STRUBECKER, K.
Math. Zeitschr. 78, 189—198 (1962)

Airysche Spannungsfunktion und isotrope Differentialgeometrie

Von
KARL STRUBECKER

Einleitung[1])

Die klassische Elastizitätstheorie verwendet zur mathematischen Behandlung von *Spannungszuständen* Σ der (x, y)-Ebene mit Vorteil den Begriff der *Airyschen Spannungsfunktion*, d.h. die Lösungen $z=z(x, y)$ der Bipotentialgleichung $\Delta\Delta z(x, y)=0$.

Man kann, wie F. KLEIN[2]) gezeigt hat, häufig auch die geometrische Deutung der Airyschen Funktion als *Fläche* Φ im Raum (x, y, z) für die Lösung ebener Spannungsprobleme verwenden. Man hat jedoch, soviel ich weiß, noch niemals den Versuch gemacht, die *Differentialgeometrie* dieser Bipotentialflächen $z=z(x, y)$, die wir als *Airysche Spannungsflächen* Φ (oder kürzer als *Airysche Flächen*) bezeichnen wollen, zu studieren; wahrscheinlich deswegen, weil dabei mittels der gewöhnlichen euklidischen Differentialgeometrie des dreidimensionalen Raumes, dessen Bogenelementquadrat in kartesischen Koordinaten (x, y, z) die Gestalt $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ hat, keine besonderen Einsichten zu erzielen sind.

Zu wirklichen Erkenntnissen und einfachen Ergebnissen kommt man erst, wenn man dem Raum die *vereinfachte Metrik* $ds^2=dx^2+dy^2$ aufprägt, wodurch er eine sog. *isotrope Struktur* erhält und zu einem sog. *isotropen Raum* wird. Tatsächlich gestattet die *isotrope Flächentheorie* der Airyschen Spannungsflächen Φ sehr einfache geometrische Deutungen aller wesentlichen Grundbegriffe des zugehörigen ebenen elastischen Systems Σ. Es bestehen dann nämlich die folgenden einfachen Zusammenhänge und Ergebnisse:

Die *Airyschen Spannungsflächen* Φ sind im isotropen Raum als jene Flächen gekennzeichnet, auf denen die *isotrope mittlere Krümmung* H *harmonisch* ist. Die zu einer Richtung (dx, dy) gehörende *Normalspannung* σ bzw. *Schubspannung* τ eines ebenen elastischen Systems Σ stimmen auf seiner Airyschen Spannungsfläche Φ mit der *isotropen Normalkrümmung* $1/R$ bzw. der *isotropen geodätischen Torsion* τ_g der zugehörigen Richtung überein. Den *Hauptspan-*

---

1) Über den Inhalt der vorliegenden Arbeit habe ich am 6. 2. 1961 vor der Berliner Mathematischen Gesellschaft und am 14. 4. 1961 bei den Celebrazioni archimedee del secolo XX in Syrakus (Sizilien) vorgetragen.

2) KLEIN, F., u. K. WIEGHARDT: Über Spannungen und reziproke Diagramme, mit besonderer Berücksichtigung der Maxwellschen Arbeiten. Archiv d. Math. u. Phys. (3) **8**, 1—10, 95—119 (1905).

nungslinien bzw. *Hauptschublinien* des Spannungszustandes Σ entsprechen auf der Airyschen Spannungsfläche Φ daher die *isotropen Krümmungslinien* und die *Linien extremer isotroper geodätischer Torsion*, die beide Orthogonalnetze bilden, und sich gegenseitig unter Winkeln von $\pm 45°$ durchsetzen.

I. Die Grundformeln des ebenen elastischen Spannungszustandes

1. Wir betrachten ein ebenes elastisches System Σ (z. B. eine dünne Scheibe), auf das Kräfte einwirken, die in seiner Ebene liegen und nur in Randpunkten angreifen. Im Innern angreifende Massenkräfte sollen fehlen.

Im Punkte P des Systems Σ mit den kartesischen Koordinaten $P = (x, y)$ wirken dann in den Koordinatenrichtungen die *Normalspannungen*

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y) \quad \text{und} \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y) \tag{1}$$

sowie die *Schubspannung*

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y). \tag{2}$$

Nach den Lehren der *Elastizitätstheorie*[3]) bestehen dann zwischen diesen Koordinaten des ebenen Spannungstensors

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{3}$$

die beiden *Gleichgewichtsbedingungen*

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

und die *Verträglichkeitsbedingung (Kompatibilitätsbedingung)*

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \tag{5}$$

Ist

$$z = z(x, y) \tag{6}$$

eine viermal stetig ableitbare Funktion, und bezeichnet man ihre Ableitungen erster und zweiter Ordnung nach L. EULER mit

$$\left\{\begin{aligned} z_x(x, y) = p(x, y) = p, \quad z_y(x, y) = q(x, y) = q, \\ z_{xx}(x, y) = r(x, y) = r, \quad z_{xy}(x, y) = s(x, y) = s, \quad z_{yy}(x, y) = t(x, y) = t, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

so kann man, wie B. G. AIRY (1862) erkannt hat, die *Gleichgewichtsbedingungen* (4) in allgemeinster Weise durch den *Ansatz*

$$\sigma_x = t(x, y) \qquad \tau_{xy} = -s(x, y), \qquad \sigma_y = r(x, y) \tag{8}$$

---

[3]) TIMOSHENKO, S., u. J. N. GOODIER: Theory of Elasticity, 2. Aufl., S. 11–54. New York-Toronto-London 1951. — L. FÖPPL, Drang und Zwang, 3. Band, (Der ebene Spannungszustand), München 1947.

befriedigen. Die *Verträglichkeitsbedingung* (5) ist dabei dann und nur dann erfüllt, wenn die Airysche Funktion (6) der (von AIRY noch nicht beachteten sondern erst im Jahre 1881 von J. C. MAXWELL angegebenen) *Bipotentialgleichung*

$$\Delta\Delta z(x,y)=0 \quad \text{oder} \quad \Delta(r+t)=0 \tag{9}$$

genügt.

Jeder ebene elastische Spannungszustand Σ der betrachteten Art kann also durch eine der Bipotentialgleichung (9) genügende *Airysche Spannungsfunktion* (6) beschrieben werden, die allerdings *nur bis auf eine additive lineare Funktion der Form* $c+c_1x+c_2y$ *bestimmt* ist. Die Spannungskoordinaten σ_x, σ_y, τ_{xy} im Punkt $P(x, y)$ des Systems ergeben sich dabei aus den Airyschen Formeln (8).

2. Im Punkte $P=(x, y)$ werde nun durch das elastische System Σ ein *Schnitt mit der Richtung* (dx, dy) gelegt. Wie die Elastizitätstheorie lehrt[3]), wirkt dann in diesem Schnitt die *Normalspannung*

$$\sigma=\frac{dp(x,y)\,dx+dq(x,y)\,dy}{dx^2+dy^2}=\frac{r(x,y)\,dx^2+2s(x,y)\,dx\,dy+t(x,y)\,dy^2}{dx^2+dy^2} \tag{10}$$

und (bei geeigneter Vereinbarung der Vorzeichen) die *Schubspannung*

$$\tau=\frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ dp(x,y) & dq(x,y)\end{vmatrix}}{dx^2+dy^2}=\frac{s\,dx^2+(t-r)\,dx\,dy-s\,dy^2}{dx^2+dy^2}. \tag{11}$$

Zu zwei *orthogonalen Richtungen* (dx, dy) und $(dx^*, dy^*)=(-dy, dx)$ gehören dabei in jedem festen Punkt $P=(x, y)$ Normalspannungen σ und σ^*, deren *Summe* den *festen Wert*

$$\sigma+\sigma^*=r+t \tag{12}$$

hat, ferner Schubspannungen τ und τ^*, deren *Summe verschwindet*

$$\tau+\tau^*=0, \quad \text{d.h.} \quad \tau=-\tau^*. \tag{13}$$

Es gibt dann, wenn nicht zugleich $r=t$ und $s=0$ ist, in jedem Punkt $P=(x, y)$ des Systems Σ *zwei zueinander orthogonale Richtungen* (dx_1, dy_1) und (dx_2, dy_2), in denen die *Normalspannung* (10) *extreme Werte*

$$\sigma_1=\sigma_1(x,y), \qquad \sigma_2=\sigma_2(x,y) \tag{14}$$

annimmt. Für diese beiden *Hauptspannungsrichtungen* verschwindet die Schubspannung; für sie gilt also

$$\tau=0, \quad \text{d.h.} \quad s\,dx^2+(t-r)\,dx\,dy-s\,dy^2=0. \tag{15}$$

Für die beiden Extremwerte (14) der Normalspannungen, die man als die *Hauptnormalspannungen* bezeichnet, gelten die Formeln

$$\begin{cases} \sigma_1+\sigma_2=r+t, \\ \sigma_1\sigma_2=rt-s^2. \end{cases} \tag{16}$$

Durch Integration der Hauptspannungsrichtungen erhält man das *orthogonale Netz der Hauptspannungslinien* des ebenen elastischen Systems Σ, das durch die Differentialgleichung (15) beschrieben wird.

In Punkten $P=(x, y)$, in denen gleichzeitig

$$r = t \quad \text{und} \quad s = 0 \tag{17}$$

ist, hat die Normalspannung σ nach (10) in allen Richtungen (dx, dy) den *gleichen Wert*

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = r = t. \tag{18}$$

Alle Richtungen (dx, dy) sind dann *Hauptspannungsrichtungen*; ihre Schubspannung verschwindet $(\tau=0)$. Diese besonderen Punkte (17) sind nach (15) *singuläre Stellen* des Orthogonalsystems der *Hauptspannungslinien*.

3. Es gibt ferner in jedem Punkt $P=(x, y)$ des ebenen elastischen Systems Σ, in dem nicht gleichzeitig $r=t$ und $s=0$ ist, zwei zueinander *orthogonale Richtungen* (dx_1', dy_1') und (dx_2', dy_2'), in denen die *Schubspannung* (11) *extreme Werte*

$$\tau_1 = \tau_1(x, y), \qquad \tau_2 = \tau_2(x, y) \tag{19}$$

annimmt, die sich nach (13) nur im Vorzeichen unterscheiden, für die also

$$\tau_1(x, y) + \tau_2(x, y) = 0 \tag{20}$$

ist.

Man findet für diese *Hauptschubrichtungen (Gleitrichtungen)* von Σ die Differentialgleichung

$$(r-t)\,dx'^2 + 4s\,dx'\,dy' + (t-r)\,dy'^2 = 0 \tag{21}$$

und erkennt aus dem Verschwinden der bilinearen Invariante der beiden quadratischen Formen (15) und (21), daß in jedem Punkte P des Systems Σ sich das orthogonale Paar der Hauptspannungsrichtungen und das ebenfalls orthogonale Paar der Hauptschubrichtungen *harmonisch trennen*, d.h. sich gegenseitig *unter Winkeln von* $\pm 45°$ *durchsetzen*.

Für die zugehörigen *Hauptschubspannungen* (19) gilt dabei

$$\left\{\begin{aligned} &\tau_1 + \tau_2 = 0 \\ &\tau_1\tau_2 = \sigma_1\sigma_2 - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 = -\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \end{aligned}\right. \tag{22}$$

oder

$$\left.\begin{matrix}\tau_1\\ \tau_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{r-t}{2}\right)^2 + s^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{r+t}{2}\right)^2 - (rt-s^2)}. \tag{23}$$

Zu den beiden Hauptschubrichtungen gehören dabei *Normalspannungen*, deren gemeinsamer Wert gleich der *mittleren Normalspannung*

$$\sigma' = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \tag{24}$$

ist.

Durch Integration der Hauptschubrichtungen erhält man das *orthogonale Netz* der *Hauptschublinien* oder *Gleitlinien* des ebenen elastischen *Systems* Σ, das durch die Differentialgleichung (21) beschrieben wird und *das Orthogonalsystem der Hauptspannungslinien unter Winkeln von* $\pm 45°$ *schneidet.*

In Punkten $P=(x, y)$, in denen gleichzeitig wie in (17) $r=t$ und $s=0$ gilt, *verschwindet* die *Schubspannung* τ nach (11) *in allen Richtungen* (dx, dy), d.h. *alle Richtungen* sind dort *Hauptschubrichtungen*. Diese besonderen Punkte sind nach (21) *singuläre Stellen* des Orthogonalsystems der Hauptschublinien.

4. Zwischen zusammengehörigen Werten der Normalspannung σ und der Schubspannung τ besteht nach (10) und (11) die Gleichung

$$\sigma^2 - (r+t)\,\sigma + \tau^2 + (r\,t - s^2) = 0, \tag{25}$$

die man nach (16) auch in der Form

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 = 0 \tag{26}$$

oder schließlich in der Form

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \tag{27}$$

schreiben kann. In einer (σ, τ)-Ebene gedeutet, ist dies die Gleichung des *Mohrschen Spannungskreises* für den Punkt $P=(x, y)$ des elastischen ebenen Systems Σ, mit dessen Hilfe man sehr einfach zu jeder der beiden Größen σ und τ die andere bestimmen kann.

II. Isotrope Differentialgeometrie der Airyschen Fläche und ebener Spannungszustand

5. Um zu den einleitend angekündigten *differentialgeometrischen Zusammenhängen* zwischen dem in der (x, y) Ebene angenommenen *ebenen elastischen Spannungszustand* Σ und der zugehörigen *Airyschen Spannungsfläche* Φ im (x, y, z)-Raum zu gelangen, bemerken wir, daß erstens dieser Zusammenhang zwischen Σ und Φ gegen *Bewegungen der* (x, y)-*Ebene*, d.h. gegen Transformationen der Form

$$\left\{\begin{aligned} x' &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= z \end{aligned}\right. \tag{28}$$

invariant ist, und daß zweitens die Spannungsfläche Φ als Lösung der Differentialgleichungen (8) nur bis auf *lineare Transformationen* der Gestalt

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = c + c_1 x + c_2 y + z \tag{29}$$

bestimmt ist.

Insgesamt ist also der Zusammenhang zwischen dem ebenen Spannungszustand Σ *und der Airyschen Spannungsfläche* Φ *bei der sechsgliedrigen affinen*

Gruppe

$$(30) \qquad G_6 \begin{cases} X = a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ Y = b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ Z = c + c_1 x + c_2 y + z \end{cases}$$

invariant.

6. Diese Gruppe G_6 der Darstellung (30) besteht aus den volumstreuen Affinitäten des (x, y, z)-Raumes, welche die *Riemannsche Metrik* mit dem *Bogenelementquadrat*

$$(31) \qquad ds^2 = dx^2 + dy^2 = \mathrm{I}$$

invariant lassen. Den mit der Metrik (31) versehenen (x, y, z)-Raum nennen wir einen *isotropen Raum* und die Transformationen der Gruppe (30) seine *Bewegungen*. Als *Geometrie des isotropen Raumes* erklären wir die *Invariantentheorie der Gruppe G_6 der isotropen Bewegungen* (30).

Daraus folgt, daß sich die *elastischen Eigenschaften* des ebenen Spannungszustandes Σ im Raume in *isotropen* (d.h. bei der Gruppe G_6 invarianten) *Eigenschaften* der zugehörigen Airyschen Spannungsfläche Φ spiegeln und umgekehrt. Man kann im Sinne dieser Übertragung die *Elastizitätstheorie* der ebenen Spannungszustände Σ identifizieren mit der *isotropen Differentialgeometrie* ihrer Airyschen Spannungsflächen Φ. *Ebene Elastizitätstheorie und isotrope Differentialgeometrie der Airyschen Flächen $z = z(x, y)$ mit $\Delta\Delta z(x, y) = 0$ sind somit zueinander äquivalent.* Die Formeln und Invarianten der beiden Theorien entsprechen einander vollkommen.

Dem Punkt $P = (x, y)$ und der Richtung (dx, dy) des ebenen elastischen Systems Σ ist dabei im isotropen Raum auf der Airyschen Spannungsfläche Φ in (6) der Punkt $\{x, y, z(x, y)\}$ und die Tangentenrichtung $\{dx, dy, dz = p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy\}$ zugeordnet.

Die nach der Formel (31) im isotropen Raum und auf der Fläche Φ herrschende *Riemannsche Längen- und Winkelmetrik* kann im Normalriß auf die Ebene $z = 0$ (*Grundriß*) direkt als gewöhnliche *ebene euklidische Metrik* abgelesen werden. Insbesondere sind im isotropen Raum und auf der Fläche Φ solche *Richtungen* zueinander *orthogonal*, deren *Grundrisse* aufeinander *im euklidischen Sinne orthogonal* sind.

7. Die von mir früher entwickelte *isotrope Flächentheorie*[4]) lehrt, daß die *Airysche Fläche* (6) im Linienelement $(x, y; dx, dy)$ die *isotrope Normalkrümmung*

$$(32) \qquad \frac{1}{R} = \frac{r(x, y)\,dx^2 + 2s(x, y)\,dx\,dy + t(x, y)\,dy^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$$

und die *isotrope geodätische Torsion*

$$(33) \qquad \tau_g = \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ dp & dq \end{vmatrix}}{dx^2 + dy^2} = \frac{s\,dx^2 + (t - r)\,dx\,dy - s\,dy^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}}$$

[4]) STRUBECKER, K.: Differentialgeometrie des isotropen Raumes. II: Math. Z. **47**, 743—777 (1942); III: Math. Z. **48**, 369—427 (1942); IV: Math. Z. **50**, 1—92 (1945).

besitzt. I, II und IV sind die *erste, zweite* und *vierte Grundform* der isotropen Flächentheorie.

Durch Vergleich mit den Formeln (10) und (11) für die *Normalspannung* σ und die *Schubspannung* τ des *ebenen Spannungszustandes* im Punkte $P=(x, y)$ in der Richtung (dx, dy) folgen die für unsere Entwicklungen grundlegenden Formeln

$$(34)\qquad \begin{cases} \sigma = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}, \\ \tau = \tau_g = \dfrac{\mathrm{IV}}{\mathrm{I}}. \end{cases}$$

Somit gilt für jede betrachtete Stelle (x, y) der

SATZ 1. *Die isotrope Normalkrümmung $1/R$ der Airyschen Spannungsfläche Φ in der Richtung (dx, dy) ist gleich der Normalspannung σ des zugehörigen ebenen elastischen Systems Σ in dieser Richtung. Ebenso ist die isotrope geodätische Torsion τ_g der Airyschen Fläche Φ in der Richtung (dx, dy) gleich der Schubspannung τ des ebenen elastischen Systems Σ in dieser Richtung.*

8. Den beiden (zueinander orthogonalen) *Hauptspannungsrichtungen* (dx_1, dy_1) und (dx_2, dy_2) des ebenen elastischen Systems mit $\sigma =$ Extrem (also $\tau=0$) entsprechen dabei auf der Airyschen Spannungsfläche Φ die beiden *isotropen Hauptkrümmungsrichtungen* mit $1/R=$ Extrem (also $\tau_g=0$), die auf Φ wegen

$$(35)\qquad dx_1\, dx_2 + dy_1\, dy_2 = 0$$

zueinander (im isotropen Sinne) *orthogonal* sind und außerdem wegen

$$(36)\qquad \mathrm{IV} = \begin{vmatrix} dx & dy \\ dp & dq \end{vmatrix} = 0$$

auf der Fläche Φ zueinander *konjugiert* sind.

Die beiden an der Stelle $P=(x, y)$ von Σ vorhandenen extremalen *Hauptspannungen* σ_1, σ_2 sind dabei gleich den beiden zugehörigen extremalen *isotropen Hauptnormalkrümmungen* $1/R_1$ und $1/R_2$ der Airyschen Fläche Φ

$$(37)\qquad \sigma_1 = \frac{1}{R_1}, \qquad \sigma_2 = \frac{1}{R_2}.$$

Die beiden *Invarianten* (16) des ebenen Spannungszustandes Σ stimmen daher mit der doppelten isotropen *mittleren Krümmung* $2H$ und der sog. isotropen *Relativkrümmung* K der Airyschen Fläche Φ überein, nämlich mit den gegenüber der Gruppe (30) der isotropen Bewegungen invarianten Größen

$$(38)\qquad \begin{cases} \sigma_1 + \sigma_2 = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = r + t = 2H, \\ \sigma_1 \sigma_2 = \dfrac{1}{R_1 R_2} = rt - s^2 = K. \end{cases}$$

9. Weil die Airyschen Flächen Φ der Bipotentialgleichung (9) genügen, gilt für sie wegen $\Delta z = r + t = 2H$

$$\Delta\Delta z = \Delta(r+t) = 2 \cdot \Delta H = 0. \tag{39}$$

Daraus ergibt sich für sie die folgende invariante Kennzeichnung:

SATZ 2. *Die zu ebenen elastischen Systemen Σ gehörenden Airyschen Spannungsflächen Φ sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß auf ihnen die isotrope mittlere Krümmung $2H = r + t$ eine harmonische Funktion $(\Delta H = 0)$ ist.*

Zu zwei in einem festen Punkt (x, y) *orthogonalen Tangentenrichtungen* (dx, dy) und $(dx^*, dy^*) = (-dy, dx)$ der Airyschen Fläche gehören dabei *isotrope Normalkrümmungen* $1/R$ und $1/R^*$, deren *Summe* den *festen Wert*

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R^*} = r + t = 2H \tag{40}$$

hat, ferner *isotrope geodätische Torsionen* τ_g und τ_g^*, deren *Summe verschwindet*

$$\tau_g + \tau_g^* = 0, \quad \text{d.h.} \quad \tau_g^* = -\tau_g. \tag{41}$$

Die Übertragung dieser Sätze der Flächentheorie auf den ebenen Spannungszustand führt auf die Formeln (12) und (13).

10. Durch Integration der isotropen Hauptkrümmungsrichtungen erhält man die *isotropen Krümmungslinien* der Airyschen Fläche Φ, welche der *Differentialgleichung* $\mathrm{IV} = 0$ genügen und auf ihr zugleich konjugiert und orthogonal sind, d.h. deren *Normalriß* auf die (x, y)-Ebene ein *orthogonales Netz* ist. Daher gilt

SATZ 3. *Den Hauptspannungslinien des ebenen elastischen Spannungszustandes Σ entsprechen auf der Airyschen Fläche Φ die isotropen Krümmungslinien, welche wegen $\tau_g = 0$ der Differentialgleichung $\mathrm{IV} = 0$ genügen und auf der Fläche Φ zugleich orthogonal und konjugiert sind.*

11. Zu den beiden (ebenfalls orthogonalen) *Hauptschubrichtungen* oder *Gleitrichtungen* (dx_1', dy_1') und (dx_2', dy_2') des ebenen elastischen Systems Σ mit $\tau = \text{Extrem}$ gehören schließlich auf der Airyschen Spannungsfläche Φ die beiden *Richtungen extremer isotroper geodätischer Torsion* $(\tau_g = \text{Extrem})$, die wegen

$$dx_1'\,dx_2' + dy_1'\,dy_2' = 0 \tag{42}$$

zueinander (im isotropen Sinne) *orthogonal* sind und die Winkel der isotropen Krümmungslinien halbieren. In diesen beiden Richtungen, welche der Gl. (21) genügen, ist die *isotrope Normalkrümmung* $1/R'$ der Airyschen Fläche nach (24) gleich ihrer *isotropen mittleren Krümmung*, also

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = H. \tag{43}$$

Für die wegen (22) nur im Vorzeichen verschiedenen *Extremwerte der isotropen geodätischen Torsion* τ_g findet man aus (23)

$$\left.\begin{matrix}(\tau_g)_1\\(\tau_g)_2\end{matrix}\right\} = \pm\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \pm\sqrt{H^2-K}\,. \tag{44}$$

Durch Integration der Richtungen extremer geodätischer Torsion erhält man auf der Airyschen Fläche Φ das *orthogonale Netz* der *Linien extremer geodätischer Torsion*, welches die Winkel der isotropen Krümmungslinien halbiert, und den

SATZ 4. *Den Hauptschublinien (Gleitlinien, $\tau =$ Extrem) des ebenen elastischen Systems Σ entsprechen auf der Airyschen Fläche Φ die Linien extremer geodätischer Torsion ($\tau_g =$ Extrem). Diese Linien, welche der Differentialgleichung* (21) *genügen, bilden auf der Airyschen Fläche Φ jenes Orthogonalnetz, das die Winkel der isotropen Krümmungslinien halbiert.*

12. Den (gemeinsamen) *singulären Punkten* der Orthogonalnetze der Hauptspannungslinien und Hauptschublinien des ebenen elastischen Systems Σ, die nach (17) durch $r=t$ und $s=0$ gekennzeichnet sind, entsprechen auf der Airyschen Fläche Φ die *isotropen Nabelpunkte*, für welche nach (32)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = r = t = H \tag{45}$$

und nach (33) und (44)

$$\tau_g = (\tau_g)_1 = (\tau_g)_2 = 0 \tag{46}$$

gilt, d.h., für welche die *isotrope Normalkrümmung* $1/R$ in allen Richtungen *denselben Wert* hat und die isotrope *geodätische Torsion* τ_g in allen Richtungen *verschwindet*.

13. Zwischen den drei in (31), (32) und (33) erklärten *Grundformen* I, II und IV der isotropen Flächentheorie besteht die *quadratische Relation*

$$K\,\mathrm{I}^2 - 2H\,\mathrm{I}.\mathrm{II} + \mathrm{II}^2 + \mathrm{IV}^2 = 0 \tag{47}$$

oder

$$(\mathrm{II} - H.\mathrm{I})^2 + \mathrm{IV}^2 = (H^2-K)\,\mathrm{I}^2. \tag{48}$$

Division durch I^2 ergibt nach (32) und (33) die Beziehung

$$\left(\frac{1}{R} - H\right)^2 + \tau_g^2 = H^2 - K, \tag{49}$$

welche wegen (34) und (38) mit der Gl. (27) des *Mohrschen Spannungskreises* übereinstimmt. Man kann nach dem Vorbilde von (26) die Relation (48) auch noch in der Form

$$\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_2}\right) + \tau_g^2 = 0 \tag{50}$$

schreiben.

Diese Relationen gelten übrigens für alle Flächen $z=z(x, y)$ des isotropen Raumes, nicht bloß für Airysche Flächen. Sie gelten wörtlich ebenso für Flächen des euklidischen Raumes und gestatten, bei Kenntnis der beiden Hauptnormalkrümmungen $1/R_1$ und $1/R_2$ zu jedem Wert der Normalkrümmung $1/R$ den zugehörigen Wert der geodätischen Torsion τ_g zu berechnen und umgekehrt.

14. Man erkennt aus obigen Darlegungen deutlich die völlige *Identität* der *Elastizitätstheorie des ebenen Spannungszustandes* Σ (ohne innere Massenkräfte) mit der *isotropen Differentialgeometrie* seiner *Airyschen Fläche* Φ.

Die eigentliche Wurzel für die Möglichkeit dieser Identifizierung zwischen beiden Theorien liegt in der Aufdeckung der Immunität des Zusammenhangs zwischen dem elastischen System Σ und seiner Airyschen Fläche Φ gegenüber den Transformationen der *Gruppe* (30), die wir als Gruppe G_6 der Bewegungen des isotropen Raumes deuten konnten. Dieser Zusammenhang ist bisher noch nicht bemerkt und daher auch noch nicht ausgenützt worden.

Die Einfachheit der aufgedeckten geometrischen Zusammenhänge und Deutungen läßt weitere Anwendungen und Fortschritte erwarten.

Insgesamt scheint mir damit das seit ARCHIMEDES bewährte *Zusammenspiel zwischen Geometrie und Mechanik* um ein weiteres interessantes Beispiel bereichert zu sein.

Karlsruhe, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 8. Mai 1961)