Werk

Titel: Einige Bemerkungen zur Theorie der maximalen Ideale.

Autor: Neubauer, Gerhard

Jahr: 1961

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0077|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

NEUBAUER, G.
Math. Zeitschr. 77, 285–294 (1961)

Einige Bemerkungen zur Theorie der maximalen Ideale

Herrn FRIEDRICH KARL SCHMIDT zum 60. Geburtstag am 22. 9. 1961 gewidmet

Von

GERHARD NEUBAUER

Im Buch von HILLE-PHILLIPS [3], p. 718, findet sich eine Bemerkung zum bekannten Satz von GELFAND [1] für kommutative Banach-Algebren (s. z. B. [3], Theor. 24.13.1), in der darauf hingewiesen wird, daß er sich auch auf gewisse nichtkommutative Fälle ausdehnen läßt. Bei näherer Betrachtung stellt sich heraus, daß die dort angedeutete Bedingung — nämlich Existenz einer „ausreichenden" Schar zweiseitiger maximaler Ideale — sogar notwendig ist und zu einigen weiteren Kriterien für die Gültigkeit des Satzes führt. Diese Kriterien werden im folgenden abgeleitet. Es wird außerdem versucht, sie auch auf andere als Banach-Algebren auszudehnen. Um die verschiedenen Aussagen abzugrenzen, ist eine Reihe von Beispielen angefügt.

Zuvor einiges zur Bezeichnungsweise: A sei eine Algebra über den komplexen Zahlen, nicht notwendig mit Einselement e. Wo Aussagen topologischer Natur gemacht werden, sei A ein topologischer Vektorraum und die Multiplikation in den einzelnen Variablen getrennt stetig. A braucht im allgemeinen nicht lokalkonvex zu sein. Ist $x+y-xy=0$, so heißt y Rechtsquasiinverse zu x, entsprechend sind Linksquasiinverse und Quasiinverse x^- definiert (im folgenden mit R.q.i. bzw. L.q.i. bzw. Q.i. bezeichnet). Man vgl. z. B. HILLE-PHILLIPS [3], p. 681. $\sigma'(x)$, das „algebraische" Spektrum, sei die Menge aller komplexen λ, für die x/λ keine Q.i. besitzt, und $\lambda=0$ liege in $\sigma'(a)$, wenn x keine Inverse hat. Ψ (bzw. Φ) sei die Gesamtheit aller (bzw. aller stetigen) multiplikativen linearen Funktionale auf A, die in e nicht verschwinden (falls es zu A gehört). $\Psi(x)$ bzw. $\Phi(x)$ sei die Menge aller $\psi(x)$ mit $\psi\in\Psi$ bzw. aller $\varphi(x)$ mit $\varphi\in\Phi$.

HILFSSATZ 1. $\Phi(x)\subset\Psi(x)\subset\sigma'(x)$.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen: $\Psi(x)\subset\sigma'(x)$. Sei $\lambda=\psi(x)$. Ist $\lambda=0$, $e\notin A$, dann liegt 0 in jedem Falle in $\sigma'(x)$. Ist $e\in A$, so ist $\psi(e)\neq 0$, aber $\psi(xy)=\psi(x)\,\psi(y)=0$, also $xy\neq e$ für jedes y, d.h. $0\in\sigma'(x)$. Sei $\lambda\neq 0$, $y=x/\lambda$, dann ist $\psi(y)=1$, $\psi(y+z-yz)=\psi(y)+\psi(z)-\psi(y)\psi(z)=1\neq 0$, also $y+z-yz\neq 0$, $\lambda\in\sigma'(x)$.

Der Satz von GELFAND läßt sich nun reduzieren auf die Aussage

$$\Phi(x)=\sigma'(x). \tag{G}$$

Alle übrigen Aussagen folgen unmittelbar (vgl. z.B. [3], Th. 24.13.1). Außer (G) wird noch folgende schwächere Eigenschaft betrachtet:

$$(G') \qquad \Psi(x) = \sigma'(x).$$

Zur Definition der regulären Ideale und ihrem Zusammenhang mit der Quasiinversion sei auf LOOMIS [6], §§ 20 und 21 verwiesen.

HILFSSATZ 2. *Jedes zweiseitige reguläre maximale Rechts-(Links-)ideal M ist ein reguläres zweiseitiges Ideal und jede Links-(Rechts-)einheit bezüglich M ist eine Einheit bezüglich M.*

BEWEIS. Sei j Linkseinheit bezüglich M, dann ist $j^2 \notin M$, A/M ist also keine Nullalgebra, nach [3], Th. 24.6.1 daher ein Schiefkörper, enthält mithin ein Einselement, das natürlich mit der Linkseinheit j zusammenfallen muß. M ist folglich ein reguläres zweiseitiges Ideal mit relativer Einheit j.

Dies braucht für beliebige (nicht maximale) Ideale nicht zu gelten:

BEISPIEL 1. A sei die durch die Relationen $b^2 = ba = 0$, $ab = b$, $a^2 = a$ ihrer Basiselemente a und b bestimmte zweidimensionale (Banach-)Algebra. a ist hier Linkseinheit, eine Rechtseinheit existiert nicht. Das (zweiseitige) Nullideal ist also nur als Rechtsideal regulär.

HILFSSATZ 3. *In A sei jedes x, das keine R.q.i. besitzt, Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen maximalen Ideals. Dann besitzt x genau dann eine Q.i., wenn es eine R.q.i. oder eine L.q.i. besitzt. (Das gleiche gilt natürlich auch, wenn in der Voraussetzung R.q.i. durch L.q.i. ersetzt wird.*[1])

BEWEIS. x besitze keine R.q.i. Dann gibt es ein reguläres zweiseitiges maximales Ideal M mit x als relativer Einheit. x kann daher auch keine L.q.i. besitzen. Es folgt: Wenn x eine L.q.i. besitzt, dann auch eine R.q.i., also auch eine Q.i. Sei nun y die R.q.i. von x, dann ist x die L.q.i. von y, y hat eine Q.i., diese muß gleich x sein, y ist die Q.i. von x.

Eine Umkehrung gilt nicht. Insbesondere ist die Folgerung des Satzes (im Gegensatz zur Voraussetzung) keine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit von (G) in Banach-Algebren:

BEISPIEL 2. A sei die Banach-Algebra $\mathfrak{E}(\mathbf{C}^n)$ aller linearen Endomorphismen des n-dimensionalen komplexen Vektorraums. Eine singuläre Matrix hat weder Rechts- noch Linksinverse. A erfüllt also die Folgerung des Hilfssatzes, hat aber bekanntlich kein nichttriviales zweiseitiges Ideal.

SATZ 1. (G') (*bzw.* (G)) *gilt genau dann, wenn jedes x, das keine R.q.i. besitzt, Linkseinheit bezüglich eines regulären (bzw. abgeschlossenen regulären) Rechtsideals der Kodimension 1 ist. Eine analoge Aussage gilt für Linksideale.*

BEWEIS. 1. Diese Ideale sind sämtlich maximal und zweiseitig. Sei j eine Linkseinheit zu I. Dann hat jedes $y \in A$ die Form $\alpha j + i$, $i \in I$, also $yI \subset I$, da $jI \subset I$. Die Maximalität folgt unmittelbar. Die Regularität ist notwendig

[1]) Diesen Hilfssatz wie auch einige weitere Anregungen verdanke ich Herrn ULRICH BECK, Metzingen.

für den Schluß. Das von a in Beispiel 1 erzeugte Linksideal hat die Kodimension 1, ist aber nicht zweiseitig.

2. Es gelte nun (G'). x besitze keine R.q.i., also auch keine Q.i., d.h. $1 \in \sigma'(x)$. Es gibt ein ψ mit $\psi(x)=1$. Sei $I=\{y \mid \psi(y)=0\}$. $\psi(xz-z)=\psi(x)\psi(z)-\psi(z)=0$, also ist $xz-z \in I$ für alle z. Außerdem hat I die Kodimension 1. Gilt (G), so kann man $\psi \in \Phi$ wählen und I ist abgeschlossen.

3. Sei umgekehrt die Bedingung erfüllt und $\lambda \in \sigma'(x)$. Es gilt, ein ψ zu finden mit $\psi(x)=\lambda$. Für $\lambda=0$, $e \notin A$ erfüllt $\psi \equiv 0$ die Forderung. Ist $\lambda=0$, $e \in A$, so setze man $y=e-x$, ist $\lambda \neq 0$, so sei $y=x/\lambda$. Man kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\lambda=1$ annehmen: x hat keine Q.i., nach 1. und Hilfssatz 3 also auch keine R.q.i., x ist mithin nach Voraussetzung Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen maximalen Ideals M der Kodimension 1, d.h. $A/M \cong \mathsf{C}$, $x \notin M$, $x^2-x \in M$. Der durch A/M definierte Homomorphismus ψ bildet x auf 1 ab. Ist M abgeschlossen, so ist ψ sogar stetig.

Das Quasiradikal Q besteht aus allen Elementen x mit $\sigma'(x) \subset \{0\}$, das Radikal R ist das größte in Q enthaltene zweiseitige Ideal (vgl. HILLE-PHILLIPS [3], p. 699. Es handelt sich hier um das Jacobsonsche Radikal). Q braucht selbst kein Ideal zu sein, ist es eines, so ist $Q=R$.

HILFSSATZ 4. *Gilt* (G'), *so ist* $Q=R$.

BEWEIS. Q besteht aus allen Elementen mit $\sigma'(x)=\{0\}$. Denn da z.B. $\sigma'(0)=\{0\}$, kann Ψ nicht leer sein, also kann auch $\sigma'(x)$ nicht leer sein. Q ist der Durchschnitt aller Nullideale der Abbildungen ψ, mithin selbst ein Ideal, d.h. $Q=R$.

Die Umkehrung braucht selbst für Banach-Algebren nicht zu gelten:

BEISPIEL 3. Die formalen Potenzprodukte in zwei Variablen sind abzählbar. Sei $\{z_\nu\}$ eine solche Abzählung, d.h. die z_ν haben die Gestalt $a_1 a_2, \ldots, a_n$, wo $a_\mu = x$ oder $a_\mu = y$. A bestehe aus allen formalen Reihen $\sum \alpha_\nu z_\nu$, für die $\sum |\alpha_\nu|$ konvergiert. In A sei die Norm $\|\sum \alpha_\nu z_\nu\| = \sum |\alpha_\nu|$ eingeführt. Damit ist A offenbar ein (zu l^1 isomorpher) Banach-Raum. Nun ist $\sum\limits_\nu |\alpha_\nu| \sum\limits_\mu |\beta_\mu| = \sum\limits_{\nu,\mu} |\alpha_\nu|\,|\beta_\mu|$, wobei die zweite Reihe konvergiert und sich beliebig umordnen und zusammenfassen läßt. Definiert man das (nichtkommutative!) Produkt von $\sum\limits_\nu \alpha_\nu z_\nu$ und $\sum\limits_\mu \beta_\mu z_\mu$, wie sich dies aus dem Produkt der einzelnen Monome ergibt, so erhält man eine Reihe der Gestalt $\sum\limits_\tau \gamma_\tau z_\tau$, wo $\gamma_\tau = \sum\limits_{\langle \nu,\mu\rangle=\tau} \alpha_\nu \beta_\mu$ und $\langle \nu, \mu\rangle = \tau$, wenn $z_\nu z_\mu = z_\tau$. Offenbar gibt es für jedes τ nur endlich viele Paare (ν, μ) mit $\langle \nu, \mu\rangle = \tau$ und jedes Paar bestimmt genau ein τ. Also ist

$$\sum_\tau |\gamma_\tau| \leqq \sum_\tau \sum_{\langle \nu,\mu\rangle=\tau} |\alpha_\nu \beta_\mu| = \sum_{\nu,\mu} |\alpha_\nu|\,|\beta_\mu| = \sum_\nu |\alpha_\nu| \sum_\mu |\beta_\mu|.$$

Das Produkt liegt in A und die Norm ist multiplikativ. A ist eine Banach-Algebra. Sei nun $a \in A$, $a \neq 0$. a hat ein Monom kleinsten Grades mit nichtverschwindendem Koeffizienten: $\alpha_\nu z_\nu$. Es soll gezeigt werden: a^2 hat ein Monom

kleinsten Grades $z_\tau = z_\nu z_\nu$ mit dem Koeffizienten α_ν^2. Daß $z_\tau = z_\nu z_\nu$ in a^2 von kleinstem Grade ist, folgt unmittelbar. Außerdem kommt α_ν^2 in der Summe von γ_τ vor. Sei nun $\tau = \langle \nu', \mu' \rangle$. Dann sind die Grade von $z_{\nu'}$ und $z_{\mu'}$, wenn ihre Koeffizienten in a nicht verschwinden, mindestens gleich dem von z_ν und, da ihre Summe gerade zweimal den Grad von z_ν ausmachen soll, sogar gleich diesem. Dann besteht aber $z_{\nu'}$ gerade aus der ersten und $z_{\mu'}$ aus der zweiten Hälfte der Faktoren von z_τ, d.h. aber $z_{\nu'} = z_{\mu'} = z_\nu$, also ist α_ν^2 der einzige Summand in $\gamma_\tau, \gamma_\tau = \alpha_\nu^2$. Es folgt durch Induktion: a^{2^n} hat ein Monom kleinsten Grades mit Koeffizienten $\alpha_\nu^{2^n}$. Also ist $\|a^{2^n}\| \geqq |\alpha_\nu|^{2^n}$ und, da nach einer bekannten Formel in Banach-Algebren $\max\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \sigma'(a)\} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}$ gilt, ist $\max\{|\lambda| \,|\, \lambda \in \sigma'(a)\} \geqq |\alpha_\nu| > 0$. Es folgt $Q = \{0\}$, also auch $R = \{0\} = Q$. Da aber $xy - yx \neq 0$, also $xy - yx \notin R$, gilt nach dem folgenden Hilfssatz auch nicht (G').

HILFSSATZ 5. *Gilt* (G'), *so liegen alle Kommutatoren* $xy - yx$ *im Radikal* R.

BEWEIS. Für jedes ψ gilt $\psi(xy - yx) = \psi(x)\psi(y) - \psi(y)\psi(x) = 0$. Also liegt $xy - yx$ in Q. Q ist aber nach Hilfssatz 4 gleich R.

HILFSSATZ 6. *Besitzt jeder Kommutator* $xy - yx$ *eine R.q.i., so ist jedes reguläre maximale Rechtsideal zweiseitig. Der Satz gilt auch, wenn man „Rechts" durch „Links" ersetzt.*

BEWEIS. Sei M ein solches Ideal, j eine Linkseinheit dazu. Es ist zu zeigen $AM \subset M$. Angenommen $AM \not\subset M$, dann gibt es ein x, so daß $xM \not\subset M$. $xM + M$ ist ein Rechtsideal, das M echt enthält, also ist $xM + M = A$. Es gibt folglich Elemente y und m in M mit $xy + m = j$. Sei z die R.$q.i.$ von $xy - yx$, also $xy - yx + z - (xy - yx)z = 0$. Durch Elimination von xy erhält man $j - m - yx + z - (j - m - yx)z = 0$ oder $j = (jz - z) - mz + m - y(xz) + yx$. Die rechte Seite liegt in M, also auch j im Widerspruch zur Voraussetzung, daß j Linkseinheit bezüglich M ist.

Es läßt sich nun leicht zeigen (Satz 3 unten), daß ein Teil der vorangehenden Aussagen im Fall einer Banach-Algebra mit (G) äquivalent ist. Dabei werden jedoch nur folgende Eigenschaften der Banach-Algebren benutzt:

(B) 1. *Besitzt* x *keine R.q.i.* (*keine L.q.i.*), *so ist* x *Linkseinheit (Rechtseinheit) bezüglich eines abgeschlossenen regulären maximalen Rechtsideals (Linksideals).* 2. *Jedes abgeschlossene reguläre zweiseitige maximale Ideal hat Kodimension* 1.

(B.1) folgt aus (G) (s. Satz 1), (B.2) nicht:

BEISPIEL 4. Sei A die Algebra aller komplexen Folgen $a = \{\alpha_\nu\}$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation. Offenbar besteht $\sigma'(a)$ aus den Elementen der Folge. $\psi_n(a) = \alpha_n$ ist ein multiplikatives Funktional, also gilt (G'). Sei $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter von Teilmengen der ganzen Zahlen $\mathbf{N}$, der keine endlichen Mengen enthält. Die Existenz solcher Ultrafilter folgt aus dem Satz von ZORN. I enthalte alle Folgen a, die auf einer Menge $\mathbf{N}' \in \mathfrak{U}$ verschwinden. I ist ein zweiseitiges maximales Ideal, seine Kodimension ist nicht 1 (sie ist nicht einmal abzählbar). Daß I ein Ideal ist, folgt aus der Filter-

eigenschaft von $\mathfrak{U}$. Sei $a \notin I$, dann gehört die Menge der ν, für die $\alpha_\nu = 0$, nicht zu $\mathfrak{U}$, folglich gehört, da $\mathfrak{U}$ ein Ultrafilter ist, ihr Komplement M zu $\mathfrak{U}$. Sei $\beta_\nu = \alpha_\nu^{-1}$ für $\nu \in \mathsf{M}$, im übrigen beliebig, $b = \{\beta_\nu\}$. Dann verschwindet $ab - e$ auf M, gehört also zu I. A/I ist ein Körper, I ist maximal. Sei $a = \{\nu\}$. Es gibt kein λ und keine unendliche Teilmenge M für die $\lambda - \nu = 0$ ist für $\nu \in \mathsf{M}$. Also gilt $a - \lambda e \notin I$ für alle λ, I hat nicht die Kodimension 1. Nun sei in A eine Topologie so eingeführt, daß alle ψ_n stetig sind (dann gilt (G)) und I abgeschlossen ist (dann gilt (B.2) nicht): Sei in A/I die feinste lokalkonvexe Topologie eingeführt, $\hat{q}$ eine (stetige) Halbnorm darin, dann ist auch $\hat{q}'(\hat{x}) = \hat{q}(\hat{a}\hat{x})$ eine Halbnorm und daher stetig. Sei $q(x) = \hat{q}(\hat{x})$, wo $\hat{x} = x + I$, $\|x\|_n = |\psi_n(x)|$. Die Topologie in A sei nun durch die Halbnormen $q_n(x) = q(x) + \|x\|_n$ eingeführt. $q_n(ax) = q'(x) + |\alpha_n| \, \|x\|_n$, also ist die Multiplikation stetig. Die ψ_n sind ebenfalls stetig und I ist abgeschlossen, da es der Durchschnitt der Nullräume der stetigen Halbnormen q ist. Es bleibt zu bemerken, daß A nicht folgenvollständig ist (A/I dagegen ist vollständig, vgl. KÖTHE [5], p. 217). Sei nämlich $a_n = \{\alpha_\nu^{(n)}\}$ mit $\alpha_\nu^{(n)} = 1$ für $\nu \leqq n$, $\alpha_\nu^{(n)} = 0$ für $\nu > n$. Alle a_n liegen in I. Daher ist $q(a_m - a_k) = 0$ für jedes q, außerdem $\|a_m - a_k\|_n = |\psi_n(a_m - a_k)| = 0$ für $m, k \geqq n$. Der Limes müßte in I liegen, also mindestens eine (sogar unendlich viele) verschwindende Komponenten besitzen, z. B. die ν-te. Daraus würde aber $\|a - a_n\|_\nu = 1$ folgen für $n \geqq \nu$, a_n konvergiert also gegen kein $a \in A$. Sei nun andererseits N mit der diskreten Topologie versehen. Dann ist $A = C(\mathsf{N})$. Mit der m-Topologie (HEWITT [2], Def. 3, p. 48[2]) wird A zu einem topologischen Q-Ring ([2], Th. 3 und Th. 39). Es folgt, daß die ψ_n alle stetig sind und I abgeschlossen. Es gilt also (G), aber nicht (B.2). A ist in diesem Falle sogar vollständig, wie man leicht nachprüfen kann, aber nicht lokalkonvex (es ist nicht einmal ein topologischer Vektorraum).

Es bleibt ungeklärt, ob etwa (B.2) in einer vollständigen lokalkonvexen Algebra aus (G) folgt.

A heißt eine Q-Algebra (KAPLANSKY [4]), wenn es eine Nullumgebung gibt, deren Elemente alle Q.i. besitzen. $(x/\lambda)^-$ heißt die Dissolvente von x im Punkte λ. x heißt spektralbeschränkt (in A), wenn die Dissolvente von x für genügend großes λ existiert, dort stetig ist und gegen 0 geht für $\lambda \to \infty$.

SATZ 2. (a) *Ist A eine Q-Algebra so gilt* (B.1).

(b) *Ist A lokalkonvex und ist jedes Element in A spektralbeschränkt, so gilt* (B.2).

BEWEIS. a) Läßt man das Wort „abgeschlossen" aus, so gilt (B.1) für jede Algebra (LOOMIS [6], 21.D). In einer Q-Algebra ist aber jedes reguläre maximale Ideal abgeschlossen (HILLE-PHILLIPS [3], Th. 24.6.4). Also gilt (B.1).

b) Sei M ein abgeschlossenes zweiseitiges reguläres maximales Ideal mit relativer Einheit j. A/M ist ein Schiefkörper mit Einselement $\hat{j}$, wo $\hat{x} = x + M$. Sei x gegeben. Für große λ existiert die Dissolvente $y(\lambda) = (x/\lambda)^-$. Aus

[2]) HEWITT betrachtet reelle Algebren. Der komplexe Fall läßt sich völlig analog behandeln.

$\frac{x}{\lambda}+y(\lambda)-\frac{x}{\lambda}y(\lambda)=0$ folgt $\frac{1}{\lambda}(\hat{\jmath}-\hat{y}(\lambda))(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})=\hat{\jmath}$ und damit $\frac{1}{\lambda}(\hat{\jmath}-\hat{y}(\lambda))=(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$. Da die Abbildung stetig ist, folgt aus der Voraussetzung, daß jedes $\hat{x}$ spektralbeschränkt ist. Die Resolvente $(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$ ist sogar überall, wo sie definiert ist, stetig und ihr Definitionsbereich ist offen. Sei nämlich $\hat{z}=(\lambda_0\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$. $\hat{z}$ ist spektralbeschränkt. Damit ergibt sich unmittelbar (vgl. [8], 2.17), daß $(\lambda\hat{\jmath}-\hat{x})^{-1}$ in einer Umgebung von λ_0 definiert und stetig ist. Damit ist für A/M die Bedingung (iv') in WILLIAMSON [12], Theorem 1 erfüllt. Die Bedingungen (i'), (ii) und (iii) gelten ohnehin, da M abgeschlossen ist. Also ist $A/M\cong\mathbf{C}$, d.h. M hat die Kodimension 1.

Unter die Algebren, für die Satz 2 gilt, fallen insbesondere die Banach-Algebren oder allgemeiner die Algebren mit stetigen Inversen (WAELBROECK [9]), für die im kommutativen Falle die Gültigkeit von (G) bekannt ist. Die Voraussetzungen von Satz 2 sind jedoch noch etwas allgemeiner, wie folgendes Beispiel zeigt:

BEISPIEL 5. Sei I eine überabzählbare Indexmenge. Sei A das direkte Produkt von A_1 und A_2, wo $B_i\cong\mathbf{C}$ $(i\in I)$ und A_1 (bzw. A_2) die topologische (bzw. lokalkonvexe) direkte Summe der B_i ist (vgl. KÖTHE [5], p. 217). Sei $a\in A$ d.h. $a=\{\alpha_i;\beta_i\}$, wobei nur endlich viele α_i und β_i nicht verschwinden. A ist vollständig. Die Multiplikation sei durch $\{\alpha_i;\beta_i\}\{\alpha_i';\beta_i'\}=\{0;\alpha_i\alpha_i'\}$ erklärt. A ist eine Q-Algebra. Denn jedes Element von A besitzt die Q.i. $\{\alpha_i;\beta_i\}^-=\{-\alpha_i;-(\alpha_i^2+\beta_i)\}$, wie man leicht nachprüfen kann. Für beliebiges $\lambda\neq 0$ ist $\left(\frac{1}{\lambda}\{\alpha_i;\beta_i\}\right)^-=\left\{-\frac{\alpha_i}{\lambda};-\left(\frac{\alpha_i^2}{\lambda^2}+\frac{\beta_i}{\lambda}\right)\right\}$. Die Dissolvente ist stetig in λ und geht gegen 0 für $\lambda\to\infty$. Also sind alle a spektralbeschränkt. A ist nach Konstruktion lokalkonvex. Die Quasiinversion ist aber nicht stetig. Die Ungleichung $\sum_i|\beta_i|<1$ definiert eine Nullumgebung U in A_2. Es genügt zu zeigen, daß es in A_1 in jeder beliebigen Nullumgebung Elemente gibt, deren Q.i. in A_2 eine Komponente außerhalb U hat. Die Nullumgebungen in A_1 kann man sich in der Form $\sup_i M_i|\alpha_i|<1$ geben, wo die M_i beliebige nichtnegative reelle Zahlen sind. Sei eine solche Umgebung vorgegeben. Da I nicht abzählbar ist, muß es ein n geben, für das $M_i<\sqrt{n}$ gilt für unendlich viele i, insbesondere also für Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_{2n}$. Sei $\alpha_i=\sqrt{n^{-1}}$ für $i=i_\nu$, $\alpha_i=0$ sonst. Dann ist $\sup_i M_i|\alpha_i|<\sqrt{n}\sqrt{n^{-1}}=1$, a liegt also in der Umgebung. Für a^- gilt aber $\sum_i|\alpha_i^2|=\sum_{\nu=1}^{2n}n^{-1}=2$, a^- liegt nicht in U. Adjungiert man noch ein Einselement, so erhält man eine Algebra, die den Voraussetzungen von Satz 2 genügt, in der die Inversion aber nicht stetig ist.

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind jedoch nicht notwendig für die Gültigkeit von (B). So gibt es kommutative lokal m-konvexe Algebren (MICHAEL [7]), die keine Q-Algebren sind und deren Elemente auch nicht alle spektralbeschränkt sind. Diese erfüllen aber alle (B). Auch die Lokalkonvexität ist nicht notwendig, wie die p-normierten Algebren zeigen (ŻELAZKO [13], Th. 7). Andererseits gibt es selbst vollständige lokalkonvexe Q-Algebren

— so die Algebra $\Phi(\Omega, \emptyset; \Omega)$ in [8], p. 161 — oder nicht lokalkonvexe Q-Algebren, deren Elemente alle spektralbeschränkt sind — so die erste Topologisierung von $C(t)$ in [12], p. 731 —, in denen (B.2) nicht gilt. Führt man schließlich in der Algebra A aller im Innern des Einheitskreises holomorphen und auf dem Rande noch stetigen Funktionen die Norm $\|x\| = \max\{|x(t)| \mid t$ reell, $|t| \leqq 1\}$ ein, so ist A lokalkonvex und jedes x in A spektralbeschränkt. A ist jedoch keine Q-Algebra und erfüllt auch (B.1) nicht. Die beiden letzten Algebren sind allerdings nicht vollständig.

SATZ 3. *Man betrachte die folgenden Aussagen:*

1. Es gilt (G). 2. Es gilt (G'). 3. Besitzt x keine R.q.i., so ist es Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen abgeschlossenen maximalen Ideals. 4. Besitzt x keine L.q.i., so ist es Einheit bezüglich eines regulären zweiseitigen abgeschlossenen maximalen Ideals. 5. Jedes maximale reguläre Rechtsideal ist zweiseitig. 6. Jedes maximale reguläre Linksideal ist zweiseitig. 7. Jeder Kommutator $xy - yx$ liegt im Radikal. 8. Jeder Kommutator liegt im Quasiradikal. 9. Jeder Kommutator besitzt eine Q.i. 10. Jeder Kommutator besitzt eine R.q.i. 11. Jeder Kommutator besitzt eine L.q.i.

Zwischen ihnen bestehen die durch das Diagramm dargestellten Abhängigkeiten:

$$\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \nwarrow\!\!\swarrow 1 \to 2 \to 7 \to 8 \to 9 \nearrow\!\!\searrow \begin{matrix} 10 \to 5 \\ 11 \to 6. \end{matrix}$$

Aus (B.1) *folgt außerdem* $5 \to 3$ *und* $6 \to 4$, *aus* (B.2) $3 \to 1$ *und* $4 \to 1$.

Gilt insbesondere (B), *so sind alle Aussagen äquivalent.*

BEWEIS. Die Folgerungen $1 \to 2$, $7 \to 8$, $8 \to 9$, $9 \to 10$, $9 \to 11$ ergeben sich unmittelbar aus den Definitionen. $2 \to 7$ ist der Inhalt von Hilfssatz 5. Hilfssatz 6 liefert $10 \to 5$ und $11 \to 6$. $1 \to 3$ und $1 \to 4$ folgen aus Satz 1. Es mögen nun (B.1) und 5 gelten. x besitze keine R.q.i., sei also Einheit bezüglich eines abgeschlossenen regulären maximalen Rechtsideals. Dieses ist aber nach 5 und Hilfssatz 2 ein reguläres zweiseitiges maximales Ideal mit Einheit x. Analog folgt $6 \to 4$. Sei (B.2) erfüllt. Es genügt $3 \to 1$ zu zeigen. Jedes der in 3 aufgeführten Ideale hat Kodimension 1. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.

Die in Satz 3 enthaltene Implikation $5 \to 1$ verallgemeinert den üblichen Satz für kommutative und auch den für zweiseitige Banach-Algebren (vgl. [3], 24.9.9). Dazu zwei Beispiele:

BEISPIEL 6. Sei A_1 (bzw. A_2) die dreidimensionale Algebra mit den Basiselementen a, b, c und den Relationen $cx = xc = 0$ für alle x, $a^2 = b^2 = 0$, $ab = -ba = c$ (bzw. $cx = xc = 0$, $a^2 = b^2 = ba = 0$, $ab = c$). Sei A_1^+ (bzw. A_2^+) die durch Adjunktion eines Einselementes aus A_1 (bzw. A_2) erhaltene (Banach-) Algebra. Die Ideale in A_1^+ sind alle zweiseitig. A_1^+ ist jedoch nicht kommutativ. In A_2^+ sind alle maximalen Rechtsideale zweiseitig (A_2 ist das einzige), dagegen erzeugt b ein (nicht zweiseitiges) Rechtsideal und a ein ebensolches Linksideal. A_2^+ ist also nicht zweiseitig.

Daß einige der in den Beispielen vorkommenden Algebren Radikalalgebren sind, die vom Standpunkt des Satzes von GELFAND wenig Bedeutung haben, da er in ihnen trivialerweise gilt, hat seinen Grund darin, daß es bei den behandelten Kriterien im wesentlichen um Eigenschaften des Radikals geht. Man kann leicht Beispiele finden, die keine Radikalalgebren sind. Man erweitere etwa diese Radikalalgebren oder betrachte z.B. passende Algebren von Dreiecksmatrizen oder Integraloperatoren.

Zum Abschluß noch zwei Fälle, die in Satz 3 nicht oder nur unbefriedigend behandelt sind:

Für die vollständigen lokal m-konvexen Algebren gilt ebenfalls, wenn sie kommutativ sind, der Satz von GELFAND (MICHAEL [7], 5.6). Es gelten dort auch (B.1) und (B.2). Für die Ableitung von (B.1) wird aber auch die Kommutativität benutzt ([7], 5.9). Es ist also nicht möglich, ohne weiteres Satz 3 auf vollständige lokal m-konvexe Algebren zu übertragen. Es bleibt insbesondere die Frage, ob Kommutativität modulo dem Radikal genügt, damit (B.1) gilt (vgl. dazu [7], § 9). Dagegen ergibt sich unmittelbar eine hinreichende Bedingung aus der Darstellung der vollständigen lokal m-konvexen Algebren als projektiver Limes von Banach-Algebren. Man vgl. auch [13], § 8.

SATZ 4. *Ist A projektiver Limes (bzw. topologischer projektiver Limes) von Algebren A_i und gilt in jedem A_i* (G′) (*bzw.* (G)), *so auch in A*[3]).

BEWEIS. Es genügt zu zeigen: Wenn x keine Q.i. besitzt, so existiert ein $\psi \in \Psi$ (bzw. $\in \Phi$) mit $\psi(x)=1$. Es gibt ein i, so daß $x_i=\pi_i(x)$ keine Q.i. besitzt. Der Beweis verläuft wie in [7], Th. 5.2.a. Folglich gibt es ein $\psi_i \in \Psi_i$ mit $\psi_i(x_i)=1$. $\psi(x)=\psi_i(\pi_i(x))$ ist das gewünschte Funktional. Ist A topologischer projektiver Limes und gilt (G) in A_i, so sind ψ_i und π_i stetig und damit auch ψ.

Es bleibt die Frage offen, ob bei vollständigen lokal m-konvexen Algebren die Umkehrung gilt: Es gelte (G). Existiert dann ein Fundamentalsystem von multiplikativ konvexen Nullumgebungen U_i, so daß (G) für alle $\bar{A}_i$ gilt?

Der zweite Fall betrifft ein Ergebnis von WAELBROECK ([10], § 5) über die Gültigkeit von (G′), das in Satz 5 verallgemeinert wird.

HILFSSATZ 7. *Es existiere in A eine submultiplikative Halbnorm $h(a)$ mit der Eigenschaft* $\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma'(a)\} \leqq h(a)$. *Außerdem liege jeder Kommutator $xy-yx$ im Radikal. Dann gilt* (G′).

BEWEIS. x besitze keine Q.i., sei also Einheit bezüglich eines regulären maximalen einseitigen Ideals M. Sei $M'=\{a \mid \inf\{h(a-m) \mid m \in M\}=0\}$. M' ist ein (einseitiges) Ideal, das M enthält, nach Hilfssatz 6 ist es daher zweiseitig. $x-m$ ist Einheit modulo M für jedes $m \in M$, d.h. $1 \in \sigma'(x-m)$, also $h(x-m) \geqq 1$ für alle m, $x \notin M'$. Es folgt $M=M'$. M' ist offenbar bezüglich der Halbnorm h abgeschlossen. Also ist A/M ein normierter Körper. Es folgt $A/M \cong \mathbf{C}$, M hat Kodimension 1. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.

[3]) Zu den Definitionen vgl. man MICHAEL [7] und KÖTHE [5], p. 232. Man beachte nur, daß die benutzten Abbildungen hier Algebrenhomomorphismen sein müssen.

SATZ 5. *Sei A lokalkonvex und folgenvollständig. Das von den Kommutatoren erzeugte zweiseitige abgeschlossene Ideal I liege im Radikal. Dann gibt es eine alle spektralbeschränkten Elemente x umfassende Teilalgebra A^*, für die* (G') *gilt.*

BEWEIS. Sei $a \in A$, $\hat{a}$ die Restklasse in A/I, $\tilde{a}$ die Restklasse in A/R. Dann ist bekanntlich $\sigma'(a)=\sigma'(\tilde{a})$. Andererseits gilt $\sigma'(a) \geqq \sigma'(\hat{a}) \geqq \sigma'(\tilde{a})$. Also gilt $\sigma'(a)=\sigma'(\hat{a})$. Sei $h(a)=\inf\{M \mid \{a^n M^{-n}\}$ beschränkt$\}$. a ist genau dann spektralbeschränkt, wenn $h(a)<\infty$. A/I braucht als lokalkonvexe Algebra nicht mehr folgenvollständig zu sein. Sei darum in A die durch die lokalkonvexe Topologie bestimmte Schrankenstruktur eingeführt[4]). A ist dann eine vollständige Schrankenalgebra (algèbre à bornés). I ist auch für die Schrankenstruktur abgeschlossen. A/I ist eine vollständige Schrankenalgebra. Von der Schrankenstruktur in A/I ausgehend kann man nun definieren $h(\hat{a}) = \inf\{M \mid \{\hat{a}^n M^{-n}\}$ beschränkt$\}$. Dann ist $h(\hat{a}) \leqq h(a)$. Sei $\hat{h}(a)=h(\hat{a})$. A^* bestehe aus allen a mit $\hat{h}(a)<\infty$. A/I ist kommutativ, man erhält daher in gleicher Weise wie in [*10*], p. 47, daß $h(\hat{a})$ in A^*/I eine submultiplikative Halbnorm ist. Damit folgt das gleiche für $\hat{h}(a)$ in A^*. Es bleibt nur zu zeigen, daß für $|\lambda|>\hat{h}(a)$ die Dissolvente $(a/\lambda)^-$ existiert und in A^* liegt. Dann läßt sich Hilfssatz 7 anwenden und ergibt die Behauptung. Man kann wieder auf $\lambda=1$ reduzieren. Sei also $\hat{h}(a)<q'<q<1$. Dann ist $\{\hat{a}^n q'^{-n}\}$ beschränkt, nach [*11*], 2.5 konvergiert also $-\sum_1^\infty \hat{a}^n$ gegen ein Element aus A/I und es folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Multiplikation in der Schrankenalgebra A/I, daß dieser Limes gleich $\hat{a}^-$ ist. Da aber $\sigma'(\hat{a})=\sigma'(a)$, existiert auch a^- und es ist $\widehat{a^-}=\hat{a}^-$. Es bleibt zu zeigen $\hat{h}(a^-)=h(\hat{a}^-)<\infty$. Aus den Voraussetzungen folgt, daß $(\hat{a}^-)^m=\sum_m^\infty \gamma_{n,m}\hat{a}^n$, wo $\sum \gamma_{n,m}\hat{a}^n$ die formal gebildete Potenz der Reihe für $\hat{a}^-$ ist. $\{\hat{a}^n q'^{-n}\}$ ist beschränkt, also gibt es eine beschränkte Menge B, so daß $\sum \alpha_n \hat{a}^n \in B$, wenn $\sum |\alpha_n|\, q'^n \leqq q(1-q)^{-1}$ ist. Es ist $\gamma_{n,2}=n$. Sei $M=(1-q'q^{-1})^{-1}$, M_1 so, daß $n \leqq M_1 M^2 (qq'^{-1})^n$. Aus $\gamma_{n,m}=\sum_\mu \gamma_{\mu,m-1}$ folgt durch Induktion $\gamma_{n,m} \leqq M_1 M^m (qq'^{-1})^n$ und damit $\sum_n |\gamma_{n,m} M^{-m}|\, q'^n \leqq M_1 \sum q^n \leqq M_1 q(1-q)^{-1}$. Also ist $\{(\hat{a}^-)^m M^{-m}\} < M_1 B$ und daher $h(\hat{a}^-) \leqq M$.

Literatur

[*1*] GELFAND, I.: Normierte Ringe. Matemat. Sbornik, N.S. **9** (51), 3–24 (1941).

[*2*] HEWITT, E.: Rings of real-valued continuous functions. I. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 45–99 (1948).

[*3*] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional analysis and semi-groups. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. **31** (1957).

[*4*] KAPLANSKY, I.: Topological Rings. Amer. J. Math. **69**, 153–183 (1947).

[*5*] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[4]) Zu den Definitionen und Sätzen über Schrankenalgebren s. WAELBROECK [*11*], insbes. die Abschnitte 1.6, 2.2, 2.5 und 7.4.

[6] LOOMIS, L. H.: An introduction to abstract harmonic analysis. New York 1953.
[7] MICHAEL, E. A.: Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).
[8] NEUBAUER, G.: Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren. Math. Ann. **142**, 131—164 (1961).
[9] WAELBROECK, L.: Les algèbres a inverse continu. C. R. Acad. Sci. (Paris) **238**, 640—641 (1954).
[10] — Algèbres commutatives: éléments réguliers. Bull. Soc. Math. de Belgique. **9**, 42—48 (1957).
[11] — Étude spectrale des algèbres complètes. Mem. de l'Acad. Royale de Belgique, Cl. d. Sci. **31**, Fasc. 7 (1960).
[12] WILLIAMSON, J. H.: On topologizing the field $C(t)$. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 729—734 (1954).
[13] ŻELAZKO, W.: On the locally bounded and m-convex topological algebras. Studia Math. **19**, 333—356 (1960).

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg

(Eingegangen am 14. April 1961)