POMMERENKE, CH.
Math. Zeitschr. 78, 263—284 (1962)

Über einige Klassen meromorpher schlichter Funktionen

Von

CHRISTIAN POMMERENKE

Sei

$$f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$$

eine in $|z| > 1$ meromorphe schlichte Funktion. Wenn es eine sternförmige Funktion $g(z) = e^{i\beta} z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$ gibt, so daß $\mathrm{Re}[z f'(z)/g(z)] > 0$ für $|z| > 1$ ist, so soll $f(z)$ nahezu konvex in $|z| > 1$ heißen*). Für in $|\zeta| < 1$ reguläre schlichte Funktionen ist der Begriff nahezu konvex von KAPLAN [5] eingeführt worden.

Es wird zuerst eine Charakterisierung der nahezu konvexen Funktionen gegeben (Satz 1). Für jede schlichte nahezu konvexe Funktion wird dann

$$|a_n| < \frac{2\sqrt{2}}{n}$$

gezeigt (Satz 2), während für nicht-schlichte nahezu konvexe Funktionen $|a_n| < 21\, n^{-1}$ bewiesen wird (Satz 3). Für die Länge $L(r)$ des Bildes von $|z| = r$ gilt

$$L(r) = O\left(\log \frac{1}{1 - r^{-1}}\right)$$

(Satz 8), und es ist $|\arg f'(z)| < 3\pi/2$ (Satz 7).

Die sternförmigen Funktionen bilden die wichtigste Unterklasse der nahezu konvexen Funktionen. Wenn $f(z)$ sternförmig ist, so gilt (Satz 4)

$$|a_n| \leqq 2/(n+1).$$

Dies wurde zuerst von CLUNIE [2] für den Fall $a_0 = 0$ bewiesen. Man kann aber Clunies Methode ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} n\, a_n = 0,$$

wenn die monotone Funktion $\arg f(e^{i\vartheta})$ absolut stetig ist. Weiter werden die (sternförmigen) Funktionen $f(z) = z + a_1 z^{-1} + \cdots$ untersucht, für die $\sum_1^\infty n\, |a_n| \leqq 1$ ist.

Für jede in $|z| > 1$ konvexe Funktion wird

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} - 1 \right| \leqq \frac{1}{|z_1 z_2|} \qquad (|z_1| > 1,\ |z_2| > 1)$$

bewiesen (Satz 5). Insbesondere ist $\mathrm{Re}\, f'(z) > 0$. Satz 6 gibt eine gewisse Verallgemeinerung dieser Aussage auf beliebige meromorphe schlichte Funktionen. Weiter wird gezeigt, daß $L(r)$ für konvexe Funktionen kleiner oder

*) *Zusatz bei der Korrektur.* Inzwischen ist eine Arbeit von LIBERA und ROBERTSON [Meromorphic close-to-convex functions. Michigan Math. J. 8, 167—175 (1961)] erschienen, in der dieselbe Definition gegeben und ebenfalls Satz 1 und 2 bewiesen wird.

gleich dem Umfang der Ellipse mit den Halbachsen $r+r^{-1}$ und $r-r^{-1}$ ist (Satz 9). Für $r=1$ ergibt sich ein neuer Beweis für die von PÓLYA und SCHIFFER [9] stammende Ungleichung $L(1)\leqq 8$.

Schließlich wird noch

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\vartheta})|\, d\vartheta < 8{,}04$$

bewiesen, wobei $f(z)$ eine beliebige meromorphe schlichte Funktion mit $a_0=0$ und $f(z)\neq 0$ ist.

1. Nahezu konvexe Funktionen

Eine in $|\zeta|<1$ reguläre Funktion $\varphi(\zeta)=\zeta+\alpha_2\zeta^2+\cdots$ heißt nach KAPLAN [5] nahezu konvex, wenn es eine in $|\zeta|<1$ konvexe Funktion $\chi(\zeta)=\gamma_1\zeta+\cdots$ gibt, so daß

$$\text{(1)}\qquad \operatorname{Re}\varphi'(\zeta)/\chi'(\zeta)>0$$

in $|\zeta|<1$ gilt. Jede nahezu konvexe Funktion ist schlicht. Da die Funktion $\psi(\zeta)=\zeta\chi'(\zeta)$ genau dann sternförmig ist, wenn $\chi(\zeta)$ konvex ist, kann man Bedingung (1) auch schreiben in der Form

$$\text{(2)}\qquad \operatorname{Re}\zeta\,\varphi'(\zeta)/\psi(\zeta)>0\,.$$

Diese Definition soll nun auf meromorphe schlichte Funktionen übertragen werden, die in $|z|>1$ definiert sind. Eine in $|z|>1$ meromorphe schlichte Funktion

$$f(z)=z+a_0+a_1z^{-1}+\cdots$$

soll *nahezu konvex in* $|z|>1$ heißen[1]), wenn es eine in $|z|>1$ bez. 0 sternförmige Funktion

$$g(z)=e^{i\beta}z+b_0+b_1z^{-1}+\cdots\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}\right)$$

gibt, so daß

$$\text{(3)}\qquad \operatorname{Re}\left[z\,f'(z)/g(z)\right]>0$$

für $|z|>1$ ist. Dabei heißt $g(z)$ in $|z|>1$ sternförmig bez. 0, wenn $|z|>1$ durch $w=g(z)$ konform und schlicht auf ein Gebiet abgebildet wird, dessen Komplement bezüglich des Punktes 0 sternförmig ist. Bekanntlich ist ein in $1<|z|<\infty$ reguläre Funktion der Form $g(z)=e^{i\beta}z+\cdots$ genau dann schlicht und sternförmig, wenn

$$\text{(4)}\qquad \operatorname{Re}z\,g'(z)/g(z)>0$$

in $|z|>1$ ist.

BEMERKUNGEN. 1. Während für nahezu konvexe Funktionen in $|\zeta|<1$ die Schlichtheit bereits aus Bedingung (1) oder (2) folgt, ergibt sich aus Bedingung (3) nicht, daß $f(z)$ schlicht ist. Vielmehr muß die Schlichtheit ausdrücklich vorausgesetzt werden. Denn die durch

$$f_0'(z)=(1-z^{-2})(1+z^{-2})^{-1}=1-2z^{-2}+\cdots$$

[1]) Entsprechend definiert man natürlich nahezu konvex in $|z|>R$.

definierte Funktion $f_0(z) = z + 2z^{-1} + \cdots$ ist regulär in $1 < |z| < \infty$ und erfüllt (3) $\big($mit $g(z) \equiv z\big)$, ist aber nicht schlicht, da der Koeffizient von z^{-1} größer als 1 ist.

2. Man kann nicht Bedingung (3) durch die Bedingung ersetzen, daß

$$\operatorname{Re} f'(z)/h'(z) > 0$$

mit einer in $|z| > 1$ konvexen Funktion $h(z)$ gelten soll. Denn wenn sich $g(z) = e^{i\beta} z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$ in der Form $g(z) = z h'(z)$ darstellen lassen soll, so muß $b_0 = 0$ sein. Umgekehrt sieht man leicht, daß zu jeder in $|z| > 1$ sternförmigen Funktion $g(z) = e^{i\beta} z + b_1 z^{-1} + \cdots$ eine konvexe Funktion $h(z)$ mit $g(z) = z h'(z)$ existiert.

Jede sternförmige Funktion ist nahezu konvex. Denn wenn $f(z)$ sternförmig ist, so wähle man $g(z) \equiv f(z)$, und Bedingung (3) ist nach (4) erfüllt. Daher ist auch jede konvexe Funktion nahezu konvex. Eine weitere Klasse von nahezu konvexen Funktionen bilden die Funktionen, die konvex in Richtung der imaginären Achse sind. (Für $|\zeta| < 1$ wurden diese Funktionen von ROBERTSON [*12*] betrachtet.) Das bedeutet, daß der Durchschnitt des Komplementes des Bildgebietes mit jeder Geraden parallel zur imaginären Achse leer oder ein Segment ist. Man kann zeigen, daß man dann in (3)

$$g(z) = i\, e^{-i(\lambda_1+\lambda_2)/2} z - 2i \cos \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} + i\, e^{i(\lambda_1+\lambda_2)/2} z^{-1}$$

wählen kann, wo λ_1 und λ_2 gewisse reelle Zahlen sind.

Die nahezu konvexen Funktionen in $|z| > 1$ können ganz entsprechend charakterisiert werden wie im Fall $|\zeta| < 1$ [*5*].

SATZ 1. *Sei $f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$ meromorph und schlicht in $|z| > 1$. Genau dann ist $f(z)$ nahezu konvex, wenn für $r > 1$ und $\vartheta_1 < \vartheta_2$ gilt*

$$\arg\left[e^{i\vartheta_2} f'(r\, e^{i\vartheta_2})\right] - \arg\left[e^{i\vartheta_1} f'(r\, e^{i\vartheta_1})\right] > -\pi.$$

BEWEIS. 1. Sei $f(z)$ nahezu konvex. Nach Definition existiert eine sternförmige Funktion $g(z)$ mit

$$|\arg[z f'(z)] - \arg g(z)| < \pi/2.$$

Da $\arg g(r e^{i\vartheta})$ für festes $r > 1$ monoton mit ϑ wächst, folgt

$$\arg\left[e^{i\vartheta_2} f'(r\, e^{i\vartheta_2})\right] - \arg\left[e^{i\vartheta_1} f'(r\, e^{i\vartheta_1})\right] > \arg g(r\, e^{i\vartheta_2}) - \arg g(r\, e^{i\vartheta_1}) - \pi > -\pi.$$

2. Sei umgekehrt für $\varrho > 1$ und $\vartheta_1 < \vartheta_2$

$$\arg\left[e^{i\vartheta_2} f'(\varrho\, e^{i\vartheta_2})\right] - \arg\left[e^{i\vartheta_1} f'(\varrho\, e^{i\vartheta_1})\right] > -\pi. \tag{5}$$

Wenn man

$$\sigma(\vartheta, \varrho) = \max_{t \leqq \vartheta} \arg\left[e^{it} f'(\varrho\, e^{it})\right] - \frac{\pi}{2}$$

setzt, so wächst $\sigma(\vartheta, \varrho)$ monoton mit ϑ, und es gilt

$$\sigma(\vartheta, \varrho) \geqq \arg\left[e^{i\vartheta} f'(\varrho\, e^{i\vartheta})\right] - \frac{\pi}{2}.$$

Wenn $\vartheta^* \leqq \vartheta$ so gewählt wird, daß $\sigma(\vartheta, \varrho) = \arg[e^{i\vartheta^*} f'(\varrho e^{i\vartheta^*})] - \frac{\pi}{2}$ ist, so folgt aus (5)

$$\sigma(\vartheta, \varrho) - \arg[e^{i\vartheta} f'(\varrho e^{i\vartheta})] < \frac{\pi}{2}.$$

Insgesamt gilt also

$$|\sigma(\vartheta, \varrho) - \arg[e^{i\vartheta} f'(\varrho e^{i\vartheta})]| \leqq \frac{\pi}{2}. \tag{6}$$

Sei für $|z| > \varrho$

$$g(z, \varrho) = z \exp \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{z + \varrho e^{it}}{z - \varrho e^{it}} \big(\sigma(t, \varrho) - t\big)\, dt.$$

Da $\sigma(t, \varrho) - t$ die Periode 2π hat, ergibt sich (mit $\tau = t - \vartheta$) für $r > \varrho$

$$\left\{\begin{aligned} \arg g(r e^{i\vartheta}, \varrho) &= \vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 - 2r\varrho\cos\tau + \varrho^2} \big(\sigma(\tau + \vartheta, \varrho) - \tau - \vartheta\big)\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r^2 - \varrho^2}{r^2 - 2r\varrho\cos\tau + \varrho^2}\, \sigma(\tau + \vartheta, \varrho)\, d\tau. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Weil $\sigma(t, \varrho)$ monoton in t wächst, ist auch $\arg g(r e^{i\vartheta}, \varrho)$ monoton wachsend in ϑ. Also ist $g(z, \varrho)$ sternförmig in $|z| > \varrho$. Da $\sigma(\tau + \vartheta, \varrho)$ stetig in τ ist, ergibt sich aus (7) und (6)

$$\lim_{r \to \varrho + 0} |\arg g(r e^{i\vartheta}, \varrho) - \arg[r e^{i\vartheta} f'(r e^{i\vartheta})]| = |\sigma(\vartheta, \varrho) - \arg[\varrho e^{i\vartheta} f'(\varrho e^{i\vartheta})]| \leqq \frac{\pi}{2}$$

und also

$$\operatorname{Re} \frac{z f'(z)}{g(z, \varrho)} \geqq 0 \qquad \big(|z| \geqq \varrho\big). \tag{8}$$

Wenn ϱ_n eine passend gewählte Folge ist, für die $\varrho_n > 1$ und $\varrho_n \to 1$ gilt, so konvergiert $z^{-1} g(z, \varrho_n)$ in $|z| \geqq r$ für jedes feste $r > 1$ gleichmäßig gegen eine Funktion $z^{-1} g(z)$, und $g(z)$ hat die Form $e^{i\beta} z + b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots$ und ist sternförmig in $|z| > 1$. Aus (8) folgt

$$\operatorname{Re} z f'(z)/g(z) \geqq 0$$

für $|z| > 1$, und das Gleichheitszeichen kann für irgend ein z nur stehen, wenn $z f'(z)/g(z)$ konstant ist. Dann ist $z f'(z)$ sternförmig und $f(z)$ konvex, also nahezu konvex.

Aus Satz 1 kann man eine geometrische Charakterisierung der nahezu konvexen Funktionen erhalten. Sei

$$\mathfrak{C} = \{w(t):\ 0 \leqq t \leqq 2\pi\}$$

mit $w(t + 2\pi) = w(t)$ eine positiv orientierte einfach geschlossene glatte Kurve, und sei $\Theta(t)$ der Winkel, den die äußere Normale in $w(t)$ mit der positiv-reellen Achse bildet. Wenn für $t_1 < t_2$ immer $\Theta(t_2) - \Theta(t_1) \geqq -\pi$ gilt, so soll $\mathfrak{C}$ *nahezu konvex* heißen.

Folgerung 1. *Sei $f(z)=z+\cdots$ meromorph und schlicht in $|z|>1$. Genau dann ist $f(z)$ nahezu konvex, wenn alle Bildkurven $\mathfrak{C}(r)$ von $|z|=r$ $(r>1)$ nahezu konvex sind.*

Die Behauptung ergibt sich sofort aus Satz 1, da die äußere Normale in $f(re^{i\vartheta})$ an $\mathfrak{C}(r)$ den Winkel $\arg[e^{i\vartheta}f'(re^{i\vartheta})]$ hat.

Folgerung 2. *Sei $\mathfrak{C}$ eine einfach geschlossene glatte Kurve. Seien $\varphi(\zeta)$ und $f(z)=z+\cdots$ schlichte Funktionen, die $|\zeta|<1$ bzw. $|z|>1$ konform auf das Innengebiet bzw. das Außengebiet von $\mathfrak{C}$ abbilden. Dann sind $\mathfrak{C}$, $\varphi(\zeta)$ und $f(z)$ immer gleichzeitig nahezu konvex oder nicht.*

Beweis. Da $\mathfrak{C}$ eine glatte Kurve ist, so sind $\arg\varphi'(\zeta)$ und $\arg f'(z)$ sogar noch in $|\zeta|\leqq 1$ bzw. $|z|\geqq 1$ stetig [*4*, S. 372]. Nach Satz 1 ist daher $f(z)$ genau dann nahezu konvex, wenn dies für $\mathfrak{C}$ gilt, und aus einem Satz von Kaplan [*5*, S. 177] folgt, daß $\mathfrak{C}$ und $\varphi(\zeta)$ gleichzeitig nahezu konvex sind oder nicht.

Lewandowski [*8*] hat folgenden interessanten Satz ausgesprochen: Eine in $|\zeta|<1$ reguläre schlichte Funktion ist genau dann nahezu konvex, wenn das Bildgebiet linear erreichbar ist, d.h. das Komplement des Bildgebietes läßt sich darstellen als Vereinigung von abgeschlossenen Halbgeraden, die keine inneren Punkte gemeinsam haben. (Die Halbgeraden können parallel sein, und der Endpunkt einer Halbgeraden kann einer anderen angehören.)

Es ist sehr wahrscheinlich, daß folgendes Analogon gilt: Sei $f(z)=z+\cdots$ in $|z|>1$ meromorph und schlicht. Genau dann ist $f(z)$ nahezu konvex, wenn das Bildgebiet $\mathfrak{G}$ von $|z|>1$ sich als Vereinigung des Punktes ∞ und einer Familie offener punktfremder Halbgeraden darstellen läßt. Wenn der Rand von $\mathfrak{G}$ eine glatte Kurve ist, so ergibt sich dies übrigens sofort aus Folgerung 2 und dem Satz von Lewandowski.

Schließlich soll noch eine Abschätzung für die ,,Nahezu-Konvexitäts-Schranke" gegeben werden:

Wenn $f(z)=z+\cdots$ meromorph und schlicht in $|z|>1$ ist, dann ist $f(z)$ nahezu konvex in $|z|>(1-e^{-\pi/2})^{-\frac{1}{2}}\approx 1{,}124$.

Beweis. Für $|z|>1$ gilt [*4*, S. 112]

$$|\log f'(z)|\leqq \log\frac{1}{1-|z|^{-2}},$$

für $|z|>r_0=(1-e^{-\pi/2})^{-\frac{1}{2}}$ also $|\arg f'(z)|<\pi/2$. Daher ist $\operatorname{Re} f'(z)>0$ für $|z|>r_0$, und $f(z)$ erfüllt (3) mit $g(z)\equiv z$.

2. Koeffizientenabschätzungen

Sei

$$f(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}$$

eine in $|z|>1$ meromorphe schlichte Funktion. Nach dem Flächensatz ist $a_n=o(n^{-\frac{1}{2}})$. Clunie [*1*] hat andererseits gezeigt, daß es eine Funktion gibt, deren Koeffizienten $|a_n| > n^{-49/50}$ für unendlich viele n erfüllen. Wenn dagegen $f(z)$ nahezu konvex ist, so gilt $|a_n| < 2\sqrt{2}\, n^{-1}$. Um diese Abschätzung zu beweisen, soll erst ein Hilfssatz hergeleitet werden, der auf einer Methode von CLUNIE [2] beruht.

HILFSSATZ 1. *Seien* $f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *und* $g(z) = e^{i\beta} z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ *regulär in* $1 < |z| < \infty$. *Für* $|z| > 1$ *gelte*

$$\operatorname{Re} z f'(z)/g(z) > 0.$$

Dann ist für $n \geqq 0$

$$|n a_n + e^{-i\beta} b_n|^2 \leqq 4\cos^2\beta - 4\cos\beta \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu \operatorname{Re} a_\nu \bar{b}_\nu .$$

BEWEIS. Wegen $\operatorname{Re} z f'(z)/g(z) > 0$ und $z f'(z) = z + \cdots$, $g(z) = e^{i\beta} z + \cdots$ ist

$$G(z) = z\, \frac{z f'(z)/g(z) - e^{-i\beta}}{z f'(z)/g(z) + e^{i\beta}}$$

regulär in $|z| > 1$ und erfüllt $|G(z)| \leqq 1$. Man erhält

$$z f'(z) - e^{-i\beta} g(z) = \big(f'(z) + e^{i\beta} z^{-1} g(z)\big)\, G(z),$$

also

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu a_\nu + e^{-i\beta} b_\nu)\, z^{-\nu} = \left[(1 + e^{2i\beta}) + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-\nu a_\nu + e^{i\beta} b_\nu)\, z^{-(\nu+1)}\right] G(z).$$

Für $n \geqq 0$ ergibt sich daher

$$-\sum_{\nu=0}^{n} (\nu a_\nu + e^{-i\beta} b_\nu)\, z^{-\nu} - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (\nu a_\nu + e^{-i\beta} b_\nu)\, z^{-\nu} - \sum_{\nu=n}^{\infty} (-\nu a_\nu + e^{i\beta} b_\nu)\, z^{-(\nu+1)}\, G(z)$$
$$= \left[(1 + e^{2i\beta}) + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-\nu a_\nu + e^{i\beta} b_\nu)\, z^{-(\nu+1)}\right] G(z).$$

Da die letzten beiden Summen auf der linken Seite nur Potenzen z^{-k} mit $k \geqq n+1$ enthalten, folgt für $r > 1$

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\nu a_\nu + e^{-i\beta} b_\nu|^2\, r^{-2\nu}$$
$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G(r e^{i\vartheta})|^2 \left| (1 + e^{2i\beta}) + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-\nu a_\nu + e^{i\beta} b_\nu)\, (r e^{i\vartheta})^{-(\nu+1)} \right|^2 d\vartheta .$$

Wegen $|G(z)| \leqq 1$ ergibt sich für $r \to 1$

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\nu a_\nu + e^{-i\beta} b_\nu|^2 \leqq |1 + e^{2i\beta}|^2 + \sum_{\nu=0}^{n-1} |-\nu a_\nu + e^{i\beta} b_\nu|^2,$$

also

$$|n a_n + e^{-i\beta} b_n|^2 \leqq 4\cos^2\beta - 2\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu \operatorname{Re}\left[a_\nu \bar{b}_\nu (e^{i\beta} + e^{-i\beta})\right]$$
$$= 4\cos^2\beta - 4\cos\beta \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu \operatorname{Re} a_\nu \bar{b}_\nu .$$

SATZ 2. *Seien* $f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *und* $g(z) = e^{i\beta} z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ *meromorph und schlicht in* $|z| > 1$. *Wenn* $\operatorname{Re} z f'(z)/g(z) > 0$ *für* $|z| > 1$ *ist, so gilt für* $n \geqq 1$

$$|a_n| < \frac{2\sqrt{2}}{n}$$

und

$$|a_n| \leqq \frac{2}{n} (\cos\beta + \cos^2\beta)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Ungleichungen gelten also insbesondere, wenn $f(z)$ *nahezu konvex ist.*

BEWEIS. Aus Hilfssatz 1 folgt

$$n^2 |a_n|^2 + 2n \operatorname{Re}[a_n \bar{b}_n e^{i\beta}] + |b_n|^2 \leqq 4\cos^2\beta - 4\cos\beta \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu \operatorname{Re} a_\nu \bar{b}_\nu,$$

also

$$\begin{aligned} n^2 |a_n|^2 &\leqq 4 + 4 \sum_{\nu=0}^{n-1} \nu |a_\nu| \, |b_\nu| + 2n |a_n| \, |b_n| \\ &= 4 + 2 \sum_{\nu=0}^{n-1} \sqrt{\nu} |a_\nu| \cdot \sqrt{\nu} |b_\nu| + 2 \sum_{\nu=0}^{n} \sqrt{\nu} |a_\nu| \cdot \sqrt{\nu} |b_\nu|. \end{aligned}$$

Da $f(z)$ und $g(z)$ schlicht sind, gilt nach dem Flächensatz $\sum_1^\infty \nu |a_\nu|^2 \leqq 1$ und $\sum_1^\infty \nu |b_\nu|^2 \leqq 1$. Daher ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} n^2 |a_n|^2 &\leqq 4 + 2 \Big(\sum_{\nu=0}^{n-1} \nu |a_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} + 2 \Big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu |a_\nu|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq 4 + 2(1 - n|a_n|^2)^{\frac{1}{2}} + 2 \\ &\leqq 6 + (2 - n|a_n|^2), \end{aligned}$$

also

$$|a_n|^2 \leqq \frac{8}{n(n+1)}, \qquad |a_n| \leqq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n(n+1)}} < \frac{2\sqrt{2}}{n}.$$

Aus Hilfssatz 1 folgt ebenso

$$\begin{aligned} n |a_n| &\leqq |b_n| + \Big(4\cos^2\beta + 4\cos\beta \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu |a_\nu b_\nu|\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqq |b_n| + 2(\cos^2\beta + \cos\beta)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

und wegen $\sum_1^\infty \nu |b_\nu|^2 \leqq 1$ ist $|b_n| \leqq n^{-\frac{1}{2}}$.

Nun soll gezeigt werden, daß unter einer zusätzlichen Voraussetzung für eine nahezu konvexe Funktion sogar $a_n = o(n^{-1})$ gilt. Man benötigt die folgenden beiden Hilfssätze.

HILFSSATZ 2. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 gilt, wenn* $U(z) = \operatorname{Re} z f'(z)/g(z)$ *gesetzt wird, für* $r > 1$, $n \geqq 0$

$$n a_n = -e^{-i\beta} b_n + \frac{r^n}{\pi} \int_0^{2\pi} U(r e^{i\vartheta}) \, e^{in\vartheta} \Big(\sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu (r e^{i\vartheta})^{-\nu} - g(r e^{i\vartheta})\Big) \, d\vartheta.$$

BEWEIS. Es werde

$$\frac{z f'(z)}{g(z)} = e^{-i\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k} \tag{9}$$

gesetzt. Dann ist

$$z - \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k z^{-k} = \left(e^{i\beta} z + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}\right)\left(e^{-i\beta} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}\right),$$

also für $n \geqq 0$

$$-n\, a_n = e^{i\beta} c_{n+1} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu c_{n-\nu} + e^{-i\beta} b_n .$$

Aus (9) ergibt sich bekanntlich

$$c_k = \frac{r^k}{\pi} \int_0^{2\pi} U(r e^{i\vartheta})\, e^{ik\vartheta}\, d\vartheta \qquad (k \geqq 1),$$

so daß gilt

$$\begin{aligned} -n\, a_n - e^{-i\beta} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(r e^{i\vartheta}) \left(e^{i\beta} r^{n+1} e^{i(n+1)\vartheta} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu r^{n-\nu} e^{i(n-\nu)\vartheta}\right) d\vartheta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U(r e^{i\vartheta})\, r^n e^{in\vartheta} \left(e^{i\beta} \cdot r e^{i\vartheta} + \sum_{\nu=0}^{n-1} b_\nu (r e^{i\vartheta})^{-\nu}\right) d\vartheta \\ &= \frac{r^n}{\pi} \int_0^{2\pi} U(r e^{i\vartheta})\, e^{in\vartheta} \left(g(r e^{i\vartheta}) - \sum_{\nu=n}^{\infty} b_\nu (r e^{i\vartheta})^{-\nu}\right) d\vartheta . \end{aligned}$$

HILFSSATZ 3. *Sei $F(z)$ regulär in $|z|>1$ und $\operatorname{Re} F(z) > 0$. Dann existiert*

$$V(\vartheta) = \lim_{r\to 1} \operatorname{Im}\left[\int_{\infty}^{r e^{i\vartheta}} (F(\zeta) - F(\infty))\, \zeta^{-1} d\zeta\right] + \vartheta \operatorname{Re} F(\infty) \tag{10}$$

für jedes ϑ. Die Funktion $V(\vartheta)$ ist monoton wachsend, und es gilt

$$F(z) = i \operatorname{Im} F(\infty) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}}\, dV(t).$$

BEWEIS. Da $\operatorname{Re} F(z) > 0$ ist, existiert eine monoton wachsende Funktion $\alpha(t)$, so daß

$$F(z) = i \operatorname{Im} F(\infty) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z + e^{it}}{z - e^{it}}\, d\alpha(t) \tag{11}$$

ist. Dann ist

$$\lambda = \operatorname{Re} F(\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha(t).$$

Man kann $\alpha(t)$ so wählen, daß für jedes t die Gleichung $\alpha(t) = \frac{1}{2}(\alpha(t-0) + \alpha(t+0))$ gilt, $\alpha(t) - t$ die Periode 2π hat und daß

$$\int_0^{2\pi} (\alpha(t) - \lambda t)\, dt = 0$$

ist. Aus (11) folgt deshalb durch partielle Integration

$$\int_{\infty}^{z} \big(F(\zeta) - F(\infty)\big)\,\zeta^{-1}\,d\zeta = \frac{i}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{z+e^{it}}{z-e^{it}}\big(\alpha(t) - \lambda t\big)\,dt,$$

also

$$\operatorname{Im}\left[\int_{\infty}^{re^{i\vartheta}} \big(F(\zeta) - F(\infty)\big)\,\zeta^{-1}\,d\zeta\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{r^2-1}{r^2-2r\cos(\vartheta-t)+1}\big(\alpha(t) - \lambda t\big)\,dt.$$

Für jedes ϑ ergibt sich für $r \to 1+0$ als Grenzwert $\alpha(\vartheta) - \lambda\vartheta$. Also ist $V(\vartheta) = \alpha(\vartheta)$ und monoton wachsend, und man kann in (11) $\alpha(t)$ durch $V(t)$ ersetzen.

SATZ 3. *Sei* $f(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *regulär in* $1 < |z| < \infty$ *und* $g(z) = e^{i\beta}z + \cdots$ *meromorph, schlicht und* $\neq 0$ *in* $|z| > 1$. *Sei* $F(z) = zf'(z)/g(z)$ *und* $\operatorname{Re}F(z) > 0$. *Dann ist*

$$|a_n| < 21\,n^{-1}.$$

Wenn weiter die durch (10) *erklärte monotone Funktion* $V(\vartheta)$ *absolut stetig ist, so gilt* $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

BEMERKUNG. Es wird nicht vorausgesetzt, daß $f(z)$ schlicht ist. Daher zeigt der Satz, daß $a_n = O(n^{-1})$ auch für nichtschlichte nahezu konvexe Funktionen gilt, d.h. für Funktionen, die nur die Bedingung (3) erfüllen.

BEWEIS. Es ist $U(z) = \operatorname{Re}F(z) > 0$ und

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} U(re^{i\vartheta})\,d\vartheta = 2\,U(\infty) = 2\cos\beta \leqq 2.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt daher

$$n|a_n| \leqq |b_n| + 2r^n \sum_{\nu=n}^{\infty} |b_\nu|\, r^{-\nu} + \frac{r^n}{\pi}\left|\int_{0}^{2\pi} U(re^{i\vartheta})\, g(re^{i\vartheta})\, e^{in\vartheta}\,d\vartheta\right|. \tag{12}$$

Es werde $\varepsilon_n^2 = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu|b_\nu|^2$ gesetzt. Nach dem Flächensatz ist $\varepsilon_n \leqq 1$ und $\varepsilon_n \to 0$. Die Schwarzsche Ungleichung liefert

$$\left\{\begin{aligned} 2r^n \sum_{\nu=n}^{\infty} |b_\nu|\, r^{-\nu} &\leqq 2r^n \Big(\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu|b_\nu|^2\Big)^{\frac12} \Big(\sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\nu r^{2\nu}}\Big)^{\frac12} \\ &\leqq 2\varepsilon_n \Big(n\Big(1 - \frac{1}{r^2}\Big)\Big)^{-\frac12}. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Da $g(z)$ schlicht und $\neq 0$ ist, gilt weiter $|g(re^{i\vartheta})| \leqq r+3$.

Wegen $|b_n| \leqq 1$, $\varepsilon_n \leqq 1$ und $U(re^{i\vartheta}) \geqq 0$ folgt daher aus (12) und (13)

$$n|a_n| \leqq 1 + 2\Big(n\Big(1 - \frac{1}{r^2}\Big)\Big)^{-\frac12} + 2(r+3)\,r^n.$$

Für $n \geqq 2$ setze man $r = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Dann erhält man

$$n\,|a_n| < 1 + 2 + 9 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \leqq 21\,.$$

Für $n=1$ ergibt sich $|a_1| < 18$, indem man $r = \sqrt{2}$ wählt.

Sei nun $V(\vartheta)$ absolut stetig. Dann folgt aus Hilfssatz 3 (mit $t = \vartheta + \tau$)

$$U(r\,e^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 - 2r\cos\tau + 1}\, V'(\vartheta + \tau)\, d\tau\,. \tag{14}$$

Für $1 < r < 2$ ist $|g(re^{i\vartheta})| < 5$, es existiert also $g(e^{i\vartheta}) = \lim\limits_{r \to 1} g(re^{i\vartheta})$ für fast alle ϑ. Daher ist

$$\tag{15} \left\{ \begin{aligned} &\left| \int_0^{2\pi} U(r\,e^{i\vartheta})\, g(r\,e^{i\vartheta})\, e^{in\vartheta}\, d\vartheta \right| \leqq \int_0^{2\pi} |g(r\,e^{i\vartheta}) - g(e^{i\vartheta})|\; V'(\vartheta)\, d\vartheta + \\ &\qquad + \int_0^{2\pi} |g(r\,e^{i\vartheta})|\, |U(r\,e^{i\vartheta}) - V'(\vartheta)|\, d\vartheta + \left| \int_0^{2\pi} g(e^{i\vartheta})\, V'(\vartheta)\, e^{in\vartheta}\, d\vartheta \right|. \end{aligned} \right.$$

Das erste Integral strebt nach dem Satz von Lebesgue $\to 0$, wenn $r \to 1$ strebt. Das zweite Integral ist nach (14)

$$\leqq \frac{5}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 - 2r\cos\tau + 1} \left(\int_0^{2\pi} |V'(\vartheta + \tau) - V'(\vartheta)|\, d\vartheta \right) d\tau\,.$$

Der Ausdruck in der Klammer ist eine stetige Funktion von τ, die für $\tau = 0$ verschwindet. Für $r \to 1$ strebt daher auch das zweite Integral in (15) gegen 0. Das dritte Integral schließlich ist von r unabhängig und strebt nach dem Satz von Riemann-Lebesgue $\to 0$ für $n \to \infty$. Es folgt daher, daß für $r \to 1$, $n \to \infty$ gilt

$$\int_0^{2\pi} U(r\,e^{i\vartheta})\, g(r\,e^{i\vartheta})\, e^{in\vartheta}\, d\vartheta \to 0\,. \tag{16}$$

Man setze $r = r_n = \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$. Für $n \to \infty$ streben dann $r_n \to 1$, $r_n^n \to 1$ und

$$2\varepsilon_n \cdot \left(n\left(1 - \frac{1}{r_n^2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\varepsilon_n} \to 0\,.$$

Wegen $b_n \to 0$ ergibt sich dann aus (12), (13) und (16), daß $n a_n \to 0$ strebt.

3. Sternförmige Funktionen

Sei $f(z) = z + \cdots$ sternförmig bez. 0 in $|z| > 1$. Wenn man $F(z) = z f'(z)/f(z)$ setzt, so ist $\operatorname{Re} F(z) > 0$, $F(\infty) = 1$ und

$$\int_\infty^z \big(F(\zeta) - F(\infty)\big)\, \zeta^{-1}\, d\zeta = \int_\infty^z \left(\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta = \log \frac{f(z)}{z}\,.$$

Nach Hilfssatz 3 existiert daher

$$V(\vartheta) = \lim_{r \to 1} \arg f(r\,e^{i\vartheta})$$

für jedes ϑ und ist monoton. Weiter ist $\frac{\partial}{\partial r}\log|f(re^{i\vartheta})| = r^{-1}\operatorname{Re}F(re^{i\vartheta}) > 0$. Da $f(z)$ in $1 < |z| \leqq 2$ beschränkt ist, existiert also $\lim\limits_{r\to 1}|f(re^{i\vartheta})|$ und damit auch

$$f(e^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1} f(r\,e^{i\vartheta}).$$

SATZ 4. *Sei* $f(z) = z + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *in* $|z| > 1$ *sternförmig bez.* 0. *Dann ist*

$$|a_n| \leqq \frac{2}{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} n\,|a_n| < 2.$$

Wenn die monotone Funktion $V(\vartheta) = \lim\limits_{r\to 1}\arg f(re^{i\vartheta})$ *absolut stetig ist oder wenn das Komplement des Bildgebietes den Flächeninhalt* 0 *hat, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 0.$$

BEMERKUNG. Die Ungleichung $|a_n| \leqq 2(n+1)^{-1}$ ist zuerst von CLUNIE [2] bewiesen worden, allerdings nur unter der zusätzlichen Voraussetzung $a_0 = 0$. Der Beweis, der hier gegeben wird, benutzt genau dieselbe Idee wie der Beweis von CLUNIE. Die Abschätzung ist für jedes n die bestmögliche, wie das Beispiel der sternförmigen Funktion

$$z\left(1 + z^{-(n+1)}\right)^{2/(n+1)} = z + \frac{2}{n+1} z^{-n} + \cdots$$

zeigt.

BEWEIS. Wenn man $g(z) \equiv f(z)$ in Hilfssatz 1 setzt, so ist $\beta = 0$, $a_n = b_n$, und es folgt

$$(n+1)^2 |a_n|^2 \leqq 4\left(1 - \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu\,|a_\nu|^2\right),$$

also $(n+1)\,|a_n| \leqq 2$. Weiter ergibt sich aus dieser Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty}(n+1)^2|a_n|^2 \leqq 4\left(1 - \sum_{1}^{\infty}\nu\,|a_\nu|^2\right). \tag{17}$$

Der letzte Ausdruck ist < 4, außer wenn $a_\nu = 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots$ ist. Daher gilt immer $\limsup\limits_{n\to\infty} n\,|a_n| < 2$. Da der Flächeninhalt des Komplementes des Bildgebietes $A = \pi\left(1 - \sum\limits_{1}^{\infty}\nu\,|a_\nu|^2\right)$ ist, folgt für $A = 0$ aus (17)

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 0.$$

Daß diese Gleichung auch gilt, wenn $V(\vartheta)$ absolut stetig ist, ergibt sich unmittelbar aus Satz 3.

Es soll nun gezeigt werden, daß $a_n = o(n^{-1})$ die bestmögliche Abschätzung für die Koeffizienten einer sternförmigen Funktion mit absolut stetigem $V(\vartheta)$ ist. Dazu soll eine einfache Klasse von sternförmigen Funktionen mit absolut stetigem $V(\vartheta)$ eingeführt werden, die auch an sich von Interesse ist.

HILFSSATZ 4. *Sei* $f(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$.

a) Wenn $\sum_{1}^{\infty} n|a_n|R^{-n-1}\leqq 1$ *und* $a_0=0$ *gilt, so ist* $f(z)$ *in* $|z|>R$ *sternförmig bez.* 0.

b) Wenn $\sum_{1}^{\infty} n^2|a_n|R^{-n-1}\leqq 1$ *gilt, so ist* $f(z)$ *in* $|z|>R$ *konvex.*

BEWEIS. a) Es muß

$$\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{|f(z)|^2}\operatorname{Re}[z f'(z)\overline{f(z)}]>0$$

bewiesen werden. Dazu genügt es, $z=r>R$ anzunehmen. Man hat

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[r f'(r)\overline{f(r)}]&=\operatorname{Re}\left[\left(r-\sum_{1}^{\infty} n a_n r^{-n}\right)\left(r+\sum_{1}^{\infty}\bar a_n r^{-n}\right)\right]\\&=r^2-r\sum_{1}^{\infty}(n-1)\operatorname{Re} a_n\cdot r^{-n}-\operatorname{Re}\left[\sum_{1}^{\infty} n a_n r^{-n}\cdot\sum_{1}^{\infty}\bar a_n r^{-n}\right]\\&\geqq r^2-r\sum_{1}^{\infty}(n-1)|a_n|r^{-n}-\sum_{1}^{\infty} n|a_n|r^{-n}\cdot\sum_{1}^{\infty}|a_n|r^{-n}\\&=\left(r+\sum_{1}^{\infty}|a_n|r^{-n}\right)\left(r-\sum_{1}^{\infty} n|a_n|r^{-n}\right),\end{aligned}$$

und nach Voraussetzung ist der zweite Faktor >0 für $r>R$.

b) Die Funktion

$$z f'(z)=z-\sum_{1}^{\infty} n a_n z^{-n}$$

erfüllt $\sum_{1}^{\infty} n|n a_n|R^{-n-1}\leqq 1$, ist also sternförmig bez. 0, und $f(z)$ ist konvex in $|z|>R$.

Die Klasse der Funktionen $f(z)=z+\sum_{1}^{\infty} a_n z^{-n}$ $(|z|>1)$, die

$$\sum_{1}^{\infty} n|a_n|\leqq 1$$

erfüllen, werde mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet[2]). Nach Hilfssatz 4 ist jede Funktion aus $\mathfrak{A}$ in $|z|>1$ sternförmig, und $f'(z)$ ist stetig in $|z|\geqq 1$. Für $|a_1|=1$ ist $f(z)=z+a_1z^{-1}$ Im Falle $|a_1|<1$ sieht man leicht, daß das Bild von $|z|=1$ eine geschlossene Jordan-Kurve ist und daß $f(e^{i\vartheta})\neq 0$ und $V(\vartheta)=\arg f(e^{i\vartheta})$ stetig differenzierbar ist. Für $f(z)$ aus $\mathfrak{A}$ ist $a_n=o(n^{-1})$. Umgekehrt kann man zu einer gegebenen Folge $\eta_n\to 0$ immer eine Funktion aus $\mathfrak{A}$ wählen, so daß $|a_n|\geqq n\eta_n$ für unendlich viele n gilt. Daraus folgt, daß $a_n=o(n^{-1})$ die bestmögliche Abschätzung für die Koeffizienten einer sternförmigen Funktion mit absolut stetigem $V(\vartheta)$ ist, wie vorhin behauptet wurde.

---

[2]) Die entsprechende Klasse der Funktionen $\varphi(\zeta)=\zeta+\sum_{2}^{\infty}\alpha_n\zeta^n$ $(|\zeta|<1)$ mit $\sum_{2}^{\infty} n|\alpha_n|\leqq 1$ ist von LEWANDOWSKI [7] untersucht worden.

Es sollen noch einige weitere Resultate über Funktionen der Klasse $\mathfrak{A}$ bewiesen werden.

Eine in $1<|z|<\infty$ *reguläre Funktion* $f(z)=z+\sum_1^\infty a_n z^{-n}$ *mit reellen nichtnegativen Koeffizienten ist genau dann schlicht in* $|z|>1$, *wenn* $f(z)$ *zu* $\mathfrak{A}$ *gehört.*

Denn wenn $f(z)$ schlicht ist, so wächst $f(x)$ für reelle $x>1$ monoton, es ist also

$$f'(x)=1-\sum_1^\infty n\,a_n\,x^{-n-1}>0,$$

und für $x\to 1$ folgt hieraus $\sum_1^\infty n a_n \leqq 1$.

Eine Funktion $f(z)$ *aus* $\mathfrak{A}$ *ist konvex in* $|z|>4^{\frac{1}{5}}\approx 1{,}319$, *aber nicht immer in* $|z|>r$ *für* $r<4^{\frac{1}{5}}$.

Zum Beweise wird Teil b von Hilfssatz 4 angewendet. Sei $R=4^{\frac{1}{5}}$. Dann ist

$$\sum_{n=1}^\infty n^2|a_n|\,R^{-n-1}\leqq\sum_1^\infty n\,|a_n|\cdot\max_{n\geqq 1}\,(n\,R^{-n-1}). \tag{18}$$

Da die Folge nR^{-n-1} erst monoton wächst und dann monoton abnimmt und da sich für $n=3, 4, 5$ die Werte

$$3\cdot 4^{-\frac{4}{5}}<1, \qquad 4\cdot 4^{-1}=1, \qquad 5\cdot 4^{-\frac{6}{5}}<1$$

ergeben, ist $\max\limits_{n\geqq 1}(nR^{-n-1})=1$. Wegen $\sum_1^\infty n|a_n|\leqq 1$ folgt also aus (18), daß $f(z)$ in $|z|>R$ konvex ist. Die Funktion $f_0(z)=z-4^{-1}z^{-4}$ gehört zu $\mathfrak{A}$, ist aber nicht in $|z|>r$ für $r<R$ konvex. Denn sonst wäre $z\,f_0'(z)=z+z^{-4}$ sternförmig, also $\frac{d}{dz}\,z f_0'(z)=1-4z^{-5}\neq 0$ in $|z|\geqq R$, was für $z=R$ nicht der Fall ist.

Wenn $f_1(z)=z+\sum_1^\infty a_n' z^{-n}$ *und* $f_2(z)=z+\sum_1^\infty a_n'' z^{-n}$ in $|z|>1$ *schlicht sind, so gehört*

$$f(z)=z+\sum_1^\infty a_n' a_n'' z^{-n}$$

zu $\mathfrak{A}$, *ist also wieder schlicht.*

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist nämlich

$$\sum_1^\infty n\,|a_n' a_n''|\leqq\Bigl(\sum_1^\infty n\,|a_n'|^2\Bigr)^{\frac{1}{2}}\Bigl(\sum_1^\infty n\,|a_n''|^2\Bigr)^{\frac{1}{2}},$$

und die Faktoren sind nach dem Flächensatz $\leqq 1$.

PÓLYA und SCHOENBERG [*10*] haben folgende Vermutung aufgestellt: Wenn $\sum_1^\infty \alpha_n'\zeta^n$ und $\sum_1^\infty \alpha_n''\zeta^n$ den Kreis $|\zeta|<1$ schlicht auf ein konvexes Gebiet abbilden, so gilt das gleiche von $\sum_1^\infty \alpha_n'\alpha_n''\zeta^n$. Diese Vermutung ist noch nicht bewiesen. Dagegen läßt sich leicht das Analogon für Abbildungen von $|z|>1$ behandeln:

Wenn $f_1(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^{-n}$ *schlicht und* $f_2(z)=z+\sum_{0}^{\infty} a''_n z^{-n}$ *konvex in* $|z|>1$ *ist, so ist*

$$f(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty} a'_n a''_n z^{-n}$$

wieder konvex in $|z|>1$.

Aus der Konvexität von $f_2(z)$ folgt nämlich, daß $z f'_2(z)$ sternförmig, also schlicht ist. Daher ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_1^{\infty} n^2 |a'_n a''_n| \leqq \Big(\sum_1^{\infty} n\,|a'_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_1^{\infty} n\,|n\,a''_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqq 1,$$

und die Behauptung folgt aus Hilfssatz 4.

4. Konvexe Funktionen und Drehungssätze

SATZ 5. *Sei* $f(z)=z+\cdots$ *konvex in* $|z|>1$. *Dann gilt*

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}-1\right| \leqq \frac{1}{|z_1 z_2|} \quad \big(|z_1|>1,\ |z_2|>1\big),$$

und das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $f(z)=z+a_0+a_1 z^{-1}$ $\big(|a_1|=1\big)$ *ist.*

BEMERKUNG. Für $z_1=z_2=z$ geht die Ungleichung in $|f'(z)-1|\leqq|z|^{-2}$ über. Dieser Spezialfall ist identisch mit der von GOLUSIN bewiesenen Ungleichung (19), aus der Satz 5 gefolgert wird.

BEWEIS. Für jede sternförmige Funktion der Form $g(z)=z+b_1 z^{-1}+\cdots$ gilt [*3*, Th. 6]

$$|g(z)-z| \leqq \frac{1}{|z|}. \tag{19}$$

Sei zuerst $|z_2|=|z_1|=r>1$, $z_1 \neq z_2$. Da $|z|=R$ $(R>1)$ durch $w=f(z)$ auf eine konvexe Kurve abgebildet wird, wächst $\arg[f(z_2 r^{-1} R e^{i\vartheta})-f(z_1 r^{-1} R e^{i\vartheta})]$ $(R>1)$ monoton mit ϑ. Daher bildet die in $1<|z|<\infty$ reguläre Funktion

$$g(s)=r\,\frac{f(z_2 r^{-1} z)-f(z_1 r^{-1} z)}{z_2-z_1}=s-a_1\frac{r^2}{z_1 z_2}z^{-1}+\cdots$$

jeden Kreis $|z|=R$ auf eine bezüglich 0 sternförmige Kurve ab. Also ist $g(z)$ sternförmig, und nach (19) (mit $z=r$) ist

$$\left|\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1}-1\right| \leqq \frac{1}{r^2}. \tag{20}$$

Sei nun etwa $|z_2|\geqq|z_1|=r>1$. Die Funktion

$$h(z)=\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}-1$$

ist regulär in $|z| \geqq r$ und erfüllt $h(\infty)=0$. Da nach (20)

$$\max_{|z|=r} |h(z)| \leqq \frac{1}{r^2}$$

ist, folgt aus dem Schwarzschen Lemma

$$|h(z)| \leqq \frac{1}{|z|\, r}$$

für $|z| \geqq r$. Für $z = z_2$ ergibt sich dann die behauptete Ungleichung. Wenn für ein Paar z_1, z_2 mit $|z_2| \geqq |z_1| = r$ das Gleichheitszeichen steht, so ist $|h(z_2)| = (|z_2|\, r)^{-1}$, also $h(z) \equiv c z^{-1}$ $(|c| = r^{-1})$. Daraus folgt

$$f(z) \equiv z + f(z_1) - z_1 + c - c\, z_1\, z^{-1} \qquad (|c\, z_1| = 1).$$

FOLGERUNG 3. *Sei $f(z) = z + \cdots$ konvex. Für $|z_1| > 1$, $|z_2| > 1$ gilt dann*

$$\operatorname{Re} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} > 0.$$

Wenn man die Kapazität der Minkowskischen Summe von Kontinuen untersucht [*11*], so trifft man auf Summen $\sum \lambda_k f_k(z)$ $(\lambda_k > 0)$ von schlichten Funktionen $f_k(z) = z + \cdots$. Im allgemeinen stellt eine solche Summe nicht wieder eine schlichte Funktion dar. Dies ist aber der Fall, wenn alle Funktionen (also die Kontinuen) konvex sind:

FOLGERUNG 4. *Seien $f_k(z) = z + \cdots$ in $|z| > 1$ konvexe Funktionen und $\lambda_k > 0$ $(k = 1, \ldots, m)$. Dann ist*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(z)$$

schlicht und nahezu konvex in $|z| > 1$.

BEWEIS. Für $|z_2| > 1$, $|z_1| > 1$ ist

$$\operatorname{Re} \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \operatorname{Re} \frac{f_k(z_2) - f_k(z_1)}{z_2 - z_1},$$

und nach Folgerung 3 sind alle Summanden positiv, also auch die Summe. Daher muß für $z_1 \neq z_2$ auch $f(z_1) \neq f(z_2)$ sein, d.h. $f(z)$ ist schlicht. Für $z_1 = z_2 = z$ ergibt sich $\operatorname{Re} f'(z) > 0$. Also ist $f(z)$ nahezu konvex.

Für eine konvexe Funktion $f(z) = z + \cdots$ lautet die Golusinsche Ungleichung (19)

$$|f'(z) - 1| \leqq \frac{1}{|z|^2}.$$

Hieraus folgt $\operatorname{Re} f'(z) > 0$, und diese Ungleichung reicht aus, um Folgerung 3 zu beweisen. Es soll nun ein anderer, mehr geometrischer Beweis für die Ungleichung $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ gegeben werden, wobei sich eine gewisse Verallgemeinerung auf beliebige meromorphe schlichte Funktionen ergeben wird.

Sei $f(z) = z + a_0 + a_1 z^{-1} + \cdots$ eine in $|z| > 1$ meromorphe schlichte Funktion. Sei $\mathfrak{G}$ das Bildgebiet von $|z| > 1$ und $\mathfrak{C}$ das kompakte Komplement von $\mathfrak{G}$. Sei $\mathfrak{S}(\vartheta)$ der schmalste abgeschlossene Geradenstreifen, der $\mathfrak{C}$ enthält und den Winkel ϑ mit der reellen Achse bildet. Durch $\mathfrak{C}$ wird $\mathfrak{S}(\vartheta)$ in mindestens zwei nichtleere Komponenten zerlegt. Sei $\mathfrak{T}(\vartheta)$ diejenige Komponente von $\mathfrak{S}(\vartheta)\frown\mathfrak{G}$, die in Richtung $e^{i\vartheta}$ ins Unendliche geht, d.h. die Punkte der Form $te^{i\vartheta}+c$ mit beliebig großem $t>0$ enthält (c komplex und fest).

SATZ 6. *Unter den eben gemachten Voraussetzungen gilt für jedes ϑ und $r>1$*

$$f(r\,e^{i\vartheta})\in\mathfrak{T}(\vartheta).$$

BEWEIS. Man kann annehmen, daß $\vartheta=0$ ist. Sei etwa $\mathfrak{S}(0)=\{w\colon v_1\leqq \operatorname{Im} w\leqq v_2\}$. Es ist

$$f(r)=r+a_0+a_1r^{-1}+\cdots\quad (r>1) \tag{21}$$

mit

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\,e^{i\vartheta})\,d\vartheta\qquad (R>1).$$

Wenn man $R\to 1$ streben läßt, folgt wegen $\mathfrak{E}<\mathfrak{S}(0)$, daß $v_1\leqq\operatorname{Im}a_0\leqq v_2$ ist. Daher ist nach (21)

$$\limsup_{r\to\infty}\operatorname{Im}f(r)\leqq v_2. \tag{22}$$

Aus $\mathfrak{E}<\mathfrak{S}(0)$ ergibt sich ebenfalls

$$\limsup_{r\to 1}\operatorname{Im}f(r)\leqq v_2. \tag{23}$$

Angenommen, die Kurve $\mathfrak{L}=\{f(r)\colon 1<r<\infty\}$ wäre nicht in $\mathfrak{S}(0)$ enthalten. Dann gilt etwa

$$\max_{w\in\mathfrak{L}}\operatorname{Im}w>v_2,$$

und nach (22) und (23) wird daher das Maximum angenommen, etwa in $w_0=f(r_0)$. Die Tangente in w_0 an $\mathfrak{L}$ ist parallel zur reellen Achse und schneidet daher nicht $\mathfrak{S}(0)$ und also auch nicht die konvexe Hülle von $\mathfrak{E}$. Diese Tangente ist identisch mit der Normalen in w_0 an die Niveaulinie $\mathfrak{C}(r_0)=\{f(r_0e^{i\vartheta})\colon 0\leqq\vartheta\leqq 2\pi\}$. Das ist aber ein Widerspruch zu einem Satz von WALSH [*14*, S. 8], der aussagt, daß jede (innere) Normale an eine Niveaulinie $\mathfrak{C}(r)$ die konvexe Hülle von $\mathfrak{E}$ schneidet. Also gilt $\mathfrak{L}<\mathfrak{S}(0)$. Nach Gl. (21) gehört die Kurve $\mathfrak{L}<\mathfrak{S}(0)\frown\mathfrak{G}$ zur Komponente $\mathfrak{T}(0)$ von $\mathfrak{S}(0)\frown\mathfrak{G}$.

FOLGERUNG 5. *Sei $\mathfrak{R}(r)$ der Rand der konvexen Hülle von $\mathfrak{C}(r)=\{f(re^{i\vartheta})\colon 0\leqq\vartheta\leqq 2\pi\}$. Dann gilt $\operatorname{Re}f'(z)>0$ für alle $z=re^{i\vartheta}$ mit $f(z)\in\mathfrak{R}(r)$.*

BEMERKUNG. Wenn $f(z)$ konvex ist, so ist auch $\mathfrak{C}(r)$ konvex, also $\mathfrak{R}(r)=\mathfrak{C}(r)$. Damit erhält man wieder, daß für konvexes $f(z)$ überall $\operatorname{Re}f'(z)>0$ gilt.

BEWEIS. Sei $w=f(re^{i\vartheta})\in\mathfrak{R}(r)$. Dann sind die Normalen in w an $\mathfrak{C}(r)$ und $\mathfrak{R}(r)$ identisch. Der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der äußeren Normalen ist $\Theta(\vartheta)=\vartheta+\arg f'(re^{i\vartheta})$. Da jeder der beiden Begrenzungsgeraden von $\mathfrak{S}(\vartheta)$ Punkte aus $\mathfrak{E}$ enthält und da $\mathfrak{E}$ durch die konvexe Kurve $\mathfrak{R}(r)$ umschlossen wird, schneidet jeder dieser beiden Geraden die Kurve $\mathfrak{R}(r)$ in zwei verschiedenen Punkten. Nach Satz 6 ist $w\in\mathfrak{T}(\vartheta)$. Daher ist offenbar $|\Theta(\vartheta)-\vartheta|<\pi/2$ und

$$|\arg f'(r\,e^{i\vartheta})|=|(\vartheta+\arg f'(r\,e^{i\vartheta}))|-\vartheta|<\pi/2.$$

SATZ 7. *Sei $f(z)=z+\cdots$ nahezu konvex in $|z|>1$. Dann gilt*[3])

$$|\arg f'(z)|<3\pi/2.$$

Wenn es sogar eine sternförmige Funktion der Form $g(z)=z+b_1z^{-1}+\cdots$ gibt, so daß $\operatorname{Re} zf'(z)/g(z)>0$ *ist*[4]), *so gilt*

$$|\arg f'(z)|<\pi.$$

BEMERKUNG. Diese Ungleichungen gelten insbesondere für sternförmige Funktionen bzw. für sternförmige Funktionen, die $a_0=0$ erfüllen. Man kann zeigen, daß die Konstanten $3\pi/2$ und π nicht verkleinert werden können, indem man die sternförmigen Funktionen betrachtet, die den Kontinuen

$$[-4,0]\cup[-\varrho e^{i\delta},0] \quad \text{bzw.} \quad [-2,+2]\cup[-\varrho e^{i\delta},\varrho e^{i\delta}]$$

entsprechen, wobei ϱ und δ kleine positive Zahlen sind.

BEWEIS. 1. Es genügt, die Behauptung für $z=r>1$ zu beweisen. Seien $w_1=f(re^{i\vartheta_1})$ und $w_2=f(re^{i\vartheta_2})$ $(-\pi<\vartheta_1\leqq\pi,\ -\pi<\vartheta_2\leqq\pi)$ die Punkte auf $\mathfrak{C}(r)$ mit maximalem bzw. minimalem Imaginärteil. Sei $\Theta_j(\varrho)=\arg[e^{i\vartheta_j}f'(\varrho e^{i\vartheta_j})]$ $(j=1,2)$ der Winkel der positiven Tangente an $\mathfrak{L}_j=\{f(\varrho e^{i\vartheta_j})\colon r\leqq\varrho<\infty\}$ im Punkte $f(\varrho e^{i\vartheta_j})$. Dann ist $\Theta_1(r)=\frac{\pi}{2}+2\pi k_1$, $\Theta_2(r)=-\frac{\pi}{2}+2\pi k_2$ (k_1 und k_2 ganz). Nach dem vorhin erwähnten Satz von WALSH [*14*] schneiden die Tangenten an $\mathfrak{L}_j$ die konvexe Hülle von $\mathfrak{C}$. Zusammen mit der Definition von w_j ergibt dies, daß $\mathfrak{L}_j$ keine Tangente parallel zur reellen Achse hat (auch nicht im Unendlichen), d.h. es gilt $\Theta_j(\varrho)\neq 0,\ \pm\pi,\ldots$. Wegen $\lim\limits_{\varrho\to\infty}\Theta_j(\varrho)=\vartheta_j$ folgt $-\pi<\Theta_j(r)<\pi$, also $\Theta_1(r)=\pi/2$, $\Theta_2(r)=-\pi/2$ und somit $0<\vartheta_1<\pi$, $-\pi<\vartheta_2<0$. Nach Satz 1 ist daher

$$\frac{\pi}{2}=\Theta_1(r)=\arg[e^{i\vartheta_1}f'(re^{i\vartheta_1})]>-\pi+\arg f'(r),$$

also $\arg f'(r)<3\pi/2$, und entsprechend $\arg f'(r)>-3\pi/2$.

2. Sei $g(z)=z+b_1z^{-1}+\cdots$. Aus der Golusinschen Ungleichung (19) oder aus Folgerung 3 ergibt sich $\operatorname{Re} g(z)/z>0$. Da $\operatorname{Re} zf'(z)/g(z)>0$ ist, folgt

$$|\arg f'(z)|=|\arg[zf'(z)/g(z)]+\arg[g(z)/z]|<\pi.$$

5. Längenabschätzungen

Sei $f(z)=z+\cdots$ meromorph und schlicht in $|z|>1$ und $L(r)$ die Länge des Bildes $\mathfrak{C}(r)$ von $|z|=r$ $(r>1)$. Dann gilt

$$L(r)=o(1/\sqrt{1-r^{-1}}),$$

wie leicht aus dem Flächensatz folgt. Für nahezu konvexe Funktionen soll $L(r)=O\left(\log\frac{1}{1-r^{-1}}\right)$ bewiesen werden. Dazu benötigt man einige Resultate über Subordinierung. Wenn $h(\zeta)$ und $H(\zeta)$ in $|\zeta|<1$ regulär sind, so heißt

[3]) Hierbei bedeutet $\arg f'(z)$ den Imaginärteil des Zweiges der in $|z|>1$ regulären Funktion $\log f'(z)$, der in ∞ den Wert 0 hat.

[4]) Es soll also $\beta=0$, $b_0=0$ in (3) sein.

$h(\zeta)$ subordiniert zu $H(\zeta)$, wenn es eine in $|\zeta|<1$ reguläre Funktion $\varphi(\zeta)$ mit $\varphi(0)=0$ und $|\varphi(\zeta)|<1$ gibt, so daß $h(\zeta)=H(\varphi(\zeta))$ ist. Dann ist also $h(0)=H(0)$. Es gilt (man vgl. z.B. [4, S. 323])

$$(24)\qquad \int_0^{2\pi} |h(R e^{i\vartheta})|^\lambda d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} |H(R e^{i\vartheta})|^\lambda d\vartheta \qquad (R<1, \lambda>0).$$

HILFSSATZ 5. *Sei $h(\zeta)=c_0+c_n\zeta^n+c_{n+1}\zeta^{n+1}+\cdots$ regulär in $|\zeta|<1$ und subordiniert zu $H(\zeta)$, und sei $H'(0)\neq 0$. Für jedes $\varrho<1$ ist dann $h(\varrho\zeta)$ subordiniert zu $H(\varrho^n\zeta)$ in $|\zeta|<1$, und es gilt*

$$(25)\qquad \int_0^{2\pi} |h(\varrho e^{i\vartheta})|^\lambda d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi} |H(\varrho^n e^{i\vartheta})|^\lambda d\vartheta.$$

BEWEIS. Wegen $H'(0)\neq 0$ gibt es ein $\varrho_0>0$, so daß $w=H(\zeta)$ in $|\zeta|<\varrho_0$ eine eindeutige Umkehrfunktion $\Psi(w)=H'(0)^{-1}(w-c_0)+\cdots$ hat. Aus $h(\zeta)=H(\varphi(\zeta))$ folgt daher $\varphi(\zeta)=\Psi(h(\zeta))$ für $|\zeta|<\varrho_0$. Also gilt

$$\varphi(\zeta)=c_n H'(0)^{-1}\zeta^n+\cdots.$$

Da $|\varphi(\zeta)|<1$ ist, ergibt das Schwarzsche Lemma $|\varphi(\zeta)|\leqq\varrho^n$ für $|\zeta|\leqq\varrho$. Mit $\varphi^*(\zeta^*)=\varrho^{-n}\varphi(\varrho\zeta^*)$ ist dann $|\varphi^*(\zeta^*)|\leqq 1$ für $|\zeta^*|\leqq 1$ und

$$h(\varrho\zeta^*)=H\left(\varrho^n\varphi^*(\zeta^*)\right),$$

woraus sich die erste Behauptung ergibt. Die Ungleichung (25) folgt sofort aus (24), wenn man $h(\zeta)$ durch $h(\varrho\zeta^*)$ und $H(\zeta)$ durch $H(\varrho^n\zeta^*)$ ersetzt und dann $R\to 1$ streben läßt.

SATZ 8. *Seien $f(z)=z+\cdots$ und $g(z)=e^{i\beta}z+\cdots$ meromorph und schlicht in $|z|>1$. Es gelte $g(z)\neq 0$ und $\mathrm{Re}[zf'(z)/g(z)]>0$. Dann ist*

$$L(r)\leqq 2\pi r+A+16\cos\beta\cdot\log\frac{1}{1-r^{-1}},$$

wobei A eine absolute Konstante ist. Insbesondere gilt diese Abschätzung also für nahezu konvexe Funktionen.

BEMERKUNG. KOEGH [6] hat für Funktionen, die $|\zeta|<1$ schlicht auf ein beschränktes sternförmiges Gebiet abbilden, eine entsprechende Ungleichung bewiesen.

BEWEIS. Die Funktion

$$h(\zeta)=\frac{\zeta^{-1}f'(\zeta^{-1})}{g(\zeta^{-1})}$$

ist regulär in $|\zeta|<1$ und erfüllt $\mathrm{Re}\,h(\zeta)>0$, $h(0)=e^{-i\beta}$. Daher ist $h(\zeta)$ subordiniert zu

$$H(\zeta)=\frac{e^{-i\beta}+e^{i\beta}\zeta}{1-\zeta}=e^{-i\beta}+\frac{2\zeta}{1-\zeta}\cos\beta.$$

Aus (24) folgt daher (mit $R=r^{-1}$, $r>1$, $\lambda=1$)

$$\int_0^{2\pi} r\left|\frac{f'(re^{-i\vartheta})}{g(re^{-i\vartheta})}\right| d\vartheta \leqq \int_0^{2\pi}\left|e^{-i\beta}+\frac{2r^{-1}e^{i\vartheta}}{1-r^{-1}e^{i\vartheta}}\cos\beta\right| d\vartheta.$$

Da $g(z)$ schlicht und $\neq 0$ ist, gilt $|g(re^{-i\vartheta})| \leqq r+3$. Also ist

$$L(r) = r\int_0^{2\pi} |f'(re^{-i\vartheta})|\, d\vartheta \leqq (r+3)\left(2\pi + 2r^{-1}\cos\beta \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{|1-r^{-1}e^{i\vartheta}|}\, d\vartheta\right)$$

$$\leqq 2\pi r + 6\pi + 2(1+3r^{-1})\cos\beta \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-2r^{-1}\cos\vartheta + r^{-2}}}.$$

Das letzte Integral ist $=4K(r^{-1})$ (man vgl. z.B. [*13*, S. 156]), wo K das vollständige elliptische Integral erster Gattung bezeichnet. Daher hat man

$$L(r) \leqq 2\pi r + 6\pi + 32\cos\beta \cdot K(r^{-1}),$$

und für $r \to 1$ gilt [*13*, S. 271]

$$K(r^{-1}) = \log\frac{4}{\sqrt{1-r^{-2}}} + O(1-r^{-1}) = \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-r^{-1}} + O(1).$$

Sei $\mathfrak{K}$ ein konvexes Kontinuum der Kapazität 1, und sei $f(z) = z + a_0 + \cdots$ die konvexe Funktion, die $|z|>1$ konform auf das Außengebiet von $\mathfrak{K}$ abbildet. Wenn L der Umfang von $\mathfrak{K}$ ist, so gilt $L \leqq 8$, wie zuerst von Pólya und Schiffer [*9*] bewiesen wurde. Der Beweis benutzt eine elementare Variationsmethode. Ein anderer Beweis, der die Minkowskische Addition von Mengen anwendet, wurde von mir gegeben [*11*]. Ich will jetzt einen Satz beweisen, der u.a. die Abschätzung $L \leqq 8$ enthält.

Satz 9. *Sei*

$$f(z) = z + a_0 + a_m z^{-m} + a_{m+1} z^{-m-1} + \cdots \qquad (m \geqq 1) \tag{26}$$

konvex in $|z|>1$. *Dann gilt für die Länge* $L(r)$ *des Bildes von* $|z|=r$

$$L(r) \leqq r\int_0^{2\pi} (1 + 2r^{-(m+1)}\cos\vartheta + r^{-2(m+1)})^{1/(m+1)}\, d\vartheta \qquad (r \geqq 1). \tag{27}$$

Insbesondere ist $L(r)$ *immer kleiner oder gleich dem Umfang der Ellipse mit den Halbachsen* $r+r^{-1}$ *und* $r-r^{-1}$. *Für die Funktionen, die regelmäßigen* $(m+1)$*-Ecken (für* $m \geqq 2$*) bzw. Segmenten (für* $m=1$*) entsprechen, steht das Gleichheitszeichen.*

Bemerkung. Der Beweis wird zeigen, daß (27) mit $m=1$ auch für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{A}$ gilt, da diese ebenso wie die konvexen Funktionen die Ungleichung $|f'(z)-1| \leqq 1$ erfüllen. Daher hat der Rand des Bildgebietes eine Länge $L \leqq 8$.

Folgerung 6. *Unter allen konvexen Kontinuen der Kapazität* 1, *die* n*-fach symmetrisch zum Nullpunkt sind, hat das regelmäßige* n*-Eck den größten Umfang. Es ist also*

$$L \leqq 2^{1+\frac{2}{n}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\!\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)\Gamma\!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}. \tag{28}$$

Für $n=3$ *ergibt sich* $L<7{,}114$, *für* $n=4$ *ist* $L<6{,}778$.

Diese Folgerung ergibt sich unmittelbar aus Satz 9 für $r=1$, $m=n-1$. Denn wenn $\mathfrak{K}$ n-fach symmetrisch ist, so hat $f(z)$ die Form

$$f(z)=z+a_{n-1}z^{-(n-1)}+a_{2n-1}z^{-(2n-1)}+\cdots.$$

Übrigens kann man Folgerung 6 auch aus der expliziten Darstellung von $f(z)$ (man vgl. z.B. [*9*]) ableiten, ohne die tieferliegenden Resultate von GOLUSIN heranzuziehen. Aber Satz 9 zeigt ja, daß die Gültigkeit von (28) nur darauf beruht, daß $f(z)$ die Form $z+a_{n-1}z^{-(n-1)}+a_n z^{-n}+\cdots$ hat.

BEWEIS VON SATZ 9. Die Funktion $g(z)=zf'(z)=z-m a_m z^{-m}+\cdots$ ist sternförmig in $|z|>1$. Daher ist

$$\psi(\zeta)=\frac{1}{g(\zeta^{-1})}=\zeta+m\,a_m\zeta^{m+2}+\cdots$$

sternförmig in $|\zeta|<1$. Nach einem Satz von GOLUSIN [*3*, Th. 5] folgt daraus

$$\operatorname{Re}\left[\left(\zeta^{-1}\psi(\zeta)\right)^{\frac{m+1}{2}}\right]\geqq\tfrac{1}{2}.$$

Wegen $f'(\zeta^{-1})=\zeta g(\zeta^{-1})=\zeta\psi(\zeta^{-1})^{-1}$ ist also

$$\operatorname{Re}\left[f'(\zeta^{-1})^{-\frac{m+1}{2}}\right]\geqq\tfrac{1}{2},$$

d.h.

$$\left|f'(\zeta^{-1})^{\frac{m+1}{2}}-1\right|\leqq 1.$$

Wenn man $\varphi(\zeta)=f'(\zeta^{-1})^{\frac{m+1}{2}}-1$ setzt, gilt also $\varphi(0)=0$ und $|\varphi(\zeta)|\leqq 1$ für $|\zeta|<1$, d.h. $f'(\zeta^{-1})$ ist subordiniert zu $(1+\zeta)^{2/(m+1)}$. Da $f'(\zeta^{-1})$ die Entwicklung $1-m a_m\zeta^{m+1}+\cdots$ hat, ist nach Hilfssatz 5 für $r>1$

$$\begin{aligned}L(r)=r\int_0^{2\pi}|f'(r\,e^{-i\vartheta})|\,d\vartheta&\leqq r\int_0^{2\pi}|1+r^{-(m+1)}e^{i\vartheta}|^{2/(m+1)}\,d\vartheta\\&=r\int_0^{2\pi}(1+2r^{-(m+1)}\cos\vartheta+r^{-2(m+1)})^{1/(m+1)}\,d\vartheta,\end{aligned}$$

und die Abschätzung für $L=L(1)$ ergibt sich hieraus durch Grenzübergang. Da jede konvexe Funktion die Form (26) mit $m=1$ hat, gilt immer (27) mit $m=1$. Das Integral stellt dann den Umfang der Ellipse mit den Halbachsen $r+r^{-1}$ und $r-r^{-1}$ dar, wie man sieht, wenn man speziell $f_1(z)=z+z^{-1}$ wählt.

Die Funktionen $f_1(z)$ bzw.

$$f_m(z)=\int_1^z(1+s^{-(m+1)})^{2/(m+1)}\,ds\qquad(m\geqq 2)$$

bilden $|z|>1$ auf das Außengebiet eines Segmentes bzw. eines regelmäßigen $(m+1)$-Ecks ab, und für sie steht das Gleichheitszeichen in (27).

Wenn $f(z)$ konvex ist, so ist $zf'(z)$ schlicht und $\neq 0$. Man kann sich fragen, ob die Ungleichung

$$L=\lim_{r\to 1}r\int_0^{2\pi}|f'(r\,e^{i\vartheta})|\,d\vartheta\leqq 8$$

für jede Funktion gilt, für die $g(z)=zf'(z)=z-a_1z^{-1}+\cdots$ schlicht und $\neq 0$ ist. Ich kann nur eine schwächere Abschätzung beweisen.

SATZ 10. *Sei $g(z)=z+b_1z^{-1}+\cdots$ meromorph, schlicht und $\neq 0$ in $|z|>1$. Dann gilt*

$$\int_0^{2\pi}|g(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta<8{,}04.$$

BEWEIS. Das Integral hat einen Sinn, da $g(z)$ in $1<|z|<2$ beschränkt ist und also $g(e^{i\vartheta})=\lim_{r\to 1} g(re^{i\vartheta})$ fast überall existiert und beschränkt ist. Wegen $g(z)\neq 0$ ist $h(z)=\sqrt{g(z^2)}=z+\cdots$ ebenfalls meromorph und schlicht in $|z|>1$. Es ist

$$\begin{aligned}h(z)&=(z^2+b_1z^{-2}+b_2z^{-4}+\cdots)^{\frac12}\\&=z(1+b_1z^{-4}+b_2z^{-6}+b_3z^{-8}+b_4z^{-10}+\cdots)^{\frac12}\\&=z+\tfrac12 b_1z^{-3}+\tfrac12 b_2z^{-5}+(\tfrac12 b_3-\tfrac18 b_1^2)z^{-7}+(\tfrac12 b_4-\tfrac14 b_1b_2)z^{-9}+\cdots.\end{aligned}$$

Wenn

$$h(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}c_{2k+1}z^{-(2k+1)}$$

gesetzt wird, so ist also

$$c_3=\tfrac12 b_1,\quad c_5=\tfrac12 b_3,\quad c_7=\tfrac12 b_3-\tfrac18 b_1^2,\quad c_9=\tfrac12 b_4-\tfrac14 b_1b_2. \tag{29}$$

Nach dem Flächensatz ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)|c_{2k+1}|^2\leqq 1. \tag{30}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(re^{2i\vartheta})|\,d\vartheta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(\sqrt{r}\,e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta\\&=r+\sum_{k=1}^{\infty}|c_{2k+1}|^2r^{-k}.\end{aligned}$$

Für $r\to 1$ folgt

$$J=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta=1+\sum_{k=1}^{\infty}|c_{2k+1}|^2.$$

Daher ist nach (30) und (29)

$$\begin{aligned}J&\leqq 1+|c_3|^2+|c_5|^2+|c_7|^2+|c_9|^2+\tfrac{1}{11}(1-3|c_3|^2-5|c_5|^2-7|c_7|^2-9|c_9|^2)\\&=\tfrac{12}{11}+\tfrac{1}{11}(8|c_3|^2+6|c_5|^2+4|c_7|^2+2|c_9|^2)\\&=\tfrac{12}{11}+\tfrac{1}{11}(2|b_1|^2+\tfrac32|b_2|^2+|b_3-\tfrac14 b_1|^2+2|\tfrac12 b_4-\tfrac14 b_1b_2|^2)\\&\leqq\tfrac{12}{11}+\tfrac{1}{11}(2|b_1|^2+\tfrac32|b_2|^2+|b_3|^2+\tfrac12|b_1|^2|b_3|+\tfrac{1}{16}|b_1|^2+\tfrac12|b_4|^2\\&\qquad+\tfrac12|b_1||b_2||b_4|+\tfrac18|b_1|^2|b_2|^2).\end{aligned}$$

Nun ist $|b_1| \leqq 1$ und

$$\frac{1}{2}|b_1|^2|b_3| = 2\frac{|b_1|^2}{4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5}|b_3| \leqq \frac{|b_1|^4}{80} + 5|b_3|^2 \leqq \frac{|b_1|^2}{80} + 5|b_3|^2,$$

$$\frac{1}{2}|b_1||b_2||b_4| \leqq 2 \cdot \frac{1}{2}|b_2| \cdot \frac{1}{2}|b_4| \leqq \frac{1}{4}|b_2|^2 + \frac{1}{4}|b_4|^2.$$

Also folgt

$$\begin{aligned} J &\leqq \tfrac{12}{11} + \tfrac{1}{11}\big(2|b_1|^2 + \tfrac{3}{2}|b_2|^2 + |b_3|^2 + \tfrac{1}{80}|b_1|^2 + 5|b_3|^2 + \tfrac{1}{16}|b_1|^2 + \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}|b_4|^2 + \tfrac{1}{4}|b_2|^2 + \tfrac{1}{4}|b_4|^2 + \tfrac{1}{8}|b_2|^2\big) \\ &= \tfrac{12}{11} + \tfrac{1}{11}\big((2 + \tfrac{3}{40})|b_1|^2 + \tfrac{15}{8}|b_2|^2 + 6|b_3|^2 + \tfrac{3}{4}|b_4|^2\big). \end{aligned}$$

Nach dem Flächensatz ist aber $|b_1|^2 + 2|b_2|^2 + 3|b_3|^2 + 4|b_4|^2 \leqq 1$, also

$$J \leqq \tfrac{12}{11} + \tfrac{1}{11}(2 + \tfrac{3}{40}) = \tfrac{563}{440} < 1{,}2796,$$

und daher $2\pi J < 8{,}04$.

Literatur

[1] CLUNIE, J.: On schlicht functions. Ann. of Math. **69**, 511—519 (1959).

[2] — On meromorphic schlicht functions. J. London Math. Soc. **34**, 215—216 (1959).

[3] GOLUSIN, G. M.: Einige Koeffizientenabschätzungen für schlichte Funktionen (Russisch, deutsche Zusammenfassung). Mat. Sb. **3**, 321—330 (1938).

[4] — Geometrische Funktionentheorie. Berlin 1957.

[5] KAPLAN, W.: Close-to-convex schlicht functions. Michigan Math. J. **1**, 169—185 (1952).

[6] KOEGH, F. R.: Some theorems on conformal mapping of bounded starshaped domains. Proc. London Math. Soc. **9**, 481—491 (1959).

[7] LEWANDOWSKI, Z.: Quelques remarques sur les théorèmes de Schild relatifs a une classe de fonctions univalentes. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A **9**, 149—155 (1955).

[8] — Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes, I. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sec. A **12**, 131—145 (1958).

[9] PÓLYA, G., et M. SCHIFFER: Sur la représentation conforme de l'extérieur d'une courbe fermée convexe. C. R. Acad. Sci. (Paris) **248**, 2837—2839 (1959).

[10] —, and I. J. SCHOENBERG: Remarks on the de la Vallee-Poussin means and convex conformal maps of the circle. Pac. J. Math. **8**, 295—334 (1958).

[11] POMMERENKE, CH.: Über die Kapazität der Summe von Kontinuen. Math. Ann. **139**, 127—132 (1959).

[12] ROBERTSON, M. I. S.: On the theory of univalent functions. Ann. of Math. **37**, 374—408 (1936).

[13] RYSHIK, I. M., u. I. S. GRADSTEIN: Summen-, Produkt- und Integraltafeln. Berlin 1957.

[14] WALSH, J. L.: Lemniscates and equipotential curves of Green's function. Amer. Math. Monthly **42**, 1—17 (1935).

Göttingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 16. Januar 1961)