Werk

Titel: Automorphismen und Spiegelungen eudoxischer Halbgruppen.

Autor: Krull, Wolfgang

Jahr: 1962

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0079|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

KRULL, W.
Math. Zeitschr. 79, 53–68 (1962)

Automorphismen und Spiegelungen eudoxischer Halbgruppen

Von

WOLFGANG KRULL

In einer an gleicher Stelle erschienenen Note [*1*] habe ich untersucht, wie sich der Aufbau der reellen Analysis durchführen läßt, wenn man im Sinne der Griechen nicht vom „Zahl"-, sondern vom „Größen"-Begriff ausgeht, und zwar mit moderner Fassung der Konzeptionen des auf *Eudoxos* zurückgehenden 5. Buches Euklids [*2*]. Man hat dann den Fundamentalbegriff der *archimedischen Gruppen*[1]) zugrunde zu legen. Unter diesen sind die *eudoxischen Gruppen* durch eine einfache Transitivitätseigenschaft in natürlicher Weise ausgezeichnet; der Satz, daß bei einer eudoxischen Gruppe der Endomorphismenring zu einem reellen Zahlenkörper isomorph wird, ermöglicht den Anschluß an den üblichen Aufbau der Analysis.

Im folgenden wird das Studium der eudoxischen Gruppen unter neuen Gesichtspunkten weitergeführt. Elementargeometrisch, vom Standpunkt des Problems der „Konstruktion mit Zirkel und Lineal" aus, sind die *quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Gruppen* ausgezeichnet, bei denen der zugehörige Endomorphismenkörper keiner echten reell quadratischen Erweiterung fähig ist. Wir zeigen nun: Die quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Gruppen lassen sich im Rahmen eines systematischen Aufbaus der Theorie der archimedischen Gruppen in einfacher und natürlicher Weise kennzeichnen — ohne Rückgriff auf die Körpertheorie oder andere der Sache ferner liegende Betrachtungen. Man kann nämlich bei den archimedischen Gruppen den Automorphismen eine zweite Klasse von Abbildungen gegenüberstellen, die sinnvoll als *Spiegelungen* bezeichnet werden und die sich axiomatisch genauso einfach und plausibel charakterisieren lassen wie die Automorphismen selbst. Bei einer eudoxischen Gruppe bilden Automorphismen und Spiegelungen zusammen eine (nichtabelsche) *Diedergruppe*, und die quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Gruppen sind dadurch gekennzeichnet, daß jede Spiegelung einen Fixpunkt besitzt.

Das Schwergewicht der Untersuchung liegt nicht auf den meistens sehr einfachen, oft geradezu trivialen Beweisen, sondern auf der Axiomatik. In dieser Hinsicht ist es besonders wichtig, daß die axiomatische Einführung der Spiegelungen richtungweisend wird für die Formulierung eines allgemeinen

[1]) „Archimedische Gruppe" bedeutet im folgenden soviel wie „total geordnete archimedische abelche Gruppe" im Sinne von [*1*]. Zum Übergang von der Halbgruppe zur Gruppe vgl. [*1*], §3. Vgl. auch die neue, ausführliche Definition der archimedischen Halbgruppe in §1 unserer Note.

Abbildungssatzes, der seinerseits als Grundlage dienen kann für eine Einordnung der Theorie des Messens bei mehrdimensionalen physikalischen Größensystemen in die Gedankenkreise der modernen abstrakten Mathematik. (Etwas ausführlichere Bemerkungen über die Bedeutung des Abbildungssatzes finden sich am Anfang von § 5.)

Anders als in der Einleitung betrachten wir im folgenden fast ausschließlich Halbgruppen und Halbkörper statt Gruppen und Körper. Die Übertragung der gewonnenen Ergebnisse auf Gruppen und Körper macht keine Schwierigkeiten (vgl. [1], § 3).

§ 1. Vorbemerkungen

Wir stellen die wichtigsten Definitionen und Ergebnisse von [1] kurz zusammen, zum Teil in von [1] leicht abweichender Formulierung. Die Menge $\mathfrak{A}$ mit den Elementen $a, b, c, \ldots$ wird *archimedische Halbgruppe* genannt, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. $\mathfrak{A}$ ist eine total geordnete, kommutative, additiv geschriebene Halbgruppe ohne Nullelement. 2. Ist $a > b$, so gibt es stets in $\mathfrak{A}$ genau ein c mit $b + c = a$, aber kein d mit $a + d = b$. 3. Zu jedem Paar a, b aus $\mathfrak{A}$ gibt es eine natürliche Zahl n, derart daß $n \cdot a > b$. Wie leicht zu sehen, hätte man auch (analog wie in [1], § 3) definieren können: Eine archimedische Halbgruppe ist gleich der Menge aller positiven Elemente einer archimedischen Gruppe[1]). — Die archimedische Halbgruppe $\mathfrak{A}$ heißt *Divisionshalbgruppe*, wenn für jedes b aus $\mathfrak{A}$ und jede natürliche Zahl n die Gleichung $n \cdot x = b$ in $\mathfrak{A}$ eine (notwendig eindeutig bestimmte) Lösung $x = c$ besitzt. — Bei einer Divisionshalbgruppe $\mathfrak{A}$ können und wollen wir nicht nur die natürlichen, sondern auch die positiven rationalen Zahlen als Operatoren benutzen $\left(\frac{m}{n} \cdot a \text{ bedeutet dann die Lösung von } n \cdot x = m \cdot a\right)$.

Wie in [1] werden die Elementepaare $\langle a, b\rangle$, $\langle c, d\rangle$ aus $\mathfrak{A}$ *proportional* genannt (in Zeichen $a : b = c : d$), wenn aus $m \cdot a \gtreqless n \cdot b$ stets $m \cdot c \gtreqless n \cdot d$ folgt. Ist $a : b = c : d$, so heißt d die *vierte Proportionale* zu dem Tripel a, b, c. Nach [1] ist die vierte Proportionale d, falls vorhanden, stets eindeutig bestimmt.

Mit $A, B, \ldots$ bezeichnen wir die Endomorphismen der archimedischen Halbgruppe $\mathfrak{A}$, die alle ordnungserhaltend sind, wie sofort aus der Eigenschaft 2. von $\mathfrak{A}$ folgt[2]). E sei der identische Endomorphismus, $\mathfrak{A}$ die multiplikative Halbgruppe aller Endomorphismen von $\mathfrak{A}$. Nach [1] gilt: $\mathfrak{A}$ ist abelsch: $AB = BA$ für alle Paare A, B aus $\mathfrak{A}$. Jedes $A \in \mathfrak{A}$ ist ein Endo-Isomorphismus von $\mathfrak{A}$. Durch Angabe eines einzigen Urbild-Bildpaares a, b ist A eindeutig bestimmt, so daß man $A_{b,a}$ für den der Bedingung $Aa = b$ genügenden Endomorphismus A schreiben kann. Durch die Vorschrift „$A_{b,a} > A_{c,a}$, wenn $b > c$", und die Einführung der üblichen Endomorphismenaddition wird $\mathfrak{A}$ zu einer additiven archimedischen Halbgruppe, so daß wir

[2]) Hier zeigt sich ein wichtiger Vorteil der Beschränkung auf Halbgruppen. Natürlich ist auch jede isomorphe Einbettung einer archimedischen Halbgruppe $\mathfrak{A}$ in eine Oberhalbgruppe $\mathfrak{B}$ ordnungserhaltend. Wir können also bei Halbgruppen den Zusatz „ordnungserhaltend" überall weglassen.

$\mathfrak{A}$ hinsichtlich Addition und Multiplikation zusammen als *archimedischen Halbring* bezeichnen dürfen.

Die archimedische Halbgruppe $\mathfrak{E}$ heißt *eudoxisch*, wenn sie in dem Sinne transitiv ist, daß zu jedem Paar a, b aus $\mathfrak{E}$ ein A mit $Aa=b$ existiert. Nach [1] gilt: $\mathfrak{E}$ ist dann und nur dann eudoxisch, wenn in $\mathfrak{E}$ zu jedem Tripel a, b, c die vierte Proportionale d existiert; insbesondere ist dann $\mathfrak{E}$ eine Divisionshalbgruppe. In $\mathfrak{E}$ gibt es genau dann einen Endomorphismus A mit $Aa=c$, $Ab=d$, wenn $a:b=c:d$. Jeder Endomorphismus A von $\mathfrak{E}$ ist ein Automorphismus, und es ist der Endomorphismenring $\mathfrak{A}=\mathfrak{E}$ ein *reeller Halbkörper*, d.h. zu der Menge aller positiven Zahlen eines passenden reellen Zahlkörpers isomorph. Zeichnet man in $\mathfrak{E}$ irgendein Element e aus und ordnet man jedem a aus $\mathfrak{E}$ den Automorphismus $A_{a,e}$ zu, so wird $\mathfrak{E}$ isomorph auf die additive Halbgruppe $\mathfrak{E}$ abgebildet. Man kann diese Einbettung von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{E}$ benutzen, um $\mathfrak{E}$ selbst durch Einführung einer Multiplikation zu einem reellen Halbkörper mit dem Einselement e zu machen, indem man $a \cdot b=(A_{a,e}\cdot A_{b,e})e=(A_{b,e}\cdot A_{a,e})e$ setzt. Es wird dann allgemein $A_{b,e}a=b\cdot a$, d.h. die Anwendung des Automorphismus $A_{b,e}$ bedeutet einfach Multiplikation mit b.

§ 2. Spiegelungen und Diedergruppe

Durch physikalische Überlegungen, nämlich durch das in § 5 kurz berührte Problem der „negativen Dimensionen" wird man auf die Frage geführt, ob man nicht bei den archimedischen Halbgruppen den notwendig ordnungserhaltenden Endomorphismen andere, ähnlich einfache Abbildungen gegenüberstellen kann, die die Ordnung umkehren. Diese neuen Abbildungen können natürlich nicht mehr die für Endomorphismen charakteristische Eigenschaft der Linearität besitzen. Unter diesen Umständen ist es für uns von entscheidender Bedeutung, daß im Falle der archimedischen Halbgruppen die Endomorphismen auch ohne Benutzung des Linearitätsbegriffs eingeführt werden können.

Satz 1. *Eine Abbildung A der archimedischen Gruppe $\mathfrak{A}$ in sich selbst ist genau dann ein Endomorphismus, wenn sie folgenden beiden Bedingungen genügt:*

$$A(n\cdot a)=n\cdot(Aa), \tag{1}$$

$$Aa>Ab, \text{ wenn } a>b. \tag{2}$$

Beweis. Daß (1) und (2) für alle Endomorphismen gelten, ist trivial. Es seien andererseits (1) und (2) erfüllt und etwa $Aa=c$. Dann folgt für beliebiges b sofort $a:b=c:Ab$, und die Gültigkeit der Endomorphismenbedingung $A(b_1+b_2)=Ab_1+Ab_2$ folgt unmittelbar aus der Eindeutigkeit der vierten Proportionalen sowie der in [1] bewiesenen Formel $a:b_1+b_2=c:d_1+d_2$. —

Nach dem Vorbild von Satz 1 definieren wir jetzt:

Eine Abbildung P von $\mathfrak{A}$ in sich soll *Spiegelung* heißen, wenn sie folgenden beiden Bedingungen genügt: (1) $Pa=n\cdot\big(P(n\cdot a)\big)$, (2) $Pa<Pb$, wenn $a>b$.

Satz 2. *Eine Spiegelung P von $\mathfrak{A}$ ist durch Angabe eines einzigen Urbild-Bildpaares a, Pa eindeutig bestimmt. Denn es gilt stets $a:b=Pb:Pa$.*

Beweis. Es sei etwa $m \cdot a > n \cdot b$; dann ist $P(n \cdot b) > P(m \cdot a)$ wegen (2), also auch $m \cdot Pb = (m \cdot n) \cdot P(n \cdot b) > (m \cdot n) \cdot P(m \cdot a) = n \cdot Pa$ wegen (1). Ebenso beweist man, daß $m \cdot Pb < n \cdot Pa$ und $m \cdot Pb = n \cdot Pa$ aus $m \cdot a < n \cdot b$ bzw. $m \cdot a = n \cdot b$ folgt. Es ist also wirklich stets $a:b = Pb:Pa$, und daraus folgt die Eindeutigkeitsbehauptung von Satz 2 wegen der Eindeutigkeit der vierten Proportionalen.

SATZ 3. a) *Eine Spiegelung P mit $Pa = d$ existiert höchstens dann, wenn es in $\mathfrak{A}$ für jedes b zu dem Tripel b, a, d die vierte Proportionale gibt.* b) *Jede Spiegelung P ist eine Abbildung von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}$ und involutorisch, $PP = E$.*

Beweis. a) Ist $Pa = d$ und $Pb = c$, so gilt nach Satz 2 sicher $a:b = c:d$ oder nach Umstellung $b:a = d:c$, es ist also $Pb = c$ die vierte Proportionale zu b, a, d. — b) Aus $a:b = Pb:d$ folgt $a:Pb = b:d$ nach [1]. Es wird also $P(Pb) = b$ für jedes $b \in \mathfrak{A}$.

KOROLLAR. *Gibt es für jedes Paar a, b eine Spiegelung P mit $Pa = b$, so ist $\mathfrak{A}$ eudoxisch.*

Trivial, da die eudoxischen Gruppen durch die Existenz der vierten Proportionalen charakterisiert sind. — Um die Behauptung des Korollars umzukehren, beweisen wir zunächst:

HILFSSATZ. *Bei einer eudoxischen Gruppe $\mathfrak{E}$ folgt aus $a:b = c:d$, $a:b' = c':d$ stets $b:b' = c':c$* [3]).

Beweis. Benützen wir die Bezeichnung $A_{b,a}$ im Sinne von §1, so ist $b:b' = c':c$ nach [1] gleichwertig mit $A_{c',b}b' = c = A_{c,b'}b'$. Die Voraussetzungen, unter denen diese letzte Gleichung abzuleiten ist, lassen sich auf die Gestalt bringen $A_{c,a}b = d$; $A_{c',a}b' = d$. Das heißt aber $A_{c,a} \cdot A_{b,a}a = d = A_{c',a} \cdot A_{b',a}a$, $A_{c,a} \cdot A_{b,a} = A_{d,a} = A_{c',a} \cdot A_{b',a}$, und wegen $A_{u,v} = A_{v,u}^{-1}$, $A_{u,v} \cdot A_{v,w} = A_{u,w}$ sowie wegen der Kommutativität der Automorphismengruppe $\mathfrak{E}$ ergibt sich weiter: $A_{c',a} = A_{c,a} \cdot A_{b,a} \cdot A_{a,b'} = A_{c,a} \cdot A_{a,b'} \cdot A_{b,a} = A_{c,b'} \cdot A_{b,a}$; $A_{c,b'} = A_{c',a} \cdot A_{a,b} = A_{c',b}$, w.z.b.w. — Aus dem Hilfssatz folgt mühelos:

SATZ 4. *Definiert man in der eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ zu vorgegebenen a, d eine Abbildung P durch die Festsetzung: Für beliebiges b sei Pb die vierte Proportionale zu b, a, d (d.h. also $a:b = Pb:d$), so ist P eine Spiegelung und $Pa = d$.*

Beweis. $Pa = d$ ist trivial. Sind ferner b, b' beliebig aus $\mathfrak{E}$, so hat man $b:b' = Pb':Pb$ nach dem Hilfssatz. Aus $b > b'$ folgt also $Pb < Pb'$ (Spiegelungsbedingung (1)), und aus $b:m \cdot b = P(m \cdot b):Pb$ ergibt sich weiter $Pb = m \cdot P(m \cdot b)$ (Spiegelungsbedingung (2)). — Durch Kombination von Satz 4 mit dem Korollar zu Satz 3 erhalten wir:

SATZ 5 (Charakterisierung der eudoxischen Halbgruppen mit Hilfe der Spiegelungen). *Die archimedische Halbgruppe $\mathfrak{E}$ ist dann und nur dann*

[3]) Der Hilfssatz gilt auch für nichteudoxische Gruppen, doch wird dort der Beweis mühsam. Gedanklich und im Typus des Beweises gehört unser Hilfssatz mit den Hilfssätzen 3 und 4 von [1] zusammen. — Führt man in $\mathfrak{E}$ im Sinne von §1 eine Multiplikation ein, so folgt der Hilfssatz sofort aus der Produktgleichung $b \cdot c = a \cdot d = b' \cdot c'$.

eudoxisch, wenn zu jedem Paar a, b aus $\mathfrak{E}$ eine (nach Satz 2 eindeutig bestimmte) Spiegelung P mit $Pa=b$ existiert.

Satz 5 ist vor allem deshalb bemerkenswert, weil er zeigt, daß man bei der Charakterisierung der eudoxischen Halbgruppen die Automorphismen gar nicht braucht. Nennen wir a einen *Fixpunkt* der Spiegelung P, wenn $Pa=a$, so ergibt sich sofort:

KOROLLAR ZU SATZ 5. *In der eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ gibt es zu jedem a eine eindeutig bestimmte Spiegelung mit dem Fixpunkt a.*

Klar, denn der Beweis von Satz 5 bzw. Satz 4 geht auch dann durch, wenn $a=d$. Man beachte, daß eine Spiegelung nicht mehr als einen Fixpunkt besitzen kann, weil in einer archimedischen Halbgruppe aus $a:b=b:a$ stets $a=b$ folgt.

SATZ 6. *Die Menge $\mathfrak{D}$ aller Automorphismen A und aller Spiegelungen P bildet eine (multiplikative) Obergruppe der Automorphismengruppe $\mathfrak{E}$ der eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$. In $\mathfrak{D}$ hat $\mathfrak{E}$ den Index 2, es gilt also $\mathfrak{D}=\mathfrak{E}\cup P\mathfrak{E}=\mathfrak{E}\cup\mathfrak{E}P$ für jede Spiegelung P.*

Beweis. Es genügt zu zeigen: Alle Produkte $P_1\cdot P_2$ sind Automorphismen, alle Produkte $P\cdot A$ sowie $A\cdot P$ sind Spiegelungen. Nun hat man z.B.:

$$m\cdot[(P_1\cdot P_2)\,a]=m\cdot[P_1(P_2\,a)]$$
$$=m\cdot[P_1(m\cdot P_2(m\cdot a))]=P_1\big(P_2(m\cdot a)\big)=(P_1\cdot P_2)\,(m\cdot a);$$

und aus $a>b$ folgt

$$P_2\,a<P_2\,b,\quad (P_1\cdot P_2)\,a=P_1(P_2\,a)>P_1(P_2\,b)=(P_1\cdot P_2)\,b.$$

Es ist also $P_1\cdot P_2$ nach Satz 1 ein Endomorphismus und damit sogar ein Automorphismus, weil $\mathfrak{E}$ eudoxisch. Noch rascher verifiziert man, daß $P\cdot A$ und $A\cdot P$ Spiegelungen sind.

Die Gruppe $\mathfrak{D}$ soll die zur eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ gehörige Diedergruppe heißen, weil sie eine ganz analoge Struktur besitzt wie eine endliche Diedergruppe im üblichen Sinne des Wortes. Setzen wir noch $\mathfrak{E}^{(2)}=\{A^2/A\in\mathfrak{E}\}$, wobei zu beachten, daß $\mathfrak{E}^{(2)}$ eine Gruppe wegen der Kommutativität von $\mathfrak{E}$, so können wir den Aufbau von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{E}$ folgendermaßen genau charakterisieren:

SATZ 7. a) *Es gilt $P^2=E$, $P\cdot A=A^{-1}\cdot P$ für jedes Paar P, A.* — b) *Es gibt in $\mathfrak{D}$ folgende Typen von Klassen konjugierter Elemente: $\{E\}$; $\{A, A^{-1}\}$; $\mathfrak{E}^{(2)}P$.* — c) *Die Konjugiertenklassen $\mathfrak{E}^{(2)}P$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Elementen der Faktorgruppe $\mathfrak{E}/\mathfrak{E}^{(2)}$.* — d) *Die Spiegelungen mit Fixpunkt bilden in $\mathfrak{D}$ eine einzige Konjugiertenklasse.*

Beweis. a) Nach Satz 3 b) gilt nicht nur $P^2=E$, sondern auch $(P\cdot A)^2=P\cdot A\cdot P\cdot A=E$, $P\cdot A=A^{-1}\cdot P^{-1}=A^{-1}\cdot P$. — b) Für $A\neq E$ haben wir $A_1^{-1}\cdot A\cdot A_1=A$ für jedes $A_1\in\mathfrak{E}$ und $P^{-1}\cdot A\cdot P=P\cdot A\cdot P=A^{-1}\cdot P\cdot P=A^{-1}$ für jede Spiegelung P. Andererseits gilt $A^{-2}\cdot P=A^{-1}\cdot P\cdot A=P\cdot A^2$ nach a) bei festem P für jedes A, und für eine beliebige Spiegelung P_1 erhalten wir $P_1=P\cdot A$, $P_1^{-1}\cdot P\cdot P_1=A^{-1}\cdot(P\cdot P\cdot P)\cdot A=A^{-1}\cdot P\cdot A=A^{-2}\cdot P$ für passendes A. — c) Die

Behauptung folgt sofort aus b) sowie aus der Bemerkung, daß $\mathfrak{E}P$ die Menge *aller* Spiegelungen darstellt. — d) Man beachte: Ist $Pf=f$, so ist $P_1(Af)=Af$ für $P_1=A\cdot P\cdot A^{-1}=A^2\cdot P$. Durchläuft A die Gruppe $\mathfrak{E}$, so durchläuft Af ganz $\mathfrak{E}$.

Gruppentheoretisch und geometrisch sind natürlich diejenigen eudoxischen Halbgruppen, bei denen in der Diedergruppe $\mathfrak{D}$ die *Menge aller Spiegelungen eine einzige Konjugiertenklasse* bildet. Wir wollen diese Halbgruppen aus sofort klar werdenden Gründen als *quadratisch abgeschlossen* bezeichnen. Aus Satz 3 und Satz 7 ergibt sich unmittelbar:

SATZ 8. *Die eudoxische Gruppe $\mathfrak{E}$ ist genau dann quadratisch abgeschlossen:* a) *Wenn zu jedem Elementepaar a, d in $\mathfrak{E}$ die durch $a:f=f:b$ gekennzeichnete „dritte Proportionale" f existiert.* — b) *Wenn $\mathfrak{E}^{(2)}=\mathfrak{E}$ ist, wenn also für jeden Automorphismus A in $\mathfrak{E}$ die Gleichung $X^2=A$ lösbar ist.* — c) *Wenn jede Spiegelung P einen Fixpunkt f besitzt.*

a) zeigt die Sonderstellung, die den quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Halbgruppen vom Standpunkt der griechischen Proportionenlehre aus zukommt. b) rechtfertigt die Benennung „quadratisch abgeschlossen". — c) charakterisiert die quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Halbgruppen gewissermaßen geometrisch. In §4 sollen die quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Halbgruppen weiter untersucht werden. Zunächst behandeln wir die Spiegelungen unter einem neuen Gesichtspunkt.

§3. Spiegelungen und Dedekindsche Schnitte

Es sei $\mathfrak{E}$ eine beliebige eudoxische Halbgruppe. Wir definieren: Ein (Dedekindscher) *Schnitt* $\mathfrak{s}$ mit der *Unterklasse* $U_\mathfrak{s}$ und der *Oberklasse* $O_\mathfrak{s}$ ist eine Zerlegung $\mathfrak{E}=U_\mathfrak{s}\cup O_\mathfrak{s}$ in zwei echte Untermengen $U_\mathfrak{s}$, $O_\mathfrak{s}$, die den folgenden Bedingungen genügt: 1. Hauptbedingung: $u\leqq o$ für jedes Paar $u\in U_\mathfrak{s}$, $o\in O_\mathfrak{s}$. 2. Normierungsbedingung: Ist $U_\mathfrak{s}\cap O_\mathfrak{s}=\emptyset$, so gibt es weder in $U_\mathfrak{s}$ ein größtes noch in $O_\mathfrak{s}$ ein kleinstes Element.

Bei einem Schnitt $\mathfrak{s}$, bei dem $U_\mathfrak{s}\cap O_\mathfrak{s}\neq\emptyset$ ist notwendig $U_\mathfrak{s}\cap O_\mathfrak{s}=\{a\}$ einelementig, und man hat $U_\mathfrak{s}=\{b|b\leqq a\}$; $O_\mathfrak{s}=\{c|c\geqq a\}$. Wir wollen einen solchen Schnitt mit $\mathfrak{s}_a$ bezeichnen. Die Menge $\Sigma_\mathfrak{E}$ aller Schnitt $\mathfrak{s}_a$ wird durch $\mathfrak{s}_a\leftrightarrow a$ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{E}$ abgebildet.

SATZ 9. *Zu jeder Spiegelung P gehört ein Schnitt $\mathfrak{s}_P$, der durch $U_{\mathfrak{s}_P}=\{b|Pb\geqq b\}$, $O_{\mathfrak{s}_P}=\{c|Pc\leqq c\}$ festgelegt ist. P wird durch $\mathfrak{s}_P$ eindeutig bestimmt. Hat P einen Fixpunkt f, so ist $\mathfrak{s}_P=\mathfrak{s}_f$.*

Beweis. a) $\mathfrak{E}=U_{\mathfrak{s}_P}\cup O_{\mathfrak{s}_P}$ ist klar. Ist ferner $a\in U_{\mathfrak{s}_P}$, $Pb<b<Pa$, so haben wir $Pb\in U_{\mathfrak{s}_P}$; $a:Pb=b:Pa$, $a<Pb$. Daraus folgt: Gibt es in $U_{\mathfrak{s}_P}$ ein größtes Element, so gibt es in $O_{\mathfrak{s}_P}$ ein kleinstes. Entsprechend beweist man die Umkehrung. Das heißt: $\mathfrak{s}_P$ genügt der Normierungsbedingung. — Ist schließlich $a\in U_{\mathfrak{s}_P}$, $d'\in O_{\mathfrak{s}_P}$ und $Pa=d$, $Pd'=a'$, so haben wir $d\geqq a$, $d'\geqq a'$ und $a:a'=d':d$. Wäre nun $a>d'\geqq a'$, so folgte $d'>d\geqq a$ (nach [1], Hilfssatz 4), und damit ein Widerspruch. Das heißt also: Ist $a\in U_{\mathfrak{s}_P}$, $d'\in O_{\mathfrak{s}_P}$, so ist stets $a\leqq d'$; es genügt somit $\mathfrak{s}_P$ auch der Hauptbedingung. — Daß $\mathfrak{s}_P=\mathfrak{s}_f$ für

$Pf=f$, ergibt sich sofort aus der Bemerkung, daß wegen $a:f=f:Pa$ aus $a>f$ stets $f>Pa$ folgt. — b) Der „methodenrein", d.h. mit Hilfe der Proportionenrechnung geführte Beweis, daß $\mathfrak{s}_P=\mathfrak{s}_{P'}$ immer $P=P'$ nach sich zieht, wird etwas umständlich[4]). Klar ist allerdings der Fall, daß $Pa=P'a$ für irgendein a; denn nach Satz 2 ist dann $P=P'$. Ist also $P\neq P'$, $a\in U_{\mathfrak{s}}$, so ist immer $Pa=d\neq P'a=d'$. Ist dabei $d>d'$, so gilt allgemein $Pb>P'b$ wegen $Pb:d=P'b:d'$. Es sei nun $d-d'=2e$ und n so groß gewählt, daß $n\cdot a>d$. Da Elemente $u\in U_{\mathfrak{s}}$, $o\in O_{\mathfrak{s}}$ existieren, für die $o-u$ beliebig klein wird, und da aus $a<b$, $b\in U_{\mathfrak{s}}$ stets $Pb<Pa$ folgt, können wir $b\in U_{\mathfrak{s}}$ so bestimmen, daß $Pb-b<n^{-1}\cdot e$, $P'b-b<n^{-1}\cdot e$ und damit auch $Pb-P'b<n^{-1}\cdot e$. Weiter gibt es eine rationale Zahl r, derart daß $d'<r\cdot P'b<d'+e$. Dabei ist wegen $n\cdot P'b>n\cdot a>d'+e$ sicher $r<n$. Aus $a:b=Pb:d=P'b:d'$ folgt nun schrittweise: $r\cdot a>b$, $r\cdot Pb>d$, $r\cdot Pb=r\cdot P'b+r\cdot(Pb-P'b)<d'+e+n\cdot(n^{-1}\cdot e)=d'+2e<d$ und damit ein Widerspruch. Es ist also $\mathfrak{s}_P=\mathfrak{s}_{P'}$, $P\neq P'$ ausgeschlossen.

Die Menge aller $\mathfrak{s}_P$ möge mit $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ bezeichnet werden. Um $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ noch von einer anderen Seite zu charakterisieren und den Anschluß an die Körperalgebra herzustellen, führen wir in $\mathfrak{E}$ nach Auszeichnung eines beliebigen Elementes e im Sinne der Schlußbemerkungen von §1 eine Multiplikation ein und ordnen jedem $a\in\mathfrak{E}$ den *Quadratwurzelschnitt* $\mathfrak{s}_{\sqrt{a}}$ zu, der durch $U_{\mathfrak{s}}=\{b|b^2\leqq a\}$, $O_{\mathfrak{s}}=\{c|c^2\geqq a\}$ charakterisiert ist. Es gilt dann:

Satz 10. *Die Menge $\Sigma_{\mathfrak{Q}}$ aller Quadratwurzelschnitte ist identisch mit der Menge $\Sigma_{\mathfrak{S}}$. Es ist nämlich stets $\mathfrak{s}_a=\mathfrak{s}_P$, falls P die durch $Pe=a$ charakterisierte Spiegelung bedeutet.*

Beweis. Es ist zu zeigen: $Pb\gtreqless b$ genau dann, wenn $b^2\gtreqless a$. Nun haben wir: (1) $e:b=Pb:Pe=Pb:a$. Da ferner die Multiplikation mit b gleichwertig mit der Anwendung des Automorphismus $A_{b,e}$ ist, gilt weiter: (2) $e:b=b\cdot e:b\cdot b=b:b^2$. Kombination von (1) und (2) liefert: (3) $Pb:a=b:b^2$, und weiter ergibt sich (4) $Pb:b=a:b^2$. Damit haben wir die zu beweisende Behauptung in verschärfter Form. Satz 10 ist vor allem deshalb wichtig, weil man mit seiner Hilfe den Einwand widerlegen kann, das Schnittsystem $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ sei nicht wohldefiniert, da sich die Menge aller Spiegelungen nicht ohne weiteres übersehen lasse. Andererseits kam es uns darauf an, das Schnittsystem $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ invariant, ohne die unschöne Auszeichnung eines Hilfselements e einzuführen.

§4. Quadratische Abschließung eudoxischer Gruppen

Nach den Ergebnissen von §2 können wir kurz die quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Halbgruppen so charakterisieren: Eine archimedische Halbgruppe $\mathfrak{E}$ ist genau dann eudoxisch und quadratisch abgeschlossen, wenn in $\mathfrak{E}$ zu jedem Tripel a, b, c die vierte und zu jedem Paar a, b die dritte Propor-

[4]) Nicht methodenrein wäre ein Beweis, bei dem wir in $\mathfrak{E}$ eine Multiplikation einführten. Beim Beweis des Textes beachte man: 1. Da $\mathfrak{E}$ eine Divisionsgruppe ist, ist $r\cdot a$ für (positiv) rationales r definiert. 2. Ist $a:b=c:d$, so folgt auch für rationales r aus $r\cdot c>d$ stets $r\cdot a>b$.

tionale existiert. Damit sind die quadratisch abgeschlossenen eudoxischen Halbgruppen in den Gedankenkreis des 5. Buches Euklids eingeordnet, in dem unter den allgemeinen Proportionen $a:b=c:d$ die „dreigliedrigen", also die der Form $a:f=f:b$, eine ausgezeichnete Rolle spielen. Allerdings kann zwar gezeigt werden, daß im 5. Buch stillschweigend von dem Axiom der Existenz der vierten Proportionalen Gebrauch gemacht wird, daß also dort in moderner Terminologie stillschweigend eudoxische Halbgruppen zugrunde gelegt werden. Aber etwas gewagt wäre wohl die Behauptung, in der Art wie im 5. Buch von Proportionen geredet wird, stecke implizit das Axiom von der Existenz auch der dritten Proportionalen, es würden also im 5. Buch nur quadratisch abgeschlossene eudoxische Halbgruppen betrachtet. — Nimmt man diesen Bedenken entsprechend, nur die allgemeinen eudoxischen Halbgruppen als eine axiomatisch festgelegte Klasse von archimedischen Halbgruppen hin, so wird man fragen, ob es nicht wenigstens möglich sei, in eindeutiger Weise von einer beliebig vorgegebenen eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ zu einer kleinsten quadratisch abgeschlossenen $\mathfrak{E}^*$ überzugehen[5]). Am einfachsten behandelt man dieses Problem dadurch, daß man $\mathfrak{E}$ wie bei Satz 11 durch Einführung einer Multiplikation im Sinne von §1 zu einem zu dem Automorphismenhalbkörper $\mathfrak{C}$ isomorphen reellen Halbkörper macht. Denn aus Satz 8 b) folgt unmittelbar:

SATZ 11. *Die eudoxische Halbgruppe $\mathfrak{E}$ ist genau dann quadratisch abgeschlossen, wenn sie durch Einführung einer Multiplikation im Sinne von §1 zu einem „quadratwurzel-abgeschlossenen" reellen Halbkörper wird, der für jedes a auch eine Lösung der Gleichung $x^2=a$ enthält.*

Nach Satz 11 kommt es nur noch darauf an zu zeigen, daß jeder reelle Halbkörper in eindeutiger Weise zu einem kleinsten quadratwurzel-abgeschlossenen erweitert werden kann. Indem man weiter einen beliebigen reellen Halbkörper durch das isomorphe Bild der Menge aller positiven Zahlen eines passenden reellen Zahlkörpers ersetzt, verschiebt man die Frage weiter auf das Gebiet der reellen Zahlkörper, und dort lautet sie schließlich, wie mühelos einzusehen: Gibt es zu jedem reellen Zahlkörper $\mathfrak{R}$ einen bis auf Isomorphie über $\mathfrak{R}$ eindeutig bestimmten kleinsten reellen Oberkörper $\mathfrak{R}^*$, der seinerseits reell quadratisch abgeschlossen ist, in dem Sinne, daß er selbst keinen reellen Oberkörper $\mathfrak{L}^*$ vom Relativgrade 2 mehr besitzt? Daß aber diese letzte Frage zu bejahen ist, folgt aus den wohlbekannten Existenz- und Isomorphiesätzen der Algebra. Kehrt man nun wieder zu den eudoxischen Halbgruppen zurück, so erhält man abschließend:

SATZ 12. *Zu jeder eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ gibt es eine bis auf Isomorphie über $\mathfrak{E}$ eindeutig bestimmte kleinste, quadratisch abgeschlossene eudoxische Halbgruppe $\mathfrak{E}^*$.*

Es bleibt aber natürlich noch zu untersuchen, ob Satz 12 nicht einfacher und naturgemäßer in rein gruppentheoretisch-geometrischer Weise bewiesen

[5]) Das entsprechende Problem der Einbettung einer beliebig vorgegebenen archimedischen Halbgruppe in eine kleinste eudoxische Oberhalbgruppe wurde von O. ENDLER in [3] behandelt. Es ist in gewissem Sinne wesentlich schwieriger als das Problem des Textes.

werden kann, wobei man von der Tatsache ausgeht, daß eine quadratische abgeschlossene eudoxische Halbgruppe durch die Existenz eines Fixpunktes bei jeder Spiegelung charakterisiert ist. Wir wollen zeigen, daß ein solcher Beweis tatsächlich naheliegt, daß man aber auch bei ihm auf eine gewisse Schwierigkeit stößt, wenn man die Einführung einer Multiplikation völlig vermeiden will. — Es sei die eudoxische Gruppe $\mathfrak{E}_1$ Oberhalbgruppe der eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ und a, b beliebig aus $\mathfrak{E}$. Bedeutet dann P bzw. P_1 die durch $Pa=b$ bzw. $P_1a=b$ eindeutig festgelegte Spiegelung von $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{E}_1$, so wird offenbar die Abbildung P durch die Abbildung P_1 induziert. Zu jeder Spiegelung P von $\mathfrak{E}$ gibt es also (genau) eine P induzierende Spiegelung P_1 von $\mathfrak{E}_1$. (Andererseits werden im allgemeinen Spiegelungen P_1 von $\mathfrak{E}_1$ existieren, die keine Spiegelung P von $\mathfrak{E}$ induzieren; sie sind dadurch charakterisiert, daß $P_1a \notin \mathfrak{E}$ für jedes $a \in \mathfrak{E}$.) Wir definieren nun:

Die eudoxische Oberhalbgruppe $\mathfrak{E}_1$ der eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ soll *relativ quadratisch abgeschlossen* heißen, wenn jede Spiegelung P_1 von $\mathfrak{E}_1$, die eine Spiegelung P von $\mathfrak{E}$ induziert, in $\mathfrak{E}_1$ einen Fixpunkt besitzt. $\mathfrak{E}_1$ heißt kleinste quadratisch abgeschlossene bzw. kleinste relativ $\mathfrak{E}$ quadratisch abgeschlossene Oberhalbgruppe von $\mathfrak{E}_1$, wenn 1. $\mathfrak{E}_1$ quadratisch abgeschlossen bzw. relativ $\mathfrak{E}$ quadratisch abgeschlossen ist, und wenn 2. jede quadratisch abgeschlossene bzw. relativ $\mathfrak{E}$ quadratisch abgeschlossene Oberhalbgruppe $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{E}$ eine zu $\mathfrak{E}_1$ über $\mathfrak{E}$ isomorphe Unterhalbgruppe enthält.

HILFSSATZ. *Gibt es zu jedem $\mathfrak{E}$ eine kleinste, relativ $\mathfrak{E}$ quadratisch abgeschlossene Oberhalbgruppe $\mathfrak{E}_1$, so gibt es auch eine kleinste, quadratisch abgeschlossene Oberhalbgruppe $\mathfrak{E}^*$. Es sei nämlich zu $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}_0$ die Oberhalbgruppenkette $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots$ so gebildet, daß $\mathfrak{E}_i$ jeweils eine kleinste, relativ $\mathfrak{E}_{i-1}$ quadratisch abgeschlossene Oberhalbgruppe von $\mathfrak{E}_{i-1}$ darstellt ($i=1, 2, \ldots$). Dann ist $\mathfrak{E}^* = \bigcup_i \mathfrak{E}_i$ eine kleinste, quadratisch abgeschlossene eudoxische Oberhalbgruppe von $\mathfrak{E}$.*

Beweis. a) Daß $\mathfrak{E}^*$ eine archimedische Halbgruppe darstellt, ist trivial. b) Sind a, b, c beliebig aus $\mathfrak{E}^*$, so gibt es ein $\mathfrak{E}_i$, derart daß $a, b, c \in \mathfrak{E}_i$. In $\mathfrak{E}_i$ gibt es zu a, b, c die vierte Proportionale d, die auch in $\mathfrak{E}^*$ vierte Proportionale ist. $\mathfrak{E}^*$ ist also eudoxisch. c) Es sei P^* eine beliebige Spiegelung von $\mathfrak{E}^*$ und etwa $P^*a=b$; ferner sei $\mathfrak{E}_i$ so gewählt, daß $a, b \in \mathfrak{E}_i$. Dann induziert P^* eine Spiegelung P_{i+1} von $\mathfrak{E}_{i+1}$, die ihrerseits eine Spiegelung P_i von $\mathfrak{E}_i$ induziert. Nach Definition von $\mathfrak{E}_{i+1}$ besitzt P_{i+1} einen Fixpunkt, der auch Fixpunkt von P^* ist. Es ist also $\mathfrak{E}^*$ quadratisch abgeschlossen. d) Die Minimaleigenschaft von $\mathfrak{E}^*$ folgt mühelos aus der Minimaleigenschaft der $\mathfrak{E}_i$.

Um die Existenz einer kleinsten, relativ $\mathfrak{E}$ quadratisch abgeschlossenen Oberhalbgruppe $\mathfrak{E}_1$ für eine beliebige eudoxische Halbgruppe $\mathfrak{E}$ zu beweisen, greifen wir auf §3 zurück. Für zwei Schnitte $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ in $\mathfrak{E}$ definieren wir $\mathfrak{s}_1 > \mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_2$, $\mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_2$ (falls $\mathfrak{s}_1 > \mathfrak{s}_2$) in der von der reellen Analysis her gewohnten Weise. Zu jeder Schnittmenge Σ gibt es dann eine kleinste Σ enthaltende archimedische Halbgruppe, die „durch Σ erzeugte" Halbgruppe $\mathfrak{H}_\Sigma$. $\mathfrak{H}_\Sigma$

besteht aus allen Linearkombinationen der $\mathfrak{s} \in \Sigma$, d.h. aus allen Aggregaten $\left(\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{s}_i\right) - \left(\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{s}'_k\right)$ bei denen $\mathfrak{s}_i, \mathfrak{s}'_k \in \Sigma$ und $\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{s}'_k < \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{s}_i$ $(n = 1, 2, \ldots; m = 0, 1, \ldots)$. Ist $\mathscr{E}'$ irgendeine archimedische Oberhalbgruppe von $\mathscr{E}$, so entspricht jedem $a' \in \mathscr{E}'$ in $\mathscr{E}$ eindeutig umkehrbar der durch $U_{\mathfrak{s}_{a'}} = \{b / b \in \mathscr{E},\ b \leqq a'\}$, $O_{\mathfrak{s}_{a'}} = \{c / c \in \mathscr{E},\ c \geqq a'\}$ definierte Schnitt $\mathfrak{s}_{a'}$. Bezeichnen wir die Menge aller $\mathfrak{s}_{a'}$ mit $\Sigma_{\mathscr{E}'}$, so hat $\Sigma_{\mathscr{E}'}$ im Spezialfall $\mathscr{E} = \mathscr{E}'$ die gleiche Bedeutung wie schon in §3; ferner gilt allgemein $\mathscr{H}_{\Sigma_{\mathscr{E}}} = \Sigma_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{H}_{\Sigma_{\mathscr{E}'}} = \Sigma_{\mathscr{E}'}$ und es wird $\mathscr{E}'$ durch die Vorschrift $a' \leftrightarrow \mathfrak{s}_{a'}$ isomorph auf $\Sigma_{\mathscr{E}'}$ abgebildet, wobei speziell $\mathscr{E}$ in $\Sigma_{\mathscr{E}}$ übergeht. Ist andererseits $\mathscr{H}$ irgendeine Schnitthalbgruppe, die $\Sigma_{\mathscr{E}}$ enthält, so können wir $\Sigma_{\mathscr{E}}$ mit $\mathscr{E}$ identifizieren und so $\mathscr{H}$ als Oberhalbgruppe von $\mathscr{E}$ auffassen. In diesem Sinn erhalten wir dann:

SATZ 13. *Die durch das in §3 eingeführte Schnittsystem $\Sigma_{\mathfrak{S}}$ erzeugte Halbgruppe $\mathscr{H}_{\Sigma_{\mathfrak{S}}} = \mathscr{H}_{\mathfrak{S}}$ ist eine kleinste, relativ $\mathscr{E}$ quadratisch abgeschlossene Oberhalbgruppe von $\mathscr{E}$.*

Beweis. a) Wegen $\Sigma_{\mathscr{E}} \subseteqq \Sigma_{\mathfrak{S}}$ kann $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}}$ jedenfalls als Oberhalbgruppe von $\mathscr{E}$ aufgefaßt werden. Nehmen wir nun zunächst an, es sei $\mathscr{E}_2$ irgendeine relativ $\mathscr{E}$ quadratisch abgeschlossene Oberhalbgruppe von $\mathscr{E}$. Dann enthält offenbar die zu $\mathscr{E}_2$ über $\mathscr{E}$ isomorphe Schnittgruppe $\Sigma_{\mathscr{E}_2}$ als Untergruppe $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}}$. Da ferner $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}}$ nach Konstruktion relativ $\mathscr{E}$ quadratisch abgeschlossen ist, bleibt zum Beweis von Satz 13 nur noch zu zeigen: b) $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}}$ ist eudoxisch. Führen wir jetzt eine Multiplikation ein, so daß $\mathscr{E}$ zum reellen Halbkörper wird, reduziert sich der Nachweis, daß $\mathscr{H}_{\mathfrak{S}}$ eudoxisch ist auf Grund von Satz 10 von §3 auf den Beweis der Aussage: Ist $\mathscr{E}$ ein reeller Halbkörper, so ist es auch die archimedische Halbgruppe aller Aggregate $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i} - \sum_{k=1}^{m} \sqrt{a'_k}$, (mit $a_i, a'_k \in \mathscr{E}$, $\sum_{k=1}^{m} \sqrt{a_k} < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}$; $m = 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, \ldots$). Diese letzte Behauptung aber kann ohne jede höhere Algebra mit Hilfe des primitiven Quadratwurzelrechnens verifiziert werden[6]).

Der neue Beweis von Satz 12 ist sicher dem zuerst skizzierten vom gruppentheoretischen Standpunkt aus weit vorzuziehen. *Restlos* befriedigend ist aber auch er noch nicht, weil nach wie vor die ideale Forderung bestehen bleibt, bei gruppentheoretischen Sätzen die Einführung einer Multiplikation in $\mathscr{E}$ *völlig* zu vermeiden. Um die eigenartige Schwierigkeit, die sich einem multiplikationsfreien Beweise des eudoxischen Charakters von $\mathscr{E}$ in den Weg stellt, besser zu erfassen, betrachten wir, zunächst unter Zuhilfenahme einer Multiplikation, einen kleinsten in $\mathscr{E}_1$ enthaltenen, echten Oberhalbkörper $\mathscr{E}'$ von $\mathscr{E}$.

[6]) Man beweist am einfachsten mit Hilfe der Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ durch Schluß von $m-1$ auf m: Es seien $a = e, a_1, a_2, \ldots, a_m$ im Halbkörper $\mathscr{E}$ beliebig vorgegeben, und es sei $\alpha_{ik} = \sqrt{a_i \cdot a_k}$ $(i, k = 0, 1, \ldots, m)$. Ferner sei $\mathscr{R}_m$ der Halbring aller Linearkombinationen der Menge $\{b_{ik} \cdot \alpha_{ik} / b_{ik} \in \mathscr{E};\ i, k = 0, 1, \ldots, m\}$. Dann gibt es in $\mathscr{R}_m$ zu jedem Element ein reziprokes. (Beachte, daß $\mathscr{R}_m$ aus allen Linearkombinationen der Menge $\{a^{(m-1)}, b^{(m-1)} \cdot \sqrt{a_m} / a^{(m-1)}, b^{(m-1)} \in \mathscr{R}_{m-1}\}$ besteht.)

Ein solcher Oberhalbkörper $\mathfrak{E}'$ entsteht aus $\mathfrak{E}$ durch Adjunktion einer einzigen Quadratwurzel $\sqrt{c}$, er besteht also aus allen Linearkombinationen (Summen und bildbaren Differenzen) der Menge $\{a, b \cdot \sqrt{c} \mid a, b \in \mathfrak{E}\}$. Es ist nun bemerkenswert, daß ein Körper $\mathfrak{E}'$ auch mit Hilfe der Spiegelungen leicht und elegant beschrieben werden kann. Wir teilen sie wie am Schluß von §2 in ihre konjugierten Klassen $\mathfrak{E}^{(2)}P$ relativ $\mathfrak{D}$ ein. P_0 sei irgendeine Spiegelung aus der *Hauptklasse* aller Spiegelungen mit Fixpunkt; $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P}$ sei das System aller der Schnitte, die den Spiegelungen einer festen Äquivalenzklasse $\mathfrak{E}^{(2)}P$ im Sinne von §3 zugeordnet sind. Dann ist zunächst trivialerweise $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P_0} = \Sigma_{\mathfrak{E}}$, es kann also $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P_0}$, falls es wünschenswert erscheint, mit $\mathfrak{E}$ identifiziert werden. Weiter überlegt man sich auf Grund der Ergebnisse von §3 mühelos: $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P}$ ist stets eine zu $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P_0}$ isomorphe Gruppe. Führt man in $\mathfrak{E}$ eine Multiplikation ein, wobei etwa $\sqrt{c}$ der Spiegelung P entsprechen möge, so erweist sich $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P}$ als identisch mit dem System aller Schnitte $\{\mathfrak{s}_{b\cdot\sqrt{c}} = \mathfrak{s}_{\sqrt{b^2\cdot c}} \mid b \in \mathfrak{E}\}$.

SATZ 14. *Die kleinsten Oberhalbkörper $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{E}$ lassen sich ohne Einführung einer Multiplikation rein gruppentheoretisch so charakterisieren: Man gewinnt alle $\mathfrak{E}'$ und nur sie, wenn man die mit $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P_0}$ identifizierte Gruppe $\mathfrak{E}$ jeweils mit einer Schnittgruppe $\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P}$ $(\mathfrak{E}^{(2)}P \neq \mathfrak{E}^{(2)}P_0)$ linear kombiniert.* $(\mathfrak{E}' = \mathfrak{H}_{\Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P_0} \cup \Sigma_{\mathfrak{E}^{(2)}P}})$.

Untersucht man nun, wieweit Satz 14 als Grundlage dienen kann für einen „rein gruppentheoretischen" Beweis von Satz 12, bei dem die Einführung einer Multiplikation in $\mathfrak{E}$ völlig vermieden wird, so kommt man zu folgendem Ergebnis: Es ist mühelos, rein gruppentheoretisch zu zeigen, daß jede in $\mathfrak{E}_1$ enthaltene, echte eudoxische Oberhalbgruppe $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{E}$ mindestens eine Gruppe $\mathfrak{E}'$ enthalten muß. Auch überlegt man sich leicht überschlagsmäßig, daß der rein gruppentheoretische Beweis des eudoxischen Charakters von $\mathfrak{E}_1$ keine nennenswerten Schwierigkeiten mehr bieten wird, sobald einmal in entsprechender Weise gezeigt ist, daß alle $\mathfrak{E}'$ eudoxisch sind. Bei den $\mathfrak{E}'$ aber liegt der eigentliche Kern der Schwierigkeit, bei der kein naheliegender Weg zur Überwindung zu sehen ist. Es kommt offenbar darauf an, ein gruppentheoretisches Gegenstück zur Quadratwurzelformel $(a + b \cdot \sqrt{c})(a - b \cdot \sqrt{c}) = a^2 - b^2 \cdot c$ zu finden, wobei dieses Gegenstück aber nicht einfach durch Übersetzung der Quadratwurzelformel zu gewinnen, sondern selbständig elegant gruppentheoretisch herzuleiten wäre.

§ 5. Ein Abbildungssatz

Um vom Standpunkt des modern interpretierten griechischen Größenbegriffs aus den Ansatz zu rechtfertigen, bei dem man im n-dimensionalen euklidischen Raum den Inhalt eines Quaders durch das Produkt der Kantenlängen mißt, kann man von einem allgemeinen Abbildungssatz aus der Theorie der eudoxischen Gruppen ausgehen. Als Modell des späteren „euklidischen Raums" wird das Produkt $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{E}_1 \times \cdots \times \mathfrak{E}_n$ von n eudoxischen Halbgruppen $\mathfrak{E}_i$ betrachtet, also die Menge aller n-Tupel $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ $(a_i \in \mathfrak{E};\ i = 1, \ldots, n)$. (Statt $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ schreiben wir oft kurz $\langle a_i \rangle$.) Es ist für unsere Zwecke

nicht zweckmäßig, sich auf den Spezialfall $\mathfrak{E}_1 = \cdots = \mathfrak{E}_n$ zu beschränken. Dagegen soll angenommen werden, daß jedes $\mathfrak{E}_i$ durch einen festen Isomorphismus ϱ_i auf eine eudoxische Mustergruppe $\mathfrak{E}$ abgebildet ist $\mathfrak{E} = \varrho_i \mathfrak{E}_i$, so daß die $\mathfrak{E}_i$ tatsächlich untereinander isomorph sind[7]). Als „Maßzahlen" wählen wir nicht die Elemente von $\mathfrak{E}$, sondern die der Automorphismengruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{E}$. Denn Maßzahlen sollen später multipliziert werden, und eine Multiplikation ist in natürlicher Weise nur in $\mathfrak{G}$, nicht aber in $\mathfrak{E}$ definiert. Der oben angekündigte, grundlegende Abbildungssatz lautet dann:

Es gibt eine Abbildung μ von $\mathfrak{R}_n$ in $\mathfrak{G}$, die multilinear und multimonoton ist, d.h. folgenden Bedingungen genügt:

$$(1)' \quad \begin{cases} \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle = \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i\, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle + \\ \qquad + \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{cases}$$

$$(2)' \quad \begin{cases} \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle > \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle, \\ \qquad \text{wenn} \quad a_i > a_i' \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Zwei multilineare und multimonotone Abbildungen μ, μ' von $\mathfrak{R}_n$ in $\mathfrak{G}$ unterscheiden sich nur um einen Faktor aus $\mathfrak{G}$, d.h. man hat $\mu = A\mu'$ für passendes A.

Wir wollen uns hier mit dem Beweis des angeführten Abbildungssatzes nicht weiter aufhalten, auch nicht zeigen, wie der Abbildungssatz dazu führt, den Quaderinhalt als Produkt von Kantenlängen zu definieren. All diese Dinge werden sich nämlich von selbst erledigen, wenn wir jetzt den Abbildungssatz in einen größeren Zusammenhang einordnen. Nehmen wir an, das Problem des Quaderinhaltes sei bereits in der gewünschten Weise erledigt, dann liegt es auf der Hand, weiter zu fragen: Auch einer mehrdimensionalen physikalischen Größe wird in der Physik eine Maßzahl zugeordnet, die als Produkt bzw. Quotient von Einzelmaßzahlen (entsprechend den Kantenlängen des Quaders) dargestellt wird. Kann man auch dort der Theorie des Messens einen Abbildungssatz vom Typus des oben formulierten zugrunde legen? Man sieht dann sofort: Der Unterschied der Physik gegenüber der Geometrie beruht darauf, daß die Einzeldimensionen in der Physik sowohl positiven wie negativen Charakter haben können. Als Modell eines n-dimensionalen physikalischen Größensystems $\mathfrak{P}_n$ läßt sich zwar wieder das Produkt $\mathfrak{E}_1 \times \cdots \times \mathfrak{E}_n$ wählen, wobei hinsichtlich der Mustergruppe $\mathfrak{G}$ die gleichen Voraussetzungen gemacht werden dürfen wie oben. Aber es ist diesmal darüber hinaus jedem $\mathfrak{E}_i$ ein *Vorzeichen* $\varepsilon_i = \pm 1$ zuzuordnen, wobei ε_i bei den späteren Anwendungen die Dimension der in der Gesamtgröße $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ steckenden Einzelgröße a_i

[7]) Man könnte allgemeiner die Abbildungen „auf" durch Abbildungen „in" ersetzen und auf die Isomorphie der Gruppen $\mathfrak{E}_i$ untereinander verzichten. Das würde aber die Darstellung komplizieren, ohne daß sich an den entscheidenden Überlegungen Wesentliches änderte. Vgl. die Schlußbemerkungen zu § 5.

als positiv oder negativ kennzeichnet[8]). Gesucht ist natürlich wieder eine Abbildung von $\mathscr{P}_n$ in $\mathfrak{E}$. Aber die Bedingungen (1)′ und (2)′, mit denen man in der Geometrie auskam, sind jetzt unter Berücksichtigung der ε_i zweckmäßig zu verallgemeinern. Klar ist die Verallgemeinerung der Multimonotoniebedingung. Man hat offenbar zu fordern:

$$(2)\quad \begin{cases} \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle > \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle, \\ \qquad \text{wenn} \quad a_i > a_i' \quad \text{und} \quad \varepsilon_i = +1 \\ \mu\langle a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle < \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle, \\ \qquad \text{wenn} \quad a_i > a_i' \quad \text{und} \quad \varepsilon_i = -1. \end{cases}$$

Orientieren wir uns weiter an den Eingangsüberlegungen von §2, so kommen wir leicht zu der zweckentsprechenden Modifikation von Bedingung (1). Wir verlangen:

$$(1)\quad \begin{cases} \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, m \cdot a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle = m^{\varepsilon_1} \cdot \mu\langle a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n\rangle \\ \qquad (m = 1, 2, \ldots;\ i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Die Bedingung (1) kann hier etwas bequemer formuliert werden als die Spiegelungsbedingung (1) von §2, weil die eudoxische Bildgruppe von μ eine Divisionsgruppe ist, und somit die Anwendung von rationalen Multiplikatoren gestattet. Da in (1) und (2) nur die Ordnungsrelation und die Multiplikation mit *Operatoren* auftritt, können wir außerhalb der physikalischen Anwendungen ebenso gut Abbildungen in $\mathscr{E}$ wie solche in $\mathfrak{E}$ betrachten. Denn $\mathfrak{E}$ und $\mathscr{E}$ sind ja als Halbgruppen isomorph. Die Abbildung μ von $\mathscr{P}_n$ in $\mathscr{E}$ heißt *zulässig* genau dann, wenn sie den Bedingungen (1) und (2) genügt. Wir formulieren den fundamentalen Abbildungssatz nun folgendermaßen:

SATZ 15. a) (Existenzsatz). *Es gibt stets eine Abbildung μ von $\mathscr{P}_n$ in $\mathscr{E}$ bzw. $\mathfrak{E}$ mit den Eigenschaften* (1) *und* (2). b) (Eindeutigkeitssatz). *Es seien μ und μ' zwei Abbildungen von $\mathscr{P}_n$ in $\mathscr{E}$ bzw. $\mathfrak{E}$ mit den Eigenschaften* (1) *und* (2). *Dann gibt es ein $A \in \mathfrak{E}$, derart daß $\mu\langle a_i\rangle = (A \cdot \mu')\langle a_i\rangle$ bzw. $\mu\langle a_i\rangle = A \cdot (\mu'\langle a_i\rangle)$ für alle a_i.*

KOROLLAR ZU SATZ 15. *Für $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$ reduziert sich Satz 15 auf den zu Beginn des Paragraphen formulierten Abbildungssatz.*

Zum Beweis des Korollars beachte man: Für $\varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1$ werden (2) und (2)′ gleichwertig. Bedingungen (1) und (1)′ aber werden ebenfalls gleich-

[8]) Daß in der Physik Potenzen eindimensionaler Größen auftreten (cm^2, sec^{-3} usw.), kann beim weiteren Ausbau der abstrakten Theorie folgendermaßen berücksichtigt werden: Wir gehen aus von einem System $\mathscr{P}_n$, das von vornherein in Untersysteme $\mathscr{P}_{n_i}$ aufgeteilt ist ($i = 1, \ldots, r$; $n_1 + \cdots + n_r = n$). Dabei ist $\mathscr{P}_{n_i}$ das Produkt $\mathscr{E}_{i1} \times \cdots \times \mathscr{E}_{in_i}$ von n_i eudoxischen Gruppen $\mathscr{E}_{ik}$, die nicht nur isomorph aufeinander bezogen, sondern geradezu identifiziert werden: $\mathscr{E}_{i1} = \mathscr{E}_{i2} = \cdots = \mathscr{E}_{in_i}$. Entsprechend dieser Identifizierung ist für alle $\mathscr{E}_{ik}$ ($k = 1, \ldots, n_i$) ein und derselbe Isomorphismus $\varrho_{i1} = \varrho_{i2} = \cdots = \varrho_{in_i}$ auf $\mathfrak{E}$ zugrunde zu legen, und es ist allen $\mathscr{E}_{ik}$ ($k = 1, \ldots, n_i$) das gleiche Vorzeichen $\varepsilon_{i1} = \varepsilon_{i2} = \cdots = \varepsilon_{in_i}$ zuzuordnen. — Eine systematische Weiterentwicklung der abstrakten Theorie des physikalischen Messens auf Grund des angedeuteten und anderer Ansätze soll einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

wertig, wie unmittelbar aus Satz 1 von §2 und seinem Beweis zu ersehen, der sich ebenso gut auf Isomorphismen wie auf Endomorphismen anwenden läßt (vgl. [3], Lemma (3.2)). — Wir wenden uns jetzt zu Satz 15 selbst.

a) Beim Existenzbeweis konstruiert man am besten eine Abbildung μ in $\mathfrak{E}$. Es sei in jeder Halbgruppe $\mathfrak{E}_i$ ein e_i willkürlich ausgewählt, und es bedeute τ_i die durch $\tau_i e_i = E_i$ eindeutig festgelegte isomorphe Abbildung von $\mathfrak{E}_i$ auf die zugehörige Automorphismenhalbgruppe $\mathfrak{E}_i$. (Der Auswahl der e_i entspricht in den physikalischen Anwendungen die Festlegung einer Maßeinheit bei jeder eindimensionalen Komponente eines Systems von n-dimensionalen physikalischen Größen.) — Ist A_i beliebig aus $\mathfrak{E}_i$, so ist $\varrho_i \cdot A_i \cdot \varrho_i^{-1}$ ein Automorphismus aus $\mathfrak{E}$, und durch die Vorschrift „$A_i \to \varrho_i \cdot A_i \cdot \varrho_i^{-1}$ für alle A_i“ wird der Halbkörper $\mathfrak{E}_i$ isomorph auf $\mathfrak{E}$ abgebildet. — Wir behaupten nun: Die durch $\mu\langle a_i\rangle = \prod_{i=1}^{n} \varrho_i (\tau_i a_i)^{\varepsilon_i} \varrho_i^{-1}$ definierte Abbildung μ von $\mathfrak{P}_n$ auf $\mathfrak{E}$ genügt den Bedingungen (1) und (2). Der Beweis erfordert nur eine triviale Verifikation. Um sich überschlagsmäßig klar zu machen, *wie* trivial, denke man sich für $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_n$ Halbkörper aus reellen Zahlen gewählt und — bequem, aber im Rahmen unserer Betrachtungen nicht sachgemäß, — $\mathfrak{E}_i$ mit $\mathfrak{E}_i$, $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E}$ sowie zum Schluß $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ untereinander identifiziert. Man kommt dann auf die einfache, von der Physik her geläufige Abbildungsformel $\mu\langle a_i\rangle = \prod_{i=1}^{n} a_i^{\varepsilon_i}$.

b) 1. *Beweis des Eindeutigkeitssatzes. Neue Fassung der Behauptung.* Wir betrachten diesmal Abbildungen μ *in* $\mathfrak{E}$ und zeigen zunächst:

HILFSSATZ 1. *Die Eindeutigkeitsbehauptung von Satz* 15 b) *kann auch so formuliert werden: Sind μ, μ' zulässige Abbildungen von $\mathfrak{P}_n$ in $\mathfrak{E}$, so ist $\mu = \mu'$, falls nur $\mu\langle a_i^0\rangle = \mu'\langle a_i^0\rangle$ für ein einziges n-Tupel $\langle a_i^0\rangle$.*

Beweis. a) Gilt Eindeutigkeit im Sinne von Satz 15 b) und sind μ, μ' zulässige Abbildungen mit $\mu\langle a_i^0\rangle = \mu'\langle a_i^0\rangle$, so folgt aus $A \cdot \mu'\langle a_i^0\rangle = \mu\langle a_i^0\rangle$ sofort $A = E$; $\mu = \mu'$. Es gilt also auch Eindeutigkeit im Sinne des Hilfssatzes. — b) Gilt Eindeutigkeit im Sinne des Hilfssatzes und sind μ, μ' zulässige Abbildungen, so ist zunächst klar, daß auch $A \cdot \mu'$ für jedes $A \in \mathfrak{E}$ zulässig ist. Ist nun $\langle a_i^0\rangle$ beliebig gewählt, so gibt es in der eudoxischen Halbgruppe $\mathfrak{E}$ ein A, derart daß $A \cdot \mu'\langle a_i^0\rangle = \mu\langle a_i^0\rangle$, und nach dem Hilfssatz folgt $A \cdot \mu' = \mu$. Es gilt also auch Eindeutigkeit im Sinne von Satz 15 b). — Man beachte, daß für den Beweis von Hilfssatz 1 der eudoxische Charakter von $\mathfrak{E}$ wesentlich ist.

b) 2. *Beweis der Eindeutigkeit im Sinne von Hilfssatz* 1. *Reduktion des Beweises auf den Beweis eines Stetigkeitssatzes.* Wir denken uns ausnahmsweise die Halbgruppen $\mathfrak{E}_i$ durch Hinzunahme eines Nullelementes O_i ergänzt, wobei $O_i \leqq a_i$ für alle $a_i \in \mathfrak{E}_i$. Unter $|a_i - a_i'|$ verstehen wir die bildbare der beiden Differenzen $a_i - a_i'$, $a_i' - a_i$, falls $a_i \neq a_i'$ und O_i, falls $a_i = a_i'$. (Entsprechend O, $|a - a'|$ bei $\mathfrak{E}$.) Es sei ferner in jedem $\mathfrak{E}_i$ eine e_i, in $\mathfrak{E}$ ein e willkürlich festgelegt.

HILFSSATZ 2 (Stetigkeitssatz). *Bei einer zulässigen Abbildung μ gibt es zu jedem n-Tupel $\langle a_i\rangle$ und jedem m ein l, derart, daß $|\mu\langle a_i\rangle - \mu\langle a_i'\rangle| < m^{-1}e$, falls nur $|a_i - a_i'| < l^{-1}e_i$ $(i=1,\ldots,n)$.*

Um zu zeigen, daß aus Hilfssatz 2 die Eindeutigkeitsbehauptung von Hilfssatz 1 folgt, betrachten wir zu dem n-Tupel $\langle a_i^0\rangle$, für das $\mu\langle a_i^0\rangle = \mu'\langle a_i^0\rangle$ gilt, das „Gitter" G_n aller n-Tupel $\langle r_i \cdot a_i^0\rangle$ (r_i beliebig rational $(i=1,\ldots,n)$). Aus Bedingung (1) erschließt man dann ohne Schwierigkeit: Es ist $\mu\langle r_i \cdot a_i^0\rangle = \mu'\langle r_i \cdot a_i^0\rangle$ für jedes $\langle r_i \cdot a_i^0\rangle \in G_n$. Angenommen nun, es sei $\mu \neq \mu'$ und etwa $0 \neq |\mu\langle a_i\rangle - \mu'\langle a_i\rangle|$. Dann gibt es wegen des archimedischen Charakters von $\mathfrak{E}$ ein m, derart, daß $|\mu\langle a_i\rangle - \mu'\langle a_i\rangle| > 2m^{-1}e$. Wegen des archimedischen Charakters der Gruppen $\mathfrak{E}_i$ existiert ferner für jedes l ein $\langle r_i \cdot a_i^0\rangle \in G_n$, derart, daß $|r_i \cdot a_i^0 - a_i| < l^{-1}e_i$ $(i=1,\ldots,n)$ und nach Hilfssatz 2 kann l so gewählt werden, daß $|\mu\langle a_i\rangle - \mu\langle r_i \cdot a_i^0\rangle| < m^{-1}e$, $|\mu\langle a_i\rangle - \mu'\langle r_i \cdot a_i^0\rangle| < m^{-1}e$. Diese letzten Ungleichungen aber führen wegen $\mu\langle r_i \cdot a_i^0\rangle = \mu'\langle r_i \cdot a_i^0\rangle$ in geläufiger Weise zu einem Widerspruch gegen die Ungleichung $|\mu\langle a_i\rangle - \mu'\langle a_i\rangle| > 2m^{-1}e$. Es ist also $\mu \neq \mu'$ ausgeschlossen.

b) 3. *Beweis von Hilfssatz 2.* Es handelt sich hier an sich um einfache Überlegungen im Sinne der elementaren Analysis. Eine genaue Durchführung ist aber nötig, um zu zeigen, daß nur die schwachen, im Zusatz zum Eindeutigkeitssatz formulierten Voraussetzungen benutzt werden. — Es genügt offenbar, zu zeigen: Gilt der Stetigkeitssatz für jedes $\mathfrak{P}_{n-1}$, so gilt er auch für jedes $\mathfrak{P}_n$. (Der folgende Beweis gilt auch für $n=1$, wo die Voraussetzung über $\mathfrak{P}_0$ inhaltslos ist.) Es seien $\langle a_i^0\rangle$ und m fest vorgegeben. Betrachten wir die auf $\mathfrak{P}'_{n-1} = \{\langle a_i\rangle / a_n = a_n^0\}$ beschränkte Funktion μ, so ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung sofort: Für ein hinreichend großes l_1 gilt:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} |\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle - \mu\langle a_1^0,\ldots,a_{n-1}^0,a_n^0\rangle| < \min\left((2m)^{-1}e, \mu\langle a_1^0,\ldots,a_n^0\rangle\right), \\ \text{falls nur} \quad |a_i - a_i^0| < l_1^{-1}e_i \qquad (i=1,\ldots,n-1). \end{cases}$$

Man hat dann insbesondere:

$$(\beta)\quad \begin{cases} \mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle < 2\cdot\mu\langle a_1^0,\ldots,a_n^0\rangle, \\ \text{falls nur} \quad |a_i - a_i^0| < l_1^{-1}e_i;\ (i=1,\ldots,n). \end{cases}$$

Es seien ferner $r<1$ und $s>1$ zwei rationale Zahlen, und es sei l_2 so groß gewählt, daß $r\cdot a_n^0 < a_n < s\cdot a_n^0$ aus $|a_n - a_n^0| < l_2^{-1}e_n$ folgt. Aus den für μ geltenden Bedingungen (1) und (2) ergibt sich dann:

$$(\gamma_+)\quad \begin{cases} r\cdot\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle < \begin{Bmatrix}\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle \\ \mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\rangle\end{Bmatrix} < s\cdot\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle, \\ \text{falls} \quad \varepsilon_n = +1;\quad |a_n - a_n^0| < l_2^{-1}e_n, \end{cases}$$

$$(\gamma_-)\quad \begin{cases} r^{-1}\cdot\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle > \begin{Bmatrix}\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle \\ \mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\rangle\end{Bmatrix} > s^{-1}\cdot\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle, \\ \text{falls} \quad \varepsilon_n = -1;\quad |a_n - a_n^0| < l_2^{-1}e_n, \end{cases}$$

$$(\delta)\quad \begin{cases} |\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle - \mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n\rangle| < \max(s-r, r^{-1}-s^{-1})\times \\ \qquad \times\mu\langle a_1,\ldots,a_{n-1},a_n^0\rangle \quad \text{für} \quad |a_n - a_n^0| < l_2^{-1}e_n. \end{cases}$$

Wählen wir nun r und s von vornherein so nahe bei 1, daß

$$(\varepsilon) \qquad \max(s-r, r^{-1}-s^{-1}) \cdot \mu\langle a_1^0, \ldots, a_{n-1}^0, a_n^0\rangle < (4m)^{-1} e$$

gilt, so folgt für $l > \max(l_1, l_2)$ aus (α), (β) und (δ) sofort

$$|\mu\langle a_1^0, \ldots, a_{n-1}^0, a_n^0\rangle - \mu\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n^0\rangle| < (2m)^{-1} e$$

$$(\zeta) \qquad |\mu\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n^0\rangle - \mu\langle a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\rangle| < (2m)^{-1} e$$

$$\text{falls} \quad |a_i - a_i^0| < l^{-1} e_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

und damit die Behauptung des Stetigkeitssatzes.

KOROLLAR ZU b) 2. UND b) 3. *Eindeutigkeit im Sinne des Hilfssatzes* 1 *gilt immer, wenn* $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{E}$ *beliebige archimedische Divisionsgruppen sind.*

In der Tat wurde in b) 2. und b) 3. nirgends vom eudoxischen Charakter von $\mathfrak{E}$ Gebrauch gemacht. — Andererseits ist es leicht, mit nicht-eudoxischem $\mathfrak{E}$ Beispiele zu konstruieren, in denen Hilfssatz 1 nicht mehr gilt. Was also die Eindeutigkeit angeht, so sind die gewonnenen Resultate nicht mehr wesentlich zu verschärfen. — Anders liegen die Dinge bei der Existenzfrage. Hier wird man in jedem Fall voraussetzen müssen, daß für jedes $\mathfrak{E}_i$ eine Abbildung τ_i *in* $\mathfrak{E}$ existiert. Es ist auch nicht schwer zu sehen, daß man mit dieser Voraussetzung auskommt, und zwar mit ähnlichen, wenn auch passend modifizierten Beweismethoden wie im Text — wenn die Gruppen $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$, $\mathfrak{E}$ alle eudoxisch sind. Fragt man aber, wieweit man auf den eudoxischen Charakter $\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_n$ und eventuell auch $\mathfrak{E}$ verzichten kann, so kommt man über den Rahmen unserer Untersuchungen hinaus, denn bei nicht-eudoxischen $\mathfrak{E}_i$ sind die zu Beweis von Satz 15 a) benutzten Methoden offenbar nicht mehr brauchbar. Gleichwohl sei auf dieses Problem hingewiesen; denn es drängt sich eigentlich bei der Gegenüberstellung von Satz 15 a) und Satz 15 b) von selbst auf.

Literatur

[1] KRULL, W.: Über die Endomorphismen von total geordneten Archimedischen Abelschen Gruppen. Math. Z. **74**, 81–90 (1960).

[2] EUKLID: Euclidis Elementa, vol. 5, ed. J. L. HEIBERG. Lipsiae: Teubner 1883–1888.

[3] ENDLER, O.: Über multiplikative Strukturen und eudoxische Hüllen von archimedischen total geordneten Gruppen. Math. Z. **77**, 339–358 (1961).

Bonn, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 20. Dezember 1961)