots,r$) gibt es also eine eindeutig bestimmte Teilmenge $\mathfrak{S}_i^{\#}$ von $\mathfrak{H}^{\#}$ derart, daß

$$E_i=\sum_{\omega_\varrho\in\mathfrak{S}_i^{\#}} e_\varrho=\frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\sum_{\omega_\varrho\in\mathfrak{S}_i^{\#}}\psi_\varrho(\varkappa_\alpha^*)\Big)\varkappa_\alpha=\frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma_i^{\#}(\varkappa_\alpha^*)\,\varkappa_\alpha$$

gilt, wobei wir

$$\sigma_i^{\#}=\sum_{\omega_\varrho\in\mathfrak{S}_i^{\#}}\psi_\varrho$$

setzen. Weil aber E_i ein Element von T ist, so haben alle $\varkappa_\alpha$, für die $\mathfrak{K}_\alpha$ in einem festen $\mathfrak{T}_j$ liegt, den gleichen Koeffizienten. Da T ein S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist, so ist mit jedem τ_j auch τ_j^* eine einfache Basisgröße von T und wir erhalten für alle $i=1,\ldots,r$ die Aussage:

$$\textit{Aus } \mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta\subseteqq\mathfrak{T}_j \textit{ folgt } \sigma_i^{\#}(\varkappa_\alpha)=\sigma_i^{\#}(\varkappa_\beta);\qquad j=1,\ldots,r.$$

$\underline{\mathfrak{H}}$ liegt in T und daher ist

$$e_1=\frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{n}\psi_1(\varkappa_\alpha^*)\,\varkappa_\alpha=\frac{1}{h}\,\underline{\mathfrak{H}}$$

ein primitives Idempotent E_i von T. Wir können die Numerierung der E_i daher so wählen, daß $E_1=e_1$ und somit $\sigma_1^{\#}=\psi_1$ ist.

II. Es sei P die Algebra aller $\sigma^{\#}\in\mathsf{Z}^{\#}$ mit der Eigenschaft:

$$\textit{Aus } \mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta\subseteqq\mathfrak{T}_j \textit{ folgt } \sigma^{\#}(\varkappa_\alpha)=\sigma^{\#}(\varkappa_\beta);\qquad j=1,\ldots,r.$$

Die $\sigma_i^{\#}$ bilden eine Basis von P. Denn sei $\sigma^{\#}\in\mathsf{P}$. Dann ist

$$\sigma=\sum_{\alpha=1}^{n}\sigma^{\#}(\varkappa_\alpha^*)\,\varkappa_\alpha$$

ein Element von T, und folglich gibt es komplexe Zahlen a_i so, daß

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r} a_i E_i = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i \, \sigma_i^{\#}(\varkappa_\alpha^*) \Big) \varkappa_\alpha .$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\sigma^{\#}(\varkappa_\alpha) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{r} a_i \, \sigma_i^{\#}(\varkappa_\alpha) \quad \textit{für alle } \alpha = 1, \ldots, r,$$

und daraus folgt

$$\sigma^{\#} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{r} a_i \, \sigma_i^{\#}.$$

Die $\sigma_i^{\#}$ bilden daher eine Basis von P.

III. Aus $E_i E_j = \delta_{ij} E_j$ folgt, daß entweder $\mathfrak{S}_i^{\#} = \mathfrak{S}_j^{\#}$ (und dann $i = j$) oder $\mathfrak{S}_i^{\#} \cap \mathfrak{S}_j^{\#} = \emptyset$ gilt. Weil jedes $\sigma_i^{\#}$ konstant ist auf der Menge der $\varkappa_\alpha$ mit $\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{T}_j$, so ist mit jedem E_i auch das Element

$$E_{i^*} = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^{\#}(\varkappa_\alpha) \, \varkappa_\alpha = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{\sigma}_i^{\#}(\varkappa_\alpha^*) \, \varkappa_\alpha$$

ein primitives Idempotent von T. Folglich gilt:

Zu jedem $i = 1, \ldots, r$ gibt es ein $i^* \in \{1, \ldots, r\}$ mit $\bar{\sigma}_i^{\#} = \sigma_{i^*}^{\#}$.

Die Teilalgebra P von $\mathsf{Z}^{\#}$ hat daher alle Eigenschaften eines unitären S-Ringes über Ψ bis auf eine: Es braucht nicht notwendig $\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{\#} = \underline{\Psi}$ zu gelten. Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $E = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \underline{\Psi}(\varkappa_\alpha^*) \, \varkappa_\alpha$ ein Element von T ist, wenn also T ein unitärer S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist.

IV. Gilt $\gamma \bar{\gamma} = 0$ für ein Element γ von $\mathsf{Z}^{\#}$, so folgt $\gamma = 0$; denn $(\gamma \bar{\gamma})(\varkappa_\alpha) = \gamma(\varkappa_\alpha) \overline{\gamma(\varkappa_\alpha)} = 0$ für $\alpha = 1, \ldots, n$ besagt, daß γ die Nullabbildung von $[\mathfrak{H}] = \{\varkappa_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, n\}$ ist. Mit jedem Element $\sigma^{\#}$ von P liegt auch $\bar{\sigma}^{\#}$ in P nach III. Daher folgt aus $\sigma^{\#} \mathsf{P} \sigma^{\#} = 0$, $\sigma^{\#} \in \mathsf{P}$, stets $\sigma^{\#} \bar{\sigma}^{\#} \overline{(\sigma^{\#} \bar{\sigma}^{\#})} = 0$, $\sigma^{\#} \bar{\sigma}^{\#} = 0$ und schließlich $\sigma^{\#} = 0$. Mithin ist P eine halbeinfache Algebra. P ist daher eine direkte Summe von r Körpern, die alle isomorph sind zu $\boldsymbol{C}$:

$$\mathsf{P} = \boldsymbol{C} \varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C} \varepsilon_r, \qquad \varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij} \varepsilon_j, \qquad 0 \neq \varepsilon_j \in \mathsf{P} \qquad (i, j = 1, \ldots, r).$$

Die primitiven Idempotenten ε_i von P sind auch Idempotente von $\mathsf{Z}^{\#}$. Folglich ist jedes ε_i in eindeutiger Weise darstellbar als Summe von paarweise orthogonalen, primitiven Idempotenten $e_\alpha^{\#}$ von $\mathsf{Z}^{\#}$. Somit existieren Teilmengen $\mathfrak{S}_i$ von $\mathfrak{H}$ $(i = 1, \ldots, r)$, deren jede die Vereinigung von Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ ist, derart, daß

$$\varepsilon_i = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{S}_i} e_\alpha^{\#} = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \Big(\sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{S}_i} \bar{\omega}_\varrho(\varkappa_\alpha) \Big) \psi_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \bar{\omega}_\varrho(\sigma_i) \, \psi_\varrho$$

gilt, wobei wir $\sigma_i = \underline{\mathfrak{S}}_i$ setzen. Andererseits ist ε_i ein Element von P und also eine Linearkombination der $\sigma_j^{\#}$. Wenn wir berücksichtigen, daß mit $\sigma^{\#} \in \mathsf{P}$ auch $\bar{\sigma}^{\#} \in \mathsf{P}$ gilt, so erhalten wir für jedes $i = 1, \ldots, r$ die Aussage:

Aus $\omega_\varrho, \omega_\sigma \in \mathfrak{S}_j^{\#}$ *folgt* $\omega_\varrho(\sigma_i) = \omega_\sigma(\sigma_i)$, $\quad j = 1, \ldots, r$,

und es ist $\omega_\tau(\sigma_i) = 0$, *wenn* ω_τ *nicht in* $\bigcup_{j=1}^{r} \mathfrak{S}_j^{\#}$ *liegt.*

V. Es sei T' die Algebra der $\beta \in \mathsf{Z}$, die die folgende Eigenschaft besitzen:

Aus $\omega_\varrho, \omega_\sigma \in \mathfrak{S}_j^{\#}$ *folgt* $\omega_\varrho(\beta) = \omega_\sigma(\beta)$, $\quad j = 1, \ldots, r$,

und es ist $\omega_\tau(\beta) = 0$, *wenn* ω_τ *nicht in* $\bigcup_{j=1}^{r} \mathfrak{S}_j^{\#}$ *liegt.*

Die σ_i $(i = 1, \ldots, r)$ bilden eine Basis von T'. Denn liegt β in T', so erhalten wir mit

$$\beta^{\#} = \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\beta)\, \psi_\varrho$$

ein Element von P. Folglich gibt es komplexe Zahlen b_i so, daß

$$\beta^{\#} = \sum_{i=1}^{r} b_i\, \varepsilon_i = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{r} b_i\, \overline{\omega}_\varrho(\sigma_i) \Big) \psi_\varrho$$

gilt. Daraus folgt

$$\omega_\varrho(\beta) = \sum_{i=1}^{r} b_i\, \omega_\varrho(\sigma_i) \quad \textit{für alle } \varrho = 1, \ldots, n.$$

Wir erhalten

$$\beta = \sum_{i=1}^{r} b_i\, \sigma_i.$$

Daher sind die σ_i eine Basis von T'.

VI. Wir wenden die $\omega_\tau \in \mathfrak{H}^{\#}$ auf die primitiven Idempotenten E_i von T an.

$$\omega_\tau(E_i) = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \sigma_i^{\#}(\varkappa_\alpha^*)\, \omega_\tau(\varkappa_\alpha) = \frac{1}{h} \frac{1}{x_\tau} \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{S}_i^{\#}} x_\varrho \sum_{\alpha=1}^{n} k_\alpha\, \chi_\varrho(H_\alpha^{-1})\, \chi_\tau(H_\alpha)$$
$$= \begin{cases} 1, & \textit{wenn} \quad \omega_\tau \in \mathfrak{S}_i^{\#}, \\ 0, & \textit{wenn} \quad \omega_\tau \notin \mathfrak{S}_i^{\#}. \end{cases}$$

Die E_i $(i = 1, \ldots, r)$ sind daher Elemente von T'. Also ist T eine Teilalgebra von T'. Weil aber $[\mathsf{T} : \boldsymbol{C}] = r = [\mathsf{T}' : \boldsymbol{C}]$ gilt, so ist $\mathsf{T} = \mathsf{T}'$. Da die σ_i einfache Basisgrößen von T' und die τ_j einfache Basisgrößen von T sind, so stimmen die σ_i bis auf die Numerierung mit den τ_j überein. Wir können die Bezeichnungen so gewählt denken, daß $\sigma_i = \tau_i$ ist für $i = 1, \ldots, r$. Daher gilt nach (1.1), (1.2) und (1.3)

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\sigma_i)\, \psi_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\tau_i)\, \psi_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{r^{\#}} \overline{c}_{ki}\, \tau_k^{\#} = E_i^{\#}.$$

Mithin ist $\mathsf{P} = \mathsf{T}_0^{\#}$. Nach der Definition von P in II. folgt daraus die Behauptung (b).

VII. Aus $\mathsf{P} = \mathsf{T}_0^{\#}$ folgt ferner, daß jede der einfachen Basisgrößen $\sigma_j^{\#}$ von P $(j = 1, \ldots, r)$ eine Summe von einfachen Basisgrößen $\tau_k^{\#}$ von $\mathsf{T}^{\#}$ ist. Andererseits folgt nach IV. aus $\omega_\varrho, \omega_\sigma \in \mathfrak{S}_j^{\#}$ stets $\omega_\varrho(\tau_i) = \omega_\varrho(\sigma_i) = \omega_\sigma(\sigma_i) = \omega_\sigma(\tau_i)$ für

alle $i=1,\ldots,r$. Das heißt: Jedes $\mathfrak{S}_j^{\#}$ liegt in einem $\mathfrak{T}_k^{\#}$. Also stimmen die $\mathfrak{S}_j^{\#}$ $(j=1,\ldots,r)$ mit gewissen der $\mathfrak{T}_k^{\#}$ $(k=1,\ldots,r^{\#})$ überein. Wir können die Bezeichnungen so wählen, daß $\sigma_k^{\#}=\tau_k^{\#}$ $(k=1,\ldots,r)$ gilt. Dabei ist, wie am Ende von Abschnitt I gezeigt wurde, $\sigma_1^{\#}=\tau_1^{\#}=\psi_1$ das Einselement von $\mathsf{Z}^{\#}$.

VIII. Es sei Λ die Menge der ψ_ϱ mit $\omega_\varrho\in\bigcup_{k=1}^{r}\mathfrak{T}_k^{\#}$. Dann ist $\underline{\Lambda}=\sum_{k=1}^{r}\tau_k^{\#}$. Ist D_ϱ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{H}$ mit dem Charakter χ_ϱ, so sei $\mathfrak{L}_\varrho$ der Kern von D_ϱ. Mit $\mathfrak{L}$ bezeichnen wir den Durchschnitt aller $\mathfrak{L}_\varrho$, für die $\psi_\varrho\in\Lambda$ gilt. Es ist $\underline{\Lambda}(\varkappa_\alpha)=\sum_{\psi_\varrho\in\Lambda}x_\varrho\,\chi_\varrho(H_\alpha)=\sum_{\psi_\varrho\in\Lambda}x_\varrho^2$ genau dann, wenn $\mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{L}$. Andererseits folgt aus der bereits bewiesenen Aussage (b) und aus $\underline{\Lambda}\in\mathsf{T}_0^{\#}$, daß $\underline{\Lambda}$ konstant ist auf der Menge aller $\varkappa_\alpha$, für die $\mathfrak{K}_\alpha$ in einem festen $\mathfrak{T}_i$ liegt. Daher muß $\mathfrak{L}$ eine Vereinigung von Mengen $\mathfrak{T}_i$ sein, d.h. es ist $\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$.

IX. Weil $\mathsf{T}'=\mathsf{T}$, $\mathsf{P}=\mathsf{T}_0^{\#}$ und $\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$ gilt, so erhalten wir nach V. die Aussage:

Aus $\omega_\varrho,\omega_\sigma\in\mathfrak{S}_k^{\#}=\mathfrak{T}_k^{\#}$ *folgt* $\omega_\varrho(\underline{\mathfrak{L}})=\omega_\sigma(\underline{\mathfrak{L}})$, $\quad k=1,\ldots,r$,

und es ist $\omega_\tau(\underline{\mathfrak{L}})=0$, *wenn* $\omega_\tau\notin\bigcup_{k=1}^{r}\mathfrak{T}_k^{\#}$.

Ist $\mathfrak{L}$ im Kern $\mathfrak{L}_\varrho$ einer irreduziblen Darstellung D_ϱ von $\mathfrak{H}$ mit dem Charakter χ_ϱ enthalten, so gilt $\omega_\varrho(\underline{\mathfrak{L}})=|\mathfrak{L}|\neq 0$. Daher besteht Λ aus genau den $\psi_\varrho\in\Psi$, für die $\mathfrak{L}\leqq\mathfrak{L}_\varrho$ gilt. Wir können also die irreduziblen Charaktere χ_ϱ mit $\psi_\varrho\in\Lambda$ mit den irreduziblen Charakteren von $\tilde{\mathfrak{H}}=\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ und $\underline{\Lambda}$ mit dem Charakter der regulären Darstellung von $\tilde{\mathfrak{H}}$ identifizieren. Daher gilt:

$$\underline{\Lambda}(\varkappa_\alpha)=\begin{cases}\dfrac{h}{l}=|\mathfrak{H}/\mathfrak{L}|, & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{L},\\ 0 \qquad\qquad , & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{H}\setminus\mathfrak{L}.\end{cases}$$

Somit ist wegen $\sigma_k^{\#}=\tau_k^{\#}$ $(k=1,\ldots,r)$

$$e=\sum_{k=1}^{r}E_k=\frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{r}\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha^*)\Big)\varkappa_\alpha=\frac{1}{h}\sum_{\alpha=1}^{n}\underline{\Lambda}(\varkappa_\alpha^*)\,\varkappa_\alpha=\frac{1}{l}\,\underline{\mathfrak{L}}$$

das Einselement von T.

Wegen $\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$ ist $\underline{\mathfrak{L}}$ eine Summe von einfachen Basisgrößen τ_i von T. Es sei τ_j ein solcher Summand. Dann gilt $\mathfrak{T}_j\subseteqq\mathfrak{L}$ und es ist $\tau_j=e\,\tau_j=\frac{1}{l}\,\underline{\mathfrak{L}}\tau_j=\left(\frac{1}{l}\,|\mathfrak{T}_j|\right)\underline{\mathfrak{L}}$. Daraus folgt, daß $\underline{\mathfrak{L}}=\tau_j$ eine einfache Basisgröße von T ist. Wir setzen $\tau_1=\underline{\mathfrak{L}}$. Wegen $\tau_i=e\,\tau_i$ ist jedes $\mathfrak{T}_i$ die Vereinigung von vollen Nebenklassen von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{L}$. Damit ist (a) bewiesen. Weil die $\psi_\varrho\in\Lambda$ eine Teilalgebra von $\mathsf{Z}^{\#}$ aufspannen, so ist $\mathsf{T}_0^{\#}=\mathsf{P}$ nach III. ein unitärer S-Ring über Λ. Daraus folgt (c).

Jetzt ist es auch leicht einzusehen, warum aus $\psi_\varrho\notin\Lambda$ die Gleichung $\omega_\varrho(\tau)=0$ folgt für alle $\tau\in\mathsf{T}$. Schränken wir nämlich eine irreduzible Darstellung D_ϱ mit dem Charakter χ_ϱ, $\psi_\varrho\notin\Lambda$, auf den Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{H}$ ein, so zerfällt $D_\varrho|\mathfrak{L}$ in bezüglich $\mathfrak{H}$ assoziierte, von der identischen Darstellung verschiedene, irreduzible Bestandteile. Daher ist $\omega_\varrho(\underline{\mathfrak{L}})=0$ und folglich auch $\omega_\varrho(\tau_i)=\omega_\varrho(e\,\tau_i)=\omega_\varrho(e)\,\omega_\varrho(\tau_i)=0$ für alle $i=1,\ldots,r$.

X. Es ist klar, daß die Elemente eH, $H \in \mathfrak{H}$, der Gruppenalgebra H eine zu $\tilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ isomorphe Gruppe bilden. Wir identifizieren diese Gruppe mit $\tilde{\mathfrak{H}}$. Weil die einfachen Basisgrößen τ_i von T nach (a) aus vollen Nebenklassen von $\mathfrak{H}$ nach $\mathfrak{L}$ bestehen, so sind die $\tilde{\tau}_i = \frac{1}{l}\tau_i = \sum_{eH \in \tilde{\mathfrak{T}}_i} eH$, $\tilde{\mathfrak{T}}_i = \{eH \mid H \in \mathfrak{T}_i\}$, einfache Größen bezüglich $\tilde{\mathfrak{H}}$. Daher kann T auch als S-Ring über $\tilde{\mathfrak{H}}$ aufgefaßt werden. Als solchen bezeichnen wir ihn mit $\tilde{\mathsf{T}}$. Dabei ist das Einheitselement e von $\tilde{\mathfrak{H}}$ eine einfache Basisgröße $\tilde{\tau}_1 = \frac{1}{l}\tau_1 = e$ von $\tilde{\mathsf{T}}$. Ferner ist jedes $\tilde{\mathfrak{T}}_i$ die Vereinigung von Klassen $\tilde{\mathfrak{K}}_\alpha = \{eH \mid H \in \tilde{\mathfrak{K}}_\alpha\}$ konjugierter Elemente von $\tilde{\mathfrak{H}}$. Folglich ist $\tilde{\mathsf{T}}$ ein unitärer zentraler S-Ring über $\tilde{\mathfrak{H}}$.

Wir setzen $\psi_\varrho \in \Lambda$ voraus. Dann ist die Abbildung $eH \to \chi_\varrho(H)$ ein irreduzibler Charakter von $\tilde{\mathfrak{H}}$. Wir identifizieren ihn mit χ_ϱ. Bezeichnen wir mit $\tilde{\varkappa}_\alpha = \underline{\tilde{\mathfrak{K}}}_\alpha$ die Klassensummen von $\tilde{\mathfrak{H}}$, so sind die Abbildungen $\tilde{\varkappa}_\alpha \to \omega_\varrho(\tilde{\varkappa}_\alpha) = \frac{|\tilde{\mathfrak{K}}_\alpha|}{x_\varrho}\chi_\varrho(H_\alpha)$ die irreduziblen Darstellungen des Zentrums $\tilde{\mathsf{Z}}$ der Gruppenalgebra $\tilde{\mathsf{H}}$ von $\tilde{\mathfrak{H}}$ über $\boldsymbol{C}$. Wir identifizieren auch sie mit den ω_ϱ. Schließlich identifizieren wir die $\psi_\varrho \in \Lambda$ mit den Abbildungen $\tilde{\varkappa}_\alpha \to \psi_\varrho(\varkappa_\alpha) = x_\varrho\,\chi_\varrho(H_\alpha)$, die eine Basis der Algebra $\tilde{\mathsf{Z}}^{\#}$ aller komplexwertigen Funktionen auf $[\tilde{\mathfrak{H}}] = \{\tilde{\varkappa}_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, n\}$ bilden.

Wenn $\psi_\varrho, \psi_\sigma \in \Lambda$, so gilt $\omega_\varrho(\tilde{\tau}_i) = \omega_\sigma(\tilde{\tau}_i)$ genau dann, wenn $\omega_\varrho(\tau_i) = \omega_\sigma(\tau_i)$. Weil für die einfachen Basisgrößen $\tau_1^{\#}, \ldots, \tau_r^{\#}$ von $\mathsf{T}_0^{\#}$ nach VIII. $\underline{\Lambda} = \sum_{k=1}^{r} \tau_k^{\#}$ gilt, so ist auf Grund der vorgenommenen Identifizierungen $\mathsf{T}_0^{\#}$ gleich dem zu $\tilde{\mathsf{T}}$ dualen S-Modul $\tilde{\mathsf{T}}^{\#}$ über Λ. Daher ist $\tilde{\mathsf{T}}^{\#}$ zugleich die Algebra der Elemente $\sigma^{\#}$ von $\tilde{\mathsf{Z}}^{\#}$, für die gilt:

Aus $\tilde{\mathfrak{K}}_\alpha, \tilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \tilde{\mathfrak{T}}_j = \{eH \mid H \in \mathfrak{T}_j\}$ *folgt* $\sigma^{\#}(\tilde{\varkappa}_\alpha) = \sigma^{\#}(\tilde{\varkappa}_\beta)$.

Aus der Definition (1.1$^{\#}$) ergibt sich daraus die Gleichung $\tilde{\mathsf{T}}^{\#\#} = \tilde{\mathsf{T}}$ und es ist $\dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{\mathsf{T}}^{\#} = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{T}_0^{\#} = r = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{T} = \dim_{\boldsymbol{C}} \tilde{\mathsf{T}}$. Damit ist auch (d) bewiesen.

Mit dem Satz (1.9) ist die Untersuchung beliebiger zentraler S-Ringe über $\mathfrak{H}$ zurückgeführt auf das Studium unitärer zentraler S-Ringe. Aus diesem Grunde formulieren wir (1.9) für den Spezialfall unitärer zentraler S-Ringe noch einmal neu.

(1.10) Satz. *Es sei* T *ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$ *und* $\mathsf{T}^{\#}$ *der duale S-Modul von* T. *Es seien* $\tau_i = \underline{\mathfrak{T}}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ *die einfachen Basisgrößen von* T. *Dann gilt:*

(a) $\mathsf{T}^{\#}$ *ist ein unitärer S-Ring über* Ψ.

(b) $\mathsf{T}^{\#}$ *ist die Algebra der Elemente* $\sigma^{\#}$ *von* $\mathsf{Z}^{\#}$, *für die gilt:*
Aus $\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta \subseteq \mathfrak{T}_i$ *folgt* $\sigma^{\#}(\varkappa_\alpha) = \sigma^{\#}(\varkappa_\beta)$; $\quad i = 1, \ldots, r$.

(c) $\mathsf{T}^{\#\#} = \mathsf{T}$.

(d) $\dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{T}^{\#} = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{T}$.

Ist T ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$, dann nennen wir $\mathsf{T}^{\#}$ den *dualen S-Ring* von T. Für unsere Theorie ist es bedeutsam, daß wir einen zu (1.10) analogen Satz erhalten, wenn wir von einem unitären S-Ring über Ψ ausgehen und seinen dualen S-Modul über $\mathfrak{H}$ bilden. Wir zeigen gleich etwas mehr. Ist $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{H}$ und ist Λ die Menge der $\psi_\varrho \in \Psi$ mit $\chi_\varrho(L) = x_\varrho$ für alle $L \in \mathfrak{L}$, so bilden die $\psi_\varrho \in \Lambda$ eine Basis einer Teilalgebra P von $\mathsf{Z}^{\#}$. Das Einselement ψ_1 von $\mathsf{Z}^{\#}$ liegt in Λ, und mit ψ_ϱ ist auch $\overline{\psi}_\varrho$ in Λ enthalten. Wir beweisen die Umkehrung dieser Aussage in einer allgemeineren Fassung.

(1.11) Satz. *Es sei P eine Teilalgebra von $\mathsf{Z}^{\#}$ mit den folgenden Eigenschaften: Es existiert eine Teilmenge Λ von Ψ und eine Zerlegung von Λ in paarweise elementefremde, nichtleere Teilmengen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_s$ derart, daß die einfachen Größen $\varrho_i = \underline{\mathfrak{R}}_i$ eine Basis von P bilden und mit jedem ϱ_i auch $\overline{\varrho}_i$ in dieser Basis auftritt. Dann gibt es einen Normalteiler $\mathfrak{L}$ von $\mathfrak{H}$ so, daß Λ aus genau den $\psi_\sigma \in \Psi$ besteht mit $\chi_\sigma(L) = x_\sigma$ für alle $L \in \mathfrak{L}$.*

Beweis. I. Wir wenden das Verfahren des Beweises von (1.9) an. P ist eine halbeinfache Teilalgebra von $\mathsf{Z}^{\#}$. Daher läßt sich P in der folgenden Weise darstellen:

$$\mathsf{P} = \boldsymbol{C}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}\varepsilon_s, \qquad \varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij}\varepsilon_j, \qquad 0 \neq \varepsilon_j \in \mathsf{P} \qquad (i, j = 1, \ldots, s).$$

Es existieren daher Teilmengen $\mathfrak{S}_j$ von $\mathfrak{H}$, deren jede die Vereinigung von Klassen konjugierter Elemente ist, so daß

$$\varepsilon_j = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{S}_j} e_\alpha^{\#} = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{S}_j} \overline{\omega}_\varrho(\varkappa_\alpha)\, \psi_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\sigma_j)\, \psi_\varrho$$

gilt mit $\sigma_j = \underline{\mathfrak{S}}_j$. Es sei B die Algebra der $\beta \in \mathsf{Z}$ mit der Eigenschaft:

Aus $\psi_\varrho, \psi_\sigma \in \mathfrak{R}_i$ folgt $\omega_\varrho(\beta) = \omega_\sigma(\beta)$, $\quad i = 1, \ldots, s$,

und es ist $\omega_\tau(\beta) = 0$, wenn $\psi_\tau \notin \Lambda = \bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{R}_i$.

Dann bilden die σ_j eine Basis von B. Insbesondere gilt $\left(\sum_{j=1}^{s} \sigma_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{s} a_j \sigma_j$ mit nicht negativen, ganz rationalen Zahlen a_j. Daher ist $\bigcup_{j=1}^{s} \mathfrak{S}_j = \mathfrak{M}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{H}$. Da die $\mathfrak{S}_j$ aus vollen Klassen konjugierter Elemente bestehen, ist $\mathfrak{M}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{H}$.

Aus $\varepsilon_i \varepsilon_j = \delta_{ij}\varepsilon_j$ folgt, daß entweder $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}_j$ (und dann $i = j$) oder $\mathfrak{S}_i \cap \mathfrak{S}_j = \emptyset$ gilt. Weil die σ_j Elemente von B sind, und weil mit jedem ϱ_i auch $\overline{\varrho}_i$ in P liegt, so ist mit jedem ε_j auch

$$\varepsilon_{j^*} = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \omega_\varrho(\sigma_j)\, \psi_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\sigma_j^*)\, \psi_\varrho$$

ein primitives Idempotent von P. Daher gibt es zu jedem $j = 1, \ldots, s$ ein $j^* \in \{1, \ldots, s\}$ derart, daß $\sigma_j^* = \sigma_{j^*}$ gilt. Daher ist B ein zentraler S-Ring über $\mathfrak{M}$.

II. B ist eine halbeinfache Teilalgebra von Z. Somit gilt

$$\mathsf{B} = \boldsymbol{C}E_1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{C}E_s, \qquad E_i E_j = \delta_{ij} E_j, \qquad 0 \neq E_j \in \mathsf{B} \qquad (i, j = 1, \ldots, s).$$

Daher gibt es Teilmengen $\mathfrak{F}_k$ von Ψ so, daß

$$E_k = \sum_{\psi_\varrho \in \mathfrak{F}_k} e_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\psi_\varrho \in \mathfrak{F}_k} \psi_\varrho(\varkappa_\alpha^*)\, \varkappa_\alpha = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_k(\varkappa_\alpha^*)\, \varkappa_\alpha$$

gilt mit $\varphi_k = \underline{\mathfrak{F}}_k$. Es sei P' die Algebra der $\sigma^{\#} \in \mathsf{Z}^{\#}$, für die gilt:

Aus $\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta \subseteqq \mathfrak{S}_i$ *folgt* $\sigma^{\#}(\varkappa_\alpha) = \sigma^{\#}(\varkappa_\beta)$, $\quad i = 1, \ldots, s$,

und es ist $\sigma^{\#}(\varkappa_\gamma) = 0$, *wenn* $\mathfrak{K}_\gamma \nsubseteqq \mathfrak{M} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{S}_i$.

Die Elemente φ_k $(k = 1, \ldots, s)$ bilden eine Basis von P'. Wir wenden die Idempotenten ε_j von P auf die $\varkappa_\beta$ an und erhalten

$$\varepsilon_j(\varkappa_\beta) = \frac{1}{h} \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{S}_j} k_\alpha \sum_{\varrho=1}^{n} \chi_\varrho(H_\alpha^{-1})\, \chi_\varrho(H_\beta) = \begin{cases} 1, & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\beta \subseteqq \mathfrak{S}_j, \\ 0, & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\beta \nsubseteqq \mathfrak{S}_j. \end{cases}$$

Mithin sind die ε_j $(j = 1, \ldots, s)$ Elemente von P'. Weil $[\mathsf{P} : \boldsymbol{C}] = s = [\mathsf{P}' : \boldsymbol{C}]$ gilt, erhalten wir $\mathsf{P} = \mathsf{P}'$.

Wir bemerken: Wenn P ein S-Ring über Ψ ist, d.h. wenn $\Lambda = \Psi$ gilt, so folgt nach (1.1$^{\#}$) aus $\mathsf{P} = \mathsf{P}'$ und aus der Definition von P', daß die Algebra B im dualen S-Modul $\mathsf{P}^{\#}$ von P liegt, und daß

$$E = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \underline{\Psi}(\varkappa_\alpha^*)\, \varkappa_\alpha = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{k=1}^{s} \varphi_k(\varkappa_\alpha^*)\, \varkappa_\alpha = \sum_{k=1}^{s} E_k$$

in B enthalten ist. Wenn P ein unitärer S-Ring über Ψ ist, so gilt außerdem noch $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$; denn das Einselement

$$\psi_1 = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\underline{\mathfrak{H}})\, \psi_\varrho = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j$$

von $\mathsf{Z}^{\#}$ liegt in P. Es ist dann $\mathsf{P}^{\#} = \mathsf{B}$ ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$.

III. Es sei D_ϱ eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{H}$ mit dem Charakter χ_ϱ, und $\mathfrak{L}_\varrho$ sei der Kern von D_ϱ. Es bezeichne $\mathfrak{L}$ den Durchschnitt aller $\mathfrak{L}_\varrho$ mit $\psi_\varrho \in \Lambda$. Wegen $\mathsf{P} = \mathsf{P}'$ und $\underline{\Lambda} \in \mathsf{P}$ folgt aus $\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta \subseteqq \mathfrak{S}_i$ stets $\underline{\Lambda}(\varkappa_\alpha) = \underline{\Lambda}(\varkappa_\beta)$, und es ist $\underline{\Lambda}(\varkappa_\gamma) = 0$, wenn $\mathfrak{K}_\gamma \nsubseteqq \mathfrak{M} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{S}_i$ gilt. Andererseits ist $\underline{\Lambda}(\varkappa_\alpha) = \sum_{\psi_\varrho \in \Lambda} x_\varrho\, \chi_\varrho(H_\alpha)$ $= \sum_{\psi_\varrho \in \Lambda} x_\varrho^2 \neq 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{L}$ gilt. Daraus folgt, daß $\mathfrak{L}$ die Vereinigung gewisser $\mathfrak{S}_i$ ist, $\mathfrak{L} \leqq \mathfrak{M}$. Darum ist $\underline{\mathfrak{L}}$ ein Element von B. Nach Definition von B folgt nunmehr aus $\psi_\varrho, \psi_\sigma \in \mathfrak{R}_i$ stets $\omega_\varrho(\underline{\mathfrak{L}}) = \omega_\sigma(\underline{\mathfrak{L}})$, und es ist $\omega_\tau(\underline{\mathfrak{L}}) = 0$, wenn $\psi_\tau \notin \Lambda$. Zum anderen ist aber $\omega_\varrho(\underline{\mathfrak{L}}) = |\mathfrak{L}| \neq 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{L}$ im Kern $\mathfrak{L}_\varrho$ von D_ϱ liegt. Daher ist die Menge Λ' der ψ_ϱ mit $\mathfrak{L} \leqq \mathfrak{L}_\varrho$ die Vereinigung von gewissen $\mathfrak{R}_i \subseteqq \Lambda$. Auf Grund der Definition von $\mathfrak{L}$ ist $\Lambda \subseteqq \Lambda'$ und daher $\Lambda = \Lambda'$. Damit ist (1.11) bewiesen.

Der Gedankengang dieses Beweises läßt sich leicht fortführen zu einem (1.9) entsprechenden Satz mit P an Stelle von T. So ist z.B.

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{s} \varepsilon_j = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} \overline{\omega}_\varrho(\sigma_j)\, \psi_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\varrho=1}^{n} \overline{\omega}_\varrho(\underline{\mathfrak{M}})\, \psi_\varrho = \frac{1}{|\mathfrak{H}/\mathfrak{M}|}\, \underline{\Phi}$$

das Einselement von P, wobei Φ die Teilmenge der $\psi_\varrho \in \Lambda$ mit $\chi_\varrho(M) = x_\varrho$ für alle $M \in \mathfrak{M}$ ist. $\underline{\Phi}$ läßt sich mit dem Charakter der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}/\mathfrak{M}$ identifizieren. Wir begnügen uns jedoch damit, das Analogon zu Satz (1.10) zu formulieren.

(1.10#) Satz. *Es sei* P *ein unitärer S-Ring über* Ψ *und* $\mathsf{P}^{\#}$ *der duale S-Modul von* P. *Es seien* $\varrho_i = \underline{\mathfrak{R}}_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ *die einfachen Basisgrößen von* P. *Dann gilt:*

(a) $\mathsf{P}^{\#}$ *ist ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$.

(b) $\mathsf{P}^{\#}$ *ist die Algebra der Elemente* ζ *von* Z, *für die gilt:*

Aus $\psi_\sigma, \psi_\tau \in \mathfrak{R}_i$ *folgt* $\omega_\sigma(\zeta) = \omega_\tau(\zeta)$, $\quad i = 1, \ldots, s$.

(c) $\mathsf{P}^{\#\#} = \mathsf{P}$.

(d) $\dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{P}^{\#} = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{P}$.

Beweis. Daß $\mathsf{P}^{\#}$ ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist, haben wir am Ende von (1.11, II.) vermerkt. Daher gilt (a). Aus $\mathsf{P}^{\#} = \mathsf{B}$ und aus der Definition von B in (1.11, I.) folgt (b). Wegen (1.10b) stimmt dann die in (1.11, II.) auftretende Algebra P' mit $\mathsf{B}^{\#} = \mathsf{P}^{\#\#}$ überein. Andererseits wurde in (1.11, II.) die Gleichung $\mathsf{P} = \mathsf{P}'$ bewiesen. Daraus folgt (c). Außerdem ergab sich in (1.11, I.) $\dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{B} = \dim_{\boldsymbol{C}} \mathsf{P}$. Das ist die Behauptung (d).

Als Folgerung aus (1.10a, c) und (1.10#a, c) erhalten wir unmittelbar:

(1.12) Satz. *Die Zuordnung* $\mathsf{T} \to \mathsf{T}^{\#}$ *ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Menge aller unitären zentralen S-Ringe* T *über* $\mathfrak{H}$ *auf die Menge aller unitären S-Ringe* P *über* Ψ. *Die Umkehrabbildung wird von der Zuordnung* $\mathsf{P} \to \mathsf{P}^{\#}$ *geliefert.*

Die vorangegangenen Sätze zeigen, daß unsere Aussagen über die zentralen S-Ringe über $\mathfrak{H}$ beim Dualisieren in Aussagen über die S-Ringe über Ψ übergehen und umgekehrt. Das gilt auch von den nun folgenden Kriterien für unitäre zentrale S-Ringe über $\mathfrak{H}$. Wir verzichten auf die Formulierung ihrer dualen Aussagen, die auf Grund der Sätze (1.10) und (1.10#) leicht zu gewinnen sind. Wir verarbeiten zunächst (1.10b) zu einem Kriterium der genannten Art.

(1.13) Satz. *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$ *mit den einfachen Basisgrößen* $\tau_i = \underline{\mathfrak{T}}_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. *Es ist* M *ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$ *genau dann, wenn es komplexe Zahlen* $c_{ik}^{\#}$ $(i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, r^{\#})$ *gibt mit der Eigenschaft, daß für die einfachen Basisgrößen* $\tau_k^{\#}$ $(k = 1, \ldots, r^{\#})$ *des dualen S-Moduls* $\mathsf{M}^{\#}$ *von* M *gilt:*

$$\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha) = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho \chi_\varrho(H_\alpha) = c_{ik}^{\#} \text{ für alle } \mathfrak{R}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, r^{\#}).$$

Beweis. Ist M ein unitärer S-Ring über $\mathfrak{H}$, so folgt aus (1.10b) die Existenz der $c_{ik}^{\#}$ mit der gewünschten Eigenschaft. Wir setzen umgekehrt voraus, daß es Zahlen $c_{ik}^{\#}$ mit der genannten Eigenschaft gibt. Dann liegen die Idempotenten

$$E_k = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} e_\varrho = \frac{1}{h} \sum_{\alpha=1}^{n} \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha^*)\, \varkappa_\alpha = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{r} \overline{c}_{ik}^{\#} \tau_i \qquad (k = 1, \ldots, r^{\#})$$

von Z in M und es ist $E_j E_k = \delta_{jk} E_k$. Daraus folgt $r \geqq r^{\#}$. Wegen (1.4) ist $r^{\#} = r$. Die E_k spannen ganz M auf. Folglich ist M eine Teilalgebra von Z. Weil jede einfache Basisgröße τ_i von M eine Linearkombination der E_k ist, und weil $E_k^* = E_k$ gilt, so ist mit jedem τ_i auch jedes τ_i^* eine einfache Basisgröße von M. Außerdem ist

$$E = \frac{1}{h} \sum_{H \in \mathfrak{H}} \sum_{\varrho=1}^{n} x_\varrho \chi_\varrho(H^{-1}) H = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha=1}^{n} \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha^*) \varkappa_\alpha = \sum_{k=1}^{r} E_k$$

ein Element von M. Daher ist M ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$.

Anschaulich bedeutet (1.13) folgendes: Wir betrachten die h-reihige quadratische Matrix der Zahlen $\frac{1}{x_\varrho} \chi_\varrho(H)$ ($\varrho = 1, \ldots, n$ ist der Zeilenindex, $H \in \mathfrak{H}$ ist der Spaltenindex), wobei wir jedoch jede Zeile $\left(\frac{1}{x_\varrho} \chi_\varrho(H) \mid H \in \mathfrak{H}\right)$ genau x_ϱ^2-mal wiederholen. Die Spalten zu konjugierten Elementen $H \in \mathfrak{H}$ sollen dabei nebeneinander stehen. Zu gegebenem zentralem S-Modul M über $\mathfrak{H}$ ordnen wir die Matrix so an, daß die H aus dem gleichen $\mathfrak{T}_j$ und die $\frac{1}{x_\varrho} \chi_\varrho$, deren ω_ϱ in dem gleichen $\mathfrak{T}_k^{\#}$ liegen, nebeneinander stehen. Auf diese Weise entsteht eine Einteilung der Matrix in Kästchen derart, daß in jedem (k, i)-Kästchen alle Zeilensummen den gleichen Wert c_{ki} haben. M *ist genau dann ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$, *wenn in jedem* (k, i)*-Kästchen auch alle Spaltensummen den gleichen Wert* $c_{ik}^{\#}$ *haben.*

Wir leiten aus (1.10c) und (1.13) ein Krierium für unitäre zentrale S-Ringe her, das den bidualen S-Modul benützt.

(1.14) Satz. *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$. *Es ist* M *ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$ *genau dann, wenn* $\mathsf{M}^{\#\#} = \mathsf{M}$ *gilt.*

Beweis. Die Eigenschaft ist notwendig dafür, daß M ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist nach (1.10c). Wir setzen $\mathsf{M}^{\#\#} = \mathsf{M}$ voraus. Dann stimmen die einfachen Basisgrößen $\tau_j^{\#\#}$ von $\mathsf{M}^{\#\#}$ mit den einfachen Basisgrößen τ_i von M überein. Wir können $\tau_i^{\#\#} = \tau_i$ annehmen für alle $i = 1, \ldots, r$. Wenden wir die Definition ($1.1^{\#}$) auf $\mathsf{M}^{\#}$ an, so heißt das, daß $\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha) = \tau_k^{\#}(\varkappa_\beta)$ gilt für alle $\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta \subseteqq \mathfrak{T}_i^{\#\#} = \mathfrak{T}_i$ ($i = 1, \ldots, r$; $k = 1, \ldots, r^{\#}$). Nach (1.13) ist daher M ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$.

In den Anwendungen dürfte das folgende Kriterium für unitäre zentrale S-Ringe wohl am handlichsten sein. Es benützt den dualen an Stelle des bidualen S-Moduls.

(1.15) Satz. *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$. *Es ist* M *ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$, *genau dann, wenn* $\dim_{\mathbf{C}} \mathsf{M}^{\#} = \dim_{\mathbf{C}} \mathsf{M}$ *gilt.*

Beweis. Ist M ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$, so folgt $\dim_{\mathbf{C}} \mathsf{M}^{\#} = \dim_{\mathbf{C}} \mathsf{M}$ aus (1.10d). Setzen wir $\dim_{\mathbf{C}} \mathsf{M}^{\#} = \dim_{\mathbf{C}} \mathsf{M}$ voraus, dann ist M ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$ nach (1.6).

Unsere Theorie gestattet es, ausgehend von beliebigen zentralen S-Moduln über $\mathfrak{H}$, durch wiederholte Bildung des bidualen S-Moduls unitäre zentrale S-Ringe über $\mathfrak{H}$ aufzufinden.

(1.16) Satz. *Es sei* M *ein zentraler S-Modul über* $\mathfrak{H}$. *Wir setzen* $\mathsf{M}_1=\mathsf{M}$ *und* $\mathsf{M}_i=\mathsf{M}_{i-1}^{\#\#}$ *für* $i=2,3,\ldots$. *Dann gibt es eine natürliche Zahl* t *derart, daß* M_t *ein unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$ *ist. Es gilt dann* $\mathsf{M}_{t+j}=\mathsf{M}_t$ *für alle* $j=1,2,\ldots$. *Es ist* M_t *der kleinste unitäre zentrale S-Ring über* $\mathfrak{H}$, *der* M *enthält.*

Beweis. Die zentralen S-Moduln M_i bilden nach (1.5) eine aufsteigende Kette $\mathsf{M}=\mathsf{M}_1\subseteqq\mathsf{M}_2\subseteqq\cdots\subseteqq\mathsf{M}_i\subseteqq\mathsf{M}_{i+1}\subseteqq\cdots\subseteqq\mathsf{Z}$. Ist t die kleinste natürliche Zahl derart, daß $\mathsf{M}_{t+1}=\mathsf{M}_t$ gilt, dann ist M_t nach (1.14) ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$, der M enthält. Ist T ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$ mit $\mathsf{M}\subseteqq\mathsf{T}$, so folgen aus (1.8), (1.8$^{\#}$) und (1.10c) die Beziehungen $\mathsf{M}_{i+1}=\mathsf{M}_i^{\#\#}\subseteqq\mathsf{T}^{\#\#}=\mathsf{T}$ der Reihe nach für $i=1,2,\ldots$. Daher gilt $\mathsf{M}_t\subseteqq\mathsf{T}$. Mithin ist M_t der kleinste unitäre zentrale S-Ring über $\mathfrak{H}$, der M enthält.

Es kann natürlich der triviale Fall eintreten, daß M_t gleich dem Zentrum Z der Gruppenalgebra H von $\mathfrak{H}$ ist. Das trifft genau dann zu, wenn $\dim_{\boldsymbol{C}}\mathsf{M}_t=n$ ist. Bei der Handhabung von (1.16) würde man so vorgehen, daß man die Menge $\mathfrak{H}\setminus\{E\}$ in zwei nicht leere Teilmengen $\mathfrak{T}_2,\mathfrak{T}_3$ einteilt, die beide aus vollen Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{H}$ bestehen, und $\tau_1=E$, $\tau_2=\underline{\mathfrak{T}}_2$, $\tau_3=\underline{\mathfrak{T}}_3$ als einfache Basisgrößen eines zentralen S-Moduls M benützt, um dann $\mathsf{M}_2=\mathsf{M}^{\#\#}$, $\mathsf{M}_3=\mathsf{M}_2^{\#\#},\ldots$ zu bilden. Es wird zweckmäßig sein, die Mengen $\mathfrak{T}_i$ so auszuwählen, daß $\tau_2^*=\tau_2$, $\tau_3^*=\tau_3$ oder $\tau_2^*=\tau_3$, $\tau_3^*=\tau_2$ gilt. Je nach dem Ziel der Untersuchungen wird man der Auswahl der $\mathfrak{T}_2,\mathfrak{T}_3$ zusätzliche Bedingungen auferlegen, etwa die, daß jede der Teilmengen $\mathfrak{T}_2,\mathfrak{T}_3$ ganz $\mathfrak{H}$ erzeugt, oder daß jedes $\mathfrak{T}_i$ mit jedem Element H auch jedes H^m enthält, $(m,h)=1$.

Die hier entwickelte Theorie wird einfacher, wenn $\mathfrak{H}$ eine abelsche Gruppe ist. Dann ist $\mathfrak{H}^{\#}=\{\omega_\varrho\,|\,\varrho=1,\ldots,h\}$ wegen $\omega_\varrho=\chi_\varrho$ die Gruppe der irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{H}$, die bekanntlich isomorph ist zu $\mathfrak{H}$. Außerdem ist $\psi_\varrho=\chi_\varrho$ und daher $\Psi=\mathfrak{H}^{\#}$. Jeder S-Modul M über $\mathfrak{H}$ ist zentral. Der duale S-Modul $\mathsf{M}^{\#}$ ist ein S-Modul übei der Gruppe $\mathfrak{H}^{\#}$. Ist T ein unitärer S-Ring über $\mathfrak{H}$ und $\mathsf{T}^{\#}$ der zu T duale S-Ring über $\mathfrak{H}^{\#}$, dann ist, als Algebra über $\boldsymbol{C}$ betrachtet, T isomorph zu $\mathsf{T}^{\#}$ (auch dann, wenn $\mathfrak{H}$ nicht abelsch ist). Denn T und $\mathsf{T}^{\#}$ sind halbeinfache Algebren des gleichen Ranges über $\boldsymbol{C}$. Da $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^{\#}$ isomorphe Gruppen sind, so haben wir jedoch zur Beurteilung von T und $\mathsf{T}^{\#}$ noch den Begriff der S-Isomorphie zur Verfügung. Es gilt:

(1.17) *Es gibt unitäre S-Ringe* T *über abelschen Gruppen* $\mathfrak{H}$, *die nicht S-isomorph sind zu ihrem dualen S-Ring* $\mathsf{T}^{\#}$.

Beispiel. Es sei $\mathfrak{H}=\langle A\rangle\times\langle B\rangle\times\langle C\rangle$ eine elementar abelsche Gruppe der Ordnung 8. Wir bilden den S-Modul T über $\mathfrak{H}$, der aufgespannt wird von den einfachen Basisgrößen

$$\tau_1=E,\qquad \tau_2=A+AB+AC+ABC,\qquad \tau_3=B,\qquad \tau_4=C,\qquad \tau_5=BC\,.$$

Es seien α,β,γ diejenigen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{H}$, die bestimmt sind durch

$$\begin{array}{lll} \alpha(A)=-1, & \alpha(B)=1, & \alpha(C)=1,\\ \beta(A)=1, & \beta(B)=-1, & \beta(C)=1,\\ \gamma(A)=1, & \gamma(B)=1, & \gamma(C)=-1. \end{array}$$

Um die Äquivalenzklassen von $\mathfrak{H}^{\#}$ nach der Äquivalenzrelation $\widetilde{\mathsf{T}}$ zu ermitteln, stellen wir die Tabelle der Zahlen $\omega_\varrho(\tau_i)=\chi_\varrho(\tau_i)$, $\chi_\varrho\in\mathfrak{H}^{\#}$, $i=1,\ldots,5$ auf. Hieraus ergibt sich, daß $\mathsf{T}^{\#}$ die einfachen Basisgrößen

Tabelle

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
χ_1	1	4	1	1	1
α	1	-4	1	1	1
β	1	0	-1	1	-1
$\alpha\beta$	1	0	-1	1	-1
γ	1	0	1	-1	-1
$\alpha\gamma$	1	0	1	-1	-1
$\beta\gamma$	1	0	-1	-1	1
$\alpha\beta\gamma$	1	0	-1	-1	1

$$\tau_1^{\#}=\chi_1,\quad \tau_2^{\#}=\alpha,\quad \tau_3^{\#}=\beta+\alpha\beta,$$
$$\tau_4^{\#}=\gamma+\alpha\gamma,\quad \tau_5^{\#}=\beta\gamma+\alpha\beta\gamma$$

besitzt. Es gilt $\dim_{\mathbf{C}}\mathsf{T}^{\#}=5=\dim_{\mathbf{C}}\mathsf{T}$. Aus (1.15) folgt, daß T ein S-Ring über $\mathfrak{H}$ ist. Ebenso ist $\mathsf{T}^{\#}$ ein S-Ring über $\mathfrak{H}^{\#}$ nach (1.6) oder (1.10a). Beide Tatsachen rechnet man hier natürlich leicht unmittelbar nach. Es ist jedoch T nicht S-isomorph zu $\mathsf{T}^{\#}$, weil T eine einfache Basisgröße aus 4 Elementen besitzt, die einfachen Basisgrößen von $\mathsf{T}^{\#}$ aber aus höchstens 2 Elementen bestehen.

2. Beziehungen zwischen T und $\mathsf{T}^{\#}$

Der Begriff des dualen S-Ringes gewinnt an Bedeutung durch die Existenz von numerischen Beziehungen zwischen den unitären zentralen S-Ringen über $\mathfrak{H}$ und ihren dualen S-Ringen über Ψ. Bevor wir uns diesen Untersuchungen widmen, gehen wir auf zwei Eigenschaften von S-Ringen und ihre Verkoppelung mit der gleichen Eigenschaft des dualen S-Ringes ein: Primitivität und Rationalität.

In diesem Abschnitt sei T stets ein unitärer zentraler S-Ring über $\mathfrak{H}$ und $\mathsf{T}^{\#}$ sein dualer S-Ring über Ψ. Wir wählen die Bezeichnungen der einfachen Basisgrößen so, daß $\tau_1=E$ und $\tau_1^{\#}=\psi_1$ gilt. Ist $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{H}$ der Ordnung l, so sei Λ die Menge der $\psi_\varrho\in\Psi$ mit $\chi_\varrho(L)=x_\varrho$ für alle $L\in\mathfrak{L}$. Die χ_ϱ mit $\psi_\varrho\in\Lambda$ lassen sich mit den irreduziblen Charakteren der Faktorgruppe $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ und $\underline{\Lambda}$ läßt sich mit dem Charakter der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ identifizieren.

(2.1) *Es sei $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Es ist $\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$ genau dann, wenn $\underline{\Lambda}\in\mathsf{T}^{\#}$.*

Beweis. I. Es sei $\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$. Weil sich $\underline{\Lambda}$ mit dem Charakter der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}/\mathfrak{L}$ identifizieren läßt, erhalten wir

$$\underline{\Lambda}(\varkappa_\alpha)=\begin{cases}\dfrac{h}{l}=|\mathfrak{H}/\mathfrak{L}|, & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{L},\\ 0 \qquad\qquad , & \textit{wenn } \mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{H}\setminus\mathfrak{L}.\end{cases}$$

Da $\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$ und $\underline{\mathfrak{H}}-\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$ gilt nach Voraussetzung, so ist $\underline{\Lambda}$ konstant auf jeder der Mengen $\{\varkappa_\alpha|\,\mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{T}_i\}$; $i=1,\ldots,r$. Aus (1.10b) folgt $\underline{\Lambda}\in\mathsf{T}^{\#}$.

II. Wir setzen $\underline{\Lambda}\in\mathsf{T}^{\#}$ voraus. Wir kehren die in I. benützte Schlußweise um: Weil nach (1.10b) $\underline{\Lambda}(\varkappa_\alpha)=\underline{\Lambda}(\varkappa_\beta)$ gilt für alle $\mathfrak{K}_\alpha$, $\mathfrak{K}_\beta\subseteqq\mathfrak{T}_i$ und alle $i=1,\ldots,r$, und weil $\underline{\Lambda}(\varkappa_\gamma)=\frac{h}{l}$, wenn $\mathfrak{K}_\gamma\subseteqq\mathfrak{L}$, und $\underline{\Lambda}(\varkappa_\gamma)=0$, wenn $\mathfrak{K}_\gamma\subseteqq\mathfrak{H}\setminus\mathfrak{L}$, so ist $\mathfrak{L}$ die Vereinigung von einigen $\mathfrak{T}_i$, d.h. $\underline{\mathfrak{L}}\in\mathsf{T}$.

(2.2) Satz. $\mathsf{T}^{\#}$ *ist primitiv genau dann, wenn* T *primitiv ist.*

Beweis. I. Es sei T imprimitiv. Dann existiert eine Untergruppe $\langle E\rangle < \mathfrak{L} < \mathfrak{H}$ mit $\underline{\mathfrak{L}} \in \mathsf{T}$. Weil T ein zentraler S-Ring ist, so ist $\mathfrak{L}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Aus (2.1) folgt $\underline{\Lambda} \in \mathsf{T}^{\#}$. Somit ist $\underline{\Lambda}$ eine Summe von einfachen Basisgrößen von $\mathsf{T}^{\#}$. Wir wählen die Bezeichnungen so, daß $\underline{\Lambda} = \sum_{k=1}^{s} \tau_k^{\#}$ gilt. Dann spannen die $\tau_k^{\#}$ $(k=1, \ldots, s)$ eine echte Teilalgebra von $\mathsf{T}^{\#}$ auf, die von $\boldsymbol{C}\tau_1^{\#} = \boldsymbol{C}\psi_1$ verschieden ist und mit jedem $\tau_k^{\#}$ auch $\bar{\tau}_k^{\#}$ enthält. Folglich ist $\mathsf{T}^{\#}$ imprimitiv.

II. Es sei $\mathsf{T}^{\#}$ imprimitiv. Dann enthält $\mathsf{T}^{\#}$ eine von $\mathsf{T}^{\#}$ und $\boldsymbol{C}\psi_1$ verschiedene Teilalgebra P, die den Voraussetzungen von (1.11) genügt. Daher existiert nach (1.11) ein Normalteiler $\langle E\rangle < \mathfrak{L} < \mathfrak{H}$ so, daß das zugehörige Element $\underline{\Lambda}$ in P und damit in $\mathsf{T}^{\#}$ liegt. Aus (2.1) folgt $\underline{\mathfrak{L}} \in \mathsf{T}$. Mithin ist T imprimitiv.

Es sei m eine zur Gruppenordnung h teilerfremde ganz rationale Zahl. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{K}_\alpha^{(m)}$ die Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{H}$, die aus den Elementen H^m, $H \in \mathfrak{K}_\alpha$, besteht, und mit $\varkappa_\alpha^{(m)} = \underline{\mathfrak{K}}_\alpha^{(m)}$ die zugehörige Klassensumme. Ist $\eta = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \varkappa_\alpha$ ein Element von Z, so setzen wir $\eta^{(m)} = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \varkappa_\alpha^{(m)}$. Wir nennen η eine *rationale Größe* von Z, wenn $\eta^{(m)} = \eta$ gilt für alle zu h teilerfremden ganz rationalen Zahlen m.

Ist χ_ϱ ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{H}$, dann ist auch $H \to \chi_\varrho(H^m)$ ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{H}$, den wir mit $\chi_\varrho^{(m)}$ bezeichnen. Dementsprechend verwenden wir die Bezeichnungen $\psi_\varrho^{(m)}$ und $\omega_\varrho^{(m)}$ für die mit $\chi_\varrho^{(m)}$ an Stelle von χ_ϱ gebildeten Elemente von Ψ bzw. von $\mathfrak{H}^{\#}$. Ist $\gamma = \sum_{\varrho=1}^{n} b_\varrho \psi_\varrho$ ein Element von $\mathsf{Z}^{\#}$, dann setzen wir $\gamma^{(m)} = \sum_{\varrho=1}^{n} b_\varrho \psi_\varrho^{(m)}$. Wir nennen γ eine *rationale Größe* von $\mathsf{Z}^{\#}$, wenn $\gamma^{(m)} = \gamma$ gilt für alle zu h teilerfremden ganz rationalen Zahlen m.

Ein S-Ring über $\mathfrak{H}$ (bzw. über Ψ) heißt *rational*, wenn jede seiner einfachen Basisgrößen eine rationale Größe ist.

(2.3) *Aus* $(m, h) = 1$ *folgt* $(\tau_k^{\#})^{(m)}(\varkappa_\alpha) = \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha^{(m)})$ *für alle* $\alpha = 1, \ldots, n$ *und alle* $k = 1, \ldots, r$.

Beweis. Es ist

$$(\tau_k^{\#})^{(m)}(\varkappa_\alpha) = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho \chi_\varrho^{(m)}(H_\alpha) = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho \chi_\varrho(H_\alpha^m) = \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha^{(m)}).$$

(2.4) *Aus* $(m, h) = 1$ *folgt* $\omega_\varrho(\tau_i^{(m)}) = \omega_\varrho^{(m)}(\tau_i)$ *für alle* $\varrho = 1, \ldots, n$ *und alle* $i = 1, \ldots, r$.

Beweis. Es ist

$$\omega_\varrho(\tau_i^{(m)}) = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i} \frac{k_\alpha}{x_\varrho} \chi_\varrho(H_\alpha^m) = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i} \frac{k_\alpha}{x_\varrho} \chi_\varrho^{(m)}(H_\alpha) = \omega_\varrho^{(m)}(\tau_i).$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Aussagen:

(2.5) *Es sei* $(m, h) = 1$ *und* τ_i *eine rationale Größe von* T. *Dann gilt* $(\tau_k^{\#})^{(m)}(\varkappa_\alpha) = \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha)$ *für alle* $\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i$ *und alle* $k = 1, \ldots, r$.

Beweis. Weil τ_i eine rationale Größe ist, so folgt aus $\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{T}_i$ auch $\mathfrak{K}_\alpha^{(m)} \subseteqq \mathfrak{T}_i$. Die Behauptung ergibt sich nun aus (2.3) und (1.10b).

(2.6) *Es sei* $(m, h) = 1$ *und* $\tau_k^{\#}$ *eine rationale Größe von* $\mathsf{T}^{\#}$. *Dann gilt* $\omega_\varrho(\tau_i^{(m)}) = \omega_\varrho(\tau_i)$ *für alle* $\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}$ *und alle* $i = 1, \ldots, r$.

Beweis. Mit ω_ϱ liegt nach Voraussetzung auch $\omega_\varrho^{(m)}$ in $\mathfrak{T}_k^{\#}$. Aus (2.4) und der Definition (1.1) des dualen S-Moduls folgt die Behauptung.

(2.7) Satz. $\mathsf{T}^{\#}$ *ist ein rationaler unitärer S-Ring über* Ψ *genau dann, wenn* T *ein rationaler unitärer zentraler S-Ring über* $\mathfrak{H}$ *ist.*

Beweis. I. Aus $\tau_i^{(m)} = \tau_i$ für alle zu h teilerfremden ganz rationalen Zahlen m und alle $i = 1, \ldots, r$ folgt aus (2.5) $(\tau_k^{\#})^{(m)}(\varkappa_\alpha) = \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha)$ für alle $\alpha = 1, \ldots, n$ und alle $k = 1, \ldots, r$. Also gilt $(\tau_k^{\#})^{(m)} = \tau_k^{\#}$ für alle m mit $(m, h) = 1$ und alle $k = 1, \ldots, r$.

II. Wenn umgekehrt $(\tau_k^{\#})^{(m)} = \tau_k^{\#}$ gilt für alle $k = 1, \ldots, r$ und alle zu h teilerfremden ganz rationalen Zahlen m, so folgt aus (2.6) $\omega_\varrho(\tau_i^{(m)}) = \omega_\varrho(\tau_i)$ für alle $\varrho = 1, \ldots, n$ und alle $i = 1, \ldots, r$. Da wir Z mit der Algebra aller komplexwertigen Funktionen auf der Menge $\mathfrak{H}^{\#} = \{\omega_\varrho \mid \varrho = 1, \ldots, n\}$ identifizieren können, so ist $\tau_i^{(m)} = \tau_i$ für alle m mit $(m, h) = 1$ und alle $i = 1, \ldots, r$.

(2.8) *Wir bezeichnen mit* $n_i = |\mathfrak{T}_i|$ *die Anzahl der Elemente in* $\mathfrak{T}_i$ *und setzen* $n_k^{\#} = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho^2$ $(i, k = 1, \ldots, r)$.

Wir untersuchen jetzt die Beziehungen zwischen den Zahlen $c_{ki} = \omega_\varrho(\tau_i)$, $\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}$; $c_{ik}^{\#} = \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha)$, $\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{T}_i$; n_i und $n_k^{\#}$. Dazu definieren wir die Matrizen

$$C = (c_{ki})_{k,i=1,\ldots,r} \quad ; \quad C^{\#} = (c_{ik}^{\#})_{i,k=1,\ldots,r}$$

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & & & 0 \\ & n_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n_r \end{pmatrix} \quad ; \quad N^{\#} = \begin{pmatrix} n_1^{\#} & & & 0 \\ & n_2^{\#} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & n_r^{\#} \end{pmatrix}$$

und bemerken zunächst:

(2.9) *Es ist* $c_{1i} = n_i$, $c_{k1} = 1$, $c_{1k}^{\#} = n_k^{\#}$, $c_{i1}^{\#} = 1$ *für alle* $i, k = 1, \ldots, r$.

(2.10) *Es gilt* $n_k^{\#} c_{ki} = n_i c_{ik}^{\#}$ *für alle* $i, k = 1, \ldots, r$, *also* $C^T N^{\#} = N C^{\#}$.

Beweis. Weil $\omega_\varrho(\tau_i) = \omega_\sigma(\tau_i)$ ist für alle $\omega_\varrho, \omega_\sigma \in \mathfrak{T}_k^{\#}$ nach (1.1) und weil

$$\sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho \chi_\varrho(H_\alpha) = \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha) = \tau_k^{\#}(\varkappa_\beta) = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho \chi_\varrho(H_\beta)$$

ist für alle $\mathfrak{K}_\alpha, \mathfrak{K}_\beta \subseteqq \mathfrak{T}_i$ nach (1.10b), so gilt

$$n_k^{\#} c_{ki} = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho^2 \omega_\varrho(\tau_i) = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{T}_i} \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} k_\alpha x_\varrho \chi_\varrho(H_\alpha) = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{T}_i} k_\alpha \tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha) = n_i c_{ik}^{\#}.$$

(2.11) *Bezeichnet* E_r *die Einheitsmatrix des Grades* r, *so gilt* $\overline{C} C^{\#} = h E_r$.

Beweis. Wir berechnen den (k, j)-Koeffizienten der linken Seite und setzen $\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}$, $\mathfrak{K}_{\alpha_i} \subseteqq \mathfrak{T}_i$ voraus. Weil $\tau_j^{\#}(\varkappa_{\alpha_i}) = \sum_{\omega_\sigma \in \mathfrak{T}_j^{\#}} x_\sigma \chi_\sigma(H_{\alpha_i}) = \sum_{\omega_\sigma \in \mathfrak{T}_j^{\#}} x_\sigma \chi_\sigma(H)$ gilt für alle $H \in \mathfrak{T}_i$, so erhalten wir:

$$\sum_{i=1}^{r} \bar{c}_{ki}\, c_{ij}^{\#} = \sum_{i=1}^{r} \bar{\omega}_{\varrho}(\tau_i)\, \tau_j^{\#}(\varkappa_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{H \in \mathfrak{T}_i} \frac{1}{x_{\varrho}} \chi_{\varrho}(H^{-1}) \sum_{\omega_\sigma \in \mathfrak{T}_j^{\#}} x_\sigma \chi_\sigma(H)$$

$$= \sum_{\omega_\sigma \in \mathfrak{T}_j^{\#}} \frac{x_\sigma}{x_{\varrho}} \sum_{H \in \mathfrak{H}} \chi_{\varrho}(H^{-1}) \chi_\sigma(H) = h\, \delta_{kj}.$$

(2.12) *Es ist* $\bar{C}^T N^{\#} C = hN$.

Beweis. Die ω_{ϱ} sind homomorphe Abbildungen von Z und also auch von T. Daher erhalten wir für den (i, j)-Koeffizienten der linken Seite mit Hilfe von (1.1) und (2.8) die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{r} \bar{c}_{ki}\, n_k^{\#}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{\omega_{\varrho} \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_{\varrho}^2 \omega_{\varrho}(\tau_i^*)\, \omega_{\varrho}(\tau_j) = \sum_{\varrho=1}^{n} x_{\varrho}^2 \omega_{\varrho}(\tau_i^*\, \tau_j)$$

$$= \sum_{H \in \mathfrak{T}_i} \sum_{K \in \mathfrak{T}_j} \sum_{\varrho=1}^{n} x_{\varrho} \chi_{\varrho}(H^{-1} K) = h\, n_i\, \delta_{ij};$$

denn $\sum_{\varrho=1}^{n} x_{\varrho} \chi_{\varrho}$ ist der Charakter der regulären Darstellung von $\mathfrak{H}$.

(2.13) *Es ist* $(\overline{C^{\#}})^T N C^{\#} = hN^{\#}$.

Beweis. Es sei $\mathfrak{K}_{\alpha_i} \subseteq \mathfrak{T}_i$. Wir benützen (1.10b) und erhalten für den (k, j)-Koeffizienten der linken Seite:

$$\sum_{i=1}^{r} \bar{c}_{ik}^{\#}\, n_i\, c_{ij}^{\#} = \sum_{i=1}^{r} n_i\, \bar{\tau}_k^{\#}(\varkappa_{\alpha_i})\, \tau_j^{\#}(\varkappa_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i} k_\alpha\, \bar{\tau}_k^{\#}(\varkappa_\alpha)\, \tau_j^{\#}(\varkappa_\alpha)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i} k_\alpha \sum_{\omega_{\varrho} \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_{\varrho} \chi_{\varrho}(H_\alpha^{-1}) \sum_{\omega_\sigma \in \mathfrak{T}_j^{\#}} x_\sigma \chi_\sigma(H_\alpha)$$

$$= \sum_{\omega_{\varrho} \in \mathfrak{T}_k^{\#}} \sum_{\omega_\sigma \in \mathfrak{T}_j^{\#}} x_{\varrho}\, x_\sigma \sum_{H \in \mathfrak{H}} \chi_{\varrho}(H^{-1}) \chi_\sigma(H) = \sum_{\omega_{\varrho} \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_{\varrho}^2\, h\, \delta_{kj} = h\, n_k^{\#}\, \delta_{kj}.$$

(2.14) *Es ist* $C^T N^{\#} C = (h n_i \delta_{i^* j})_{i, j=1, \ldots, r}$, *wobei* $\tau_i^* = \tau_{i^*}$ *gesetzt wird für alle* $i = 1, \ldots, r$.

Beweis. Es gilt $\tau_i \tau_j = \sum_{k=1}^{r} a_{ijk}\, \tau_k$ mit ganz rationalen Koeffizienten $a_{ijk} \geqq 0$. Es sei $\omega_{\varrho} \in \mathfrak{T}_l^{\#}$. Die ω_σ sind homomorphe Abbildungen von T. Daher ist

$$c_{li}\, c_{lj} = \omega_{\varrho}(\tau_i)\, \omega_{\varrho}(\tau_j) = \omega_{\varrho}(\tau_i\, \tau_j) = \sum_{k=1}^{r} a_{ijk}\, c_{lk}.$$

Daraus ergibt sich für den (i, j)-Koeffizienten der linken Seite unserer Behauptung die Gleichung

$$\sum_{l=1}^{r} n_l^{\#}\, c_{li}\, c_{lj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} \sum_{l=1}^{r} \sum_{\omega_\sigma \in \mathfrak{T}_l^{\#}} x_\sigma^2 \omega_\sigma(\tau_k) = \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} \sum_{H \in \mathfrak{T}_k} \sum_{\sigma=1}^{n} x_\sigma \chi_\sigma(H) = a_{ij1}\, h.$$

Weil

$$a_{ij1} = \begin{cases} n_i, & \textit{wenn } \tau_i^* = \tau_j, \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases}$$

gilt, so ist damit (2.14) bewiesen.

(2.15) *Es ist* $(C^{\#})^T N C^{\#} = (h\, n_k^{\#}\, \delta_{k^* j})_{k, j=1, \ldots, r}$, *wobei* $\bar{\tau}_k^{\#} = \tau_{k^*}^{\#}$ *gesetzt wird für alle* $k = 1, \ldots, r$.

Beweis. Weil $\mathsf{T}^{\#}$ ein unitärer S-Ring über Ψ ist, so gilt $\tau_i^{\#}\tau_j^{\#}=\sum_{k=1}^{r} b_{ijk}\,\tau_k^{\#}$ mit komplexen Koeffizienten b_{ijk}, die sich mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen der χ_ϱ berechnen lassen. Es sei $\mathfrak{K}_\alpha \subseteqq \mathfrak{T}_l$. Nach der Definition des Produktes zweier Elemente von $\mathsf{Z}^{\#}$ gilt

$$c_{li}^{\#}\,c_{lj}^{\#}=\tau_i^{\#}(\varkappa_\alpha)\,\tau_j^{\#}(\varkappa_\alpha)=(\tau_i^{\#}\,\tau_j^{\#})\,(\varkappa_\alpha)=\sum_{k=1}^{r} b_{ijk}\,c_{lk}^{\#}.$$

Hieraus folgt mit (1.10b) für den (i,j)-Koeffizienten der linken Seite unserer Behauptung die Gleichung

$$\sum_{l=1}^{r} n_l\,c_{li}^{\#}\,c_{lj}^{\#}=\sum_{k=1}^{r} b_{ijk}\sum_{l=1}^{r}\sum_{H\in\mathfrak{T}_l}\Big(\sum_{\omega_\varrho\in\mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho\,\chi_\varrho(H)\Big)=\sum_{k=1}^{r} b_{ijk}\sum_{\omega_\varrho\in\mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho\sum_{H\in\mathfrak{H}}\chi_\varrho(H)=b_{ij1}\,h.$$

Nun ist

$$b_{ij1}=\begin{cases} n_i^{\#}, & \textit{wenn } \bar{\tau}_i^{\#}=\tau_j^{\#},\\ 0\ , & \textit{sonst}.\end{cases}$$

Daraus folgt die Behauptung.

(2.16) *Gleichwertig sind die folgenden Aussagen:*

(a) $\bar{C}=C$.

(b) $(\overline{C^{\#}})=C^{\#}$.

(c) $\tau_i^{*}=\tau_i$ *für alle* $i=1,\ldots,r$.

(d) $\bar{\tau}_k^{\#}=\tau_k^{\#}$ *für alle* $k=1,\ldots,r$.

Beweis. I. Wenn $\bar{C}=C$, so ist $C^T N^{\#} C=\bar{C}^T N^{\#} C=hN$ nach (2.12) eine Diagonalmatrix. Aus (2.14) folgt dann $\tau_i^{*}=\tau_i$ für alle $i=1,\ldots,r$.

II. Wenn $\tau_i^{*}=\tau_i$, so gilt mit $\omega_\varrho\in\mathfrak{T}_k^{\#}$ die Gleichung $\bar{c}_{ki}=\bar{\omega}_\varrho(\tau_i)=\omega_\varrho(\tau_i^{*})=\omega_\varrho(\tau_i)=c_{ki}$. Mit I. ergibt sich daraus die Gleichwertigkeit von (a) und (c).

III. Entsprechend beweist man die Gleichwertigkeit von (b) und (d), indem man (2.13), (2.15) und, unter der Voraussetzung $\bar{\tau}_k^{\#}=\tau_k^{\#}$, $\mathfrak{K}_\alpha\subseteqq\mathfrak{T}_i$, die Gleichung $\bar{c}_{ik}^{\#}=\bar{\tau}_k^{\#}(\varkappa_\alpha)=\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha)=c_{ik}^{\#}$ benützt.

IV. Die Gleichwertigkeit von (c) und (d) ergibt sich einerseits daraus, daß aus $\tau_i^{*}=\tau_i$ für alle $i=1,\ldots,r$ auch $\omega_\varrho(\tau_i)=\omega_\varrho(\tau_i^{*})=\bar{\omega}_\varrho(\tau_i)$ folgt für alle $i=1,\ldots,r$. ω_ϱ und $\bar{\omega}_\varrho$ liegen dann in derselben Äquivalenzklasse $\mathfrak{T}_k^{\#}$, d.h. es gilt $\bar{\tau}_k^{\#}=\tau_k^{\#}$ für alle $k=1,\ldots,r$. Andererseits folgt aus $\bar{\tau}_k^{\#}=\tau_k^{\#}$ für alle $k=1,\ldots,r$, daß stets $\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha)=\bar{\tau}_k^{\#}(\varkappa_\alpha)=\tau_k^{\#}(\varkappa_\alpha^{*})$ gilt. Wegen (1.1$^{\#}$), angewandt auf $\mathsf{T}^{\#}$, und wegen (1.10c) treten $\varkappa_\alpha$ und $\varkappa_\alpha^{*}$ immer in derselben einfachen Basisgröße τ_i auf, d.h. es ist $\tau_i^{*}=\tau_i$ für alle $i=1,\ldots,r$.

(2.17) *Die Zahlen* $\det C$ *und* $\det C^{\#}$ *sind beide ganz algebraisch und durch* h *teilbar. Es gilt* $\det\bar{C}\cdot\det C^{\#}=h^r$.

Beweis. Die c_{ki} und die $c_{ik}^{\#}$ sind ganz algebraisch, also auch $\det C$ und $\det C^{\#}$. Wir addieren in $\det C$ die mit $n_k^{\#}$ multiplizierte k-te Zeile zur ersten Zeile für $k=1,\ldots,r$. Danach stehen in der ersten Zeile die Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{r} n_k^{\#}\,c_{ki}=\sum_{k=1}^{r}\sum_{\omega_\varrho\in\mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho^2\,\omega_\varrho(\tau_i)=\sum_{H\in\mathfrak{T}_i}\sum_{\varrho=1}^{n} x_\varrho\,\chi_\varrho(H)=h\,\delta_{1i}.$$

Also ist det C durch h teilbar. In det $C^{\#}$ liefert die Addition der mit n_i multiplizierten i-ten Zeile zur ersten Zeile für $i=1, \ldots, r$ in der ersten Zeile danach die Koeffizienten

$$\sum_{i=1}^{r} n_i c_{ik}^{\#} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{H \in \mathfrak{T}_i} \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho \chi_\varrho(H) = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho \sum_{H \in \mathfrak{H}} \chi_\varrho(H) = h\, \delta_{1k}.$$

Daher ist auch det $C^{\#}$ durch h teilbar. Durch Determinantenbildung folgt aus (2.11) unmittelbar $\det \overline{C} \cdot \det C^{\#} = h^r$.

Zur Berechnung der c_{ki}, $c_{ik}^{\#}$ ist die Charakterentafel der Gruppe $\mathfrak{H}$ erforderlich. Daher werden für die Anwendungen solche Aussagen wertvoll sein, die nur die Kenntnis der Zahlen n_i, $n_k^{\#}$ voraussetzen. Als wichtigste Folgerung aus den vorangegangenen Aussagen beweisen wir nach dem Muster des von WIELANDT [*9*, 30.1 (A) und (C)] gegebenen Beweises für den Satz von FRAME [*3*]:

(2.18) Satz. (a) *Die Zahlen*

$$q = h^{r-2} \prod_{i=1}^{r} \frac{n_i}{n_i^{\#}} \quad \textit{und} \quad q^{\#} = h^{r-2} \prod_{i=1}^{r} \frac{n_i^{\#}}{n_i}$$

sind beide ganz rational.

(b) *Sind alle τ_i $(i=1, \ldots, r)$ rationale Größen, oder, gleichwertig damit, alle $\tau_k^{\#}$ $(k=1, \ldots, r)$ rationale Größen, so sind die beiden Zahlen q und $q^{\#}$ Quadrate. Die τ_i (bzw. die $\tau_k^{\#}$) sind sicher dann rationale Größen, wenn die n_i (bzw. die $n_k^{\#}$) paarweise verschieden sind.*

Beweis. (a) Wir bilden in (2.12) auf beiden Seiten der Gleichung die Determinante und erhalten

$$\det \overline{C} \cdot \det C \cdot \prod_{i=1}^{r} n_i^{\#} = h^r \prod_{i=1}^{r} n_i.$$

Aus (2.17) folgt, daß q ganz rational ist. Mit Hilfe von (2.13) und (2.17) erhalten wir das gleiche Ergebnis für $q^{\#}$.

(b) Alle Zahlen $\chi_\varrho(H)$ sind Summen von h-ten Einheitswurzeln. Ein beliebiger Automorphismus μ des Körpers der h-ten Einheitswurzeln wird durch Potenzieren der h-ten Einheitswurzeln mit einer zu h teilerfremden Zahl m geliefert. Es gilt $\chi_\varrho(H)^\mu = \chi_\varrho(H^m)$. Sind alle τ_i und, damit gleichwertig (2.7), auch alle $\tau_k^{\#}$ rational, dann folgt aus (2.6) mit $\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}$

$$c_{ki}^{\mu} = \omega_\varrho(\tau_i)^\mu = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i} \frac{k_\alpha}{x_\varrho} \chi_\varrho(H_\alpha)^\mu = \sum_{\mathfrak{K}_\alpha \subseteq \mathfrak{T}_i} \frac{k_\alpha}{x_\varrho} \chi_\varrho(H_\alpha^m) = \omega_\varrho(\tau_i^{(m)}) = \omega_\varrho(\tau_i) = c_{ki}.$$

Mithin sind alle c_{ki} ganz rational. Folglich ist $\frac{1}{h} \det C = \frac{1}{h} \det \overline{C}$ ganz rational. Daher ist q ein Quadrat. Zieht man (2.5) an Stelle von (2.6) heran, so folgt, daß auch die Zahlen $c_{ik}^{\#}$, $\frac{1}{h} \det C^{\#} = \frac{1}{h} \det(\overline{C^{\#}})$ sämtlich ganz rational sind. Daher ist $q^{\#}$ ein Quadrat.

Es sei $(m, h) = 1$. Da wir die letzte Aussage von (2.18b) im folgenden nicht verwenden werden, können wir die Ergebnisse des 6. Abschnittes (Teil II) benützen. Mit τ_i ist auch $\tau_i^{(m)}$ eine einfache Basisgröße von T nach (6.2).

τ_i und $\tau_i^{(m)}$ haben die gleiche Länge n_i. Sind die n_i paarweise verschieden, so ist daher jedes τ_i eine rationale Größe. Mit $\tau_k^{\#}$ ist auch $(\tau_k^{\#})^{(m)}$ eine einfache Basisgröße von $\mathsf{T}^{\#}$ nach (6.5). Die Charaktere χ_ϱ und $\chi_\varrho^{(m)}$ haben den gleichen Grad x_ϱ. Somit ist den Größen $\tau_k^{\#}$ und $(\tau_k^{\#})^{(m)}$ die gleiche Zahl $n_k^{\#} = \sum_{\omega_\varrho \in \mathfrak{T}_k^{\#}} x_\varrho^2$ zugeordnet. Wenn daher die $n_k^{\#}$ paarweise verschieden sind, so sind alle $\tau_k^{\#}$ rationale Größen.

(2.19) *Es seien $p_1, \ldots, p_s$ die sämtlichen verschiedenen Primteiler von h. Dann gelten mit geeigneten, voneinander verschiedenen Primzahlen $q_1, \ldots, q_t$, von denen keine in h aufgeht, die Primzahlzerlegungen*

$$\prod_{i=1}^{r} n_i = p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} q_1^{\beta_1} \ldots q_t^{\beta_t} \quad \textit{und} \quad \prod_{k=1}^{r} n_k^{\#} = p_1^{\alpha_1^{\#}} \ldots p_s^{\alpha_s^{\#}} q_1^{\beta_1} \ldots q_t^{\beta_t}.$$

Beweis. Aus (2.18) folgt $q \cdot q^{\#} = h^{2(r-2)}$. Daher gehen in den ganz rationalen Zahlen q und $q^{\#}$ nur Primteiler von h auf. Das ist nach (2.18) gleichwertig mit unserer Behauptung.

Als Folgerung aus (2.19) erhalten wir:

(2.20) Satz. *Ist $h = p^a$ eine Potenz einer Primzahl p, dann ist mindestens eine der beiden Zahlen*

$$q_0 = \prod_{i=1}^{r} \frac{n_i}{n_i^{\#}}, \qquad q_0^{\#} = \prod_{i=1}^{r} \frac{n_i^{\#}}{n_i}$$

ganz rational und gleich einer p-Potenz p^b, $b \geqq 0$.

Literatur

[1] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press 1911; New York: Dover Publications 1955.

[2] — On certain simply-transitive permutation groups. Proc. Cambridge philos. Soc. **20**, 482–484 (1921).

[3] FRAME, J. S.: The double cosets of a finite group. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 458–467 (1941).

[4] KOCHENDÖRFFER, R.: Untersuchungen über eine Vermutung von W. Burnside. Schriften Math. Seminar u. Institut f. Angew. Math. Universität Berlin **3**, 155–180 (1937).

[5] SCHUR, I.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. **1933**, 598–623.

[6] TAMASCHKE, O.: Ringtheoretische Behandlung einfach transitiver Permutationsgruppen. Math. Z. **73**, 393–408 (1960).

[7] WIELANDT, H.: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. **40**, 582–587 (1935).

[8] — Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II. Math. Z. **52**, 384–393 (1949).

[9] — Permutationsgruppen. Vorlesungen an der Universität Tübingen im Winter-Semester 1954/55. Ausgearbeitet von J. André. English translation by R. Bercov. California Institute of Technology, Pasadena, Cal., 1962.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität
(Eingegangen am 6. Juni 1962)