## Werk

**Titel:** Der Graph meßbarer Funktionen mit abstraktem Definitionsbereich.

**Autor:** Bierlein, Dieter

**Jahr:** 1961

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0076|log54


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

BIERLEIN, D.
Math. Zeitschr. 76, 468–471 (1961)

# Der Graph meßbarer Funktionen mit abstraktem Definitionsbereich

Von
DIETER BIERLEIN

Für eine reelle Funktion $f$, die auf einem *topologischen* Raum $M$ definiert ist, sind Beziehungen zwischen der Meßbarkeit der Funktion und ihrem Graphen $X(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\}$ bekannt oder unschwer aus bekannten Sätzen zu gewinnen. Hinreichend für die Meßbarkeit von $f$ ist die Bedingung

(*) $X(f)$ ist eine Suslinsche analytische Menge bezüglich der Produkttopologie auf der Produktmenge $(M, \boldsymbol{R}^1)$,

falls $M$ noch bestimmten — von der Art der Meßbarkeit abhängigen — topologischen Voraussetzungen unterworfen ist[1]). So ist z.B. unter der recht kräftigen Einschränkung, daß $M$ eine separable, absolut analytische Menge ist, die Bedingung (*) hinreichend dafür, daß $f$ Borel-meßbar (Bairesch) ist[2]). Die Theorie der Kapazitäten über topologischen Räumen[3]) bietet die Möglichkeit, schwächere Bedingungen für $M$ zu finden, die zusammen mit (*) hinreichend sind für die Meßbarkeit von $f$ bezüglich der Vervollständigung eines auf dem $\sigma$-Körper der Borelschen Mengen definierten Maßes; dabei ist die Tatsache auszunützen, daß das äußere Maß eine Kapazität ist.

Ein neueres Ergebnis von CHOQUET über abstrakte Kapazitäten[4]) erlaubt es — wie in dieser Arbeit ausgeführt wird — sich von topologischen Voraussetzungen völlig freizumachen und im Fall eines beliebigen vollständigen Maßfeldes $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ eine zu (*) analoge Bedingung als hinreichend für die $\mu$-Meßbarkeit von $f$ zu gewinnen, wodurch sich zugleich erweist, daß die Voraussetzungen über $M$, die für die Anwendung der („klassischen") Theorie der Kapazitäten über topologischen Räumen zu beachten sind, tatsächlich überflüssig sind. Unter einem vollständigen Maßfeld soll dabei ein Tripel aus einer Menge $M$, einem $\sigma$-Körper $\mathfrak{R}$ von Teilmengen von $M$ und einem vollständigen ($\sigma$-additiven) Maß[5]) $\mu$ mit $\mathfrak{R}$ als Definitionsbereich verstanden werden.

Für den Zusammenhang zwischen Graph und Meßbarkeit einer Funktion ergibt sich aus Satz 1 dann folgendes Bild:

$f | M$ ist genau dann $\mu$-meßbar, wenn $X(f)$ ein $\overline{R_\sigma}$ ist, d.h. wenn der Graph sich als Komplement einer abzählbaren Vereinigung von „Rechtecken"

[1]) Vgl. [2], [3], [5] u.a.
[2]) Vgl. [5], Satz 43.2.1.
[3]) Vgl. [3].
[4]) Vgl. [4].
[5]) Im Sinn von [6], (I 3.4).

$R=(K, B)$ mit „Seiten" $K$ aus $\mathfrak{R}$ und $B$ aus $\mathfrak{B}$, dem $\sigma$-Körper der Borel-Mengen des $\boldsymbol{R}^1$, darstellen läßt. Dabei stimmt die Menge der Graphen, die sich als Kern eines Suslin-Schemas[6]) aus Rechtecken der Form $(K, B)$ darstellen lassen (kurz: $\mathfrak{R}$-Suslinsche Graphen), mit der Menge der Graphen $X(f)\in {}^{B}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{B})$ und mit der Menge der Graphen vom Typ $\overline{R_\sigma}$ überein. Es gibt also überhaupt keine Funktion, deren Graph $\mathfrak{R}$-Suslinsch ist oder zu ${}^{B}(\mathfrak{R}\times\mathfrak{B})$ gehört, aber nicht vom Typ $\overline{R_\sigma}$ ist. Anders formuliert:

Ist $f$ $\mu$-meßbar, so ist $X(f)$ sogar ein $\overline{R_\sigma}$,

ist $f$ nicht $\mu$-meßbar, so ist $X(f)$ nicht einmal $\mathfrak{R}$-Suslinsch.

Bezeichnungen und Definitionen:

$\boldsymbol{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen,
$\boldsymbol{F}:=\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ die Menge der Folgen natürlicher Zahlen;
für $\boldsymbol{F}\ni\sigma=(n_1, n_2, \ldots)$ setzen wir $\mathfrak{n}_k(\sigma):=(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Ist $\mathfrak{L}$ ein System von Teilmengen einer festen Menge, dann sei

${}^{R}\mathfrak{L}$ der kleinste $\sigma\delta$-Ring[7]), der $\mathfrak{L}$ umfaßt
(in [1]: ${}^{R}\mathfrak{L}={}^{B}\mathfrak{L}$, „kleinstes Borelsches System über $\mathfrak{L}$"),

${}^{B}\mathfrak{L}$ der kleinste $\sigma$-Körper, der $\mathfrak{L}$ umfaßt
(„Borelsche Erweiterung von $\mathfrak{L}$"),

${}^{S}\mathfrak{L}$ das System der Suslin-Kerne zu $\mathfrak{L}$.
(„Suslinsche Erweiterung von $\mathfrak{L}$"; in [4]: System der „$\mathfrak{L}$-Suslinschen" Mengen).

Wie üblich ist dabei definiert: Ein *Suslin-Schema* zu $\mathfrak{L}$ ist ein System $(L_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\boldsymbol{N}^k,\, k\in\boldsymbol{N}}$ mit $L_{\mathfrak{n}}\in\mathfrak{L}$; der *Kern* des Schemas $(L_{\mathfrak{n}})$ ist die Menge $\sum\limits_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}\prod\limits_{k\in\boldsymbol{N}}^{\cdot} L_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$.

Es sei daran erinnert, daß $\mathfrak{L}\subset{}^{R}\mathfrak{L}\subset{}^{S}\mathfrak{L}={}^{S}({}^{S}\mathfrak{L})$ allgemein gilt und ${}^{R}\mathfrak{L}={}^{B}\mathfrak{L}$ dann, wenn $\overline{L}\in{}^{R}\mathfrak{L}$ für jedes $L\in\mathfrak{L}$[8]).

Ist $A\subset(M_1, M_2)$, dann bezeichne $pr_{M_k}A$ die Projektion von $A$ auf $M_k$.
Ist $\mathfrak{L}_\varkappa$ ein System von Teilmengen von $M_\varkappa$, dann sei

$$\mathscr{R}(\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2):=\{(L_1, L_2)\colon L_\varkappa\in\mathfrak{L}_\varkappa\},$$

also das System der „Rechtecke" mit „Seiten" aus $\mathfrak{L}_1$ bzw. $\mathfrak{L}_2$.

Zum Beweis des angekündigten Satzes verwenden wir zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *Ist $(M, \mathfrak{R}, \mu)$ ein vollständiges Maßfeld, so ist ${}^{S}\mathfrak{R}=\mathfrak{R}$.*

Beweis. Das zu $\mu$ gehörige äußere Maß $\mu^*$ ist eine abstrakte Kapazität über $(M, \mathfrak{R})$ im Sinn von Choquet [4], S. 84. Eine Menge $A\subset M$ ist in diesem Sinne genau dann $(\mu^*, \mathfrak{R})$-kapazitabel, wenn $\mu_*(A)=\mu^*(A)$ ist; wegen der Vollständigkeit von $\mu$ also genau dann, wenn $A$ $\mu$-meßbar ist; d.h. im Fall $A\in\mathfrak{R}$. Da alle Mengen aus ${}^{S}\mathfrak{R}$ nach [4], Théorème 1, $(\mu^*, \mathfrak{R})$-kapazitabel sind, folgt ${}^{S}\mathfrak{R}\subset\mathfrak{R}$ und damit wegen der allgemeinen Beziehung $\mathfrak{L}\subset{}^{S}\mathfrak{L}$ die Behauptung.

---

[6]) Definition s. unten.
[7]) $\mathfrak{L}_1$ heißt $\sigma\delta$-Ring, falls mit $L_n\in\mathfrak{L}_1$ $(n\in\boldsymbol{N})$ stets auch $\sum\limits_{n}^{\cdot} L_n$ und $\prod\limits_{n}^{\cdot} L_n\in\mathfrak{L}_1$.
[8]) Vgl. z.B. [1], 2.9.

HILFSSATZ 2. *$\mathfrak{K}$ sei ein $\sigma$-Körper von Teilmengen von $M$; dann gelten die Beziehungen*

a) ${}^{B}(\mathfrak{K}\times\mathfrak{B}) \subset {}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B})$,

b) *Für $A\in{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B})$ folgt $pr_M A\in{}^{S}\mathfrak{K}$.*

BEWEIS. **1.** Es sei $\mathfrak{J}:=\{[a,b]\colon -\infty<a\leqq b<\infty\}$; dann gilt wegen ${}^{B}\mathfrak{J}=\mathfrak{B}$ zunächst $\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B})\subset{}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})$. Da für $R=(K,J)\in\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})$ stets $\overline{R}=(\overline{K},J)+(M,\bar{J})\in{}^{R}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})$, gilt ${}^{R}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})={}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})$. Daraus erhalten wir

$$\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B})\subset{}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})={}^{R}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})\subset{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})\subset{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B}). \tag{1}$$

Gehen wir in (1) gliedweise zur Suslinschen Erweiterung über, so gelangen wir wegen der allgemeinen Relation ${}^{S}({}^{S}\mathfrak{L})={}^{S}\mathfrak{L}$ zu

$${}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B})={}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J}). \tag{2}$$

Aus (1) erhält man wegen ${}^{B}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})={}^{B}(\mathfrak{K}\times\mathfrak{B})$ unmittelbar Beh. a).

**2.** Zu $A\in{}^{S}\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B})$ existiert wegen (2) ein Suslin-Schema $(R_{\mathfrak{n}})_{\mathfrak{n}\in\mathbf{N}^k,\,k\in\mathbf{N}}$ mit den Eigenschaften

$\alpha$) $R_{\mathfrak{n}}=(K_{\mathfrak{n}},J_{\mathfrak{n}})\in\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{J})$,

$\beta$) $A=\sum\limits_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}\prod\limits_{k\in\mathbf{N}}^{\cdot}R_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$,

wobei wir o.E.d.A. folgende Normierungen vornehmen:

$\gamma$) $R_{n_1,\ldots,n_{k+1}}\subset R_{n_1,\ldots,n_k}$,

$\delta$) $K_{\mathfrak{n}}=J_{\mathfrak{n}}=0$ für $R_{\mathfrak{n}}=0$.

Wegen ($\gamma$) und ($\delta$) folgt

$$J_{n_1,\ldots,n_{k+1}}\subset J_{n_1,\ldots,n_k}. \tag{3}$$

Für jedes $\sigma\in\boldsymbol{F}$ sei $R_\sigma:=\prod\limits_{k}^{\cdot}R_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$; analog definieren wir $K_\sigma$ und $J_\sigma$; endlich sei $\boldsymbol{F}_1:=\{\sigma\colon J_\sigma\neq 0\}$.

Dann ist $A=\sum\limits_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}R_\sigma$, $R_\sigma=(K_\sigma,J_\sigma)$ und folglich

$$pr_M A=\sum_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}pr_M R_\sigma=\sum_{\sigma\in\boldsymbol{F}_1}^{\cdot}K_\sigma. \tag{4}$$

Zu jedem $\sigma\in\boldsymbol{F}-\boldsymbol{F}_1$ existiert wegen (3) ein $k_0=k_0(\sigma)$, so daß $J_{\mathfrak{n}_0}=0$ für $\mathfrak{n}_0:=\mathfrak{n}_{k_0}(\sigma)$; daraus folgt $R_{\mathfrak{n}_0}=0$, wegen ($\delta$) dann auch $K_{\mathfrak{n}_0}=0$ und deshalb $K_\sigma=0$.

Somit geht (4) über in $pr_M A=\sum\limits_{\sigma\in\boldsymbol{F}}^{\cdot}\prod\limits_{k\in\mathbf{N}}^{\cdot}K_{\mathfrak{n}_k(\sigma)}$. Dies bedeutet gerade, daß $pr_M A$ Kern des Suslin-Schemas $(K_{\mathfrak{n}})$ ist, also zu ${}^{S}\mathfrak{K}$ gehört: Beh. b).

SATZ 1. *Ist $(M,\mathfrak{K},\mu)$ ein vollständiges Maßfeld und $\mathfrak{R}=\mathscr{R}(\mathfrak{K},\mathfrak{B})$, dann sind die folgenden vier Aussagen äquivalent:*

(1) *$f$ ist $\mu$-meßbar ($\mathfrak{K}$-meßbar)*

(2) *$X(f)$ ist ein $\overline{R}_\sigma$, d.h. es existieren abzählbar viele „Rechtecke" $R_n\in\mathfrak{R}$, so daß $\overline{X(f)}=\sum\limits_{n}^{\cdot}R_n$*

(3) $X(f) \in {}^{B}(\mathfrak{R} \times \mathfrak{B})$

(4) $X(f)$ *ist* $\mathfrak{R}$*-Suslinsch, d.h.* $X(f) \in {}^{S}\mathfrak{R}$.

BEWEIS. Gilt (1), so folgt $\{x: f(x) \gtrless y\} \in \mathfrak{R}$ für jedes $y \in \boldsymbol{R}^1$ und

$$\overline{X(f)} = \{(x, y): f(x) > y\} + \{(x, y): f(x) < y\}$$
$$= \sum_{r \text{ rat.}}{}^{*} (\{x: f(x) > r\}, (-\infty, r]) + \cdots;$$

$\overline{X(f)}$ ist also ein $R_\sigma$: Aussage (2).

Aus (2) folgt (3) unmittelbar und aus (3) nach Hilfssatz 2, a) auch (4).

Gilt (4), so ist $X(f) \cdot \{(x, y): y \leqq y_0\} \in {}^{S}\mathfrak{R}$ für jedes $y_0 \in \boldsymbol{R}^1$ und deshalb wegen Hilfssatz 2, b)

$$\{x: f(x) \leqq y_0\} = \mathfrak{pr}_M \left(X(f) \cdot \{(x, y): y \leqq y_0\}\right) \in {}^{S}\mathfrak{R};$$

daraus folgt mit Hilfssatz 1 wieder (1).

## Literatur


[1] AUMANN, G.: Reelle Funktionen. Berlin 1954.

[2] BOURBAKI, N.: Topologie Générale, Kap. 9. Paris 1958.

[3] CHOQUET, G.: Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier **5** (1953).

[4] — Forme abstraite du théorème de capacitabilité. Ann. Inst. Fourier **9** (1959).

[5] HAHN, H.: Reelle Funktionen, Teil 1. Leipzig 1932.

[6] RICHTER, H.: Wahrscheinlichkeitstheorie. Göttingen 1956.



*München, Mathematisches Institut der Universität*



*(Eingegangen am 25. März 1961)*