JÖRGENS, K.
Math. Zeitschr. 77, 295—308 (1961)

Das Anfangswertproblem im Großen für eine Klasse nichtlinearer Wellengleichungen

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

KONRAD JÖRGENS

Einleitung

In einer früheren Arbeit [3] wurden nichtlineare Wellengleichungen betrachtet, die als Feldgleichungen einer nichtlinearen klassischen Mesonentheorie in Betracht kommen. Unter diesen wurde eine ausgezeichnete Klasse durch Bedingungen charakterisiert, die für die Lösbarkeit des Anfangswertproblems *im Großen* notwendig sind. Auf die umgekehrte Frage, ob für die so ausgezeichneten Wellengleichungen und zu beliebigen Anfangswerten stets eine Lösung im Großen existiert, wurde nur eine recht unvollständige Antwort gegeben, wobei die wesentliche Einschränkung die auf den Fall *einer* Raumvariablen war.

Die vorliegende Arbeit enthält einen weiteren Beitrag zu diesem Problem. Es werden die *semilinearen* Wellengleichungen der Form

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

in *drei* Raumvariablen betrachtet und es wird gezeigt, daß zu beliebigen Anfangswerten, die den üblichen Differenzierbarkeitsbedingungen genügen, stets eine wohlbestimmte, zweimal stetig differenzierbare Lösung im Großen existiert, falls die Funktion $F(s)$, die durch $F(0)=0$ normiert sei, den Bedingungen $A+F(s)>0$ und

$$|F'(s)| \leqq a[A+F(s)]^{\alpha}$$

mit geeigneten positiven Konstanten a, A und $\alpha < \frac{2}{3}$ genügt. Dies ist im wesentlichen eine *Wachstumsbeschränkung* für $F(s)$, denn es folgt daraus

$$-A < F(s) \leqq \{A^{1-\alpha} + a(1-\alpha)\, s\}^{p} - A$$

mit $p = \frac{1}{1-\alpha} < 3$. Ein Beispiel für eine solche Funktion ist $F(s) = \mu^2 s + \frac{1}{2}\eta^2 s^2$; die zugehörige Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u + \mu^2 u + \eta^2 |u|^2 u = 0$$

ist die Mesonengleichung von SCHIFF [5].

Es liegt nahe, ausgehend von den gewonnenen Lösungen, durch Grenzübergang *allgemeinere* Lösungen zu konstruieren. Dies ergibt sich ganz von selbst, wenn man eine Topologie gefunden hat derart, daß die Lösungen im Sinne dieser Topologie stetig von ihren Anfangswerten abhängen. Die verallgemeinerten Lösungen genügen dann auch sog. fortsetzbaren Anfangsbedingungen im Sinne von FRIEDRICHS und LEWY [2]. Es zeigt sich nun, daß man verallgemeinerte Lösungen zu beliebigen Anfangswerten finden kann, die den allgemeinsten in [2] für die lineare Wellengleichung formulierten Bedingungen genügen, d.h. Lösungen, die samt ihren ersten Ableitungen für jedes feste t lokal quadratisch bezüglich der Raumvariablen integrierbar sind. Allerdings muß dazu von der Funktion $F(s)$ zusätzlich $F(s) \geqq 0$ und $|F''(s)| \leqq b$ mit einer geeigneten Konstanten b verlangt werden. Auch diese Bedingungen sind für die Mesonengleichung von SCHIFF offenbar erfüllt.

Alle Beweise stützen sich auf den Energiesatz, der aus der Wellengleichung folgt; die verschiedenen Bedingungen für $F(s)$ hängen eng mit dieser Methode zusammen, und es wird keinerlei Aussage darüber gewonnen, ob sie *notwendig* sind. Für den Fall *einer* Raumvariablen wurden in [3], §5 analoge Existenzsätze bewiesen, wobei $F(s)$ keinerlei Wachstumsbeschränkungen unterworfen wurde. Für mehr als drei Raumvariable versagt die Methode der vorliegenden Arbeit.

§1. Das Anfangswertproblem im Kleinen

Es sei $F(s)$ reellwertig und $F(s) \in C^3[0, \infty)$[1]; außerdem sei F durch die Vorschrift $F(0)=0$ normiert, was für die Differentialgleichung ohne Bedeutung ist. Gesucht ist eine komplexwertige Lösung $u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3, t)$ der Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

für $t > 0$, welche für $t=0$ den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

genügt, wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ gegebene komplexwertige Funktionen sind.

Zur Orientierung wird das entsprechende Problem für die lineare Wellengleichung $v_{tt} - \Delta v = 0$ betrachtet. Darüber ist unter anderem folgendes bekannt[2]:

(1) Ist $\varphi(x) \in C^3$, $\psi(x) \in C^2$, so gibt es genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung, nämlich

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\, M\{\varphi | x; t\}\right] + t\, M\{\psi | x; t\},$$

worin

$$M\{f | x; t\} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} f(x + t\xi)\, d\xi$$

das sphärische Mittel von f, genommen über die Oberfläche der Kugel $K_t(x)$ vom Radius t mit Mittelpunkt x, bezeichnet. Aus der Lösungsformel sieht

---

[1]) Das heißt dreimal stetig differenzierbar im Intervall $0 \leqq s < \infty$.

[2]) Vgl. z.B. [1], Kap. VI, §5.

man, daß die Werte der Lösung in dem Bereich

$$B\left(K_\varrho(x_0)\right) = \{x, t \mid t \geqq 0,\ |x - x_0| + t < \varrho\}$$

nur von den Werten von φ und ψ in $K_\varrho(x_0)$ abhängen; man nennt B daher den Bestimmtheitsbereich zum Gebiet $K_\varrho(x_0)$. Ist $G \subset R^3$ eine beliebige offene Menge, so ist der Bestimmtheitsbereich $B(G)$ die Vereinigung aller $B(K)$ mit $K \subset G$.

(2) Sei $f(x, t) \in C^2$; dann ist

$$w(x, t) = v(x, t) + \int_0^t (t - \tau)\, M\{f \mid x, \tau; t - \tau\}\, d\tau$$

die einzige zweimal stetig differenzierbare Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $w_{tt} - \Delta w = f(x, t)$ mit den vorgeschriebenen Anfangswerten. Darin bedeutet

$$M\{f \mid x, \tau; \varrho\} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{|\xi|=1} f(x + \varrho\,\xi, \tau)\, d\xi .$$

Hieraus folgt unmittelbar, daß das Anfangswertproblem für die nichtlineare Wellengleichung der Integralgleichung

$$u(x, t) = v(x, t) - \int_0^t (t - \tau)\, M\{F'(|u|^2)\, u \mid x, \tau; t - \tau\}\, d\tau$$

äquivalent ist in dem Sinne, daß jede zweimal stetig differenzierbare Lösung des einen Problems auch Lösung des anderen Problems ist. Gibt es zu beliebigen Anfangswerten $\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2$ genau eine Lösung $u \in C^2$, so hängen die Werte von u in jedem $B(K)$ nur von den Werten von φ und ψ in K ab, da dies für die Lösung der Integralgleichung richtig ist. Die Bestimmtheitsbereiche $B(G)$ der linearen Wellengleichung sind also zugleich auch Bestimmtheitsbereiche der nichtlinearen Wellengleichung. Nun wird aber, wie einfache Beispiele zeigen, die Lösung des nichtlinearen Problems im allgemeinen nicht in ganz $B(G)$, sondern nur in einer gewissen Nachbarschaft der Anfangsmannigfaltigkeit, d.h. für hinreichend kleine t existieren. Die Frage nach solchen Lösungen wird das Anfangswertproblem *im Kleinen* genannt; im vorliegenden Fall wird sie durch den folgenden Satz beantwortet.

SATZ 1. *Es sei G ein Gebiet des R^3 und es seien Anfangswerte $\varphi(x) \in C^3(G)$, $\psi(x) \in C^2(G)$ mit*

$$|\varphi| \leqq c, \quad |\operatorname{grad} \varphi| \leqq c, \quad |\psi| \leqq c \quad \text{für} \quad x \in G$$

gegeben. Dann gibt es eine nur von c und von $F(s)$ abhängige Zahl $T > 0$ derart, daß das Anfangswertproblem für die Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0$$

in dem Teilbereich $t \leqq T$ von $B(G)$ genau eine zweimal stetig differenzierbare Lösung besitzt.

BEWEIS. Man erhält die gesuchte Lösung durch Anwendung des Iterationsverfahrens auf die äquivalente Integralgleichung, d.h. man setzt $u^{(1)}(x,t) = v(x,t)$ und

$$u^{(n+1)}(x,t) = v(x,t) - \int_0^t (t-\tau)\, M\{F'(|u^{(n)}|^2)\, u^{(n)} \,|\, x, \tau; t-\tau\}\, d\tau$$

für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Offenbar ist $u^{(n)}(x,t) \in C^2(B(G))$. Als Vorbereitung des Konvergenzbeweises hat man dann zunächst die gleichmäßige Beschränktheit der Folge $u^{(n)}(x,t)$ nachzuweisen. Es gilt

$$v(x,t) = M\{\varphi \,|\, x; t\} + \frac{t}{4\pi} \int_{|\xi|=1} (\xi, \operatorname{grad} \varphi(x+t\xi))\, d\xi + t\, M\{\psi \,|\, x; t\}$$

und folglich $|v(x,t)| \leqq (1+2t)\, c$. Sei nun

$$c_1 = \max_{0 \leqq s \leqq 4c^2} |F'(s)|$$

und

$$T = \min\{\tfrac{1}{4}, (2c_1)^{-\frac{1}{2}}\}.$$

Dann gilt $|u^{(n)}(x,t)| \leqq 2c$ für $t \leqq T$ und für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dies ist nämlich richtig für $n = 1$; gilt es für n, so folgt aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} |u^{(n+1)}(x,t)| &\leqq |v(x,t)| + \int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u^{(n)}|^2)\, u^{(n)}| \,|\, x, \tau; t-\tau\}\, d\tau \\ &\leqq (1+2t)\, c + t^2 c\, c_1 \leqq 2c. \end{aligned}$$

Es bleibt nun die Konvergenz der Folge $u^{(n)}(x,t)$ sowie der Folgen der ersten und zweiten Ableitungen für $t \leqq T$ und die Einzigkeit der Lösung der Integralgleichung zu beweisen. Dieser Teil des Beweises ist zwar mühsam, aber vollkommen selbstverständlich und kann daher übergangen werden.

§ 2. Das Anfangswertproblem im Großen

Es soll nun gezeigt werden, daß die in § 1 konstruierte Lösung des Anfangswertproblems sogar *im Großen*, d.h. im ganzen Bestimmtheitsbereich $B(G)$ existiert, falls über die Funktion $F(s)$ weitere Annahmen gemacht werden. Ist G insbesondere der ganze Raum R^3, so ergibt sich die Existenz einer wohlbestimmten Lösung im ganzen Halbraum $t > 0$.

SATZ 2. *Für die Funktion $F(s) \in C^3[0, \infty)$ mit $F(0) = 0$ gelte*

$$A + F(s) > 0 \quad \textit{und} \quad |F'(s)| \leqq a[A + F(s)]^\alpha$$

für $0 \leqq s < \infty$ mit geeigneten positiven Konstanten a, A und $\alpha < \frac{2}{3}$. Für jedes Gebiet $G \subset R^3$ und zu beliebigen Anfangswerten $\varphi(x) \in C^3(G)$, $\psi(x) \in C^2(G)$ gibt es dann genau eine Lösung $u(x,t) \in C^2(B(G))$ des Anfangswertproblems für die Differentialgleichung

$$u_{tt} - \Delta u + F'(|u|^2)\, u = 0.$$

Für den Beweis wird ein Hilfssatz benötigt, der aus dem *Energiesatz* folgt; als solchen bezeichnet man die Identität

$$\frac{\partial}{\partial t}\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}=2\operatorname{Re}\operatorname{div}(\bar{u}_t\operatorname{grad} u),$$

die für jede Lösung der Differentialgleichung gilt. Hierin bezeichnet Re den Realteil, grad und div bedeuten die Operationen „Gradient" und „Divergenz" bezüglich der Raumvariablen. Ist $K=K_\tau(x_0)$ eine Kugel in R^3 und $u(x,t)\in C^2(\overline{B(K)})$, so erhält man aus dem Energiesatz durch Integration über $B(K)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_M\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)-2\operatorname{Re}\bar{u}_t(n,\operatorname{grad} u)\}\,dS$$
$$=\int\limits_K\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}\,dx.$$

Darin bedeutet M den Kegelmantel $|x-x_0|+t=\tau$, $0\leqq t\leqq\tau$, der zusammen mit K den Rand von $B(K)$ bildet. Die äußere Normale auf M hat die t-Komponente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und die x_i-Komponente $\frac{1}{\sqrt{2}}n_i$, $i=1,2,3$ mit $\sum\limits_{i=1}^{3}n_i^2=1$. Das Oberflächenelement auf M ist mit dS bezeichnet. Nun ist offenbar

$$|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2-2\operatorname{Re}\bar{u}_t(n,\operatorname{grad} u)\geqq 0,$$

folglich

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_M F(|u|^2)\,dS\leqq\int\limits_K\{|u_t|^2+|\operatorname{grad} u|^2+F(|u|^2)\}\,dx.$$

Dies kann man auch in der Form

$$\int\limits_0^\tau(\tau-t)^2M\{F(|u|^2)\,|\,x_0,t;\tau-t\}\,dt\leqq 4\pi\int\limits_{K_\tau(x_0)}\{|\psi|^2+|\operatorname{grad}\varphi|^2+F(|\varphi|^2)\}\,dx$$

schreiben, wenn φ und ψ die Werte von u und u_t für $t=0$ sind.

HILFSSATZ 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2 sei $K=K_\varrho(x_0)$ eine Kugel und $u(x,t)\in C^2(B(K))$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$u_{tt}-\Delta u+F'(|u|^2)\,u=0$$

mit Anfangswerten $\varphi(x)\in C^3(\overline{K})$, $\psi(x)\in C^2(\overline{K})$.

Behauptung: Es gibt eine nur von den Anfangswerten (und von der Funktion $F(s)$) abhängige Zahl c derart, daß

$$|u(x,t)|\leqq c,\qquad|\operatorname{grad} u|\leqq c,\qquad|u_t|\leqq c$$

für $(x,t)\in B(K)$ gilt.

BEWEIS. In $B(K)$ ist $t\leqq\varrho$; folglich gibt es eine nur von den Anfangswerten abhängige Zahl c_2 mit

$$|v(x,t)|\leqq c_2,\qquad|\operatorname{grad} v|\leqq c_2,\qquad|v_t|\leqq c_2$$

in $B(K)$. Aus der Integralgleichung für u folgt damit und nach Voraussetzung über $F(s)$

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)| &\leqq |v(x,t)| + \int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u|^2)\, u| \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau \\
&\leqq c_2 + a\int_0^t (t-\tau)\, M\{[A + F(|u|^2)]^\alpha |u| \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau \\
&\leqq c_2 + a\left[\int_0^t (t-\tau)^2 M\{A + F(|u|^2) \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau\right]^\alpha \times \\
&\quad \times \left[\int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau\right]^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Dabei wurde die Höldersche Ungleichung mit $p = \frac{1}{1-\alpha} < 3$, $p' = \frac{1}{\alpha}$ auf das dreifache Integral $\int M\{\ldots\} d\tau$ mit dem Integranden

$$
(t-\tau)\,[A + F(|u|^2)]^\alpha |u| = (t-\tau)^{\frac{2}{p'}} [A + F(|u|^2)]^{\frac{1}{p'}} (t-\tau)^{\frac{2-p}{p}} |u|
$$

angewandt. Nach der oben abgeleiteten Ungleichung gilt für $(x,t) \in B(K)$

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (t-\tau)^2 M\{F(|u|^2) \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau &\leqq 4\pi \int_{K_t(x)} \{(|\psi|^2 + |\operatorname{grad}\varphi|^2 + F(|\varphi|^2)\}\, d\xi \\
&\leqq 4\pi \int_{K_\varrho(x_0)} \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad}\varphi|^2 + A + F(|\varphi|^2)\}\, d\xi = c_3,
\end{aligned}
$$

folglich

$$
|u(x,t)| \leqq c_2 + a\left[c_3 + \frac{A}{3} t^3\right]^\alpha \left[\int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau\right]^{1/p}
$$

und

$$
|u(x,t)|^p \leqq c_4 + c_5 \int_0^t (t-\tau)^{2-p} M\{|u|^p \,|\, x,\tau;\, t-\tau\}\, d\tau
$$

mit $c_4 = 2^{p-1} c_2^p$ und $c_5 = 2^{p-1} a^p \left[c_3 + \frac{A}{3}\varrho^3\right]^{\alpha p}$. Setzt man nun

$$
f(t) = \max_{x \in K_{\varrho-t}(x_0)} |u(x,t)|^p,
$$

so ist $f(t)$ nicht größer als die Lösung $g(t)$ der Integralgleichung

$$
g(t) = c_4 + c_5 \int_0^t (t-\tau)^{2-p} g(\tau)\, d\tau.
$$

Mit Hilfe der Laplace-Transformation findet man die Lösung

$$
g(t) = c_4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(2-p)!\, c_5 t^{3-p}]^n}{[(3-p)\, n]!}.
$$

Daraus folgt die Existenz einer Schranke c_6 für $|u(x,t)|^2$ in $B(K)$. Setzt man nun

$$
c_7 = \max_{0 \leqq s \leqq c_6} |F'(s)| + 2c_6 \max_{0 \leqq s \leqq c_6} |F''(s)|,
$$

so erhält man aus der Integralgleichung für u

$$|\operatorname{grad} u(x,t)| \leqq |\operatorname{grad} v(x,t)| +$$

$$+\int_0^t (t-\tau)\, M\{|F'(|u|^2)\operatorname{grad} u + F''(|u|^2)\, u\, 2\operatorname{Re}(\bar{u}\operatorname{grad} u)|\,|\,x,\tau;t-\tau\}\,d\tau$$

$$\leqq c_2 + \int_0^t (t-\tau)\, c_7 \max_{x\in K_{\varrho-\tau}(x_0)} |\operatorname{grad} u(x,\tau)|\,d\tau$$

und hieraus

$$|\operatorname{grad} u(x,t)| \leqq c_2 \operatorname{Cos}\sqrt{c_7}\,t \leqq c_8$$

für $(x,t)\in B(K)$. Auf dieselbe Weise erhält man eine Schranke für $|u_t(x,t)|$ und damit die gewünschte Konstante c.

Beweis von Satz 2. Es genügt, zu zeigen, daß genau eine Lösung in $B(K)$ existiert, wenn K eine beliebige Kugel mit $\bar{K}\subset G$ ist. Nach Satz 1 gibt es eine Lösung in einem Teilbereich $t\leqq T$ von $B(K)$, dessen Breite T nur von einer gemeinsamen oberen Schranke c der Funktionen $|\varphi|$, $|\operatorname{grad}\varphi|$ und $|\psi|$ in K abhängt. Man wird nun versuchen, zur Fortsetzung der Lösung ein neues Anfangswertproblem mit den Anfangswerten

$$\varphi_1(x) = u(x,T), \qquad \psi_1(x) = u_t(x,T)$$

zur Zeit $t=T$ zu stellen, dessen Lösung $u_1(x,t)$ folglich der Integralgleichung

$$u_1(x,t) = v_1(x,t) - \int_T^t (t-\tau)\, M\{F'(|u_1|^2)\, u_1\,|\,x,\tau;t-\tau\}\,d\tau$$

mit $$v_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-T)\, M\{\varphi_1|\,x;t-T\}\right] + (t-T)\, M\{\psi_1|\,x;t-T\}$$

zu genügen hat. Für $t\geqq T$ gilt

$$v_1(x,t) = v(x,t) - \int_0^T (t-\tau)\, M\{F'(|u|^2)\, u\,|\,x,\tau;t-\tau\}\,d\tau.$$

Man kann diese Identität sowohl mit Hilfe der Definition der Funktionen φ_1 und ψ_1 direkt verifizieren, als auch aus allgemeinen Eigenschaften der Lösungen der linearen Wellengleichung ohne Rechnung ableiten. Aus der Identität folgt, daß $v_1(x,t)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Also kann man die Integralgleichung wie im Beweis von Satz 1 durch Iteration lösen und so eine zweimal stetig differenzierbare Lösung $u_1(x,t)$ in einem Teilbereich $T\leqq t\leqq T+T_1$ von $B(K)$ berechnen, dessen Breite T_1 nur von einer gemeinsamen oberen Schranke für die Funktionen $|\varphi_1|$, $|\operatorname{grad}\varphi_1|$ und $|\psi_1|$ abhängt. Hierfür kann man aber die Konstante c des Hilfssatzes 1 nehmen. Also hängt T_1 nur von den Anfangswerten φ, ψ in K ab. Erneute Anwendung des Fortsetzungsprozesses liefert eine Lösung für $t\leqq T+2T_1$. In endlich vielen Schritten erhält man die gesuchte Lösung in $B(K)$. Gäbe es zwei Lösungen u_1 und u_2, so müßte die Differenz der Ungleichung

$$|u_1(x,t)-u_2(x,t)| = \left|\int_0^t (t-\tau)\, M\{F'(|u_1|^2)\, u_1 - F'(|u_2|^2)\, u_2\,|\,x,\tau;t-\tau\}\,d\tau\right|$$

$$\leqq c_7\int_0^t (t-\tau) \max_{x\in K_{\varrho-\tau}(x_0)} |u_1(x,\tau)-u_2(x,\tau)|\,d\tau$$

genügen, worin c_7 die im Beweis des Hilfssatzes eingeführte Konstante ist. Daraus folgt $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$ in bekannter Weise, womit der Beweis des Satzes abgeschlossen ist.

§ 3. Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Anfangswerten

Die in § 2 betrachteten Wellengleichungen haben zu beliebigen Anfangswerten $\varphi(x) \in C^3(R^3)$, $\psi(x) \in C^2(R^3)$ genau eine für $t \geqq 0$ und für alle x zweimal stetig differenzierbare Lösung $u(x,t)$. Es werden nun insbesondere Anfangswerte *mit kompaktem Träger betrachtet*, d.h. solche, die außerhalb einer geeigneten Kugel $K = K_\varrho(x_0)$ identisch verschwinden. Die Lösung $u(x,t)$ verschwindet dann identisch im Bestimmtheitsbereich des Komplementes von K, d.h. für festes t außerhalb der Kugel $K_{\varrho+t}(x_0)$. Wegen $F(0)=0$ existiert das *Energie-Integral*

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\int_{R^3} \{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + F(|u|^2)\}\, dx.$$

Aus dem Energiesatz folgt durch Integration über das Gebiet $x \in R^3$, $0 \leqq t \leqq \tau$ der sog. integrale Energiesatz

$$E(t) = \tfrac{1}{2}\int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad}\varphi|^2 + F(|\varphi|^2)\}\, dx$$

für $t \geqq 0$, d.h. $E(t)$ ist gleich einer nur von den Anfangswerten abhängigen Konstanten, die im folgenden mit E bezeichnet wird. Ist $F(s) \geqq 0$ für $0 \leqq s < \infty$, so folgt hieraus eine wichtige Abschätzung. Für eine Funktion $f(x) \in C^1(R^3)$ mit kompaktem Träger gilt nämlich nach SOBOLEW[3])

$$\{\int |f(x)|^6\, dx\}^{\frac{1}{3}} \leqq \tfrac{4}{3}\int |\operatorname{grad} f(x)|^2\, dx.$$

Auf $u(x,t)$ angewandt ergibt dies die Ungleichung

$$\{\int |u(x,t)|^6\, dx\}^{\frac{1}{3}} \leqq \tfrac{8}{3} E,$$

die im folgenden gebraucht wird. Eine weitere Ungleichung enthält

HILFSSATZ 2. *Es seien $\varphi(x) \in C^3(R^3)$ und $\psi(x) \in C^2(R^3)$ Funktionen mit kompaktem Träger und $v(x,t)$ die Lösung der linearen Wellengleichung $v_{tt} - \Delta v = 0$ mit diesen Anfangswerten. Dann gilt*

$$\int |v(x,t)|^2\, dx \leqq 2\int \{|\varphi(x)|^2 + t^2 |\psi(x)|^2\}\, dx.$$

BEWEIS. Sei $\hat{v}(\xi,t)$ die Fourier-Transformierte von $v(x,t)$ bezüglich der Raumvariablen, $\hat{\varphi}(\xi)$ und $\hat{\psi}(\xi)$ die Transformierten von $\varphi(x)$ bzw. $\psi(x)$; dann ist

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{\varphi}(\xi)\cos|\xi|\,t + \hat{\psi}(\xi)\,\frac{\sin|\xi|\,t}{|\xi|}$$

und folglich

$$\int |v(x,t)|^2\, dx = \int |\hat{v}(\xi,t)|^2\, d\xi$$
$$\leqq 2\int \{|\hat{\varphi}(\xi)|^2 + t^2|\hat{\psi}(\xi)|^2\}\, d\xi = 2\int \{|\varphi(x)|^2 + t^2|\psi(x)|^2\}\, dx.$$

[3]) Einen einfachen Beweis findet man bei NIRENBERG [4], S. 128.

Der Hilfssatz 2 zeigt, zusammen mit dem integralen Energiesatz für die lineare Wellengleichung $(F(s)\equiv 0)$, daß die Lösungen der linearen Wellengleichung im Sinne der Norm

$$\|v(t)\| = \left[\int\{|v_t|^2 + |\operatorname{grad} v|^2 + |v|^2\}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

stetig von ihren Anfangswerten abhängen; und zwar ist

$$\|v(t)\|^2 \leqq 2(1+t^2)\,\|v(0)\|^2$$

für jede Lösung $v(x,t)$, also auch für die Differenz zweier Lösungen. Unter gewissen Voraussetzungen gilt nun eine analoge Aussage für die nichtlinearen Wellengleichungen:

SATZ 3. *Außer den Voraussetzungen von Satz* 2 *gelte noch*

$$F(s) \geqq 0 \quad \textit{und} \quad |F''(s)| \leqq b \quad \textit{für} \quad 0 \leqq s < \infty.$$

Es seien $\varphi_i(x)\in C^3(R^3)$, $\psi_i(x)\in C^2(R^3)$ *Anfangswerte mit kompaktem Träger und mit*

$$E_i = \tfrac{1}{2}\int\{|\psi_i|^2 + |\operatorname{grad}\varphi_i|^2 + F(|\varphi_i|^2)\}\,dx \leqq \hat{E}$$

für $i=1,2$. *Für die zugehörigen Lösungen* $u_i(x,t)$ *gilt dann*

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2)\exp\left[k(1+t^4)\right]\|u_1(0)-u_2(c)\|^2$$

mit einer nur von $\hat{E}$ *(und von der Funktion* $F(s)$*) abhängigen Zahl* k.

BEMERKUNG. Ersetzt man die Bedingung $F(s)\geqq 0$ durch die frühere $A+F(s)>0$, so erhält man eine ähnliche Ungleichung; jedoch hängt die darin auftretende Konstante auch von A und von dem Durchmesser des Trägers der Anfangswerte ab.

BEWEIS DES SATZES. Aus den Voraussetzungen über $F(s)$ folgt $|F'(s)|\leqq |F'(0)|+bs$ und daraus

$$|F'(|z_1|^2)\,z_1 - F'(|z_2|^2)\,z_2| \leqq b_1(1+|z_1|^2+|z_2|^2)\,|z_1-z_2|$$

für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 mit einer positiven Konstante b_1[4]). Die Lösungen $u_i(x,t)$ sind zugleich Lösungen der Integralgleichungen

$$u_i(x,t) = v_i(x,t) - \int_0^t (t-\tau)\,M\{F'(|u_i|^2)\,u_i \mid x,\tau;\,t-\tau\}\,d\tau,$$

worin $v_i(x,t)$ die Lösung der linearen Wellengleichung mit den Anfangswerten φ_i, ψ_i ist. Setzt man $w(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ so folgt

$$\begin{aligned}|w(x,t)| \leqq{}& |v_1(x,t)-v_2(x,t)| + \\ &+ b_1\int_0^t (t-\tau)\,M\{(1+|u_1|^2+|u_2|^2)\,|w| \mid x,\tau;\,t-\tau\}\,d\tau\end{aligned}$$

[4]) An Stelle von $|F''(s)|\leqq b$ könnte man auch diese Ungleichung in die Voraussetzungen des Satzes aufnehmen.

und weiter

$$\begin{aligned}[\int |w(x,t)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} &\leqq [\int |v_1(x,t) - v_2(x,t)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + b_1 \int_0^t (t-\tau) [\int (1 + |u_1(x,\tau)|^2 + |u_2(x,\tau)|^2)^2 |w(x,\tau)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} d\tau \\ &\leqq [2\int \{|\varphi_1 - \varphi_2|^2 + t^2 |\psi_1 - \psi_2|^2\} dx]^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + b_1 t \int_0^t \{[\int |w(x,\tau)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} + [\int (|u_1|^2 + |u_2|^2)^3 dx]^{\frac{1}{3}} [\int |w(x,\tau)|^6 dx]^{\frac{1}{6}}\} d\tau \\ &\leqq [2(1+t^2)]^{\frac{1}{2}} \|w(0)\| + \\ &\quad + b_1 t \int_0^t \{[\int |w(x,\tau)|^2 dx]^{\frac{1}{2}} + \tfrac{16}{3} \hat{E} \, (\tfrac{4}{3})^{\frac{1}{2}} [\int |\operatorname{grad} w(x,\tau)|^2 dx]^{\frac{1}{2}}\} d\tau \\ &\leqq [2(1+t^2)]^{\frac{1}{2}} \|w(0)\| + b_2 t \int_0^t \|w(\tau)\| d\tau\end{aligned}$$

mit einer nur von $\hat{E}$ (und von b_1) abhängigen Zahl b_2. Dabei wurde Hilfssatz 2, die zu Anfang des Paragraphen abgeleitete Ungleichung und die Ungleichung von SOBOLEW angewandt. Schließlich erhält man

$$\int |w(x,t)|^2 dx \leqq 4(1+t^2) \|w(0)\|^2 + 2 b_2^2 t^3 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau .$$

Andererseits folgt aus der Wellengleichung

$$w_{tt} - \Delta w + F'(|u_1|^2) u_1 - F'(|u_2|^2) u_2 = 0$$

und daraus

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \{|w_t|^2 + |\operatorname{grad} w|^2\} - 2 \operatorname{Re} \operatorname{div}(\overline{w}_t \operatorname{grad} w) \\ = - 2 \operatorname{Re} \overline{w}_t [F'(|u_1|^2) u_1 - F'(|u_2|^2) u_2] .\end{aligned}$$

Integration über das Gebiet $x \in R^3$, $0 \leqq t \leqq t_0$ liefert

$$\begin{aligned}\int \{|w_t(x,t_0)|^2 + |\operatorname{grad} w(x,t_0)|^2\} dx - \int \{|\psi_1 - \psi_2|^2 + |\operatorname{grad}(\varphi_1 - \varphi_2)|^2\} dx \\ = - 2 \operatorname{Re} \int_0^{t_0} \int \overline{w}_t [F'(|u_1|^2) u_1 - F'(|u_2|^2) u_2] \, dx \, dt \\ \leqq 2 b_1 \int_0^{t_0} \int |w_t| \, (1 + |u_1|^2 + |u_2|^2) \, |w| \, dx \, dt \\ \leqq 2 b_1 \int_0^{t_0} [\int |w_t|^2 dx]^{\frac{1}{2}} [\int (1 + |u_1|^2 + |u_2|^2)^2 |w|^2 dx]^{\frac{1}{2}} dt .\end{aligned}$$

Das Integral in der zweiten eckigen Klammer ist schon einmal in diesem Beweis vorgekommen; indem man dieselbe Abschätzung wie dort anwendet, erhält man

$$\int \{|w_t(x,t)|^2 + |\operatorname{grad} w(x,t)|^2\} dx \leqq \|w(0)\|^2 + 2 b_2 \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau$$

und durch Addition der Ungleichung für $\int |w(x,t)|^2 dx$

$$\|w(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2) \|w(0)\|^2 + 2(b_2 + b_2^2 t^3) \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau .$$

Hieraus folgt

$$\|w(t)\|^2 \leqq 5(1+t^2) \exp[k(1+t^4)] \, \|w(0)\|^2$$

mit einer nur von b_2, d.h. nur von $\hat{E}$ abhängigen Zahl k, q.e.d.

Aus Satz 3 folgt fast unmittelbar die *stetige Abhängigkeit* der Lösungen von den Anfangswerten im Sinne der Norm, zunächst für Lösungen, deren Anfangswerte kompakten Träger haben. Sei φ_n, ψ_n eine Folge solcher Anfangswerte, die im Sinne der Norm konvergiert. Es sei also

$$\lim_{n,m\to\infty} \int \{|\psi_n - \psi_m|^2 + |\operatorname{grad}(\varphi_n - \varphi_m)|^2 + |\varphi_n - \varphi_m|^2\} \, dx$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} \|u_n(0) - u_m(0)\|^2 = 0.$$

Aus Satz 3 folgt dann für die Lösungen $u_n(x, t)$

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n(t) - u_m(t)\| = 0$$

gleichmäßig in jedem Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$, falls nur die Folge der Energie-Konstanten E_n beschränkt ist. Nun ist nach Voraussetzung

$$|F(s)| \leqq |F'(0)| \, s + \tfrac{1}{2} b \, s^2 \leqq b_3 (s + s^3)$$

und daher nach der Ungleichung von Sobolew

$$E_n \leqq \frac{1}{2} \int \{|\psi_n|^2 + |\operatorname{grad} \varphi_n|^2 + b_3 |\varphi_n|^2 + b_3 |\varphi_n|^6\} \, dx$$
$$\leqq \frac{1+b_3}{2} \|u_n(0)\|^2 + \frac{1}{2} b_3 \left(\frac{4}{3}\right)^3 \|u_n(0)\|^6 \leqq \hat{E}, \quad \text{q.e.d.}$$

Für Lösungen in $B(G)$, G eine offene Menge in R^3, gilt folgendes: Sei $\varphi_n(x) \in C^3(G)$, $\psi_n(x) \in C^2(G)$ eine Folge von Anfangswerten und konvergent in dem Sinne, daß

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_K \{|\psi_n - \psi_m|^2 + |\operatorname{grad}(\varphi_n - \varphi_m)|^2 + |\varphi_n - \varphi_m|^2\} \, dx$$
$$= \lim_{n,m\to\infty} \|u_n(0) - u_m(0)\|_K^2 = 0$$

für jede Kugel $K = K_\varrho(x_0)$ mit $\overline{K} \subset G$. Dann gilt für die Lösungen

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n(t) - u_m(t)\|_{K_{\varrho-t}(x_0)} = 0$$

für jede solche Kugel gleichmäßig bezüglich t im Intervall $[0, \varrho]$. Zum Beweis wählt man ein $\varepsilon > 0$, so daß auch noch $\overline{K_{\varrho+\varepsilon}(x_0)} \subset G$ ist, und eine Funktion $\eta(x) \in C^3(R^3)$ mit Träger in $K_{\varrho+\varepsilon}(x_0)$, welche in $K_\varrho(x_0)$ identisch gleich 1 ist. Damit bildet man Anfangswerte $\varphi_n' = \eta \varphi_n$, $\psi_n' = \eta \psi_n$ mit kompaktem Träger und die zugehörigen Lösungen $u_n'(x, t)$. Nach Voraussetzung ist dann

$$\lim_{n,m\to\infty} \|u_n'(0) - u_m'(0)\| = 0$$

und die Folge $u_n'(x, t)$ konvergiert daher im Sinne der Norm gleichmäßig bezüglich t. Da nun aber $u_n'(x, t) \equiv u_n(x, t)$ in $B(K_\varrho(x_0))$ ist, so folgt die Behauptung unmittelbar.

§ 4. Verallgemeinerte Lösungen

Die Paare $\{\varphi, \psi\}$ von Funktionen $\varphi(x) \in C^3(R^3)$, $\psi(x) \in C^2(R^3)$ mit kompaktem Träger bilden einen linearen Raum $\mathfrak{H}_0$. Die vollständige Hülle von $\mathfrak{H}_0$ bezüglich der Norm

$$\|\varphi, \psi\| = \left[\int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + |\varphi|^2\} d x\right]^{\frac{1}{2}}$$

ist ein Hilbert-Raum $\mathfrak{H}$. Die Elemente $\{\varphi, \psi\}$ von $\mathfrak{H}$ sollen *verallgemeinerte Anfangswerte* genannt werden; diese kann man auch beschreiben als Paare komplexwertiger Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, definiert und quadratisch integrierbar über R^3 mitsamt den ersten Ableitungen von $\varphi(x)$ im Sinne der Distributionstheorie.

Für $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}_0$ ist das Energie-Integral

$$E\{\varphi, \psi\} = \tfrac{1}{2} \int \{|\psi|^2 + |\operatorname{grad} \varphi|^2 + F(|\varphi|^2)\} d x$$

definiert; nach einer Abschätzung in §3 ist

$$E\{\varphi, \psi\} \leqq \frac{1 + b_3}{2} \|\varphi, \psi\|^2 + \frac{32}{27} b_3 \|\varphi, \psi\|^6$$

unter den Voraussetzungen von Satz 3 über $F(s)$ mit einer nur von $F(s)$ abhängigen Konstante b_3. Ist nun $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}$ und $\{\varphi_n, \psi_n\}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{H}_0$, welche gegen $\{\varphi, \psi\}$ strebt, so konvergiert die Folge der Lösungen $u_n(x, t)$ des Anfangswertproblems nach Satz 3 im Sinne der Norm

$$\|u(t), u_t(t)\| = \left[\int \{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2\} d x\right]^{\frac{1}{2}}$$

gleichmäßig in jedem Intervall $0 \leqq t \leqq t_0$ und definiert eine für $t \geqq 0$ stetig von t abhängende Schar von Elementen $\{u(t), u_t(t)\} \in \mathfrak{H}$, die als *verallgemeinerte Lösung* des Anfangswertproblems mit den Anfangswerten $\{\varphi, \psi\}$ bezeichnet werden soll. Diese Definition ist sinnvoll, da die Schar $\{u(t), u_t(t)\}$ durch $\{\varphi, \psi\}$ eindeutig bestimmt ist. Die Anfangswerte $\{\varphi, \psi\} \in \mathfrak{H}$ erfüllen die allgemeinsten der in [2] von FRIEDRICHS und LEWY für die lineare Wellengleichung angegebenen *fortsetzbaren* Anfangsbedingungen. Das obige Ergebnis zeigt, daß dies auch für die nichtlineare Wellengleichung fortsetzbare Anfangsbedingungen sind. Man kann noch bessere Übereinstimmung mit [2] erzielen, indem man auch für die nichtlineare Wellengleichung verallgemeinerte Lösungen in beliebigen Bestimmtheitsbereichen $B(G)$ definiert, die Methode hierzu ist am Ende des §3 schon angegeben worden.

Zur Definition des Energie-Integrals für verallgemeinerte Lösungen benützt man den folgenden

HILFSSATZ 3. *$F(s)$ genüge den Voraussetzungen von Satz 3. Dann ist $E\{\varphi, \psi\}$ eine stetige Funktion von $\{\varphi, \psi\}$ im Sinne der Norm.*

BEWEIS. Aus $|F''(s)| \leqq b$ folgt

$$|F(|z_1|^2) - F(|z_2|^2)| \leqq b_4 (1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)(|z_1| + |z_2|)|z_1 - z_2|$$

und damit für $\{\varphi_i, \psi_i\} \in \mathfrak{H}_0$

$$
\begin{aligned}
&\left|\int \{F(|\varphi_1|^2) - F(|\varphi_2|^2)\}\, d\,x\right| \\
&\quad \leqq b_4 \left[\int (1 + |\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)^2 (|\varphi_1| + |\varphi_2|)^2\, d\,x\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int |\varphi_1 - \varphi_2|^2\, d\,x\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leqq b_4 \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\left[\int (|\varphi_1| + |\varphi_2|)^2\, d\,x\right]^{\frac{1}{2}} + \left[2\int (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2)^3\, d\,x\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\quad \leqq b_4 \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\|\varphi_1, \psi_1\| + \|\varphi_2, \psi_2\| + \sqrt{8}\,(\tfrac{4}{3})^{\frac{3}{2}} (\|\varphi_1, \psi_1\|^3 + \|\varphi_2, \psi_2\|^3)\right\}.
\end{aligned}
$$

Insgesamt hat man

$$
\begin{aligned}
&|E\{\varphi_1, \psi_1\} - E\{\varphi_2, \psi_2\}| \\
&\leqq \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\| \left\{\frac{1 + b_4}{2} (\|\varphi_1, \psi_1\| + \|\varphi_2, \psi_2\|) + \sqrt{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}} b_4 (\|\varphi_1, \psi_1\|^3 + \|\varphi_2, \psi_2\|^3)\right\},
\end{aligned}
$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

SATZ 4. *Für eine verallgemeinerte Lösung $\{u(t), u_t(t)\}$ existieren die Integrale*

$$
\begin{aligned}
E &= \tfrac{1}{2} \int \{|u_t|^2 + |\operatorname{grad} u|^2 + F(|u|^2)\}\, d\,x \\
\mathfrak{P} &= -\int \operatorname{Re}(\bar{u}_t \operatorname{grad} u)\, d\,x \\
Q &= -\int \operatorname{Im}(\bar{u}_t\, u)\, d\,x
\end{aligned}
$$

(Energie, Impuls und Ladung) für $t \geqq 0$ und sind von t unabhängig. Die Lösung $\{u(t), u_t(t)\}$ sowie die obigen Integrale hängen stetig im Sinne der Norm von den Anfangswerten ab. Satz 3 gilt unverändert für verallgemeinerte Lösungen.

BEWEIS. Sei $u_n(x, t)$ eine Folge von eigentlichen Lösungen, deren Anfangswerte kompakten Träger haben und gegen die Anfangswerte $\{\varphi, \psi\}$ der verallgemeinerten Lösung streben. Da $u_n(x, t)$ bei festem t für hinreichend große x verschwindet, existieren die entsprechenden Integrale E_n, $\mathfrak{P}_n$, Q_n. Durch Differentiation nach t unter dem Integralzeichen und mit Benutzung der Differentialgleichung verifiziert man leicht, daß die Integrale von t nicht abhängen. Die Behauptung folgt nun durch Grenzübergang, da E nach Hilfssatz 3 stetig im Sinne der Norm von u abhängt und da dies für $\mathfrak{P}$ und für Q offenbar auch der Fall ist. Die Ungleichung von Satz 3 geht durch Grenzübergang über in

$$
\|u_1(t) - u_2(t), u_{1t}(t) - u_{2t}(t)\|^2 \leqq 5\,(1 + t^2) \exp\,[k(1 + t^4)]\, \|\varphi_1 - \varphi_2, \psi_1 - \psi_2\|^2
$$

mit einer nur von $\max[E\{\varphi_1, \psi_1\}, E\{\varphi_2, \psi_2\}]$ abhängigen Zahl k. Daraus folgt die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten.

Der Satz zeigt, daß die verallgemeinerten Lösungen alle physikalisch wichtigen Eigenschaften besitzen; zugleich ist klar, daß man den Raum $\mathfrak{H}$ der Anfangswerte nicht wesentlich erweitern kann, ohne die Existenz des Energie-Integrals aufzugeben. Für manche Funktionen $F(s)$, so z.B. für die zur Mesonengleichung von SCHIFF gehörende Funktion $F(s) = \mu^2 s + \frac{1}{2}\eta^2 s^2$, ist sogar $\mathfrak{H}$ *identisch* mit der Klasse der Anfangswerte mit endlichem Energie-Integral. Ohne Zweifel sind daher die hier konstruierten verallgemeinerten Lösungen die allgemeinsten Lösungen mit physikalischer Bedeutung. Während nun die

Theorie in *dieser* Hinsicht wenig zu wünschen übrig läßt, bleibt hinsichtlich der Klasse der betrachteten Wellengleichungen manche Frage offen. Insbesondere wäre es nützlich, zu wissen, ob es Funktionen $F(s)$ von stärkerem Wachstum gibt, für die das Anfangswertproblem im Großen in ähnlicher Allgemeinheit lösbar ist.

Zusatz bei der Korrektur am 28. 9. 61. J. L. LIONS hat dem Verf. im Juni 1961 noch unveröffentlichte weitergehende Resultate in bezug auf die verallgemeinerten Lösungen mitgeteilt. Seine Methode liefert direkt die verallgemeinerte Lösung der entsprechenden inhomogenen Differentialgleichung in beliebig vielen (n) Raumvariablen unter Voraussetzungen, die für $n = 3$ mit denen von Satz 3 übereinstimmen, und erlaubt außerdem die Lösung gemischter Rand-Anfangswert-Probleme für dieselbe Gleichung.

Literatur

[1] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik, Bd. II. Berlin 1937.

[2] FRIEDRICHS, K., u. H. LEWY: Über fortsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen. Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1932, 135—143.

[3] JÖRGENS, K.: Über die nichtlinearen Wellengleichungen der mathematischen Physik. Math. Annalen **138**, 179—202 (1959).

[4] NIRENBERG, L.: On elliptic partial differential equations. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. III **13**, 115—162 (1959).

[5] SCHIFF, L. I.: Nonlinear meson theory of nuclear forces I. Physic. Rev. **84**, 1—9 (1951).

[6] SOBOLEW, S.: Sur un théorème d'analyse fonctionnelle. Mat. Sbornik **4**, 471—496 (1938).

Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 15. April 1961)