Werk

Titel: Kegelschnitte in desarguesschen Ebenen.

Autor: BERZ, EDGAR

Jahr: 1962

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0078|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

BERZ, E.
Math. Zeitschr. 78, 55–85 (1962)

Kegelschnitte in desarguesschen Ebenen

Von
EDGAR BERZ

Einleitung

Es sind in neuerer Zeit verschiedene Möglichkeiten für die Übertragung von Kegelschnittsätzen auf desarguessche Ebenen entwickelt worden:

1. Verallgemeinerung der v. Staudtschen Erzeugung.

Man beschränkt sich auf solche desarguessche Ebenen, die eine Polarität p besitzen und definiert die Menge der selbstkonjugierten Punkte von p als Kegelschnitt (BAER [1], LENZ [6], [7], KANNENBERG [4]). Die hierbei auszuschließenden desarguesschen Ebenen ohne Polarität lassen sich analytisch dadurch kennzeichnen, daß ihr Koordinatenkörper keinen involutorischen Antiautomorphismus besitzt. Schiefkörper ohne Antiautomorphismus hat H. KNESER [5] angegeben.

2. Verallgemeinerung der Steinerschen Erzeugung.

Man geht von projektiven Geradenbüscheln (Punktreihen) aus und definiert deren Erzeugnis als C_2 (bzw. C^2). Die Projektivität kann dabei nach PICKERT [9] auf Grund von Inzidenzaxiomen eingeführt werden, so daß diese Definition in allen desarguesschen Ebenen (sogar in allen Inzidenzebenen!) brauchbar ist.

Dieser Erzeugung habe ich mich bereits in [2] bedient. In einer inzwischen erschienenen Arbeit SEGRES [11] findet sich noch folgende Möglichkeit.

3. C_2 als Schnitt einer verallgemeinerten Quadrik.

Man bettet die desarguessche Ebene ϑ in einen projektiven Raum $\mathfrak{P}_3$ ein und betrachtet in diesem das System aller Geraden, die 3 feste windschiefe Geraden treffen, als verallgemeinerte geradlinige Quadrik, und den Schnitt mit ϑ als verallgemeinerte C_2.

In dieser Note soll die Steinersche Methode auf desarguessche Ebenen übertragen werden. Es stellen sich dabei eine Fülle von Verallgemeinerungsmöglichkeiten ein, daneben aber auch „Anomalien", wie etwa das Auftreten unendlich vieler gemeinsamer Punkte einer C_2 und einer Tangente, das sich algebraisch aus der Konstruktion eines Koordinatenschiefkörpers $\mathsf{K}(x, y)$ mit $yx - xy = 1$ erklären wird.

Von Interesse ist nun natürlich, wie sich die angegebenen Erzeugungsarten zueinander verhalten.

Wie wir beweisen werden, sind Steinersche und v. Staudtsche Auffassung genau in denjenigen desarguesschen Ebenen äquivalent, deren Koordinatenkörper kommutativ ist und nicht die Charakteristik 2 hat, und dort auch

nur dann, wenn für die Erzeugung der v. Staudtschen C_2 der identische Antiautomorphismus gewählt wird.

Von der Steinerschen und der Segreschen Erzeugung läßt sich dagegen nachweisen, daß sie gleichwertig sind in dem Sinne, daß jede Steinersche C_2 auch eine Segresche ist und umgekehrt; sie sind jedoch nicht gleichwertig in bezug auf Dualisierung, denn bei der Steinerschen C_2 liefert die in der Ebene vorzunehmende Dualisierung eine C^2, während die räumliche Dualisierung bei SEGRE auf eine mit einem Punkt inzidente Ebenenmannigfaltigkeit führt. Daran mag es wohl liegen, daß bei SEGRE die Kurve 2. Klasse gar nicht ins Spiel kommt.

Aus der Äquivalenz von Steinerscher und Segrescher C_2 werden wir in einfacher Weise folgern können, daß jede Projektivität einer desarguesschen Ebene von einer gewissen Perspektivität zwischen windschiefen Ebenenbüscheln ausgeschnitten wird.

In bezug auf die Steinersche C^2 entsteht noch die Frage, ob sie sich auch als Tangentenmannigfaltigkeit einer C_2 auffassen läßt. Dies ist bei geeigneter Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs möglich, vorausgesetzt, daß die desarguessche Ebene nicht die Charakteristik 2 hat.

§ 1. Projektivität, projektive Kollineation

In den nachstehenden Begriffsbildungen folgen wir G. PICKERT [9].

PERSPEKTIVITÄT. In einer desargusschen Ebene werden Geradenbüschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ mit den verschiedenen Trägern P, P' sowie eine Gerade a angenommen, die weder durch P noch durch P' geht. Jeder Geraden $g \in \mathfrak{B}$ ordnen wir in eindeutiger Weise eine Gerade $g' \in \mathfrak{B}'$ zu:

$$g' = (g \cap a)\, P'$$

und bezeichnen jede solche Zuordnung als Perspektivität von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$, a als Achse. Offenbar ist auch die Umkehrabbildung eine Perspektivität mit der gleichen Achse, so daß wir von einer Perspektivität zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ sprechen können.

PROJEKTIVITÄT. $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ $(n \geqq 2)$ seien endlich viele Geradenbüschel einer desarguesschen Ebene und es bestehe je eine Projektivität von $\mathfrak{B}_i$ auf $\mathfrak{B}_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, (n-1))$. Die resultierende Zuordnung von $\mathfrak{B}_1$ auf $\mathfrak{B}_n$ werde als Projektivität von $\mathfrak{B}_1$ auf $\mathfrak{B}_n$ bezeichnet.

PERSPEKTIVE KOLLINEATION. Unter einer *Kollineation* einer desarguesschen Ebene werde eine umkehrbar eindeutige Punktabbildung der Ebene auf sich selbst verstanden, bei der die Kollinearität je dreier Urpunkte gleichbedeutend ist mit der Kollinearität ihrer Bildpunkte. Eine Kollineation heiße *perspektiv*, wenn sie die Punkte einer Geraden *(Achse)* fest läßt. Wie bei PICKERT [9] gezeigt wird, existiert dann auch ein Büschel von Festgeraden. Dessen Träger heiße *Zentrum* der perspektiven Kollineation. Bei einer nicht identischen perspektiven Kollineation sind Achse und Zentrum eindeutig bestimmt.

PROJEKTIVE KOLLINEATION. Diese werde als *Produkt endlich vieler perspektiver Kollineationen* erklärt.

PROJEKTIVITÄT UND PROJEKTIVE KOLLINEATION. Gegeben sei eine Perspektivität des Büschels $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ mit der Achse a. Dazu läßt sich eine perspektive Kollineation finden, die diese Perspektivität hervorruft. Man braucht nämlich nur eine solche perspektive Kollineation zu wählen, die a als Achse hat, deren Zentrum auf PP' und von diesen Punkten verschieden ist, und die P in P' überführt. Die Existenz einer solchen perspektiven Kollineation wird durch die Gültigkeit des desarguesschen Satzes gesichert.

Gemäß obiger Definitionen läßt sich also jede Projektivität durch eine projektive Kollineation hervorrufen.

Umgekehrt läßt sich beweisen (s. PICKERT): Wird $\mathfrak{B}$ durch eine projektive Kollineation auf $\mathfrak{B}'$ abgebildet, so ist die induzierte Zuordnung der Geraden von $\mathfrak{B}$ zu den Geraden von $\mathfrak{B}'$ eine Projektivität.

ANALYTISCHE DARSTELLUNG EINER PROJEKTIVITÄT. Es sei ϑ irgendeine desarguessche Ebene, K ihr Koordinatenkörper, der bekanntlich nicht kommutativ zu sein braucht, und S ein projektives Bezugssystem in ϑ. In bezug auf S entspricht dann jedem Punkt $P \in \vartheta$ eindeutig eine „Rechtsklasse" von Tripeln $(x_0, x_1, x_2) \cdot r$, bei der die x_i nicht lauter verschwindende Elemente $\in \mathsf{K}$ sind und r ganz $\mathsf{K} - \{0\}$ durchläuft, und es entspricht jeder Geraden g eine „Linksklasse" $s \cdot (v_0, v_1, v_2)$. In ϑ sei nun eine Projektivität $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$ gegeben. Sie werde hervorgerufen durch die projektive Kollineation $\mathfrak{P}$. Diese Punktabbildung induziert in der Ebene eine Geradenabbildung. Letztere läßt sich durch eine Transformation

$$v'_k = \sum_{i=0}^{2} v_i a_{ik} \quad \text{in Matrixform} \quad \mathfrak{v}' = \mathfrak{v}\,\mathfrak{A}$$

darstellen, wobei (v_0, v_1, v_2) Geradenkoordinaten.

Eine analytische Darstellung von $\mathfrak{p}$ erhält man folgendermaßen: Man wähle in $\mathfrak{B}$ zwei Geraden g_1, g_2 und für sie Koordinatenvektoren $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$. An der Wahl der $\mathfrak{v}_i$ soll im folgenden festgehalten werden. Ist nun g irgendeine Gerade aus $\mathfrak{B}$, dargestellt durch

$$\mathfrak{v} = \lambda_1 \mathfrak{v}_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}_2,$$

so kann man g in sein Bild $g' = \mathfrak{p}(g)$ überführen, indem man auf g die projektive Kollineation $\mathfrak{P}$ anwendet, also durch Ausübung der Transformation

$$\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}\,\mathfrak{A}.$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}' &= \lambda_1 \mathfrak{v}_1 \mathfrak{A} + \lambda_2 \mathfrak{v}_2 \mathfrak{A} \\ &= \lambda_1 \mathfrak{v}'_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}'_2 \end{aligned}$$

mit

$$\mathfrak{v}'_i = \mathfrak{v}_i \mathfrak{A}.$$

Wählt man also für $\mathfrak{B}'$ die $\mathfrak{v}_i'$ als Basis, so wird die Projektivität einfach durch die Parametertransformation

$$\lambda_1' = \lambda_1, \qquad \lambda_2' = \lambda_2$$

dargestellt.

§ 2. Steinersche Erzeugung der C_2

DEFINITION. Sei $\mathfrak{p}$ eine Projektivität des Geradenbüschels $\mathfrak{B}$ mit Träger P auf das Geradenbüschel $\mathfrak{B}'$ mit Träger $P' \neq P$. X bedeute einen Punkt, der gleichzeitig auf einer Geraden aus $\mathfrak{B}$ wie auf deren Bild aus $\mathfrak{B}'$ liegt. Die Gesamtheit dieser Punkte X definieren wir als einen *Kegelschnitt* (C_2) der desarguesschen Ebene.

Auf Grund dieser Definition sowie der Axiome der Inzidenzebene kann man bereits folgende Aussagen herleiten:

1. Die Träger P, P' gehören zur C_2.

Beispielsweise kann P' als gemeinsamer Punkt der Geraden PP' und $\mathfrak{p}(PP')$ erhalten werden.

2. Wird von der Projektivität $\mathfrak{p}$ vorausgesetzt $\mathfrak{p}(PP') \neq PP'$, so liegt auf der Geraden $\mathfrak{p}(PP')$ nur der eine Kegelschnittpunkt P'. Nimmt man nämlich an, es gäbe auf $\mathfrak{p}(PP')$ einen zweiten Kegelschnittpunkt $S \neq P'$, so wäre dieser wegen der Zugehörigkeit zur C_2 auch auf der Urgeraden PP' gelegen und somit wegen $\mathfrak{p}(PP') \neq PP'$ mit dem Schnittpunkt P' dieser zwei Geraden identisch, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Entsprechend enthält die Gerade $\mathfrak{p}^{-1}(PP')$ außer P keinen weiteren C_2-Punkt.

3. Unter der Voraussetzung $\mathfrak{p}(PP') \neq PP'$ hat jede Gerade s durch P' und $\neq \mathfrak{p}(PP')$ genau 2 Punkte mit der C_2 gemeinsam.

$R = s \cap \mathfrak{p}^{-1}(s)$ und P' sind offenbar verschiedene C_2-Punkte auf s. Es sind auch die einzigen, denn bezeichnet R' irgend einen solchen, verschieden von P', so liegt er notwendig auch auf $\mathfrak{p}^{-1}(s)$, und ist somit mit R identisch.

Durch P' geht somit genau eine Gerade t', die nur den Punkt P' mit der C_2 gemeinsam hat. Sie werde als Tangente in P' bezeichnet. (Entsprechend für P!)

4. Es kann sein, daß dieselbe C_2 auch noch durch eine zweite Projektivität $\mathfrak{q}$ zwischen den Büscheln $\mathfrak{C}, \mathfrak{C}'$ mit den Trägern Q, Q' erzeugt wird. In diesem Fall folgt $\mathfrak{q}(QQ') \neq QQ'$ aus $\mathfrak{p}(PP') \neq PP$.

Zum Beweise nehmen wir im Gegenteil $\mathfrak{q}(QQ') = QQ'$ an. Nach Definition der C_2 gehört dann QQ' ganz zur C_2. Um einen Widerspruch abzuleiten, unterscheiden wir folgende Fälle:

a) QQ' geht weder durch P noch durch P'. Dann ist insbesondere $S = PP' \cap QQ'$ zur C_2 gehörig, außerdem verschieden von P, P' und somit $PS = \mathfrak{p}(P'S)$, was mit $PP' = \mathfrak{p}(PP')$ gleichbedeutend und somit ein Widerspruch ist.

b) QQ' geht durch einen der P, P', etwa durch P. Nach 2.3 hätte dann QQ' höchstens 2 Kegelschnittpunkte, während andererseits nach unserer

Annahme sämtliche Punkte von $Q'Q$ zur C_2 gehören, und das sind in jeder Inzidenzebene mindestens 3.

Auf Grund von 4 ist folgende Definition sinnvoll:

Die C_2 heiße *nicht entartet*, wenn $P P' \neq \mathfrak{p}(P P')$.

ANALYTISCHE DARSTELLUNG DER C_2. Für $\mathfrak{B}$ wird eine Basis $\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2$ gewählt, für $\mathfrak{B}'$ nach §1 eine Basis $\mathfrak{v}_1', \mathfrak{v}_2'$ so, daß die gegebene Projektivität durch

$$\lambda_1 \mathfrak{v}_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}_2 \to \lambda_1 \mathfrak{v}_1' + \lambda_2 \mathfrak{v}_2'$$

dargestellt wird. Ein Punkt X mit dem Koordinatenvektor $\mathfrak{x}$ gehört genau dann zum Erzeugnis, wenn die folgenden Gleichungen mit einem nichttrivialen Paar λ_1, λ_2 gleichzeitig erfüllt sind:

$$(\lambda_1 \mathfrak{v}_1 + \lambda_2 \mathfrak{v}_2)\,\mathfrak{x} = 0, \qquad (\lambda_1 \mathfrak{v}_1' + \lambda_2 \mathfrak{v}_2')\,\mathfrak{x} = 0$$

oder:

$$\lambda_1 (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{x}) + \lambda_2 (\mathfrak{v}_2 \mathfrak{x}) = 0$$
$$\lambda_1 (\mathfrak{v}_1' \mathfrak{x}) + \lambda_2 (\mathfrak{v}_2' \mathfrak{x}) = 0.$$

Diese Gleichungen, aufgefaßt als Bestimmungsgleichungen für λ_1, λ_2, besitzen nur dann ein nichttriviales Lösungspaar λ_1, λ_2, wenn zwischen ihren Koeffizienten eine gewisse Abhängigkeit besteht, die gerade die gesuchte Bedingung für $\mathfrak{x}$ darstellt.

Diese Bedingung wird besonders einfach bei Zugrundelegung eines speziellen, der Projektivität besonders angepaßten Koordinatensystems. Wir beschränken uns dabei auf den Fall der nicht entarteten C_2 mit $\mathfrak{p}(P P') \neq (P P')$. Es ist dann folgende Wahl für die Grundpunkte E_0, E_1, E_2 des Bezugssystems möglich:

$$E_1 = P \quad (= \text{Träger von } \mathfrak{B})$$
$$E_2 = P' \quad (= \text{Träger von } \mathfrak{B}')$$
$$E_0 = \mathfrak{p}(P P') \cap \mathfrak{p}^{-1}(P P').$$

Haben die E_0, E_1, E_2 die Vektoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, so kann man als Basis von $\mathfrak{B}$ wählen

$$\mathfrak{v}_1 = (1, 0, 0), \qquad \mathfrak{v}_2 = (0, 0, 1).$$

Die Basis $\mathfrak{v}_1' = \mathfrak{v}_2 \mathfrak{A}$, $\mathfrak{v}_2' = \mathfrak{v}_2 \mathfrak{A}$ für $\mathfrak{B}'$ hat gemäß der Wahl des Bezugssystems folgende Form:

$$\mathfrak{v}_1' = (0, a, 0), \qquad \mathfrak{v}_2' = (b, 0, 0).$$

Mit diesen $\mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i'$ vereinfachen sich die Gln. (1) zu

$$\lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_2 = 0$$
$$\lambda_1 a x_1 + \lambda_2 b x_2 = 0.$$

Durch Elimination der λ_1, λ_2 erhält man hieraus für eine Lösung mit $x_0 \neq 0$

$$(b^{-1} x_2 x_0^{-1})\,(a x_1 x_0^{-1}) = 1,$$

während von den Punkten mit $x_0=0$ nur $E_1=P$ und $E_2=P'$ Lösungen sind. Führt man noch die inhomogenen Koordinaten

$$x = a\, x_1\, x_0^{-1}, \qquad y = b^{-1}\, x_2\, x_0^{-1}$$

ein, so hat man

SATZ 2.1. *Jede nicht entartete C_2 einer beliebigen desarguesschen Ebene läßt sich bei geeigneter Wahl des Bezugssystems beschreiben als die Menge der eigentlichen Punkte $X(1, x, y)$ mit*

$$x\, y = 1$$

sowie der uneigentlichen Punkte $E_1(0, 1, 0)$, $E_2(0, 0, 1)$.

§ 3. Der Schiefkörper $K(x, y)$ mit $y \cdot x - x \cdot y = 1$

Auf einer C_2, deren eigentliche Punkte $P(x, y)$ durch

$$x\, y = 1$$

dargestellt sein mögen, wird ein Punkt $P(x_0, y_0)$ angenommen und durch diesen die Gerade

$$h: \quad y - y_0 = -\frac{1}{x_0^2}\,(x - x_0)$$

gelegt. Welche Punkte haben h und die C_2 gemeinsam?

Bei kommutativem Koordinatenkörper ist $P(x_0, y_0)$ offenbar der einzige gemeinsame Punkt. *Dagegen wollen wir im folgenden zeigen, daß es einen nicht kommutativen Koordinatenkörper gibt, derart, daß h und die C_2 unendlich viele gemeinsame Punkte haben.*

Zu diesem Zweck beweisen wir zuerst

SATZ 3.1. *$Q(x, x^{-1})$ ist genau dann ein von $P(x_0, y_0)$ verschiedener gemeinsamer Punkt der C_2:*

$$x\, y = 1$$

und der Geraden

$$g: \quad y - y_0 = m(x - x_0) \quad \textit{mit} \quad m \neq 0, \qquad y_0 = x_0^{-1},$$

wenn für $z=(x-x_0)^{-1}$ gilt:

$$z\,(x_0\, m)^{-1} + x_0\, z + 1 = 0. \tag{3.1}$$

BEWEIS. Sei $Q(x, x^{-1})$ ein solcher gemeinsamer Punkt. Dann ist

$$x^{-1} - x_0^{-1} = m(x - x_0)$$

oder

$$-\,x_0^{-1}(x - x_0)\, x^{-1} = m(x - x_0).$$

Geht man beiderseits zum Inversen über und setzt $z=(x-x_0)^{-1}$, so erhält man

$$-\,x\, z\, x_0 = z\, m^{-1}$$

oder mit

$$x = x_0 + z^{-1}: \quad (x_0 + z^{-1})\, z + z\,(x_0\, m)^{-1} = 0$$

und durch Ausmultiplizieren die behauptete Gleichung.

Sie ist offenbar auch hinreichend für die Zugehörigkeit von $Q(x, x^{-1})$ zu g.

Im Sonderfall $m = -\frac{1}{x_0^2}$ wird aus (3.1):

$$z\, x_0 - x_0\, z = 1. \tag{3.2}$$

Die Anzahl der von P verschiedenen gemeinsamen Punkte von g und der C_2 ist somit gleich der Anzahl der verschiedenen Lösungen z dieser Gleichung.

Bezüglich der *Existenz* einer Lösung gilt

SATZ 3.2. *Es existiert ein Schiefkörper* $\mathsf{K}(x, y)$, *der*

1. einen zum Körper K *der rationalen Zahlen isomorphen Körper*

2. ein Paar x, y *mit* $y \cdot x - x \cdot y = 1$

enthält.

Zum Beweis konstruieren wir einen solchen Schiefkörper, und zwar geben wir zuerst einen Ring $\mathsf{K}[x, y]$ mit den Eigenschaften 1., 2. an und betten diesen dann in einen Körper ein.

KONSTRUKTION VON $\mathsf{K}[x, y]$. Wir gehen aus von der Menge der Polynome $f, g, \ldots$ in x, y mit rationalen Koeffizienten und definieren für sie Gleichheit, Summe und Produkt fg in üblicher Weise, darüber hinaus ein — durch den Multiplikationspunkt gekennzeichnetes — *nichtkommutatives Produkt* $f \cdot g$ durch

$$f \cdot g = fg + \frac{1}{1!}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \cdots.$$

Die partiellen Ableitungen sind dabei wie sonst in der Algebra zu bilden. Dieses nichtkommutative Produkt ist leicht als distributiv zu erkennen. Die *Assoziativität* läßt sich folgendermaßen beweisen:

$$\begin{aligned} f \cdot (g \cdot h) &= f \cdot \left(\sum_\nu \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu g}{\partial y^\nu}\frac{\partial^\nu h}{\partial x^\nu}\right) = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda f}{\partial y^\lambda}\frac{\partial^\lambda}{\partial x^\lambda}\left(\sum_\nu \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu g}{\partial y^\nu}\frac{\partial^\nu h}{\partial x^\nu}\right) \\ &= \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda f}{\partial y^\lambda}\left(\sum_\nu \frac{1}{\nu!}\sum_{\sigma=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\sigma}\frac{\partial^{\nu+\lambda-\sigma} g}{\partial y^\nu\, \partial x^{\lambda-\sigma}}\frac{\partial^{\nu+\sigma} h}{\partial x^{\nu+\sigma}}\right) \\ &= \sum_{\substack{\nu,\lambda,\sigma \\ \sigma \leqq \lambda}} \frac{1}{\lambda!}\frac{1}{\nu!}\binom{\lambda}{\sigma}\frac{\partial^\lambda f}{\partial y^\lambda}\frac{\partial^{\nu+\lambda-\sigma} g}{\partial y^\nu\, \partial x^{\lambda-\sigma}}\frac{\partial^{\nu+\sigma} h}{\partial x^{\nu+\sigma}} = A. \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} (f \cdot g) \cdot h &= \left(\sum_\nu \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial y^\nu}\frac{\partial^\nu g}{\partial x^\nu}\right) \cdot h = \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!}\frac{\partial^\lambda}{\partial y^\lambda}\left(\sum_\nu \frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu f}{\partial y^\nu}\frac{\partial^\nu g}{\partial x^\nu}\right)\frac{\partial^\lambda h}{\partial x^\lambda} \\ &= \sum_\lambda \frac{1}{\lambda!}\left(\sum_\nu \frac{1}{\nu!}\sum_{\sigma=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{\sigma}\frac{\partial^{\nu+\sigma} f}{\partial y^{\nu+\sigma}}\frac{\partial^{\nu+\lambda-\sigma} g}{\partial x^\nu\, \partial y^{\lambda-\sigma}}\right)\frac{\partial^\lambda h}{\partial x^\lambda} \\ &= \sum_{\substack{\lambda,\sigma,\nu \\ \sigma \leqq \lambda}} \frac{1}{\lambda!}\frac{1}{\nu!}\binom{\lambda}{\sigma}\frac{\partial^{\nu+\sigma} f}{\partial y^{\nu+\sigma}}\frac{\partial^{\nu+\lambda-\sigma} g}{\partial x^\nu\, \partial y^{\lambda-\sigma}}\frac{\partial^\lambda h}{\partial x^\lambda} = A'. \end{aligned}$$

Um die Übereinstimmung von A, A' zu erkennen, führe man in A' neue Summationsindizes ein:

$$\bar{\sigma} = \sigma, \qquad \bar{\lambda} = \nu + \sigma, \qquad \bar{\nu} = \lambda - \sigma.$$

Zwischen den Tripeln λ, ν, σ mit $\sigma \leqq \lambda$ und den Tripeln $\bar{\lambda}, \bar{\nu}, \bar{\sigma}$ mit $\bar{\sigma} \leqq \bar{\lambda}$ besteht offenbar eine umkehrbar eindeutige Zuordnung. Man kann daher A' ersetzen durch

$$\sum_{\substack{\bar{\lambda},\bar{\nu},\bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} \leqq \bar{\lambda}}} \frac{1}{(\bar{\lambda}-\bar{\sigma})!} \frac{1}{(\bar{\nu}+\bar{\sigma})!} \binom{\bar{\nu}+\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \frac{\partial^{\bar{\lambda}} f}{\partial y^{\bar{\lambda}}} \frac{\partial^{\bar{\nu}+\bar{\lambda}-\bar{\sigma}} g}{\partial x^{\bar{\lambda}-\bar{\sigma}} \partial y^{\bar{\nu}}} \frac{\partial^{\bar{\nu}+\bar{\sigma}} h}{\partial x^{\bar{\nu}+\bar{\sigma}}},$$

was wegen

$$\frac{1}{(\bar{\nu}-\bar{\sigma})!} \frac{1}{(\bar{\nu}+\bar{\sigma})!} \binom{\bar{\nu}+\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} = \frac{1}{\bar{\lambda}!} \binom{\bar{\lambda}}{\bar{\nu}!}$$

mit A übereinstimmt.

Die Polynome $f, g, \ldots$ bilden somit bezüglich des neuen Produkts einen Schiefring $\mathsf{K}[x, y]$. In diesem gilt nun:

$$y \cdot x - x \cdot y = 1,$$

denn nach der Produktdefinition ist

$$y \cdot x = y\,x + 1 = x\,y + 1$$

und

$$x \cdot y = x\,y.$$

$\mathsf{K}[x, y]$ *hat also die Eigenschaften 1., 2.*

EINBETTUNG VON $\mathsf{K}[x, y]$ IN EINEN KÖRPER. Hierfür beweisen wir:

a) $\mathsf{K}[x, y]$ *ist nullteilerfrei.*

Es seien

$$f = \sum_{i,k} c_{ik}\, x^i y^k, \qquad g = \sum_{r,s} d_{rs}\, x^r y^s$$

von Null verschiedene Elemente aus $\mathsf{K}[x, y]$. Unter den von Null verschiedenen Gliedern $c_{ik} x^i y^k$ suche man diejenigen mit maximalem i aus, dann unter diesen wiederum das eindeutig bestimmte Glied mit maximalem k. Das so bestimmte „*Hauptglied von* f" sei

$$c_{IK}\, x^I y^K.$$

In entsprechender Weise sei das Hauptglied

$$d_{RS}\, x^R y^S$$

von g definiert. Bei der Produktbildung

$$f \cdot g = fg + \frac{1}{1!} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \cdots$$

entsteht in fg genau einmal das Glied

$$c_{IK}\, d_{RS}\, x^{I+R}\, y^{K+S},$$

in den folgenden Produkten jedoch nicht mehr, wegen der partiellen Ableitungen. Mit $c_{IK} d_{RS}$ ist also auch $f \cdot g$ von Null verschieden.

b) *Zu zwei beliebigen Elementen* $f, g \in \mathsf{K}[x, y]$ *gibt es Elemente* $\varphi, \psi \in \mathsf{K}[x, y]$, *nicht beide Null, mit*

$$f\varphi = g\psi.$$

Sei nämlich

$$f = \sum_{i,k} c_{ik}\, x^i\, y^k, \qquad g = \sum_{r,s} d_{rs}\, x^r\, y^s$$

und N eine obere Schranke für die Exponenten:

$$i, k, r, s \leqq N.$$

Wir denken uns dann bei f, g alle Potenzprodukte mit Exponenten kleiner gleich N angeschrieben, die zuerst noch nicht vorhandenen mit Koeffizienten Null:

$$f = \sum_{i,k=0}^{N} c_{ik}\, x^i\, y^k, \qquad g = \sum_{r,s}^{N} d_{rs}\, x^r\, y^s.$$

In entsprechender Form setzen wir die gesuchten φ, ψ an:

$$\varphi = \sum_{i,k}^{M} \gamma_{ik}\, x^i\, y^k, \qquad \psi = \sum_{r,s}^{M} \varepsilon_{rs}\, x^r\, y^s.$$

Über M wird noch in geeigneter Weise verfügt werden. Multipliziert man nun mit diesen Polynomen $f \cdot x - g \cdot y$ aus, so erhält man ein Polynom $\sum_{i,k}^{M+N} e_{ik} x^i y^k$, dessen formaler Grad in bezug auf x wie auf y gleich $N+M$ ist und dessen Koeffizienten e_{ik} linear und homogen in den unbekannten Koeffizienten γ_{ik}, ε_{rs} sind. Die Forderung $e_{ik} = 0$ bedeutet daher für die gesuchten Koeffizienten ein lineares, homogenes Gleichungssystem. Dieses hat $(N+M+1)^2$ Gleichungen und $2(M+1)^2$ Unbekannte. Für genügend großes M ist aber

$$2(M+1)^2 > (N+M+1)^2.$$

Man braucht also M nur dieser Ungleichung gemäß zu wählen und hat dann mehr Unbekannte als Gleichungen und somit eine nichttriviale Lösung, q.e.d.

Die Eigenschaften a), b) garantieren nun nach einem bekannten Satz von Ore [8] die Existenz des Rechtsquotientenkörpers von $\mathsf{K}[x, y]$. Damit ist die Existenz eines Körpers $\mathsf{K}(x, y)$ mit den Eigenschaften 1., 2. bewiesen.

Inwieweit ein Schiefkörper durch die Eigenschaften 1., 2. bestimmt ist, lehrt

SATZ 3.3. *Jeder Schiefkörper* SK *mit den Eigenschaften* 1., 2. *enthält einen zu* $\mathsf{K}(x, y)$ *isomorphen Unterkörper.*

In diesem Sinne kann also $\mathsf{K}(x, y)$ als der kleinste Körper mit den Eigenschaften 1., 2. charakterisiert werden.

Zum Beweise werde ein Schiefkörper SK angenommen, der einen zum Körper der rationalen Zahlen isomorphen Körper K sowie ein Paar a, b mit $ba - ab = 1$ enthält. Dann kann man folgendermaßen schließen:

1. Das Zentrum von SK enthält K.

2. Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist

$$b a^n = a^n b + n a^{n-1},$$

wie durch Induktion nach n zu sehen. Für $f(a, b) = \sum_{i,k} c_{ik} a^i b^k$ gilt somit:

$$b f(a, b) = \sum_{i,k} c_{ik} b a^i b^k = \sum_{i,k} c_{ik} (a^i b + i a^{i-1}) b^k$$

$$= \Big(\sum_{i,k} c_{ik} a^i b\Big) b + \sum_{i,k} c_{ik} i a^{i-1} b^k,$$

also:

$$b f(a, b) = f(a, b) b + \frac{\partial}{\partial a} f(a, b),$$

wobei zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i,k} c_{ik} i a^{i-1} b^k$$

gesetzt wurde.

3. Vollständige Induktion nach k ergibt:

$$b^k f(a, b) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \frac{\partial^\nu f}{\partial a^\nu} b^{k-\nu}.$$

4a. Aus 3. erhält man speziell für $f(a, b) = a$:

$$b^k a = a b^k + k b^{k-1}.$$

Für $f(a, b) = \sum_{i,k} c_{ik} a^i b^k$ ergibt sich somit:

$$f(a, b) a = \sum_{i,k} c_{ik} a^i (a b^k + k b^{k-1}) = a f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial b},$$

wobei $\partial f / \partial b$ als Abkürzung für $\sum k c_{ik} a^i b^{k-1}$ steht.

4b. Als weitere Folgerung aus 3. erwähnen wir

$$b^n a^m = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} \frac{d^k(a^m)}{da^k} \frac{d^k(b^n)}{db^k}.$$

Aus 2. gewinnt man

SATZ 3.4. *a ist in bezug auf* K *transzendent.*

BEWEIS. Sei $c_0 + c_1 a + \cdots + c_n a^n = 0 \quad mit \quad c_i \in \mathsf{K}$
abgekürzt:

$$f(a) = 0.$$

Daraus folgt

$$b f(a) = 0$$

und nach 2.

$$f(a)\, b + f'(a) = 0, \quad \text{also wegen} \quad f(a) = 0$$
$$f'(a) = 0.$$

Wiederholung der Schlußweise ergibt, daß für jedes natürliche k

$$f^{(k)}(a) = 0.$$

Nimmt man nun etwa $c_n \neq 0$ an, so führt dies auf

$$f^{(n)}(a) = n!\, c_n \neq 0,$$

also auf einen Widerspruch.

Ferner sind die a, b algebraisch unabhängig im Sinne von

SATZ 3.5. *Ein bezug in auf a, b geordnetes Polynom*

$$f(a, b) = \sum_{i,k} c_{ik}\, a^i\, b^k$$

verschwindet nur dann, wenn sämtliche $c_{ik} = 0$.

BEWEIS. Es sei

$$f(a, b) = 0.$$

Dann ist

$$f(a, b)\, a = 0$$

und somit nach 4a:

$$a f + \frac{\partial f}{\partial b} = 0,$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

So fortfahrend erhält man

$$\frac{\partial^k f}{\partial b^k} = 0$$

für jedes natürliche k. Werde nun angenommen, nicht sämtliche c_{ik} verschwinden. Dann gibt es einen maximalen Index K, für den nicht sämtliche c_{iK} gleich Null sind und $f(a, b)$ hat die Form

$$\varphi_K(a)\, b^K + \varphi_{K-1}(a)\, b^{K-1} + \cdots + \varphi_0(a),$$

wobei nicht sämtliche Koeffizienten von $\varphi_K(a)$ Null sind.

Bildet man nun

$$\frac{\partial^K f}{\partial b^K} = K!\, \varphi_K(a),$$

so folgt nach obigem

$$K!\,\varphi_K(a) = 0,$$

also wegen der Charakteristik Null auch $\varphi_K(a) = 0$. Nach Satz 3.4 verschwinden dann aber sämtliche Koeffizienten von $\varphi_K(a)$, womit der Widerspruch hergeleitet ist.

Wir betrachten jetzt den in SK enthaltenen Ring $\mathsf{K}[a, b]$, der vom rationalen Zahlkörper K und den a, b erzeugt wird.

Jedes Element dieses Ringes ist von der Form

$$\sum c_{i_1 k_1 \dots i_n k_n}\, a^{i_1} b^{k_1} \dots a^{i_n} b^{k_n},$$

wobei die $c_{i_1 k_1 \dots i_n k_n}$ rational. Man kann nun aber hierbei jedes Produkt ba ersetzen durch $ab+1$ und erhält dann schließlich ein *„geordnetes Polynom"*

$$f(a, b) = \sum_{i,k} c_{ik}\, a^i\, b^k.$$

Der Schiefring $\mathsf{K}[a, b]$ erschöpft sich also bereits in diesen geordneten Polynomen. Ferner gilt

SATZ 3.7. *Die Darstellung eines Elements aus* $\mathsf{K}[a, b]$ *als geordnetes Polynom in* a, b *ist eindeutig.*

BEWEIS. Seien für ein $f \in \mathsf{K}[a, b]$ die Darstellungen

$$f = \sum_{i,k} c_{ik}\, a^i\, b^k, \qquad f = \sum_{i,k} d_{ik}\, a^i\, b^k$$

gegeben. Dann folgt $\sum_{i,k} (c_{ik} - d_{ik})\, a^i b^k = 0$, also nach Satz 3.6 $c_{ik} - d_{ik} = 0$ stets.

Auf Grund dieser eindeutigen Darstellbarkeit kann man eine umkehrbar eindeutige Abbildung σ des Schiefrings $\mathsf{K}[a, b]$ auf den Schiefring $\mathsf{K}[x, y]$ definieren vermöge:

$$\sigma\Big(\sum_{i,k} c_{ik}\, a^i\, b^k\Big) = \sum_{i,k} c_{ik}\, x^i\, y^k.$$

Für σ gilt offenbar:

(A) $$\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g) \quad \text{für} \quad f, g \in \mathsf{K}[a, b],$$

(B) $$\sigma(\lambda f) = \lambda\, \sigma(f) \qquad \text{für} \quad f \in \mathsf{K}[a, b], \qquad \lambda \in \mathsf{K}.$$

Im folgenden beweisen wir noch:

(C) $$\sigma(f g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g).$$

Ist nämlich $f = \sum_{i,k} c_{ik} a^i b^k$, $g = \sum_{r,s} d_{rs} a^r b^s$, so gilt:

$$f g = \sum_{i,k,r,s} c_{ik}\, d_{rs}\, a^i\, b^k\, a^r\, b^s.$$

Hierin ersetze man gemäß 4c das ungeordnete Potenzprodukt $b^k a^r$ durch

$$\sum_\nu \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu(a^r)}{da^\nu} \frac{d^\nu(b^k)}{db^\nu}.$$

Nimmt man noch die Summation über ν vorweg, so kommt:

$$fg = \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \sum_{i,k,r,s} c_{ik} d_{rs} a^i \frac{d^\nu(a^r)}{da^\nu} \frac{d^\nu(b^k)}{db^\nu} b^s.$$

Nach (A) und (B) ist also

$$\begin{aligned}\sigma(fg) &= \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \sum_{i,k,r,s} c_{ik} d_{rs} x^i \frac{d^\nu(x^r)}{dx^\nu} \frac{d^\nu(y^k)}{dy^\nu} y^s \\ &= \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \left(\sum_{i,k} c_{ik} x^i \frac{d^\nu(y^k)}{dy^\nu}\right)\left(\sum_{r,s} d_{rs} \frac{d^\nu(x^r)}{dx^\nu} y^s\right) \\ &= \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^\nu f}{\partial y^\nu} \frac{\partial^\nu g}{\partial x^\nu} = \sigma(f) \cdot \sigma(g),\end{aligned}$$

was bewiesen werden sollte.

Im Schiefkörper SK ist also notwendig der zum Schiefring $\mathsf{K}[x, y]$ isomorphe Schiefring $\mathsf{K}[a, b]$ enthalten. Als Schiefkörper enthält SK weiterhin den Rechtsquotientenkörper von $\mathsf{K}[a, b]$, der durch $\mathsf{K}(a, b)$ bezeichnet werden soll. Aus der Isomorphie

$$\mathsf{K}[a, b] \cong \mathsf{K}[x, y]$$

folgt nun bekanntlich die Isomorphie der zugehörigen Rechtsquotientenkörper:

$$\mathsf{K}(a, b) \cong \mathsf{K}(x, y).$$

Damit ist gezeigt, daß jeder Schiefkörper SK mit den Eigenschaften 1., 2. einen zu $\mathsf{K}(x, y)$ isomorphen Schiefkörper enthält.

Bemerkungen. 1. Bei der Konstruktion von $\mathsf{K}(x, y)$ kann für K statt des rationalen Zahlkörpers auch jeder andere kommutative Körper der Charakteristik Null genommen werden.

2. Für diesen Fall gilt der Isomorphiesatz.

Ist SK irgendein Schiefkörper der Charakteristik Null, der Elemente a, b mit $ba - ab = 1$ enthält und dessen Zentrum den Körper K umfaßt, so besitzt er auch einen zu $\mathsf{K}(x, y)$ isomorphen Unterkörper. Hierfür kann man den Beweis von Satz 3.3 entsprechend gebrauchen. Lediglich die Folgerung 1. dieses Beweises entfällt.

3. Sei K der Körper der komplexen Zahlen und $\mathsf{K}[q, p]$ ein Ring der von Operatoren q, p mit $qp - qp = 1$ (bis auf Zahlenfaktor) erzeugt wird. Derartige Ringe treten bekanntlich in der Quantenmechanik auf. Jeder solche Ring ist offenbar zu $\mathsf{K}[x, y]$ isomorph und läßt sich in einen Körper einbetten.

Wir kehren nun zu unserer Ausgangsfrage nach den gemeinsamen Punkten von g und der C_2 zurück.

Es werde speziell die desarguessche Ebene über dem Schiefkörper $\mathsf{K}(a, b)$ gewählt, wobei K etwa der Körper der rationalen Zahlen und a, b Unbestimmte mit $ba - ab = 1$. Ferner wähle man $P(x_0, y_0) = P(a, a^{-1})$. Gl. (3.2) geht dann über in

$$za - az = 1.$$

Diese Gleichung wird durch $z = b$ befriedigt und allgemeiner durch $z = b + \varphi(a)$, wobei $\varphi(a)$ den Körper $\mathsf{K}(a)$ durchläuft. In der konstruierten desarguesschen Ebene haben also g und die C_2 unendlich viele gemeinsame Punkte.

Übrigens läßt sich auch beweisen, daß in $\mathsf{K}(a, b)$ die Lösung $z = b + \varphi(a)$ bereits die allgemeinste ist.

§ 4. Reguläre Punkte

Im folgenden soll ein Überblick über sämtliche Projektivitäten gegeben werden, die eine gegebene C_2 erzeugen.

Es sei $\mathfrak{p}$ eine solche. Die Träger der zugehörigen Büschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{p}(\mathfrak{B})$ seien P, P'.

Nach §2 liegt P notwendig auf der C_2. Ferner schneidet jede Gerade durch P die C_2 genau zweimal, ausgenommen eine einzige Gerade durch P.

DEFINITION. Ein C_2-Punkt heiße *regulär*, wenn jede Gerade durch P mit der C_2 genau 2 Punkte gemeinsam hat mit Ausnahme einer einzigen Geraden durch P.

Die Träger P, P' sind also notwendig regulär. Im folgenden soll gezeigt werden, daß umgekehrt je zwei reguläre Punkte Träger zweier erzeugender projektiver Büschel sind.

SATZ 4.1. *Ist die C_2 durch $xy = 1$ dargestellt, so ist ein eigentlicher Punkt $A(a, a^{-1})$ genau dann regulär, wenn a im Zentrum des Koordinatenkörpers liegt. Ferner sind die beiden uneigentlichen Punkte der C_2 regulär.*

BEWEIS. Die uneigentlichen Punkte der C_2 können nach §2 als Träger P, P' verwendet werden und sind deshalb regulär.

Sei nun $A(a, a^{-1})$ ein eigentlicher und regulärer C_2-Punkt. Dann ist die Gerade

$$t: \quad y - a^{-1} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

notwendig die in der Definition genannte Ausnahmegerade. Andernfalls hätte sie nämlich außer A noch genau einen Punkt $X(x, x^{-1}) \neq A$ mit der C_2 gemeinsam. Nach Satz 3.1 wäre dann das Element $z = (x - a)^{-1}$ Lösung der Gleichung

$$za - az = 1.$$

Dann wäre aber auch $z + 1$ eine Lösung und es gäbe dann mindestens 3 verschiedene gemeinsame Punkte von t und der C_2. Widerspruch!

Demnach liegen auf jeder Geraden

$$y - a^{-1} = m(x - a)$$

genau 2 C_2-Punkte, wenn $m \neq -1/a^2$. Nach Satz 3.1 besitzt also die Gleichung

$$a z + z(a m)^{-1} + 1 = 0$$

für $m \neq -1/a^2$, $\neq 0$ genau eine Lösung z, die homogene Gleichung

$$a z + z(a m)^{-1} = 0$$

folglich nur die Lösung $z = 0$. Setzt man $\gamma = -(am)^{-1}$, so ist $m \neq -\frac{1}{a^2}$, $\neq 0$ gleichbedeutend mit $\gamma \neq a$, $\neq 0$ und wir können sagen:

Ist $\gamma \neq 0$ ein beliebiges von a verschiedenes Element, so gibt es kein z so, daß

$$\gamma = z^{-1} a z.$$

Die Konjugierten $z^{-1} a z$ sind somit sämtlich gleich a, d.h. a ist aus dem Zentrum des Koordinatenkörpers.

Gehört umgekehrt a zum Zentrum, so ist $A(a, a^{-1})$ regulärer C_2-Punkt, wie leicht nachzurechnen.

Satz 4.2. *Durch je zwei reguläre Punkte A, B einer C_2 kann man projektive Büschel $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}' = \mathfrak{q}(\mathfrak{C})$ legen, die die C_2 erzeugen.*

Beweis. Wie in § 2 werde die C_2 durch eine Projektivität $\mathfrak{B}' = \mathfrak{p}(\mathfrak{B})$ erzeugt. Die Träger P, P' von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ mögen die Vektoren (0, 1, 0), (0, 0, 1) haben, die übrigen C_2-Punkte der Gleichung $xy = 1$ genügen.

a) Sind A, B beide eigentlich und durch (a, a^{-1}) bzw. (b, b^{-1}) dargestellt, so unterwerfe man die C_2 der Kollineation

$$\begin{aligned} x_0' &= (a + b)\, x_0 + a\, x_1 + b\, x_2 \\ x_1' &= 2ab\, x_0 + a^2 x_1 + b^2 x_2 \\ x_2' &= 2 x_0 + x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Sie führt offenbar die Punkte P, P' in A, B über. Ferner läßt sie die C_2 als ganzes fest. Bei dem einfachen rechnerischen Nachweis beachte man, daß nach Satz 4.1 die a, b aus dem Zentrum sind und daher zusammen mit jedem x $(= x_1 x_0^{-1})$ einen kommutativen Unterkörper erzeugen. Wegen dieser beiden Abbildungseigenschaften gehen die projektiven Büschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{p}(\mathfrak{B})$ in zwei projektive Büschel $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{q}(\mathfrak{C})$ über, die den Anforderungen unseres Satzes entsprechen.

b) Ist genau einer der A, B uneigentlich, etwa $A = P$, so ersetze man obige Transformation durch die folgende:

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 + b\, x_2 \\ x_1' &= 2b\, x_0 + x_1 + b^2 x_2 \\ x_2' &= x_2. \end{aligned}$$

§ 5. Verallgemeinerungen von Kegelschnittsätzen

Hierfür behandeln wir zuerst eine spezielle Erzeugung der C_2. In bezug auf 3 fest gewählte, nicht kollineare Punkte P_0, P_1, P_2 einer desarguesschen Ebene werde eine Zuordnung

$$Punkt \to Gerade$$

wie folgt definiert:

Ist X ein Urpunkt, der auf keiner Seite $P_i P_k$ liegt, so konstruiere man die Verbindungen $X P_i$ sowie die Schnittpunkte

$$Q_i = X P_i \cap P_j P_k \quad (i, j, k \text{ paarweise verschieden}).$$

$P_0 P_1 P_2$ und $Q_0 Q_1 Q_2$ sind dann perspektive Dreiecke mit X als Zentrum. Nach dem desarguesschen Satz liegen also die 3 Schnittpunkte

$$S_i = P_j P_k \cap Q_l Q_k$$

auf einer Geraden u. Diese definieren wir als Bild von X:

$$u = u(X).$$

Soll die Abhängigkeit von den Grundpunkten P_i hervorgehoben werden, so schreiben wir

$$u = u(P_i, X).$$

Wählt man die P_i als Grundpunkte eines Bezugssystems, so wird die Zuordnung durch

$$u_i = 1/x_i$$

dargestellt, wie leicht nachzurechnen. Hiernach tritt jede nicht durch einen der P_i gehende Gerade u genau einmal als Bild auf, und man kann daher für die Menge dieser Geraden die Umkehrabbildung

$$X = X(u)$$

definieren, für die dann also gilt

$$x_i = 1/u_i.$$

Die Abbildung $X = X(u)$ soll nun auf ein Geradenbüschel $\mathfrak{B}$ mit dem Träger $T(t_i)$, der auf keiner $P_i P_k$ liege, angewendet werden.

Hierbei sind zunächst die Verbindungsgeraden $T P_i$ auszuschließen. Für das Bild $X(u)$ jeder anderen Geraden u durch T folgt aus $\sum_{i=0}^{2} u_i t_i = 0$ und $u_i = 1/x_i$:

$$x_0^{-1} t_0 + x_1^{-1} t_1 + x_2^{-1} t_2 = 0. \tag{5.1}$$

Nachträglich erweitern wir nun die Abbildung $X = X(u)$ auf solche Geraden, die mit genau einem P_i inzidieren, und zwar soll für ein solches u sein $X(u) = P_i$.

Dann besteht das Abbild des Geradenbüschels durch T aus den Lösungen von (5.1) sowie aus den P_i. Wählt man T als Einheitspunkt, so vereinfacht sich (5.1) zu

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0. \tag{5.2}$$

Diese Gleichung läßt sich homogenisieren durch Verwendung *„halbkommutativer"* Tripel (x_0, x_1, x_2), worunter ein solches Tripel verstanden werden soll, bei dem von den Gleichungen

$$x_0 x_1 = x_1 x_0, \qquad x_1 x_2 = x_2 x_1, \qquad x_2 x_0 = x_0 x_2$$

wenigstens 2 richtig sind.

Zunächst kann man nämlich für jeden Punkt $X(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ ein solches halbkommutatives Tripel angeben, z. B. im Falle $\xi_0 \neq 0$ das Tripel $(1, \xi_1 \xi_0^{-1}, \xi_2 \xi_0^{-1})$. Sei nun (x_0, x_1, x_2) eine halbkommutative Lösung von (5.2). Dann ist (x_0, x_1, x_2) sogar *„kommutativ"*, das soll heißen: $x_i x_k = x_k x_i$ stets. Denn ist z. B. x_0 mit den übrigen x_i vertauschbar, so folgt aus

$$\frac{1}{x_2} = -\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1}\right),$$

daß auch $x_1 x_2 = x_2 x_1$. Man kann daher (5.2) wie gewöhnlich mit $x_0 x_1 x_2$ erweitern und erhält:

$$x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = 0. \tag{5.3}$$

In dieser Gleichung sind nun auch die P_0, P_1, P_2 als Lösungen enthalten. Ist umgekehrt eine kommutative Lösung dieser Gleichung gegeben, so stellt sie entweder einen der P_i oder eine Lösung von (5.2) dar. Im ganzen hat man also

SATZ 5.1. *Das Abbild $X(\mathfrak{B})$ des Büschels $\mathfrak{B}$ mit dem Träger $T(1, 1, 1)$ wird dargestellt durch die kommutativen Lösungen von* (5.3).

Hieraus gewinnt man leicht

SATZ 5.2. *Das Abbild $X(\mathfrak{B})$ ist eine C_2, für die die P_i reguläre Punkte sind.*

BEWEIS. Übt man auf die Gl. (5.3) die Transformation

$$x_0 = z_0, \qquad x_1 = z_1 - z_0, \qquad x_2 = z_2 - z_0$$

aus, so geht sie in

$$z_1 z_2 = z_0^2 \tag{5.4}$$

über, und hierin sind die z_i kommutativ. Ist $z_0 \neq 0$, so folgt $(z_1 z_0^{-1})(z_2 z_0^{-1}) = 1$ oder kürzer $xy = 1$. Umgekehrt entspricht jedem Punkte $P(1, x, y)$ mit $xy = 1$ eine kommutative Lösung z_i von (5.4), beispielsweise $z_0 = 1$, $z_1 = x$, $z_2 = y$.

Für $z_0=0$ ergibt (5.4) die Punkte mit den z_i-Tripeln (0, 1, 0), (0, 0, 1). Die kommutativen Lösungen von (5.3) stellen also tatsächlich eine C_2 dar.

Es bleibt lediglich die Regularität der P_i nachzuweisen. Wegen der Gleichberechtigung der P_i kann man sich auf $i=1$ beschränken. $P_1(0, 1, 0)$ hat in den z_i-Koordinaten ebenfalls den Vektor (0, 1, 0), ist daher identisch mit dem Trägerpunkt P von $z_1 z_2 = z_0^2$ und als solcher regulär.

Im folgenden bezeichne $C_2(P_i, T)$ diejenige C_2, die vermöge der Abbildung

$$X = X(P_i, u)$$

aus dem Büschel mit dem Träger T hervorgeht.

SATZ 5.3. *Sind P_i irgend drei nicht kollineare Punkte, so kann man zu jeder C_2, die die P_i als reguläre Punkte enthält, ein T finden so, daß*

$$C_2 = C_2(P_i, T).$$

BEWEIS. Durch die regulären Punkte P_1, P_2 kann man nach Satz 4.2 projektive Büschel $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' = \mathfrak{p}(\mathfrak{B})$ legen, die die C_2 erzeugen. Wählt man wie in §2 ein projektives Bezugssystem (z_i) mit den Grundpunkten $E_1 = P_1$, $E_2 = P_2$, $E_0 = \mathfrak{p}(P_1 P_2) \cap \mathfrak{p}^{-1}(P_1 P_2)$, so bekommt die C_2 bei geeigneter Wahl des Einheitspunktes die Gleichung

$$(z_1' z_0'^{-1})(z_2' z_0'^{-1}) = 1.$$

Hat P_0 in den z_i' den Vektor $(1, a, a^{-1})$, so übe man noch die Transformation

$$z_0 = z_0', \qquad z_1 = a^{-1} z_1', \qquad z_2 = a z_2'$$

aus. Hierdurch wird P_0 zum Einheitspunkt, andererseits ändert sich die Form der C_2-Gleichung nicht, da wegen der Regularität von P_0 das Element a aus dem Zentrum des Koordinatenkörpers ist. Wählt man in $(z_1 z_0^{-1})(z_2 z_0^{-1})$ die z_i kommutativ, so kann man die C_2 durch $z_1 z_2 = z_0^2$ darstellen, wobei dann auch die Punkte P_0, P_1 inbegriffen sind.

Durch die Transformation:

$$x_0 = z_0, \qquad x_1 = z_1 - z_0, \qquad x_2 = z_2 - z_0$$

geht die letze Gleichung über in

$$x_0 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_0 = 0$$

und diese stellt das Abbild $X(\mathfrak{B})$ des Geradenbüschels durch (1, 1, 1) dar. Die Grundpunkte der Zuordnung $X = X(u)$ sind dabei die Punkte mit den x_i-Koordinaten (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), also gemäß der Transformationsgleichungen die Punkte P_i, q.e.d.

Der Punkt T ist nach Vorgabe der P_i eindeutig durch die C_2 bestimmt. Dies ist eine Folge von

SATZ 5.4. *Die Tangente des Kegelschnitts $C_2(P_i, T)$ im Punkte P_i ist die 4. harmonische Gerade zu*

$$P_i P_j, \quad P_i P_k, \quad P_i T.$$

BEWEIS. Wegen der Gleichberechtigung der P_i kann $i=1$ angenommen werden. Die x_i- bzw. z_i-Koordinaten seien wie im Beweis von Satz 5.2 gewählt. Dann hat t_1 nach §2 die Gleichung $z_2=0$ oder wegen der Transformationsgleichungen:

$$x_2 + x_0 = 0.$$

Ferner gelten die Darstellungen:

$$P_1T\colon\ x_2 - x_0 = 0, \qquad P_1P_2\colon\ x_0 = 0, \qquad P_1P_0\colon\ x_2 = 0.$$

Aus diesen 4 Gleichungen folgt die Behauptung.

Man sieht jetzt auch die Einzigkeit des Punktes T mit $C_2=C_2(P_i, T)$ ein: Die C_2 bestimmt nämlich eindeutig die Tangente t_i in P_i und diese wiederum die Gerade $s_i=P_iT$ $(i=0, 1, 2)$. Da die s_i paarweise verschieden sind, bestimmen je 2 davon T eindeutig als ihren Schnittpunkt.

Die angegebene Erzeugungsweise einer C_2 gibt also einen völligen Überblick über die Gesamtheit derjenigen Kegelschnitte, für die 3 vorgegebene nicht kollineare Punkte P_i reguläre Punkte sind: Diese C_2 lassen sich vermöge $C_2=C_2(P_i, T)$ umkehrbar eindeutig den Punkten T zuordnen, die keiner Seite P_iP_k angehören.

Darüber hinaus gestattet sie eine einfache Übertragung bekannter Kegelschnittsätze.

SATZ 5.5. *Sind P_i $(i=0, 1, 2)$ reguläre Punkte einer C_2, t_i die zugehörigen Tangenten, so gehen die drei Geraden*

$$P_i(t_j \cap t_k)$$

durch einen Punkt, und zwar durch den Punkt T, für den $C_2=C_2(P_i, T)$ gilt.

Zum Beweise braucht man nur nachzurechnen, daß $P_i(t_j \cap t_k)$ mit P_iT zusammenfällt.

BEMERKUNG. Zufolge Satz 5.4 und der Identität $P_iT=P_i(t_j \cap t_k)$ kann man die Tangente t_i in P_i aus P_j, P_k sowie den zugehörigen Tangenten t_j, t_k konstruieren, und zwar als 4. harmonische Gerade zu P_iP_j, P_iP_k, $P_i(t_j \cap t_k)$. Dies wird uns in §6 zu einer Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs führen.

SATZ 5.6. *Es seien je 3 der Punkte P_0, P_1, P_2, X_0 nicht kollinear. Die Gesamtheit der C_2, die durch diese 4 Punkte gehen und für die die P_i reguläre Punkte sind, erhält man in der Form $C_2(P_i, T)$, wenn T die Gerade $u_0=u(X_0)$ durchläuft, ausgenommen deren Schnittpunkte mit den Seiten P_iP_k.*

BEWEIS. Weil die P_i regulär sein sollen, ist nach Satz 5.3 jeder derartige Kegelschnitt vom Typ $C_2(P_i, T)$. Ferner gibt es durch den gesuchten Punkt T eine Gerade u_0 mit $X_0=X(u_0)$, d.h. T liegt auf $u_0=u(X_0)$. Ebenfalls nach Satz 5.3 gehört T keiner Seite P_iP_k an. Umgekehrt sind diese beiden Bedingungen für T offenbar auch hinreichend dafür, daß die C_2 den gestellten Forderungen genügt.

FOLGERUNGEN. 1. Sind die Punkte P_0, P_1, P_2, X_0, X_1 zu je dreien nicht kollinear, so gibt es genau eine C_2 durch diese 5 Punkte, für die die P_i regulär sind.

Zweimalige Anwendung von Satz 5.6 liefert den Kegelschnitt

$$C_2(P_i, u(X_0) \cap u(X_1))$$

als einzige Lösung.

2. Die Punkte P_0, P_1, P_2, X_0 seien zu je dreien unabhängig und die Gerade t_0 gehe durch P_0, jedoch durch keinen anderen Punkt des gegebenen Quadrupels. Dann gibt es genau eine C_2 durch diese 4 Punkte, die die P_i als reguläre Punkte und t_0 als Tangente in P_0 hat.

Nach den Sätzen 5.3, 5.4, 5.6 erweist sich

$$C_2(P_i, s_0 \cap u(X_0))$$

mit

$$DV(P_0P_1, P_0P_2, t_0, s_0) = -1$$

als der einzige derartige Kegelschnitt.

3. Es seien P_0, P_1, P_2 nicht kollineare Punkte, t_1, t_2 Geraden durch P_1, P_2, die nicht mit einer P_iP_k zusammenfallen. Dann gibt es genau eine C_2, die die P_i als reguläre Punkte, die t_1, t_2 als Tangenten in P_1, P_2 besitzt, und zwar ist dies nach den Sätzen 5.3, 5.4 der Kegelschnitt

$$C_2(P_i, s_1 \cap s_2).$$

s_i $(i=1, 2)$ ist hierbei nach Satz 5.3 durch $DV(P_iP_j, P_iP_k, t_i, s_i) = -1$ bestimmt.

Bisher wurde stets verlangt, daß 3 Punkte für die C_2 regulär werden sollen. Auch die Forderung, daß 4 vorgegebene Punkte zu regulären C_2-Punkten werden, ist erfüllbar, jedoch ist dann das 5. Bestimmungsstück nicht mehr frei wählbar. Um die diesbezüglichen Sätze bequem formulieren zu können, geben wir zuerst die

DEFINITION. P heißt *Zentrumspunkt* in bezug auf ein nicht entartetes Quadrupel E_i, E, wenn er in einem Bezugssystem mit den Grundpunkten E_i und dem Einheitspunkt E wenigstens einen Vektor (x_0, x_1, x_2) besitzt, dessen sämtliche x_i aus dem Zentrum des Koordinatenkörpers sind.

Diese Definition wird folgendermaßen gerechtfertigt:

Es seien $S(x_i)$, $S'(x_i')$ zwei Koordinatensysteme mit denselben Grundpunkten E_i und demselben Einheitspunkt E. Hat ein Punkt P in S den Vektor (x_0, x_1, x_2), so ist $(x_0', x_1', x_2') = (x_0^\varphi, x_1^\varphi, x_2^\varphi)$ ein solcher in bezug auf S', wobei φ ein durch S, S' bestimmter Automorphismus des Koordinatenkörpers ist. Dieser führt aber bekanntlich das Zentrum in sich über, so daß mit den x_i auch die x_i' darin liegen.

HILFSSATZ. *Ist E' in bezug auf E_i, E Zentrumspunkt und mit keiner Seite E_iE_k inzident, so ist auch E in bezug auf E_i, E' ein solcher.*

BEWEIS. In einem System $S(E_i, E)$ habe E' den Vektor (e_0, e_1, e_2) mit e_i aus dem Zentrum. Dann kann man ein Koordinatensystem $S'(E_i, E')$ angeben, in dem E den Vektor $1/e_i$ besitzt.

SATZ 5.7. *Die Punkte P_0, P_1, P_2, X_0 mögen ein nicht entartetes Quadrupel bilden. Die Gesamtheit der C_2, die diese Punkte zu regulären Punkten haben, sind die $C_2(P_i, T)$, bei denen*

1. *T inzident ist mit $u(X_0) = u_0$.*
2. *T Zentrumspunkt in bezug auf das Quadrupel P_i, X_0.*
3. *$T \neq u_0 \cap P_i P_k$.*

BEWEIS. Ist C_2 ein derartiger Kegelschnitt, so gehört er nach den Sätzen 5.2, 5.5 zu den $C_2(P_i, T)$, deren T die Eigenschaften 1., 2. hat. Da ferner X_0 regulärer Punkt ist, besitzt er in einem System $S(P_i, T)$ einen Vektor $(1, x, y)$, dessen x, y aus dem Zentrum sind, wie aus Satz 4.1 leicht zu folgern. P ist also in bezug auf das Quadrupel P_i, T Zentrumspunkt. Gemäß dem Hilfssatz ist dann auch T in bezug auf P_i, X_0 Zentrumspunkt.

Hat umgekehrt T die Eigenschaften 1. bis 3., so ist $C_2(P_i, T)$ offenbar von der verlangten Art.

Stellt man außer den Forderungen des letzten Satzes noch die weitere, daß der Kegelschnitt durch einen 5. Punkt X_1 gehe, so ist diese genau dann erfüllbar, wenn

$$u(X_0) \cap u(X_1)$$

in bezug auf $P_i X_0$ ein Zentrumspunkt ist.

Schließlich kann man sich noch davon überzeugen, daß sämtliche 5 Punkte genau dann regulär werden, wenn X_1 in bezug auf die übrigen 4 Punkte ein Zentrumspunkt ist.

5 Punkte P_0, P_1, P_2, X_0, X_1 ,von denen die P_i regulär sind, bestimmen nach Vorhergehendem die C_2 eindeutig. Ein 6. Punkt $X_2 \in C_2$ ist also von den ersteren nicht unabhängig, und zwar hat Satz. 5.6 zur Folge

SATZ 5.8. *Durch 6 Punkte P_i, X_i $(i = 0, 1, 2)$ in allgemeiner Lage geht genau dann eine C_2, die die P_i zu regulären Punkten hat, wenn die Geraden*

$$u(X_i) \quad (i = 0, 1, 2)$$

durch einen Punkt gehen.

Ein Kriterium dieser Art ist auch die folgende Verallgemeinerung des *Pascalschen Satzes.*

SATZ 5.9. *Ist einer C_2 ein Sechseck $P_0 X_1 P_2 X_0 P_1 X_2$ einbeschrieben, bei dem die P_i regulär sind, so liegen die 3 Schnittpunkte*

$$S_i = P_j X_k \cap P_j X_k$$

auf einer Geraden.

BEWEIS. Man wähle die P_i als Grundpunkte, T als Einheitspunkt eines Bezugssystems. X_k werde durch (x_0^k, x_1^k, x_2^k) dargestellt.

S_0 hat dann als Punkt von $P_1 X_2$ einen Vektor von der Form (dabei x/y als Abkürzung für xy^{-1})

$$(0, 1, 0) + (1, x_1^2/x_0^2, x_2^2/x_0^2)$$

und als Punkt von $P_2 X_1$ einen Vektor der Gestalt

$$(0, 0, 1) + (1, x_1^1/x_0^1, x_2^1/x_0^1).$$

Wegen der Gleichheit der nullten Komponente stimmen diese Vektoren überein. Dem ersten entnehme man die letzte Komponente, dem zweiten die mittlere. Dies ergibt die Darstellung

$$S_0\colon (x_0^0/x_0^0,\ x_1^1/x_0^1,\ x_2^2/x_0^2).$$

Durch zyklische Vertauschung folgt:

$$S_1\colon (x_0^0/x_1^0,\ x_1^1/x_1^1,\ x_2^2/x_1^2)$$
$$S_2\colon (x_0^0/x_2^0,\ x_1^1/x_2^1,\ x_2^2/x_2^2).$$

Die k-te Spaltensumme ist also:

$$\sum_{i=0}^{2} x_k^k \frac{1}{x_i^k} = x_k^k \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{x_i^k}.$$

Hierin ist $\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{x_i^k} = 0$ für $k = 0, 1, 2$, weil die Punkte X^k zur C_2: $\sum_{i=0}^{2} \frac{1}{x_i} = 0$ gehören. Das Tripel S_i ist also kollinear. Umgekehrt ist diese Bedingung offenbar auch hinreichend dafür, daß die 6 Punkte P_i, X_i in allgemeiner Lage einer C_2 angehören, die die P_i zu regulären Punkten hat.

Einen synthetischen Beweis, der von der *Segreschen* Definition der C_2 ausgeht, findet man in [*11*].

§ 6. Dualisierung

Vertauscht man in den Axiomen der desarguesschen Ebene die Begriffe Punkt und Gerade miteinander und behält die Inzidenzrelation bei, so entstehen lauter Aussagen, die auf Grund der gegebenen Axiome richtig sind. Daher geht auch jeder aus den Axiomen gefolgerte Satz in einen ebenfalls gültigen Satz über, wenn man ihn in der angegebenen Weise dualisiert. Dieser Dualisierung sind natürlich auch solche Begriffe zu unterwerfen, die aus den gegebenen Axiomen heraus definiert worden sind.

Speziell ergibt sich als duales Gegenstück einer C_2 eine Geradenmannigfaltigkeit, die das Erzeugnis zweier projektiver Punktreihen ist. Für sie gelten die vorangehenden Sätze in dualer Form. Es bleibt jedoch die Frage offen, ob wie in der gewöhnlichen Ebene jede C^2 die Tangentenmannigfaltigkeit einer

C_2 ist und dual jede C_2 die Gesamtheit der „*Berührungspunkte*" einer C^2, wobei „*Berührungspunkt*" die Dualisierung von „*Tangente*" bedeutet.

Wir werden zeigen, daß dies in allen desarguesschen Ebenen mit von 2 verschiedener Charakteristik bei geeigneter Definition des Tangentenbegriffs zutrifft.

1. Verallgemeinerung des Tangentenbegriffs

Sind P_i 3 reguläre Punkte einer C_2, t_1, t_2 die Tangente in P_1, P_2, so kann man nach den Sätzen 5.3, 5.4 die Tangente t_0 in P_0 als 4. harmonische Gerade zu P_0P_1, P_0P_2, $P_0(t_1 \cap t_2)$ erhalten. Diese Konstruktion ist auch dann noch möglich, wenn man an die Stelle des regulären Punktes P_0 irgendeinen anderen, nicht notwendig regulären C_2-Punkt $X \neq P_1, P_2$ treten läßt. Es ist daher naheliegend folgende

DEFINITION. Ist X irgendein C_2-Produkt, so werde unter der Tangente t in X diejenige Gerade t mit

$$DV(XP_1, XP_2, X(t_1 \cap t_2), t) = -1$$

verstanden. P_1, P_2 bedeuten dabei irgend 2 reguläre C_2-Punkte $\neq X$, t_1, t_2 die zugehörigen Tangenten.

Die Definition ist aus folgenden Gründen sinnvoll:

1. Im Falle eines regulären Punktes X ist die neue mit der alten Definition im Einklang.

2. Die Tangente t in X ist unabhängig von der Wahl der regulären Hilfspunkte P_1, P_2.

BEWEIS. Sei $t_{P_1P_2}$ die Tangente in X, die unter Zuhilfenahme der regulären Punkte P_1, P_2 herauskommt. P_0 bezeichne irgendeinen weiteren regulären Punkt der C_2. Diese P_i mache man zu Grundpunkten eines Bezugssystems und wähle den Einheitspunkt so, daß die C_2 die Gleichung

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 0$$

bekommt. Wählt man nun die Koordinaten x_i von X kommutativ, so hat die Tangente $t_{P_1P_2}$ die Geradenkoordinaten

$$u_i = x_j + x_k,$$

was man ohne Schwierigkeit nachrechnet.

Da diese Gleichungen bei einer zyklischen Vertauschung der Indizes nur ihre Rollen wechseln, würde man zu denselben u_i gelangen, wenn man statt der P_1, P_2 die Punkte P_2, P_0 zur Konstruktion von t zu Hilfe genommen hätte. Also

$$t_{P_1P_2} = t_{P_2P_0}.$$

Sind nun A, B und C, D irgend zwei Paare regulärer Punkte, so ergibt zweimalige Anwendung der letzten Gleichung

$$t_{AB} = t_{BC} = t_{CD},$$

also $t_{AB} = t_{CD}$, q.e.d.

BEMERKUNG. Hat der Koordinatenkörper die Charakteristik 2, so fällt die Tangente t in X mit $X(t_1 \cap t_2)$ zusammen. Die sämtlichen Tangenten der C_2 gehen dann also durch $t_1 \cap t_2$, bilden also sicher keine nicht entartete C^2. Aus diesem Grund werde im folgenden die Charakteristik $\neq 2$ vorausgesetzt.

2. Zusammenhang zwischen C_2 und C^2

Es werde jedem Punkt P einer gegebenen C_2 seine Tangente t zugeordnet:

$$t = \tau(P).$$

Wird die C_2 durch

$$2x_1x_2 = x_0^2 \tag{1}$$

mit kommutativen x_i dargestellt, so findet man für $\tau(P)$ die Geradenkoordinaten

$$u_0 = x_0, \qquad u_1 = -x_2, \qquad u_2 = -x_1^{1}). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$2u_1u_2 = u_0^2 \tag{3}$$

mit kommutativen u_i. Es gilt also

SATZ 6.1. *In jeder desarguesschen Ebene mit von 2 verschiedener Charakteristik bilden die Tangenten einer C_2 eine C^2.*

Letztere werde durch $T(C_2)$ bezeichnet.

Dual kann man jeder Geraden t einer C^2 einen Berührungspunkt zuordnen, indem man die Tangentendefinition dualisiert:

$$P = \pi(t).$$

Die Gesamtheit dieser Berührungspunkte bilden gemäß der dualen Fassung des letzten Satzes eine C_2. Diese werde durch $B(C^2)$ bezeichnet.

Für die Zuordnungen τ, π soll noch bewiesen werden:

Ist P ein beliebiger Punkt einer C_2, so gilt

$$\pi(\tau(P)) = P.$$

Wird die C_2 wieder durch $2x_1x_2 = x_0^2$ dargestellt, so ist $\tau(P)$ durch (2) bestimmt. Ferner hat dann die beigeordnete C^2 die Gleichung $2u_1u_2 = u_0^2$ (in

[1]) Geht man von den kommutativen x_i zu ebenfalls kommutativen $x_i \cdot r$ über, so bekommen zwar auch die u_i den Rechtsfaktor r, doch gilt im Falle $x_k \neq 0$: $u_i' = u_i \cdot r = r' u_i$ mit $r' = x_k r x_k^{-1}$.

kommutativen u_i) und somit die zu τ duale Zuordnung die Darstellung

$$x_0 = u_0, \qquad x_1 = -u_2, \qquad x_2 = -u_1. \tag{2'}$$

Die Hintereinanderschaltung der Transformationen (2) und (2') ergibt die Identität, also $\pi(\tau(P)) = P$, q.e.d.

Entsprechend gilt für die Tangenten t einer C^2:

$$\tau(\pi(t)) = t.$$

Diese Reziprozität überträgt sich auf die Zuordnungen B, T:

$$C_2 = B(T(C_2)), \qquad C^2 = B(H(C^2)).$$

Satz 6.1 läßt sich daher ergänzen: Jede C^2 kommt als Tangentenmannigfaltigkeit genau einer C_2 vor. In der Tat ist wegen

$$C^2 = T(B(C^2))$$

die gegebene C^2 die Tangentenmannigfaltigkeit von $B(C^2)$ und dies ist auch die einzige Kurve 2. Ordnung mit der Eigenschaft

$$C^2 = T(C_2),$$

denn hieraus folgt durch Anwendung von B notwendig: $C_2 = B(C^2)$. Durch $C^2 = T(C_2)$ wird also eine umkehrbar eindeutige Entsprechung zwischen den C_2 und den C^2 hergestellt. Für zwei einander entsprechende Gebilde gilt dabei auch $C_2 = B(C^2)$, wie sich durch Anwendung von B ergibt.

Für die Zuordnung $t = \tau(P)$ beweisen wir noch

Satz 6.2. *Den regulären Punkten einer C_2 sind durch*

$$t = \tau(P)$$

umkehrbar eindeutig die regulären Geraden von $C^2 = T(C_2)$ zugeordnet.

„Reguläre Gerade einer C^2" ist dabei die Dualisierung von *„Regulärer Punkt einer C_2"*.

Beweis. Ist P ein regulärer Punkt von

$$C_2\colon\ 2x_1x_2 = x_0^2$$

mit $x_0 \neq 0$, so sind $x = x_1x_0^{-1}$, $y = x_2x_0^{-1}$ nach Satz 4.1 aus dem Zentrum. In den Zuordnungsgleichungen

$$u_0 = x_0, \qquad u_1 = -x_2, \qquad u_2 = -x_1$$

für $\tau(P)$ kann man daher als kommutativen Vektor (x_i) sicher $(1, x, y)$ wählen und bekommt dann für $\tau(P)$ die inhomogenen Koordinaten

$$u_0^{-1}u_1 = -y, \qquad u_0^{-1}u_2 = -x,$$

die somit aus dem Zentrum sind. Daher ist $\tau(P)$ regulär. Ferner gehen die regulären Punkte mit $x_0=0$ in die ebenfalls regulären Geraden mit $u_0=0$ über. Mit P ist also stets auch $\tau(P)$ regulär. In umgekehrter Richtung schließt man entsprechend.

FOLGERUNG. Sind t, t' die Tangenten zweier regulärer C_2-Punkte, so schneiden die übrigen Tangenten die t, t' in den Punktepaaren X, X' einer Projektivität.

Nach Satz 6.2 sind nämlich t, t' reguläre Geraden von $T(C_2)$. Sie tragen daher zufolge der Dualisierung von Satz 4.2 projektive Punktreihen

$$X' = \mathfrak{p}(X),$$

deren Erzeugnis die $T(C_2)$ ist. Jede Tangente ist daher identisch mit einer Verbindungsgeraden XX'.

§ 7. Steinersche und Staudtsche C_2

Es sei ϑ eine desarguessche Ebene, deren Koordinatenkörper einen involutorischen Antiautomorphismus φ besitzt:

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y), \qquad \varphi(xy)=\varphi(y)\,\varphi(x), \qquad \varphi^2=1.$$

Dann kann man in ϑ jedem Punkt X *(Pol)* eine Gerade $u=p(X)$ *(Polare)* zuordnen vermöge einer Transformation

$$u_k=\sum_i x_i^{\varphi}\, a_{ik} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{u}=\mathfrak{x}^{\varphi}\,\mathfrak{A}, \tag{1}$$

deren $\mathfrak{A}$ den Spaltenrechtsrang 3 und die Eigenschaft

$$a_{ik}^{\varphi}=a_{ki} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{A}^{\varphi}=\mathfrak{A} \tag{2}$$

hat (vgl. BIRKHOFF und v. NEUMANN [3]).

Es ist dann offenbar jede Gerade die Polare genau eines Punktes und es sind die Inzidenzen

$$A \mathrel{I} p(B), \qquad B \mathrel{I} p(A)$$

für jedes Punktepaar A, B gleichbedeutend.

Ist umgekehrt in einer desarguesschen Ebene ϑ' eine Zuordnung $u=p(X)$ mit diesen beiden Eigenschaften gegeben, so existiert in ihrem Koordinatenkörper ein involutorischer Antiautomorphismus, mit dem man $u=p(X)$ in der Form (1) darstellen kann (s. BAER [1], LENZ [6]).

Es ist nun naheliegend, die Menge der bezüglich einer solchen „*Polarität*" selbstkonjugierten Punkte $X(\mathfrak{x})$ mit

$$X \mathrel{I} p(X) \quad \text{oder} \quad \sum_{i,k} x_i^{\varphi}\, a_{ik}\, x_k = 0$$

als Verallgemeinerung des Staudtschen Kegelschnitts anzusehen (vgl. KANNENBERG [4]).

Wir wollen die Frage untersuchen, wann eine solche Staudtsche C_2' mit einer Steinerschen zusammenfallen kann.

HILFSSATZ. *Ist $P(\mathfrak{x})$ ein Punkt auf der Staudtschen*

$$C_2'\colon \sum_{i,k} x_i^{\varphi}\, a_{ik}\, x_k = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}^{\varphi}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = 0, \tag{3}$$

so hat die Gerade t mit dem Vektor

$$t_k = \sum_i x_i^{\varphi}\, a_{ik} \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{t} = \mathfrak{x}^{\varphi}\,\mathfrak{A} \tag{4}$$

nur den Punkt $P(\mathfrak{x})$ mit der C_2' gemeinsam.

BEWEIS. Aus (3), (4) folgt $\mathfrak{t}\mathfrak{x}=0$, also $P \mathrel{I} t$.

Es sei weiter $Q(\mathfrak{y})$ ein Punkt auf t und $\notin C_2$:

$$\mathfrak{x}^{\varphi}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y} = 0, \qquad \mathfrak{y}^{\varphi}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{y} \neq 0. \tag{5}$$

Ein solcher existiert, weil $\mathfrak{A}$ den Spaltenrechtsrang 3 haben soll. Jeder Punkt X von t hat somit einen Vektor von der Form $\mathfrak{x}\lambda+\mathfrak{y}\mu$. Soll X auch auf der C_2 liegen, so ist notwendig

$$(\mathfrak{x}\,\lambda + \mathfrak{y}\,\mu)^{\varphi}\,\mathfrak{A}\,(\mathfrak{x}\,\lambda + \mathfrak{y}\,\mu) = 0,$$

woraus wegen (2), (3), (5) folgt: $\mu=0$ oder $X=P$.

SATZ 7.1. *In einer desarguesschen Ebene $\mathfrak{P}$ existiert genau dann ein zusammenfallendes Paar einer Steinerschen C_2 und einer Staudtschen C_2', wenn sie einen kommutativen Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik besitzt. Im Falle $C_2=C_2'$ ist bei C_2' notwendig $\varphi=1$.*

BEWEIS. Es werde zuerst $C_2=C_2'$ angenommen. Die Steinersche C_2 sei durch

$$x_1\, x_2 = x_0^{\,2} \quad (x_i \textit{ komm.})$$

dargestellt. Die Grundpunkte $E_1(0, 1, 0)$, $E_2(0, 0, 1)$ sind dann regulär, die zugehörigen Tangenten t_1, t_2 durch

$$x_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad x_1 = 0$$

gegeben.

Die Staudtsche C_2 habe in demselben Bezugssystem die Gleichung

$$\sum_{i,k} x_i^{\varphi}\, a_{ik}\, x_k = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}^{\varphi}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = 0.$$

Nach dem Hilfssatz hat die Gerade t_1' mit dem Vektor

$$\mathfrak{t}_1' = (0, 1, 0)\,\mathfrak{A}$$

nur den Punkt $E_1(0, 1, 0)$ mit der C_2' gemeinsam, wegen $C_2=C_2'$ also auch mit der C_2. Sie fällt daher notwendig mit der Tangente t_1 der Steinerschen C_2

zusammen. Es ist also:

$$t_1' = (0, 0, \varrho) = (0, 1, 0)\,\mathfrak{A} \quad \text{mit} \quad \varrho \neq 0,$$

woraus $a_{10} = a_{11} = 0$ folgt. Auf Grund von $a_{ik}^{\varphi} = a_{ki}$ ist auch $a_{01} = 0$. Die entsprechende Schlußweise für t_2 ergibt $a_{20} = a_{02} = a_{22} = 0$. Die Gleichung der C_2' ist also von der Form

$$x_1^{\varphi}\, a_{12}\, x_2 + x_2^{\varphi}\, a_{21}\, x_1 + x_0^{\varphi}\, a_{00}\, x_0 = 0.$$

Durch eine Verlegung des Einheitspunktes, nämlich durch die Transformation

$$y_0 = x_0, \qquad y_1 = x_1, \qquad y_2 = a_{12}\, x_2$$

kann man noch die Vereinfachung

$$y_1^{\varphi}\, y_2 + y_2^{\varphi}\, y_1 + y_0^{\varphi}\, a_{00}\, y_0 = 0$$

erreichen.

Wir betrachten nun die Schnittpunkte von C_2 und E_1E_2: $y_0 = 0$. Für sie gilt

$$y_1^{\varphi}\, y_2 + y_2^{\varphi}\, y_1 = 0.$$

Dies ist z.B. für $E_2(0, 0, 1)$ erfüllt. Jeder weitere Schnittpunkt kann durch einen Vektor $(0, 1, a)$ charakterisiert werden, wobei a der Gleichung

$$a^{\varphi} + a = 0 \tag{6}$$

genügt. Sie ist trivialerweise für $a = 0$ erfüllt, was dem Schnittpunkt E_1 entspricht. Da aber wegen $C_2 = C_2'$ E_1 der einzige Schnittpunkt $\neq E_2$ ist, ist $a = 0$ die einzige Lösung von (6).

Aus $a^{\varphi} + a = 0$ folgt also allemale $a = 0$.

Sei nun x ein beliebiges Element aus dem Koordinatenkörper K und werde $A = x^{\varphi} - x$ gesetzt.

Dann ist

$$A^{\varphi} + A = (x^{\varphi} - x)^{\varphi} + (x^{\varphi} - x) = x - x^{\varphi} + x^{\varphi} - x = 0$$

und somit $A = 0$, d.h.

$$x^{\varphi} = x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathsf{K}.$$

Hieraus folgt:

$$x_1\, x_2 = (x_1\, x_2)^{\varphi} = x_2^{\varphi}\, x_1^{\varphi} = x_2\, x_1,$$

also die Kommutativität von K.

Ferner geht wegen $\varphi = 1$ Gl. (6) über in

$$2a = 0.$$

Da diese Gleichung nur die Lösung $a = 0$ hat, ist die Charakteristik von K ungleich 2.

Umgekehrt ist in jeder kommutativen Ebene mit von 2 verschiedener Charakteristik durch

$$2x_1x_2 = x_0^2$$

sowohl eine Steinersche wie eine Staudtsche C_2 gegeben. Ferner kann in jeder solchen Ebene jede Staudtsche C_2 mit Det $\mathfrak{A} \neq 0$, $\varphi = 1$, die wenigstens 2 verschiedene Punkte enthält, auch als Steinersche C_2 aufgefaßt werden und umgekehrt, wovon man sich leicht überzeugt.

§ 8. Projektivität und Regelfläche

1. Regelfläche im $\mathfrak{P}_3$

Für jeden dreidimensionalen projektiven Raum $\mathfrak{P}_3$ kann man nach SEGRE eine verallgemeinerte Regelfläche folgendermaßen definieren:

d_1, d_2, d_3 seien windschiefe Geraden $\in \mathfrak{P}_3$ *(Leitlinien)*, g eine Gerade *(Erzeugende)*, die mit den d_i inzident ist. Die Punktmenge aller solcher Geraden g werde als Regelfläche $R(d_i)$ bezeichnet.

Zur analytischen Darstellung von $R(d_i)$ werde in $\mathfrak{P}_3$ ein Bezugssystem $S(x_1, \ldots, x_4)$ der folgenden Art eingeführt:

g_1, g_2 seien irgend zwei verschiedene Erzeugende von $R(d_i)$. Die Grundpunkte von S sollen dann sein:

$$(1) \qquad E_1 = d_1 \cap g_1, \qquad E_2 = d_2 \cap dg_1, \qquad E_3 = d_1 \cap g_2, \qquad E_4 = d_2 \cap g_2.$$

Der Einheitspunkt E wird auf d_3 angenommen:

$$(1') \qquad E \mathrel{I} d_3.$$

In S wird dann $R(d_i)$ durch die Punkte mit

$$(2) \qquad \begin{cases} x_3 = x_4 = 0, & \text{sowie durch die Punkte mit} \\ x_1 x_3^{-1} = x_2 x_4^{-1} \end{cases}$$

dargestellt, wie durch einfache Rechnung nachzuprüfen.

2. C_2 als Schnitt von R

$R(d_i)$ soll nun mit einer Ebene π geschnitten werden, die keine d_i enthält. Es sei $P = d_1 \cap \pi$, $P' = d_2 \cap \pi$. Es bezeichne weiter g_1 die Erzeugende durch P, g_2 diejenige durch P'. Von π werde weiter vorausgesetzt, daß sie keine dieser g_i enthalte. Benutzt man bei der obigen Festlegung von S gerade diese g_1, g_2, ferner $d_3 \cap \pi$ als Einheitspunkt, so wird π durch $x_2 = x_3$ dargestellt, während für R nach wie vor (2) gilt. Das Schnittgebilde $R \cap \pi$ enthält dann die Punkte mit

$$(3) \qquad x_1 x_2^{-1} = (x_4 x_2^{-1})^{-1}$$

sowie $P = E_1(1, 0, 0, 0)$, $P' = E_4(0, 0, 0, 1)$, stellt also eine Steinersche C_2 dar, für die P, P' reguläre Punkte sind.

Umgekehrt kann man jede Steinersche C_2 einer desarguesschen Ebene ϑ als Schnitt einer Regelfläche $R(d_i)$ des ϑ enthaltenden $\mathfrak{P}_3$ erzeugen.

Zum Beweise wähle man in ϑ ein projektives Bezugssystem $S_2(x_1, x_2, x_4)$ so, daß die C_2 die Punkte mit (1, 0, 0), (0, 0, 1) sowie diejenigen mit

$$x_1 x_2^{-1} = (x_4 x_2^{-1})^{-1}$$

enthält und bette dieses in ein räumliches Bezugssystem $S(x_1, \ldots, x_4)$ ein, in dem ϑ gerade durch $x_2 = x_3$ gegeben ist. Man braucht dann in S nur diejenige Regelfläche $R(d_i)$ mit der Darstellung (2) zu wählen und sie mit ϑ zu schneiden, um die C_2 zu erhalten. Sind $E_1, \ldots, E_4$ die Grundpunkte von $S(x_1, \ldots, x_4)$, so genügt zur geometrischen Bestimmung der gesuchten $R(d_i)$, die d_1, d_2, g_1, g_2 gemäß (1) anzunehmen, ferner d_3 so, daß (1′) sowie $d_3 \mathrel{I} g_1$, $d_3 \mathrel{I} g_2$ erfüllt ist.

Man kann übrigens noch erreichen, daß zwei gegebene reguläre Punkte P, P' der C_2 gerade von den Leitlinien d_1 bzw. d_2 ausgeschnitten werden, indem man P, P' nach Satz 4.2 zu den „uneigentlichen" C_2-Punkten mit (1, 0, 0), (0, 0, 1) macht, denn dann werden P, P' zu E_1, E_4, also nach (1) zu $d_1 \cap \vartheta$ bzw. $d_2 \cap \vartheta$.

3. Axiale Perspektivität und Projektivität

In einem $\mathfrak{P}_3$ werden wieder windschiefe Geraden d_1, d_2, d_3 angenommen. Durch d_1 werde eine beliebige Ebene ε gelegt, die d_3 in dem eindeutig bestimmten Punkt A schneiden möge. Dieser Ebene ε wird nun die eindeutig bestimmte Ebene ε' zugeordnet, die durch d_2 und A geht. Hierdurch ist offenbar eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Ebenenbüschels $\{d_1\}$ auf das Ebenenbüschel $\{d_2\}$ erklärt. Sie werde als axiale Perspektivität $p(d_1, d_2, d_3)$ bezeichnet.

Der Schnitt je zweier zugeordneter Ebenen ε, ε' ist offenbar eine Erzeugende von $R(d_i)$ und umgekehrt. Die Regelfläche erscheint somit als Erzeugnis von $p(d_i)$.

Wir wollen nun noch $p(d_i)$ mit der Projektivität einer desarguesschen Ebene in Zusammenhang bringen.

Es sei π wieder eine Ebene des $\mathfrak{P}_3$ von der unter 2. beschriebenen Art, sowie $P_1 = d_1 \cap \pi$, $P' = d_2 \cap \pi$. Je zwei vermöge $p(d_i)$ zugeordnete Ebenen ε, ε' schneiden in π ein Geradenpaar h, h' durch P, bzw. P' aus. Jedes solche Paar h, h' besitzt genau einen gemeinsamen Punkt, nämlich $X = g \cap \pi$, wobei $g = \varepsilon \cap \varepsilon'$. Da g eine Erzeugende von $R(d_i)$ ist, bildet die Menge dieser X den Kegelschnitt $C_2 = R \cap \pi$. Für diesen sind nach 2. die P, P' reguläre Punkte. Für die Zuordnung $h \leftrightarrow h'$ folgt zusammen mit Satz 4.2, daß sie eine Projektivität ist. Es gilt also

SATZ 8.2. *Die axiale Perspektivität $p(d_i)$ des $\mathfrak{P}_3$ induziert in jeder Ebene π, die die d_i sowie wenigstens 2 Erzeugende g, g' von $R(d_i)$ nicht enthält, eine Projektivität.*

Umgekehrt läßt sich jede Projektivität einer desarguesschen Ebene ϑ durch eine axiale Perspektivität des ϑ enthaltenden $\mathfrak{P}_3$ hervorbringen.

Seien nämlich P, P' die Träger der projektiven Büschel und C_2 ihr Erzeugnis. Nach 2. gibt es eine $R(d_i)$ mit

$$C_2 = R \cap \vartheta \quad \text{sowie} \quad P = d_1 \cap \vartheta, \qquad P' = d_2 \cap \vartheta.$$

Die axiale Perspektivität $p(d_1, d_2, d_3)$ leistet dann offenbar das Verlangte.

SATZ 8.3. *Jede Projektivität einer desarguesschen Ebene ϑ läßt sich durch eine axiale Perspektivität des ϑ enthaltenden $\mathfrak{P}_3$ induzieren.*

Literatur

[1] BAER, R.: Linear algebra and projective geometry. New York 1952.

[2] BERZ, E.: Kegelschnitt in desarguesschen Ebenen. Diss. München 1959.

[3] BIRKHOFF, G., and J. v. NEUMANN: The Logic of Quantum Mechanics. Ann. of Math. **37**, 823–843 (1936).

[4] KANNENBERG, R.: Grundgedanken einer Theorie der Grundgebilde 2. Ordnung in Schiefkörpergeometrien. Diss. Bonn 1956.

[5] KNESER, H.: Schiefkörper und Dualitätsprinzip. Jber. dtsch. Math. Ver. **45**, 77–78 (1935).

[6] LENZ, H.: Axiomatische Bemerkung zur Polarentheorie. Math. Ann. **128**, 363–372 (1954).

[7] — Zur Definition der Flächen 2. Ordnung. Math. Ann. **131**, 385–389 (1956).

[8] ORE, O.: Linear equations in non-commutative fields. Ann. of Math. **32**, 463–477 (1931).

[9] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955.

[10] — Lineare Algebra. Enzyklopädie der math. Wissensch., Bd. I/1, Teil B. Algebra.

[11] SEGRE, B.: Elementi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo. Rend. Palermo **7**, 81–122 (1958).

Gießen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. April 1961)